

## CAPITULO

### OCTAVO

# CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN. PROLONGACION ANALITICA

## § 1. CONCEPTO DE SUPERFICIE. SUPERFICIE ABSTRACTA DE RIEMANN

1.1. Generalizando las propiedades de diversas superficies elementales se llega al concepto de superficie topológica.

Sea  $E$  un conjunto infinito, a cuyos elementos los llamaremos puntos. Supongamos que en el mismo se ha elegido un sistema determinado de subconjuntos  $\{U\}$  que posee las propiedades siguientes:

a) a cada punto  $e \in E$  se han puesto en correspondencia ciertos conjuntos de  $U$  (al menos uno); estos conjuntos contienen al punto  $e$ , se designan con  $U(e)$  y se llaman entornos del punto  $e$ ;

b) para cualesquiera dos entornos de un mismo punto  $e$  existe un tercer entorno del punto  $e$  que está contenido en cada uno de los dados;

c) si  $e' \in U(e)$ , entonces existe  $U(e') \subset U(e)$ ;

d) si el punto  $e'$  es distinto de  $e$ , entonces existen  $U(e')$  y  $U(e)$  sin puntos comunes.

Los conjuntos  $E$ , en los cuales se han elegido tales sistemas de subconjuntos, forman una clase especial de espacios topológicos y se llaman  $T_2$ -espacios\*).

En un  $T_2$ -espacio  $E$ , para cada conjunto  $M$  se puede definir el concepto de puntos de acumulación como tales puntos de  $E$  que cualquier entorno de los mismos contiene un conjunto infinito de puntos de  $M$ ; luego se pueden introducir los conceptos de clausura del conjunto  $M$ , de conjuntos abiertos y cerrados, conexión, los conceptos de recintos y continuos, de curvas continuas y, en particular,

\*) Sobre los espacios topológicos y los conceptos referentes a éstos véase P. S. Alezándrov, Introducción a la teoría general de los conjuntos y funciones (П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948, Прибавление к главе шестой).

de Jordan, de compacidad, etc. Todo esto se hace igual que, por ejemplo, para los conjuntos en el plano. Sometiendo a un  $T_2$ -espacio  $E$  a unas condiciones complementarias determinadas, se llega al concepto de superficie topológica. Tales condiciones son:

$\alpha$ )  $E$  es conexo (es decir, cualquiera que sea la división del mismo en dos subconjuntos disjuntos, al menos uno de ellos contiene puntos de acumulación del otro).

$\beta$ ) Existe un sistema  $B$  de recintos de  $E$ , que no es más que numerable, y tal que, para cada punto  $e_0 \in E$  y cada entorno  $U(e_0)$ , se puede señalar uno de los recintos del sistema  $B$  que contiene al punto  $e_0$  y está contenido en este entorno. (De un espacio que satisface a esta condición, se dice que posee una base numerable  $B$ ).

$\gamma$ ) Cada punto  $e_0 \in E$  posee un entorno  $U(e_0)$  que admite una transformación biunívoca y bicontinua  $z = \varphi_{e_0}(e)$  en un recinto simplemente conexo  $g_{e_0}$  del plano  $z$ , por ejemplo, en el círculo unidad o en todo el plano finito. (De un espacio que posee esta propiedad se dice que es localmente homeomorfo al plano).

En este caso la continuidad de la transformación  $z = \varphi_{e_0}(e)$  en un punto  $e_1 \in U(e_0)$  se entiende en el sentido siguiente: Para cada entorno  $k: |z - z_1| < \rho$  del punto  $z_1 = \varphi(e_1)$  existe un entorno  $U(e_1) \subset U(e_0)$  tal que  $z = \varphi_{e_0}(e) \in k$  si  $e \in U(e_1)$ .

De un modo similar se define la continuidad de la transformación inversa  $e = \varphi_{e_0}^{-1}(z)$ .

La condición  $\gamma$ ) permite reducir el estudio de los entornos  $U(e_0)$  al estudio de los recintos simplemente conexos  $g_{e_0}$  correspondientes mediante la transformación homeomorfa  $z = \varphi_{e_0}(e)$ . Se puede decir que todo entorno  $U(e_0)$  posee la misma estructura (topológica) que un recinto simplemente conexo del plano.

Obsérvese que en la transformación  $z = \varphi_{e_0}(e)$  los conjuntos cerrados y abiertos de puntos del entorno  $U(e_0)$  se convierten en conjuntos cerrados y abiertos de puntos del recinto  $g_{e_0}$ , respectivamente. Demostremos esto, por ejemplo, para el caso de un conjunto abierto  $M \subset U(e_0)$ .

Sea  $z_1 = \varphi_{e_0}(e_1)$  un punto de la imagen  $m = \varphi_{e_0}(M)$  de este conjunto. Suponiendo que éste no es interior para  $m$ , hallaremos una sucesión de puntos  $\{\zeta_n\}$ , pertenecientes a  $g_{e_0}$  y no pertenecientes a  $m$ , que converge hacia  $z_1$ . Sus preimágenes  $\varepsilon_n = \varphi_{e_0}^{-1}(\zeta_n)$  tienen que converger a  $e_1$ , pues la función  $\varphi_{e_0}^{-1}(z)$  es continua. Por consiguiente, éstas estarán contenidas en el conjunto  $M$  comenzando desde cierto  $n$  en adelante (debido a que  $e_1$  es un punto interior del conjunto  $M$ ). Pero de aquí se deduce que  $\zeta_n = \varphi_{e_0}(\varepsilon_n)$  tienen que pertenecer a  $m = \varphi_{e_0}(M)$  comenzando desde cierto  $n$  en adelante. De la contradicción obtenida sacamos la conclusión de que la imagen de un conjunto abierto en la transformación  $z = \varphi_{e_0}(e)$  es también un conjunto abierto.



Un  $T_2$ -espacio que posea las propiedades onumeradas (que sea conexo, que exista una base numerable y que haya para cada punto un entorno homeomorfo a un recinto simplemente conexo del plano), se llama superficie topológica (abreviadamente, superficie) o variedad bidimensional\*).

Las superficies se dividen en cerradas, las cuales se caracterizan por la propiedad de compacidad, es decir, que cualquier conjunto infinito de puntos pertenecientes a ellas posee al menos un punto de acumulación, y abiertas, en las cuales existen conjuntos infinitos sin puntos de acumulación.

He aquí unos cuantos ejemplos elementales de superficies.

1) El plano finito en un espacio euclídeo con la definición ordinaria de entorno, representa una superficie abierta.

2) La esfera (o el plano ampliado) es una superficie cerrada.

3) El toro, obtenido por rotación de una circunferencia de radio  $r$  alrededor de un eje situado en un plano con la circunferencia y que no tiene puntos comunes con ella.

Si  $R$  es la distancia desde el centro de la circunferencia hasta el eje de rotación ( $R > r$ ), entonces el entorno de un punto del toro se puede definir como la parte del toro que cae dentro de cualquier esfera con el centro en este punto y de radio menor que  $2r$  y  $2(R - r)$ . En esta definición el conjunto de puntos del toro es una superficie cerrada.

4) Dividamos el plano finito en franjas  $2\pi k \leq x < 2\pi(k + 1)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) y llamemos a los puntos  $z$  y  $z'$  congruentes si  $z' - z = 2m\pi$ , donde  $m$  es un número entero. Para cada punto del plano existe un conjunto infinito (numerable) de puntos congruentes con él y situados uno en cada franja. Uniéndolos en una clase podemos considerar cualquier punto como representante de toda la clase, en el sentido de que a la misma clase van a pertenecer los puntos del plano que son congruentes con el punto dado, y sólo ellos. Llamemos entorno de una clase dada al conjunto de las clases que se representan por puntos situados en el interior de un círculo de radio  $\rho \leq \pi$  con el centro en uno de los puntos de la clase. Con tal definición el conjunto  $E$  de todas las clases posibles representa una superficie. Esta superficie es homeomorfa al cilindro circular recto

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad \zeta = y, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

puesto que, poniendo en correspondencia a cada clase representada por el punto  $z = x + iy$  de la franja fundamental ( $0 \leq x < 2\pi$ ) el punto  $\xi = \rho \cos x$ ,  $\eta = \rho \sin x$ ,  $\zeta = y$  del cilindro, resulta, como

\*) A veces, en la definición de variedad se omite la condición de existencia de una base numerable. Entonces el concepto de variedad bidimensional resulta ser más amplio que el concepto de superficie.

fácilmente se observa, una correspondencia homeomorfa entre la superficie  $E$  y los puntos del cilindro. La superficie construida aquí es abierta.

5) Dividamos el plano finito en rectángulos

$$2\alpha m \leq x < 2\alpha(m+1), \quad 2\beta n \leq y < 2\beta(n+1)$$

( $\alpha$  y  $\beta$  son unos números reales positivos fijados) y llamemos a los puntos  $z$  y  $z'$  congruentes si  $z' - z = 2\alpha m + 2i\beta n$ . Para cada punto

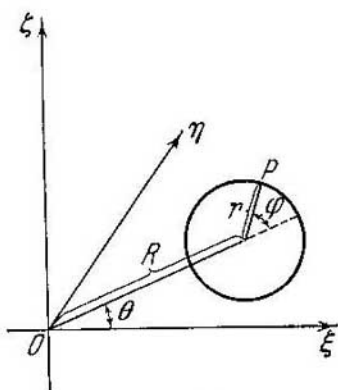


FIG. 58.

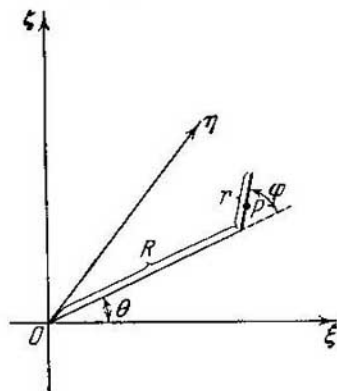


FIG. 59.

del plano resulta un conjunto infinito numerable de puntos congruentes, situados uno en cada rectángulo. Reuniéndolos en una clase, se puede considerar cualquiera de ellos como representante de toda la clase. Llamemos entorno de una clase dada al conjunto de las clases que se representan por puntos situados en un círculo de radio  $\rho \leq \min(\alpha, \beta)$  con el centro en uno de los puntos de la clase. Con tal definición el conjunto  $E$  de todas las clases posibles representa una superficie. Esta superficie es homeomorfa al toro, por ejemplo, al toro de rotación del ejemplo 3). En efecto, con una elección adecuada de los ejes coordenados y de los parámetros  $\varphi$  y  $\theta$  (fig. 58) las ecuaciones de este último pueden expresarse en la forma

$$\xi = (R + r \cos \varphi) \cos \theta, \quad \eta = (R + r \cos \varphi) \sin \theta, \quad \zeta = r \sin \varphi$$

$$(0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

y si se pone en correspondencia a la clase representada por el punto  $z = x + iy$  del paralelogramo fundamental:  $0 \leq x < 2\alpha$ ,  $0 \leq y < 2\beta$ , el punto del toro que se determina por los valores de los

parámetros  $\theta = \frac{2\pi}{\alpha} x$  y  $\varphi = \frac{2\pi}{\beta} y$ , resulta una correspondencia homeomorfa entre  $E$  y el conjunto de los puntos del toro.

6) Consideremos la franja  $-1 < y < 1$  y llamemos a dos puntos de la misma  $z' = x' + iy'$  y  $z = x + iy$  congruentes en uno de los dos casos:  $x' - x = 4\pi k$  y  $y' = y$  ( $k$  es un número entero) o  $x' - x = (2k + 1)2\pi$  y  $y' = -y$ . Reuniendo en una clase los puntos congruentes y definiendo el entorno de una clase como el conjunto de todas las clases que se representan por todos los puntos de cualquier círculo contenido en la franja con el centro en uno de los puntos de esta clase, hallaremos que el conjunto  $E$  de todas las clases representa una superficie. Fácilmente se comprueba que ésta es homeomorfa a la *banda (o cinta) de Möbius*, cuyo modelo puede obtenerse recortando un rectángulo de papel de base  $2\pi$  y de altura 2, doblándolo de tal modo que se unan a pares los puntos de los lados laterales que son simétricos respecto del centro del rectángulo, y pegando uno a otro los lugares unidos. Se puede obtener un modelo análogo si en cada posición de la circunferencia, cuya rotación forma el toro determinado por cierto valor del ángulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , se toma en lugar de la circunferencia el radio que forma el ángulo  $\varphi = \theta$  con el plano  $\xi O \eta$  (fig. 59).

1.2. Las superficies nos van a interesar solamente en la medida en que para las funciones definidas en ellas o en los recintos pertenecientes a las mismas se pueda introducir el concepto de analiticidad (del mismo modo que este concepto se introdujo para las funciones definidas en los recintos del plano o de la esfera).

Fijemos para cada punto  $e_0$  un entorno determinado  $U_0 = U(e_0)$  y llamémosle *entorno selecto* de este punto; fijemos también una transformación homeomorfa determinada  $t = \lambda(e) = \lambda_{e_0}(e)$  de este entorno sobre algún recinto simplemente conexo  $g = g_{e_0}$  del plano finito que contenga al origen de coordenadas. Exigiremos que se cumpla la condición  $\lambda_{e_0}(e_0) = 0$ . A la función  $t = t_{e_0} = \lambda_{e_0}(e)$  la llamaremos *parámetro local* (o también *parámetro de uniformación local*) del punto  $e_0$ . A continuación someteremos al sistema de parámetros locales a una restricción esencial.

Una función  $w = F(e)$  del punto  $e$  situado en la superficie dada (los valores de la función son números complejos), definida en un entorno del punto  $e_0$  contenido en  $U_0$ , se transforma en la función  $F[\lambda^{-1}(t)] = F^*(t)$  del parámetro complejo  $t$ , definida en un recinto perteneciente a  $g$  que contiene al punto  $t = 0$ .

Supongamos que existe un entorno  $u_0 \subset U_0$  del punto  $e_0$  tal, que  $F^*(t)$  es una función analítica en el recinto correspondiente que pertenece a  $g$ . Sería natural llamar en este caso a la función  $F(e)$  analítica en el entorno  $u_0$  del punto  $e_0$  de la superficie dada y, junto

con ello, llamarla analítica en cada punto perteneciente al entorno  $u_0$ . Sin embargo, para admitir esta definición se necesita una condición complementaria respecto del sistema de parámetros locales  $\{\lambda_{e_0}(e)\}$ .

En efecto, sea  $e_1 \neq e_0$  un punto de aquel entorno  $u_0 \subset U_0$  del punto  $e_0$  en el cual  $F(e)$  es una función analítica. Tiene que existir un entorno  $u_1$  del punto  $e_1$  que esté contenido en  $u_0$ ; podemos exigir también que esté contenido también en el entorno selecto  $U_1$  del punto  $e_1$ . Como  $u_1$  pertenece a  $u_0$ ,  $F(e)$  es analítica en  $u_1$ . Pero, por otra parte, de la analiticidad de la función  $F(e)$  en un entorno del punto  $e_1$  se puede juzgar basándose en la transformación  $\tau = t_{e_1} = \lambda_{e_1}(e)$ , la cual transforma la función  $F(e)$  en  $F[\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)] = F^{**}(\tau)$ . Para que nuestra definición de analiticidad no nos lleve a ninguna contradicción, es necesario exigir que la última función también sea analítica en cierto recinto que contenga al punto  $\tau = 0$ . Hagamos, en particular,  $F(e) = \lambda_{e_0}(e) = t$ . Entonces tendremos  $F^*(t) = t$ , y como esta función es analítica en el recinto  $g$ , la función  $t = \lambda_{e_0}(e)$  se debe suponer analítica en la superficie en todo el entorno  $U_0$ . Para el punto  $e_1 \in U_0$ , el cual corresponde al valor  $t = t_1$  en la transformación  $t = \lambda_{e_0}(e)$ , hallamos según lo anterior que la función  $t = F^{**}(\tau) = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$  tiene que ser analítica en un entorno del punto  $\tau = 0$  y, además, univalente, puesto que la transformación  $t = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$  es biunívoca. Esta es la condición a la que hay que someter los parámetros locales:

A) Si  $t = \lambda_{e_0}(e)$  es un parámetro local del punto  $e_0$  y  $e_1$  es algún punto del entorno selecto correspondiente del punto  $e_0$ , entonces este parámetro tiene que ser una función analítica del parámetro  $\tau = \lambda_{e_1}(e)$  en cierto entorno del punto  $\tau = 0$ .

Cumplíndose esta condición, toda función  $w = F(e)$ , cuya analiticidad en  $u_0 \subset U$  se haya establecida mediante el parámetro local  $t = \lambda_{e_0}(e)$ , será analítica también en un entorno de cualquier punto  $e_1 \in u_0$  si es estable su analiticidad mediante el parámetro local  $\tau = \lambda_{e_1}(e)$ .

La selección del sistema de parámetros locales para la superficie dada la someteremos a la condición hallada, sin detenernos por ahora en el problema de la posibilidad de tal selección. Del método mismo de obtención de la condición A) se deduce que, cumpliéndose ésta respecto de cada función  $w = F(e)$ , definida en cierto recinto  $D$  de la superficie, también para cada punto  $e_0 \in D$  se puede dar una respuesta unívoca a la pregunta de si esta función es analítica en la superficie en un entorno del punto  $e_0$  o no lo es.

Una superficie  $E$ , para cuyos puntos se ha elegido un sistema de parámetros locales que satisface a la condición A), se llama superficie abstracta de Riemann.

Expresándose de una manera descriptiva, las superficies de Riemann son aquellas que están preparadas de un modo especial para que, respecto de las funciones del punto sobre las mismas que toman valores complejos, el problema de la analiticidad o no analiticidad de estas funciones tenga un sentido tan determinado como para las funciones del punto en el plano o en la esfera. Obsérvese que el plano y la esfera (el plano ampliado) son los ejemplos más simples de superficies de Riemann. Para la primera de éstas por parámetro local para un punto arbitrario  $z_0$  se puede tomar  $t = z - z_0$  (el entorno selecto será entonces, por ejemplo, un círculo con el centro en  $z_0$ ), mientras que para la segunda (habiendo realizado previamente su proyección estereográfica sobre el plano), también  $t = z - z_0$  para cada punto finito y  $t = \frac{1}{z}$  para el punto del infinito (para el último punto, el entorno selecto será entonces la parte exterior de un círculo con el centro en el origen de coordenadas). Hagamos un resumen de lo expuesto:

Sea  $E$  una superficie a cada uno de cuyos puntos  $e_0$  se han puesto en correspondencia cierto entorno  $U_0$  (entorno selecto) y una función  $t = \lambda_{e_0}(e)$  (parámetro local) que realiza una transformación homeomorfa de  $U_0$  en un recinto simplemente conexo del plano  $t$  que contiene al punto  $t = 0$ , de modo que al punto  $e_0$  le corresponda el cero. Si en este caso se cumple la condición:

A) el parámetro local  $t_{e_0}$  del punto  $e_0$  es una función analítica  $t(\tau) = \lambda_{e_0} \lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$  del parámetro local  $\tau = t_{e_1}$  para cada punto  $e_1 \in U_0$  en cierto entorno del punto

$$\tau = 0$$

que depende de  $e_1$ , entonces  $E$  se llama superficie abstracta de Riemann (respecto del sistema dado de parámetros locales).

En la superficie abstracta, para cualquier función del punto  $w = F(e)$  que tome valores complejos se puede dar una respuesta unívoca a la pregunta de si es ésta analítica en un entorno de algún punto  $e_0$ , en el cual ella esté definida, o no lo es. Precizando, la respuesta será afirmativa o negativa según que sea  $F[\lambda_{e_0}^{-1}(t)]$  una función analítica en un entorno del punto  $t = 0$  o no lo sea.

Las definiciones establecidas aquí no serán completas si no se les agrega la condición, según la cual dos superficies abstractas de Riemann que se obtienen de dos superficies  $E$  y  $E'$  (que pueden ser idénticas) mediante dos sistemas de parámetros locales  $\{\lambda_{e_0}(e)\}$  y  $\{\lambda'_{e'_0}(e')\}$ , se consideran como superficies idénticas de Riemann. Esta condición consiste en lo siguiente:  $E$  y  $E'$  tienen que admitir una transformación homeomorfa  $e' = \Phi(e)$  una en la otra tal, que los parámetros locales  $\lambda_{e_0}(e)$  se transformen en funciones  $\lambda_{e'_0} \Phi^{-1}(e')$  analíticas en ciertos entornos de los puntos correspondientes  $e'_0 =$

$= \Phi(e_0)$ , y los parámetros locales  $\lambda'_{e'_0}(e')$  se transformen en funciones  $\lambda'_{e'_0}\Phi(e)$  analíticas en ciertos entornos de los puntos correspondientes  $e'_0 = \Phi^{-1}(e_0)$ .

De esta condición se deduce que toda función  $w = F(e)$  que sea analítica en cierto recinto  $D$  en la superficie  $E$ , se convierte, en la transformación  $e' = \Phi(e)$ , en una función analítica en el recinto correspondiente  $D'$  de la superficie  $E'$ , y recíprocamente; por lo tanto, ambas superficies de Riemann no se distinguen entre sí como portadoras del argumento de la función analítica.

1.3. Aclaremos con ejemplos los conceptos introducidos en el ap. 1.2.

Obsérvese que todo recinto  $G$  del plano (o de la esfera) se puede considerar como una superficie de Riemann, si por parámetro local del punto  $z_0 \in G$  se toma  $t = z - z_0$  (o  $t = \frac{1}{z}$  si  $z_0 = \infty$ ). Sean  $G$  y  $D$  dos recintos; hallemos las condiciones según las cuales éstos representan una misma superficie abstracta de Riemann. Como ya sabemos, la condición general consiste en la existencia de una transformación homeomorfa  $w = \Phi(z)$  de un recinto en el otro, tal que el parámetro local  $w - w_0$  se transforme en una función analítica de  $z - z_0$  (y, recíprocamente,  $z - z_0$  se debe transformar en una función analítica de  $w - w_0$ ); aquí  $w = \Phi(z)$  y  $w_0 = \Phi(z_0)$ . Pero esto significa que en un entorno de cada punto  $z_0 \in G$  es válido un desarrollo de la forma

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

es decir,  $\Phi(z)$  es analítica en el recinto  $G$ . Como la transformación  $w = \Phi(z)$  es homeomorfa, sacamos la conclusión de que es también conforme. Por consiguiente, dos recintos  $G$  y  $D$  del plano representan una misma superficie abstracta de Riemann cuando, y sólo cuando, existe una transformación conforme de uno de ellos sobre el otro. De aquí se deduce, por ejemplo, que todos los recintos simplemente conexos, cuyas fronteras contienen más de un punto, representan una misma superficie abstracta de Riemann. Por el contrario, entre los recintos biconexos ya se encuentra un conjunto infinito e incluso no numerable de superficies de Riemann distintas.

Es suficiente considerar el conjunto de todos los anillos circulares. Ya sabemos (ap. 2.1, cap. V) que dos anillos de éstos pueden transformarse conformemente uno en otro cuando, y sólo cuando, son semejantes entre sí. Por consiguiente, los anillos  $r < |z| < R$  y  $\rho < |z| < P$  representan distintas superficies de Riemann si  $\frac{R}{r} \neq \frac{P}{\rho}$ .

He aquí un ejemplo sencillo que muestra que una misma superficie (topológica) puede representar superficies de Riemann iguales

o distintas para una elección diferente del sistema de parámetros locales. Examinemos el plano finito. Este es una superficie de Riemann si para cada punto  $z_0$  se hace  $t_{z_0} = z - z_0$ . Se puede llegar a la misma superficie de Riemann si para cada punto  $z_0$  se elige el parámetro local en forma de una función analítica arbitraria  $\lambda_{z_0}(z)$  cuyo desarrollo en cierto entorno del punto  $z_0$  tenga la forma

$$t_{z_0} = \lambda_{z_0}(z) = \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (\alpha_1 \neq 0)$$

(tal función es univalente en cierto entorno del punto  $z_0$  y, por consiguiente, realiza una transformación conforme de este entorno en un recinto simplemente conexo que contiene al origen de coordenadas). Para convencerse de que en estos dos métodos de elección resulta una misma superficie de Riemann, es suficiente tomar la transformación idéntica  $w = z$ .

Señalamos ahora un sistema de parámetros locales según el cual el plano se convierte en una superficie de Riemann distinta de las anteriores. Con este fin, realicemos una transformación homeomorfa del plano  $w$  en el círculo unidad (por ejemplo, mediante la función  $\zeta = \psi(w)$ , donde  $\zeta = \frac{w}{|w|} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} |w|$ , si  $w \neq 0$  y  $\zeta = 0$  si  $w = 0$ ) y elijamos para el punto  $w_0$  el parámetro local  $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$ . Entonces la condición A) del apartado anterior quedará cumplida, puesto que los parámetros locales para dos puntos distintos  $w_0$  y  $w_1$  están ligados por la relación

$$t = \zeta(w_1) - \zeta(w_0) + \tau$$

(aquí  $t = t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$  y  $\tau = t_{w_1} = \zeta(w) - \zeta(w_1)$ ), es decir, cada uno de estos parámetros es una función analítica del otro. Por consiguiente, con la elección indicada de los parámetros locales el plano representa una superficie de Riemann. Esta será distinta de aquella, a la cual le corresponden los parámetros  $t_{z_0} = z - z_0$ . En efecto, es obvio que siendo  $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$ , la función  $\zeta(w)$  es uniforme y analítica en toda la superficie. Si ambas superficies son idénticas, existe una transformación homeomorfa de una sobre otra:  $w = \Phi(z)$ , en la cual la función  $\zeta(w)$  se convertirá en una función  $\zeta^*(z)$  analítica en cada punto del plano finito  $z$ , es decir, desarrollable en serie

$$\zeta^*(z) = \zeta^*(z_0) + A_1(z - z_0) + \dots$$

en un entorno de cada punto  $z_0$ . Por consiguiente, la función  $\zeta^*(z)$  es entera y, además, acotada ( $|\zeta^*(z)| < 1$ ), lo cual, según el teorema de Liouville, es imposible, puesto que  $\zeta^*(z) \neq \text{const.}$

El lector demostrará fácilmente que el plano con los parámetros locales  $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$  es idéntica (como superficie abstracta de Riemann) al círculo, donde por parámetros locales se toman  $t_{z_0} = z - z_0$ .



Volviendo al concepto general de superficie abstracta de Riemann, aclaremos el significado geométrico de la introducción del sistema de parámetros locales que satisface a la condición A) del apartado precedente. Supongamos que en la superficie topológica dada se ha establecido tal sistema de parámetros locales. Entonces en esta superficie se puede introducir el concepto de ángulo entre dos líneas curvas y se pueden medir los ángulos exactamente igual que en el plano o en la esfera. Precisando, sean  $\gamma'_0$  y  $\gamma''_0$  dos arcos de Jordan que pasan por un punto  $e_0$  de la superficie. Mediante el parámetro local  $t = t_{e_0} = \lambda_{e_0}(e)$  estas curvas se transforman en dos arcos de Jordan  $\delta'_0$  y  $\delta''_0$  del plano  $t$  que pasan por el origen de coordenadas. Si estos últimos poseen tangentes en el punto  $t = 0$  y, por consiguiente, forman entre sí cierto ángulo, diremos que los arcos  $\gamma'_0$  y  $\gamma''_0$  forman también un ángulo en el punto  $e_0$  de la superficie, y por medida de este ángulo tomaremos la medida del ángulo formado por los arcos  $\delta'_0$  y  $\delta''_0$  en el plano.

Con tal definición de los ángulos la transformación del entorno selecto  $U_0$  del punto  $e_0$  mediante la función  $t = \lambda_{e_0}(e)$  en el recinto simplemente conexo  $g = g_{e_0}$  del plano  $t$  será conforme en el punto  $e_0$ . El significado de la condición A) consiste en que ésta garantiza que sea también conforme la transformación en todos los demás puntos del entorno selecto  $U_0$ . En efecto, si  $e_1 = \lambda_{e_0}^{-1}(t_1) \in U_0$  y  $\gamma'_1$  y  $\gamma''_1$  son arcos de Jordan que pasan por el punto  $e_1$  y forman en él un ángulo  $\alpha$ , en el sentido de la definición admitida, entonces en la transformación  $\tau = t_{e_1} = \lambda_{e_1}(e)$  estos arcos se convierten en arcos  $\delta'_1$  y  $\delta''_1$  que pasan por el punto  $\tau = 0$  y forman en éste el ángulo  $\alpha$ . En virtud de la condición A), el parámetro  $t$  es una función analítica del parámetro  $\tau$  en un entorno del punto  $\tau = 0$  que es, además, univalente (pues la correspondencia entre  $\tau$  y  $t$  es biunívoca). Por ello, la transformación  $t = \lambda_{e_0} \lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$  es conforme y transforma  $\delta'_1$  y  $\delta''_1$  en un par de arcos  $\tilde{\delta}'_1$  y  $\tilde{\delta}''_1$  que pasan por el punto  $t_1$  y forman también en el mismo el ángulo  $\alpha$ . Pero los mismos arcos  $\tilde{\delta}'_1$  y  $\tilde{\delta}''_1$  se forman directamente en la transformación  $t = \lambda_{e_0}(e)$  como imágenes de los arcos  $\gamma'_1$  y  $\gamma''_1$ . De aquí se deduce que la transformación  $t = \lambda_{e_0}(e)$  es conforme en todos los puntos de  $U_0$ .

Vemos, pues, que en cualquier superficie de Riemann se pueden definir los conceptos de ángulo y su medida, de modo que esta superficie no sólo admita en un entorno de cada punto una transformación homeomorfa en un recinto simplemente conexo del plano (lo cual es propio de cada superficie), sino que también admita una transformación conforme. Tal transformación se realiza mediante los parámetros locales que figuran en la definición de superficie de Riemann.

Considerando que en cada superficie de Riemann se ha introducido la medición de los ángulos del modo indicado anteriormente, se puede enunciar de otra manera la condición de identidad o distinción



de dos superficies de Riemann dadas de formas distintas. Precisando, *dos superficies abstractas de Riemann son idénticas o distintas según que exista o no exista una transformación conforme de una de estas superficies sobre la otra.*

En efecto, en caso de identidad de dos superficies abstractas de Riemann  $E$  y  $E'$ , se trata de la existencia de una transformación homeomorfa de una de ellas sobre la otra, tal que los parámetros locales en una superficie son funciones analíticas de los puntos correspondientes de la otra superficie. Si al punto  $e_0 \in E$  le corresponde el punto  $e'_0 \in E'$ , entonces de aquí se deduce que el parámetro local  $t = t_{e_0}$  es una función analítica del parámetro  $t' = t'_{e'_0}$  en un entorno del punto  $t' = 0$ , y recíprocamente:  $t'$  es una función analítica de  $t$  en un entorno del punto  $t = 0$ . Por esta razón, en la transformación considerada de  $E$  sobre  $E'$ , entre los parámetros locales  $t_{e_0}$  y  $t'_{e'_0}$  en los entornos de los puntos  $t = 0$  y  $t' = 0$  se establece una correspondencia biunívoca y analítica, es decir, una correspondencia conforme. Pero en  $E$  y  $E'$  los ángulos entre las curvas que pasan por los puntos  $e_0$  y  $e'_0$  se determinan como los ángulos formados por las curvas en el plano que se obtienen en las transformaciones  $t = \lambda_{e_0}(e)$  y  $t' = \lambda'_{e'_0}(e')$ . Por ello, la existencia de una correspondencia conforme entre los parámetros locales significa la correspondencia conforme entre las superficies  $E$  y  $E'$ , que es lo que se afirmaba.

Al comienzo de este apartado, en el caso de recintos del plano, considerados como superficies de Riemann, señalábamos que para éstos la identidad significaba la posibilidad de transformar uno de ellos en el otro. Ahora vemos que esto mismo ocurre en el caso de cualesquiera superficies abstractas de Riemann.

De aquí se deduce que en las superficies abstractas de Riemann solamente se pueden estudiar las propiedades más generales de las funciones analíticas que no varían al realizar cualquier transformación conforme de una superficie en otra. Si se quieren estudiar las propiedades que pueden alterarse al realizar alguna transformación conforme, se deben introducir unos elementos complementarios en la misma definición de superficie de Riemann, de modo que éstos permitan en condiciones determinadas establecer una diferencia entre las superficies que se transforman conformemente una en la otra.

## § 2. TRIANGULACION DE UNA SUPERFICIE. TRANSFORMACIONES INTERIORES

2.1. Sea  $E$  una superficie topológica; supongamos que  $F$  es un conjunto de puntos de ella que es homeomorfo a un recinto cerrado del plano limitado por una curva de Jordan. Entonces  $F$  representa también un recinto cerrado sobre la superficie, cuya frontera  $\Gamma$  es

una curva de Jordan. Fijemos en  $\Gamma$  tres puntos cualesquiera  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y llamemos triángulo (topológico) sobre la superficie  $E$  al conjunto  $F$  junto con estos tres puntos fijados en la frontera.

A los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  los llamaremos vértices, a los arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  y  $\widehat{CA}$  (se tiene en cuenta cada vez aquel arco, entre los dos posibles, que no contiene el tercer vértice) los llamaremos lados del triángulo y a los puntos interiores del conjunto  $F$ , puntos interiores del triángulo. A una fijación de un orden (cíclico) determinado de los vértices del triángulo  $ABC$  o  $ACB$  la llamaremos orientación del triángulo, y al triángulo mismo, para el cual está fijado el orden de los vértices, lo llamaremos triángulo orientado. Es obvio que cualquier triángulo admite dos y sólo dos orientaciones distintas.

Supongamos que la superficie  $E$  está dividida en triángulos  $\{\Delta\}$  de tal modo que se cumplen las siguientes condiciones: 1) ningún punto interior de un triángulo  $\Delta$  pertenece a otro triángulo  $\Delta'$  del mismo sistema  $\{\Delta\}$ ; 2) todo punto frontera de un triángulo  $\Delta$ , distinto de sus vértices, pertenece también a un triángulo  $\Delta'$ , y sólo a uno, que tiene con  $\Delta$  un lado común; además, todos los puntos comunes de los triángulos  $\Delta$  y  $\Delta'$  pertenecen a este lado; 3) si dos triángulos no tienen un lado común, entonces, tienen un vértice común, y sólo uno, o carecen de puntos comunes; 4) para cada punto de la superficie  $E$  existe un entorno que se cubre por un número finito de triángulos  $\Delta$ .

El sistema de triángulos  $\{\Delta\}$  que engendra tal división, así como la división misma, se llama triangulación de la superficie. Se puede demostrar que cualquier superficie admite triangulación. Aquí no vamos a exponer esta demostración (por cierto, es elemental), puesto que para las superficies que nos interesan la existencia de la triangulación se establece inmediatamente.

Deduzcamos algunas propiedades de la triangulación.

Sea  $A$  el vértice de algún triángulo  $\Delta_0 \in \{\Delta\}$ . En virtud de las condiciones 1) y 2) éste no puede ser interior ni punto frontera distinto de los vértices ni punto de alguno de los demás triángulos  $\Delta$ . Debido a la condición 4), existe un entorno  $U$  del punto  $A$  que se cubre por un número finito de triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ . Ninguno de los triángulos distintos de los últimos puede tener puntos en el interior de  $U$ . En efecto, si existiese tal triángulo  $\Delta$ , entonces en  $U$  habría algún punto interior perteneciente a los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  (a uno o a varios), distintos de  $\Delta$ , lo cual es imposible debido a la condición 1).

Sea  $AB$  uno de los dos lados del triángulo  $\Delta_0$  que tienen un vértice común  $A$ . Entonces, en virtud de la condición 2), existe un triángulo  $\Delta'$ , distinto de  $\Delta_0$ , para el cual  $AB$  es uno de los lados. Como sus puntos están situados en cualquier entorno del punto  $A$ ,

éste tiene que coincidir con uno de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ . Consideremos su lado  $AB'$  distinto de  $AB$ . Este no puede pertenecer a  $\Delta_0$ , debido a la condición 2); por consiguiente, en virtud de la misma propiedad 2) existe un triángulo  $\Delta''$  ( $\Delta'' \neq \Delta_0$  y  $\Delta'' \neq \Delta'$ ) al cual pertenece  $AB'$ . Este triángulo también tiene que coincidir con uno de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ .

Continuemos estos razonamientos. Como el número de triángulos que cubren  $U$  es igual a  $m$ , resultan en total  $n$  triángulos distintos  $\Delta_0, \Delta', \Delta'', \dots, \Delta^{(n)}$ , donde  $3 \leq n \leq m$ , cada uno de los cuales tiene con el precedente un lado común que parte del vértice  $A$ . Además, el lado  $AB^{(n)}$  del triángulo  $\Delta^{(n)}$  que no es común con  $\Delta^{(n-1)}$  será común con  $\Delta^{(0)}$  (en caso contrario el número  $n$  de triángulos considerados podría aumentarse más) y distinto de  $AB$ .

Realizando una transformación homeomorfa de un entorno del punto  $A$  (que coincida con  $U$  o forme una parte propia del mismo) en un recinto simplemente conexo del punto  $z$ , vemos que las imágenes de las partes de los triángulos  $\Delta_0, \Delta', \dots, \Delta^{(n)}$  pertenecientes a este entorno, colocándose cíclicamente alrededor de la imagen  $z_0$  del punto  $A$ , cubren un entorno del punto  $z_0$ . Por consiguiente, los triángulos  $\Delta_0, \Delta', \dots, \Delta^{(n)}$  cubren el entorno del punto  $A$ . Así, pues, cada vértice  $A$  de cualquier triángulo  $\Delta_0 \in \{\Delta\}$  es un vértice común de una cantidad finita  $n \geq 3$  de triángulos del mismo sistema, los cuales están colocados en un orden cíclico alrededor del punto  $A$  y cubren cierto entorno del mismo.

Llamaremos cadena que une a dos triángulos cualesquiera  $\Delta_0$  y  $\Delta'$  a un conjunto finito de triángulos  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n = \Delta'$  tal que cada uno de ellos tiene un lado común con el anterior. Demostremos que dos triángulos cualesquiera  $\Delta_0$  y  $\Delta'$ , pertenecientes a cierta triangulación  $\{\Delta\}$  de la superficie considerada, pueden unirse por una cadena formada por triángulos de la misma triangulación. Fijemos  $\Delta_0$  y consideremos todos los triángulos que pueden unirse con  $\Delta_0$  mediante una cadena de triángulos pertenecientes a  $\{\Delta\}$  (figurará aquí  $\Delta_0$  y también los tres triángulos que tienen con  $\Delta_0$  lados comunes, etc.). Supongamos que con estos triángulos no se agota todo el sistema  $\{\Delta\}$ . Entonces el conjunto de todos los puntos de la superficie tiene que descomponerse en dos conjuntos no vacíos  $E_1$  y  $E_2$ , donde el primero consta de los puntos pertenecientes a los triángulos que se unen por una cadena con  $\Delta_0$  y el segundo, de los puntos pertenecientes a los triángulos que no pueden unirse por una cadena con  $\Delta_0$ . Todo punto  $e_1 \in E_1$  o es interior para algún triángulo, o es un punto frontera distinto de los vértices (entonces está situado en el lado común de dos triángulos), o finalmente, es el vértice común de varios triángulos que están situados en un orden cíclico y cubren cierto entorno de este punto. En todos los casos, cada uno de los triángulos a que pertenece  $e_1$  puede unirse por una cadena con  $\Delta_0$

y, por consiguiente,  $e_1$  es un punto interior del conjunto  $E_1$ . Del mismo modo, ninguno de los triángulos que contienen a  $e_2 \in E_2$  puede unirse por una cadena con  $\Delta_0$  (si se supone que uno de ellos puede unirse por una cadena con  $\Delta_0$ , entonces esto mismo se puede hacer también con todos los demás, de donde se deduce que  $e_2 \in E_1$ ); por consiguiente,  $e_2$  es un punto interior del conjunto  $E_2$ .

Así, pues,  $E_1$  y  $E_2$  son dos conjuntos no vacíos disjuntos en los que se descompone toda la superficie; además, ninguno de ellos contiene puntos de acumulación del otro. Resulta una contradicción con la propiedad de conexión de la superficie. De aquí se deduce que cualquier triángulo del sistema  $\{\Delta\}$  puede unirse con  $\Delta_0$  por una cadena compuesta de triángulos del mismo sistema.

Basándose en el último resultado, demostremos que el conjunto de triángulos del sistema  $\{\Delta\}$  tiene que ser finito o numerable. Con este fin, numeremos todos los triángulos, comenzando desde  $\Delta_0$ , después, todos los triángulos que tienen lados comunes con  $\Delta_0$ , más tarde, todos los triángulos que tienen lados comunes con los que ya se han numerado, etc.

Si después de cualquier número de pasos existen triángulos no numerados, entonces el proceso continuará indefinidamente, y resultará un conjunto numerable de triángulos. Como en este caso quedarán numerados todos los triángulos que pueden unirse con  $\Delta_0$  por una cadena, el conjunto indicado agotará a todo el sistema  $\{\Delta\}$ .

Obsérvese que el conjunto de los triángulos  $\{\Delta\}$  será finito cuando, y sólo cuando, la superficie dada es cerrada. En efecto, si el sistema  $\{\Delta\}$  es finito, entonces toda la superficie se cubre por un número finito de conjuntos homeomorfos a recintos cerrados del plano, limitados por curvas de Jordan y, por consiguiente, compactos. Por ello, la superficie representa también un conjunto compacto, o sea, es cerrada. Recíprocamente, supongamos que la superficie es cerrada. Si admitiese una triangulación  $\{\Delta\}$  que constase de un conjunto infinito de triángulos, entonces, eligiendo sendos puntos dentro de los triángulos, obtendríamos un conjunto infinito de puntos de la superficie que carceraría de puntos de acumulación. En efecto, cada punto de la superficie posee un entorno que puede cubrirse por un número finito de triángulos y que, por consiguiente, contiene solamente un número finito de puntos en cuestión.

En la fig. 60 está representada en proyección estereográfica la triangulación de la esfera; en la fig. 61 se representa la triangulación del toro en forma de un rectángulo, cuyos puntos de los lados opuestos tienen que identificarse dos a dos (tienen que «pegarse»). En ambos casos hay una cantidad finita de triángulos (8 y 18). En la fig. 62 está representada la triangulación de la superficie abierta de la banda de Möbius en forma de un rectángulo, en el cual se identifican los puntos de los lados laterales que son simétricos al centro de éste.

2.2. Sean  $E$  y  $E'$  dos superficies y sea  $e' = f(e)$  una transformación continua de  $E$  en  $E'$ . Si existe una triangulación  $\{\Delta\}$  de la superficie  $E$  tal, que esta transformación es homeomorfa en cada triángulo y en cierto entorno de cada uno de sus puntos frontera, a excepción, posiblemente, de los vértices del triángulo, entonces

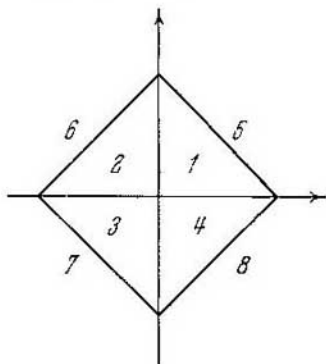


FIG. 60.

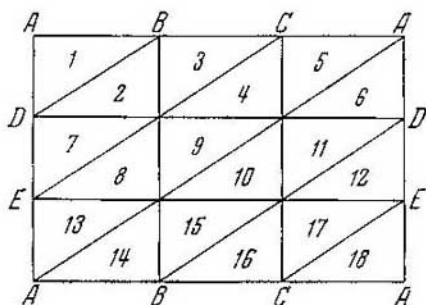


FIG. 61.

ésta se llama *transformación interior* (en el sentido de S. Stoilow).

Es obvio que cualquier transformación homeomorfa es interior. A S. Stoilow le pertenece el teorema de que una *transformación continua de una superficie  $E$  en otra que transforme cada conjunto*

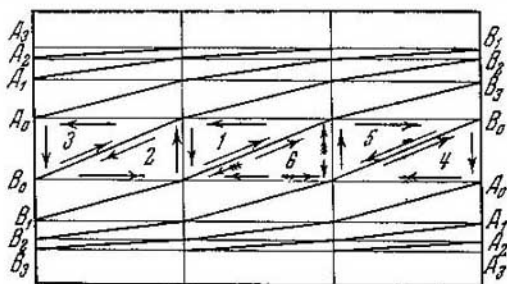


FIG. 62.

*abierto en otro abierto y que no transforme en un punto a ningún continuo distinto de un punto, es una transformación interior.* El teorema recíproco es evidente.

Aquí consideraremos la transformación de una superficie dada  $E$  en la esfera  $E'$ , designando los puntos de la esfera  $E'$  por los números

complejos correspondientes:  $e' = z$ . Obsérvese que no cualquier superficie admite una transformación interior en la esfera.

Sean  $\Delta_0$  y  $\Delta'$  dos triángulos en la superficie dada  $E$ . Unámonoslos por una cadena de triángulos y orientando  $\Delta_0$  de un modo determinado, orientemos después todos los demás triángulos de la cadena de tal modo que el lado común de cada par de triángulos contiguos (el precedente y el siguiente) se recorra en sentidos opuestos entre sí. Entonces el triángulo  $\Delta'$  obtiene una orientación completamente determinada, que depende de la orientación del triángulo  $\Delta_0$  y de la elección de la cadena que une  $\Delta'$  con  $\Delta_0$ . Si para cualquier par de triángulos  $\Delta_0$  y  $\Delta'$  la orientación de  $\Delta'$  depende solamente de la orientación de  $\Delta_0$  y no varía al sustituir una cadena que una estos triángulos por otra cadena cualquiera, entonces la superficie dada se llama *orientable* (y también *bilateral* o de dos caras). Se puede demostrar\*) que, por ejemplo, el plano, la esfera, el toro, son superficies orientables. En la demostración podemos limitarnos a considerar triángulos pertenecientes a una triangulación determinada cualquiera de la superficie.

Si en la superficie dada, para algún par de triángulos  $\Delta_0$  y  $\Delta'$  existen dos cadenas que conducen a orientaciones distintas del triángulo  $\Delta'$  para una misma orientación inicial del triángulo  $\Delta_0$ , entonces la superficie se llama *no orientable* (unilateral o de una cara). Puede servir de ejemplo elemental de tal superficie la cinta o banda de Möbius, lo que se puede ver examinando las dos cadenas representadas en la fig. 62, que unen los triángulos 1 y 6 (una cadena consta de seis y la otra de dos triángulos).

Supongamos que  $z = f(e)$  realiza una transformación interior de una superficie  $E$  en la esfera  $E'$ . Entonces cada uno de los triángulos del sistema  $\{\Delta\}$  que figura en la definición de transformación interior se transforma en cierto triángulo de la esfera; además, a una orientación determinada del triángulo en  $E$  le corresponde una orientación determinada del triángulo esférico. Si se supone que en  $E$  existen dos cadenas que unen  $\Delta_0$  y  $\Delta'$  y que dan lugar a orientaciones distintas del triángulo  $\Delta'$  para una orientación fijada del triángulo  $\Delta_0$ , entonces lo mismo tiene que cumplirse también para las imágenes de estos triángulos en la esfera. Pero esto último es imposible, puesto que la esfera es una superficie orientada. De aquí se deduce que *sólo las superficies orientadas pueden admitir una transformación interior en la esfera*.

Demostremos que *cualquier superficie orientable  $E$  admite una transformación interior en la esfera*. Sea  $\{\Delta\}$  una triangulación fijada de la superficie  $E$ . Numeremos los triángulos  $\{\Delta\}$  de tal modo que cada uno que sigue tenga un lado común al menos con uno de los triángulos de menor índice (ya se vio en el

\*) Véase, por ejemplo, P. S. Alexándrov, Topología combinatoria (И. С. Александров, Комбинаторная топология).

ap. 2.1 que tal numeración es posible) y, orientando el triángulo  $\Delta_1$ , transmitamos la orientación correspondiente a todos los demás triángulos de  $\{\Delta\}$  mediante las cadenas que unen  $\Delta_1$  con cada uno de estos triángulos. Resultará que todos los triángulos  $\Delta$  quedarán orientados de tal manera que el lado común de dos triángulos se recorrerá en éstos en sentidos opuestos entre sí.

Construiremos la transformación interior de la superficie  $E$  en la esfera aplicando el método de inducción. Con este fin, realicemos una transformación homeomorfa de  $\Delta_1$  sobre un triángulo esférico cualquiera  $\delta_1$  y supongamos que para cierto número natural  $n$  los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  ya han obtenido transformaciones homeomorfas sobre los triángulos esféricos  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , de tal

modo que la transformación  $z = f_n(e)$  del conjunto  $E_n = \bigcup_{j=1}^n \Delta_j$  sobre el conjun-

to  $E'_n = \bigcup_{j=1}^n \delta_j$  es uniforme y continua y, además homeomorfa, en ciertos entornos de aquellos puntos frontera de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , distintos de los vértices, que son interiores a  $E_n$ .

Demostremos que también se puede hallar para el conjunto  $E_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Delta_j$  una transformación  $z = f_{n+1}(e)$  que posea las mismas propiedades.

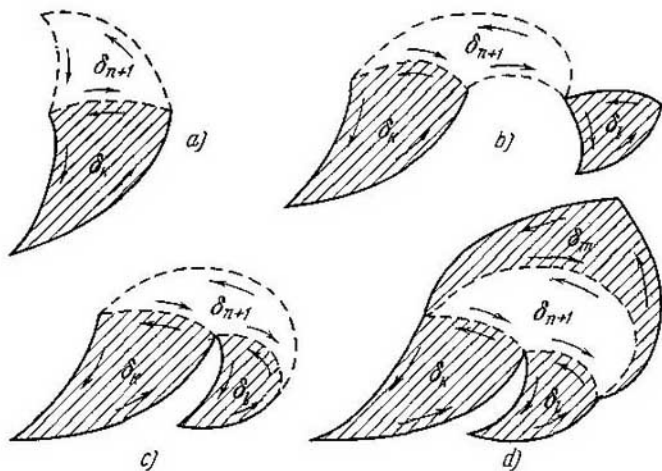


FIG. 63.

Hagamos  $f_{n+1}(e) = f_n(e)$  en todos los puntos del conjunto  $E_n$ . El conjunto de los puntos frontera del triángulo  $\Delta_{n+1}$ , pertenecientes a  $E_n$ , puede constar: a) de un lado; b) de un lado y del vértice opuesto; c) de dos lados; d) de tres lados. Eligiendo el triángulo esférico  $\delta_{n+1}$  (la imagen del triángulo  $\Delta_{n+1}$ ) se tienen que suponer dados, según el caso, o un lado del mismo, o un lado y el vértice, o dos lados, o finalmente, los tres lados.

La elección de tal triángulo esférico  $\delta_{n+1}$  está indicada en la fig. 63, donde se representan los cuatro casos que corresponden a las posibilidades a), b),



c) y d). Obsérvese que en cada uno de estos casos se consigue construir el triángulo  $\delta_{n+1}$  de tal modo que en ciertos entornos de sus puntos, distintos de los vértices y pertenecientes a los triángulos de menores índices ( $\delta_k$ ,  $\delta_l$  o  $\delta_m$ ), no tenga puntos interiores comunes con estos triángulos. Aquí nos basamos esencialmente en que la superficie es orientable, lo cual queda claro al observar la fig. 64, donde están representados los casos c) y d) que pueden encontrarse al probar aplicar unos razonamientos similares a una superficie no orientable.

Una vez elegido el triángulo  $\delta_{n+1}$  no queda más que definir  $z = f_{n+1}(e)$  en los puntos del triángulo  $\Delta_{n+1}$  de tal manera que esta función realice una transformación homeomorfa de  $\Delta_{n+1}$  sobre  $\delta_{n+1}$ , teniendo que coincidir esta transformación con  $z = f_n(e)$  en los puntos del triángulo  $\Delta_{n+1}$  que son comunes con  $E_n$ . Siempre es posible tal construcción. Para convencerse de esto, realicemos una transformación homeomorfa de  $\delta_{n+1}$  sobre el círculo  $|\xi| \leq 1$  (por ejemplo, una transformación conforme). Según el concepto de triángulo sobre la superficie,  $\Delta_{n+1}$  admite una transformación homeomorfa sobre un recinto cerrado limitado por una curva de Jordan y, por consiguiente, también sobre

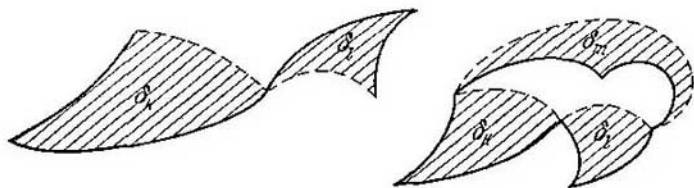


FIG. 64.

el círculo  $|t| \leq 1$ . En cada una de estas transformaciones auxiliares las imágenes de los vértices de los triángulos considerados serán unas ternas de puntos situados en las circunferencias unidades, y las imágenes de los lados de los triángulos serán los arcos de estas circunferencias con los extremos en estos puntos. Por lo tanto, el problema se ha reducido a una transformación homeomorfa del círculo  $|t| \leq 1$  sobre el círculo  $|\xi| \leq 1$ , con la condición de que ya se ha establecido una correspondencia homeomorfa entre: a) un arco en  $|t| = 1$  y un arco en  $|\xi| = 1$ , o b) un arco y un punto en  $|t| = 1$ , no perteneciente al arco, y un arco y un punto en  $|\xi| = 1$  no perteneciente al arco, o c) dos arcos (con un extremo común) en  $|t| = 1$  y dos arcos (con un extremo común) en  $|\xi| = 1$ , o d) toda la circunferencia  $|t| = 1$  y toda la circunferencia  $|\xi| = 1$ .

Podemos limitarnos a considerar solamente el último caso, puesto que la correspondencia homeomorfa en los casos a), b) y c) se puede extender a toda la circunferencia, empleando, por ejemplo, la interpolación lineal. Así, pues, no queda más que realizar una transformación homeomorfa del círculo  $|t| \leq 1$  sobre el círculo  $|\xi| \leq 1$ , con la condición de que ya se ha establecido una correspondencia  $0 = \lambda(\varphi)$  entre los puntos de las circunferencias unidades ( $t = e^{i\theta}$  y  $\xi = e^{i\varphi}$ ). Se alcanza el objetivo haciendo  $\xi = 0$  para  $t = 0$  y  $\xi = re^{i\lambda(\varphi)}$  para  $t = re^{i\theta}$ ,  $0 < r \leq 1$ .

En resumen, si existe una transformación  $z = f_n(e)$  del conjunto  $E_n = \bigcup_{j=1}^n \Delta_j$  en la esfera que es continua en  $E_n$  y es homeomorfa en cada uno de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  y también en ciertos entornos de aquellos puntos frontera que son distintos de los vértices y son interiores a  $E_n$ , entonces existe tam-



bién una transformación  $z = f_{n+k}(e)$  del conjunto  $E_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Delta_j$  que poseo unas propiedades similares en  $E_{n+1}$  y que coincide con  $f_n(e)$  en los puntos del conjunto  $E_n$ . Finalmente, de aquí se deduce la existencia de una transformación interior  $z = f(e)$  de la superficie  $E$  en la esfera, determinada en cada  $E_n$  por la condición  $f(e) = f_n(e)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

2.3. Estudiemos la transformación interior  $z = f(e)$  de la superficie  $E$  en la esfera en los entornos de aquellos puntos de la superficie  $E$ , en los que la transformación no es homeomorfa. Como tales puntos sólo pueden ser los vértices de los triángulos del sistema  $\{\Delta\}$ , lo más que puede haber es un conjunto numerable de ellos; además, este conjunto no posee puntos de acumulación en  $E$ . Sea  $e_0$  el vértice de un triángulo  $\Delta_0$ , en cualquier entorno del cual la transformación considerada no es homeomorfa. Esto significa que en cada entorno del punto  $e_0$  existen distintos puntos en los cuales  $f(e)$  toma valores iguales. Como  $e_0$  es un vértice común de un número finito  $n$  de triángulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ , y en cada uno de estos la transformación es homeomorfa, resulta que un mismo valor no puede tomar la función  $f(e)$  más que en  $n$  puntos distintos. Hagamos  $f(e_0) = z_0$  y consideremos un entorno  $K_0$  del punto  $z_0$  que no contenga puntos de las imágenes de los lados de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , que son opuestos a  $e_0$ . Este entorno se cubre por las imágenes de los triángulos indicados. Demostremos que a cada punto  $z \in K_0$ ,  $z \neq z_0$ , le corresponde una misma cantidad  $m$  ( $1 < m \leq n$ ) de preimágenes situadas en los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  (además de éstas pueden existir otras preimágenes que no pertenezcan a los triángulos indicados). En efecto, supongamos que  $m$  denota el mayor número de preimágenes de este tipo para los puntos pertenecientes a  $K_0$ . Si para  $z' \in K_0$  el número de preimágenes es igual a  $m$ , entonces habrá la misma cantidad de preimágenes para cada punto de cierto entorno del punto  $z'$ . En efecto, sean  $e'_1, \dots, e'_m$  las preimágenes, distintas entre sí, del punto  $z'$  y sean  $U_j$  los entornos de los puntos  $e'_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), sin puntos comunes dos a dos, pertenecientes a  $\bigcup_{j=1}^n \Delta_j$  y tales que la transformación  $z = f(e)$  es homeomorfa en cada uno de ellos. Las imágenes  $f(U_j) = K_j$  de estos entornos contienen cierto entorno  $K$  del punto  $z'$ ; está claro que cada punto  $z \in K$  tiene una sola imagen en cada  $U_j$ , siendo distintas entre sí todas estas imágenes. De aquí que la cantidad total de preimágenes del punto  $z$  también es igual a  $m$ .

Por lo tanto, el conjunto  $M$  de puntos de  $K_0 \setminus z_0$ , para los cuales la cantidad de preimágenes es igual a  $m$ , es abierto. Demostraremos que éste coincide con todo el recinto  $K_0 \setminus z_0$ , comprobando para ello que cada punto del recinto  $K_0 \setminus z_0$  que es de acumulación para  $M$ , pertenece a  $M$  (véase el ap. 4.5, cap. I). En efecto, sea

$z'' \in K_0 \setminus z_0$  un punto de acumulación del conjunto  $M$ ; supongamos que el número  $\mu$  de sus preimágenes, contenidas en  $\bigcup_{j=1}^n \Delta_j$  es menor que  $m$ . Tomando para cada una de estas preimágenes  $e_j''$  un entorno  $U_j''$  ( $j = 1, \dots, \mu$ ) de un modo semejante a lo que se hizo anteriormente para los puntos  $e_j'$ , hallaremos que en cualquier entorno del punto  $z''$  existen puntos  $z_k$  que tienen preimágenes situadas en  $\bigcup_{j=1}^n \Delta_j$  y no pertenecientes a  $\bigcup_{j=1}^{\mu} U_j$ . Pasando a sucesiones parciales, obtendremos unos puntos  $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_p}, \dots$  tales que  $z_{k_p} \rightarrow z''$  para  $p \rightarrow \infty$ , y cuyas preimágenes  $e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_p}, \dots$  convergen hacia un punto  $e''$  distinto de los puntos  $e_j'$ . Como  $f(e'') = \lim_{p \rightarrow \infty} f(e_{k_p}) = \lim_{p \rightarrow \infty} z_{k_p} = z'' \in K_0$ , resulta que  $e''$  no está situado en los lados de los triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  opuestos a  $e_0$ ; no obstante,  $e''$  está contenido en el conjunto  $\bigcup_{j=1}^n \Delta_j$ .

Hemos obtenido que el número de preimágenes del punto  $z''$  tiene que ser superior a  $\mu$ , es decir, la hipótesis de que  $\mu < m$  da lugar a una contradicción.

Así, pues, la imagen  $z_0$  de un punto  $e_0 \in E$ , en cualquier entorno del cual se vulnera el homeomorfismo de la transformación interior, posee un entorno  $K_0$  tal, que para cada punto  $z \in K_0$ ,  $z \neq z_0$ , la cantidad  $m$  de preimágenes en el interior de  $\Delta_1 + \dots + \Delta_n$  es la misma.

Designemos  $f(\Delta_j)$  mediante  $\delta_j$ ; los triángulos  $\delta_j$  se sitúan alrededor del punto  $z_0$  de tal modo que cada triángulo siguiente posee un lado común con el anterior, y el último,  $\delta_n$ , tiene un lado común con el primero,  $\delta_1$ . De lo demostrado se deduce que estos triángulos realizan un *cubrimiento  $m$ -múltiple del entorno  $K_0$  del punto  $z_0$* , o sea, que cada punto  $z \in K_0$  ( $z \neq z_0$ ) pertenece a  $m$  triángulos distintos  $\delta_j$  (si  $z$  está situado en los lados de algunos triángulos, entonces, en este cálculo, cada par de triángulos para los cuales  $z_0$  es un punto frontera común, se toma por un triángulo).

Consideremos en un entorno del punto  $e_0$  la transformación auxiliar  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}} = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  y demos-tremos que ésta es homeomorfa. En efecto, cada triángulo  $\Delta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) con el vértice en el punto  $e_0$  admite una transformación homeomorfa sobre un triángulo  $\delta_j$  con el vértice en el punto  $z_0$ . A su vez, mediante las ramas uniformes de la función  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ ,  $\delta_j$  admite una transformación homeomorfa sobre un triángulo con el vértice en el

origen de coordenadas. Fijando en  $\delta_1$  una rama determinada de  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ , obtendremos en el plano  $t$  un triángulo determinado  $\sigma_1$ . En el triángulo  $\delta_2$  que tiene frontera con  $\delta_1$  a lo largo de un lado común, elegiremos aquella rama de la función  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$  que toma en los puntos de este lado los mismos valores que la rama anterior. Entonces, por imagen del triángulo  $\delta_2$  en el plano  $t$  obtendremos un nuevo triángulo  $\sigma_2$ , con el vértice en el origen de coordenadas, el cual tiene un lado común con  $\sigma_1$ . La transformación  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ , definida del modo indicado, será homeomorfa no sólo en los puntos de los triángulos  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , sino también en ciertos entornos de cada punto de su lado común, a excepción del punto  $z_0$ . Continuando este razonamiento, definiremos una función  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$  en cada uno de los triángulos  $\delta_j$  y, por consiguiente, en cada triángulo  $\Delta_j$ .

La transformación correspondiente  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  transforma el conjunto de triángulos  $\Delta_j$  en el conjunto de triángulos  $\sigma_j$  con el vértice común  $t = 0$ ; cada uno de estos tiene un lado común con el anterior, y el último tiene un lado común con el primero. Este es debido a que, cuando  $z$ , recorriendo todos los triángulos  $\delta_j$  uno tras otro, vuelve al triángulo inicial  $\delta_1$ , el argumento de  $z - z_0$  varía en  $2\pi m$  y, por consiguiente, los valores de  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$  vuelven a los valores de la rama inicial.

Obsérvese también que en entornos suficientemente pequeños de los puntos del lado común, distintos de los vértices, los triángulos correspondientes no tienen puntos interiores comunes. Por ello, los triángulos  $\sigma_j$  cubren cierto entorno del punto  $t = 0$ .

Como la transformación definida  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  es uniforme, a distintos valores de  $t$  les tienen que corresponder como preimágenes distintos puntos  $e$ . Comprobemos que en un entorno suficientemente pequeño del punto  $t = 0$  a cada valor  $t$  le corresponde solamente una preimagen  $e$ . Suponiendo lo contrario, admitamos para  $t' \neq 0$  al menos dos preimágenes. Como  $t'$  es uno de los  $m$  valores de  $(z' - z_0)^{\frac{1}{m}}$  y cada uno de los  $m - 1$  demás valores tiene que tener al menos una preimagen, en total, para  $m$  valores  $(z' - z_0)^{\frac{1}{m}}$  hallamos al menos  $m + 1$  preimágenes distintas. Pero las últimas también son preimágenes del punto  $z'$  en la transformación  $z = f(e)$ , y si  $z'$  está suficientemente próximo a  $z_0$  (lo cual ocurrirá cuando  $t'$  esté suficientemente próximo a cero), obtenemos una contradicción, puesto que  $z'$  sólo tiene  $m$  preimágenes.

Así, pues, la transformación  $e = \varphi(t)$ , que es recíproca respecto de  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ , es uniforme en cierto entorno del punto  $t = 0$ . De todo lo expuesto anteriormente sobre esta transformación se deduce inmediatamente que ésta es continua. Por esto,  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  es verdaderamente homeomorfa en un entorno del punto  $e = e_0$ .

Todos estos razonamientos se efectuaron para el caso en que  $f(e_0) = z_0$  es un número finito. En caso contrario, es decir, cuando  $z_0 = \infty$ , se debe considerar  $\frac{1}{f(e)}$  en lugar de  $f(e) - f(e_0)$  y se debe

tomar el parámetro local en la forma  $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$ .

En resumen, para una transformación interior arbitraria  $z = f(e)$  de la superficie  $E$  en la esfera y para cada punto  $e_0 \in E$ , se pueden señalar un número natural  $m$  y un entorno  $U_0$ , tales que la transformación  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  (o  $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$ ) es homeomorfa en este entorno. No queda más que añadir a esto que  $m$  puede ser superior a la unidad lo más para un conjunto numerable de puntos que no tiene puntos de acumulación en la superficie.

### § 3. SUPERFICIE DE RIEMANN EN EL SENTIDO PROPIO DE LA PALABRA

3.1. Los hechos establecidos en el párrafo anterior permiten considerar cada superficie  $E$ , en la que se ha fijado alguna transformación interior  $z = f(e)$  de la misma en la esfera, como superficie de Riemann. Precisando, para cada punto  $e_0 \in E$  elegimos por parámetro local  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  para aquel valor  $m$  y aquel entorno del punto  $e_0$  de los cuales se hablaba al final del § 2 (si  $f(e_0) = \infty$ , hacemos  $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$ ). Si  $e'$  pertenece a este entorno y  $\tau = [f(e) - f(e')]^{\frac{1}{m}}$  es el parámetro local correspondiente, entonces tendremos:

$$t = [f(e') - f(e_0) + \tau^{m'}]^{\frac{1}{m}}$$

y  $t$  será una función analítica de  $\tau$  en cierto entorno del valor  $\tau = 0$ , si  $f(e') \neq f(e_0)$ . Pero siempre se puede satisfacer a esta condición sustituyendo el entorno inicial del punto  $e_0$  por otro menor, de modo que en éste sea  $f(e') \neq f(e_0)$  si  $e' \neq e_0$  (puede ser necesaria tal sustitución sólo en el caso en que  $m > 1$ ; debido a la definición de transformación interior, el punto  $e_0$  siempre posee un entorno en el cual

se cumple la condición pedida). Así, pues, el sistema elegido de parámetros locales satisface a la condición  $A$ ) del ap. 1.2. Por consiguiente, con una elección tal de los parámetros locales la superficie  $E$  se convierte en una superficie de Riemann.

En el ap. 2.2 se había demostrado que toda superficie orientable admite una transformación interior en la esfera. Por ello, cada superficie orientable  $E$  puede convertirse en una superficie de Riemann

fijando el sistema de parámetros locales  $\{t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}\}$  engendrado por una transformación interior determinada  $z = f(e)$ . Suponiendo que se hace precisamente tal elección cada vez que se da una transformación interior de la superficie  $E$  en la esfera, vamos a considerar cualquier superficie con una transformación interior  $z = f(e)$  definida en la misma como una superficie abstracta de Riemann.

Se llega a un nuevo concepto, en comparación con el concepto de superficie abstracta de Riemann, al identificar las dos superficies de Riemann:  $E$ , con la transformación interior fijada en la misma  $z = f(e)$ , y  $E'$ , con la transformación interior  $z = f'(e')$ , cuando, y sólo cuando, existe una transformación homeomorfa de  $E'$  sobre  $E$ :  $e' = \varphi(e)$ , según la cual  $z = f'(e')$  se transforma en  $z = f(e)$  ( $o z = f(e)$  en  $z = f'(e')$ ), es decir,

$$z = f'[\varphi(e)] = f(e).$$

Dos superficies que satisfacen a esta condición representan una misma superficie abstracta de Riemann. En efecto, si  $F(e)$  es una función analítica en un entorno del punto  $e_0 \in E$ :

$$F(e) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots$$

donde  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$  (para precisar, suponemos que  $f(e_0) \neq \infty$ ), entonces en la transformación  $e' = \varphi(e)$  el entorno del punto  $e_0$  se transforma en un entorno del punto  $e'_0 \in E'$ ,  $f(e)$  se convierte en  $f'(e')$  y, por consiguiente, para  $F(e) = F\varphi^{-1}(e')$  resulta:

$$\begin{aligned} F(e) &= \alpha_0 + \alpha_1 [f'(e') - f'(e'_0)]^{\frac{1}{m}} + \alpha_2 [f'(e') - f'(e'_0)]^{\frac{2}{m}} + \dots = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 t' + \alpha_2 t'^2 + \dots, \end{aligned}$$

es decir,  $F(e)$  se convierte en una función analítica en un entorno del punto correspondiente  $e'$ .

No obstante lo recíproco no es justo: dos superficies que representan una misma superficie abstracta de Riemann pueden no satisfacer a la condición expuesta anteriormente. Para ver esto, recurramos a ejemplos elementales.

Sea  $E = E'$  el plano ampliado (la esfera). Designemos  $e$  con  $w$ ,  $e'$  con  $w'$  y fijemos las transformaciones:  $z = w$  y  $z = w'^2$ . La pri-

mera de éstas es una transformación homeomorfa (es precisamente la transformación idéntica) de la superficie  $E$  sobre la esfera, la segunda es homeomorfa en cada uno de los triángulos de la triangulación representada en la fig. 60 (pág. 466), y también en los entornos de los puntos frontera de estos triángulos, distintos de los vértices. Por ello, ambas transformaciones son interiores y convierten al plano ampliado en superficies de Riemann con los sistemas de parámetros locales:  $t = w - w_0$  si  $w_0 \neq \infty$  y  $t = \frac{1}{w}$  si  $w_0 = \infty$  (para  $E$ );

$t' = w'^2 - w_0'^2$  si  $w_0' \neq 0$ ,  $t' = \sqrt{z} = w'$  si  $w_0' = 0$ , y  $t' = z^{-\frac{1}{2}} = w'^{-1}$  si  $w_0' = \infty$  (para  $E'$ ). Las superficies  $E$  y  $E'$ , consideradas como superficies abstractas de Riemann, son idénticas. En efecto, la transformación homeomorfa  $w' = w$  convierte a una de ellas en la otra de tal modo que las funciones analíticas en una superficie se convierten en funciones analíticas en la otra superficie. Por ejemplo, si la función  $\varphi(w)$  es analítica en un entorno del punto  $w = w_0 \neq 0$ :

$$\varphi(w) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots = \alpha_0 + \alpha_1 (w - w_0) + \dots,$$

entonces, como  $w = w' = (w_0'^2 + t')^{\frac{1}{2}}$ , tendremos:

$$\varphi(w') = \alpha_0 + \alpha_1 [(w_0'^2 + t')^{\frac{1}{2}} - w_0] + \dots = \beta_0 + \beta_1 t' + \dots,$$

o sea,  $\varphi(w')$  también es una función analítica. Del mismo modo, si  $\varphi(w)$  es analítica en un entorno del punto  $w = 0$ :

$$\varphi(w) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots = \alpha_0 + \alpha_1 w + \dots,$$

entonces, como  $w = w' = t'$ , resulta:

$$\varphi(w') = \alpha_0 + \alpha_1 t' + \dots$$

o sea, se tiene de nuevo una función analítica.

Sin embargo, desde el nuevo punto de vista, según el cual en la definición de superficie de Riemann se incluye su transformación interior en la esfera, ambas superficies son distintas. En efecto, la función  $z = f(e) = w$  toma valores distintos en puntos distintos de la superficie  $E$ , mientras que  $z = f'(e') = w'^2$  puede tomar valores iguales en distintos puntos de la superficie  $E'$ . De aquí se deduce que mediante ninguna transformación homeomorfa de  $E'$  sobre  $E$  se puede transformar la función  $z = f'(e')$  en  $z = f(e)$ .

Es evidente que si  $E = E'$  es de nuevo el plano ampliado, pero las transformaciones interiores son:  $z = \left(\frac{w}{w-1}\right)^2$  y  $z = w'^2$ , entonces existe la transformación homeomorfa  $w' = \frac{w}{w-1}$  de la superficie  $E$  sobre  $E'$ , la cual transforma  $z = f'(e')$  en  $z = f(e)$ .

Por ello, en este caso ambas superficies de Riemann son también idénticas desde el nuevo punto de vista.

Hagamos un resumen de lo expuesto en forma de la definición siguiente:

*Una superficie  $E$ , en la que se ha fijado una transformación interior  $z = f(e)$  en la esfera, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra, o abreviadamente, una superficie de Riemann; dos superficies de Riemann en el sentido propio de la palabra se consideran idénticas si, y sólo si, existe una transformación homeomorfa de una sobre la otra según la cual la transformación interior que figura en la definición de la primera superficie se convierte en la transformación interior que figura en la definición de la segunda.*

Obsérvese que la transformación interior misma  $z = f(e)$  es una función analítica en  $E$  en todos los puntos en los que  $f(e)$  toma valores finitos. En efecto, si  $f(e_0) \neq \infty$ , entonces el parámetro

local correspondiente a este punto tiene la forma  $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ , de donde  $f(e) = f(e_0) + t^m$  en un entorno del punto  $e_0$ .

Si  $f(e_0) = \infty$ , entonces  $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$  y para  $f(e)$  obtenemos:  $f(e) = t^{-m}$ . Diremos, en general, respecto de una función  $F(e)$ , definida en un entorno de un punto  $e_0$  de una superficie de Riemann y que admite un desarrollo de la forma

$$F(e) = \alpha_{-m} t^{-m} + \alpha_{-m+1} t^{-m+1} + \dots + \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots \quad (\alpha_{-m} \neq 0, m \geq 1),$$

que esta función tiene un polo en el punto  $e_0$  ( $t = t_{e_0}$  es el parámetro local). Podemos decir entonces que la transformación interior que figura en la definición de superficie de Riemann  $E$  en el sentido propio, es una función uniforme y analítica en esta superficie, a excepción de polos. Fácilmente se observa que el conjunto de estos últimos puntos no tiene puntos de acumulación en  $E$ .

**3.2.** Adjuntemos a cada superficie de Riemann, en el sentido propio de la palabra, una imagen geométrica perceptible, la cual la vamos a considerar como un modelo de esta superficie.

Dividamos la superficie  $E$  mediante una triangulación en triángulos  $\{\Delta_n\}$ , de modo que en cada uno de éstos la transformación  $z = f(e)$  sea homeomorfa. La imagen  $f(\Delta_n) = \delta_n$  en la transformación  $z = f(e)$  es un triángulo en la superficie de la esfera.

Vamos a identificar (a «pegar») entre sí a los puntos pertenecientes a los triángulos  $\delta_j$  y  $\delta_k$  ( $j \neq k$ ), cuando y sólo cuando, éstos sean las imágenes de unos mismos puntos de la superficie  $E$ . Debido a las condiciones a que satisface toda triangulación, pueden pegarse solamente los puntos frontera de los triángulos.

Los triángulos que tienen un vértice común  $z_0$  formarán ciclos finitos de triángulos, donde cada uno de ellos quedará pegado con



el anterior a lo largo de un lado común que parte del vértice común. Si en este caso  $z_0$  es la imagen de un punto  $e_0 \in E$  tal, que en un entorno del mismo la transformación  $z = f(e)$  es homeomorfa ( $m = 1$ ), entonces el ciclo indicado cubre simplemente, formando una capa, cierto entorno del punto  $z_0$  en la esfera. Si la transformación  $z = f(e)$  no es homeomorfa en ningún entorno del punto  $e_0$ , entonces, como ya sabemos, existe un número natural  $m$  tal, que los triángulos del ciclo realizan un cubrimiento  $m$ -ple, de  $m$  capas, de un entorno del punto  $z_0$ . Todo el conjunto de triángulos  $\{\delta_n\}$ , pegados unos con otros del modo indicado (lo más que puede haber es un conjunto numerable), puede uno imaginárselo como una especie de manta, confeccionada por trozos de triángulos y capas que envuelven toda la esfera o solamente cierto recinto de la misma. Precisamente esta «manta» o «superficie multifacética» sirve de modelo de la superficie de Riemann en el sentido propio. Ordinariamente este modelo  $S$  no lo diferencian de la superficie representada por él mismo, llamándole también superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Operando con  $S$  se debe tener presente que la indicación de que  $z$  pertenece al conjunto de valores  $f(e)$  no es suficiente para fijar un punto en la superficie  $S$ . Para que la determinación sea completa hay que indicar también su preimagen  $e$ , o aquel triángulo  $\Delta_j$  al que pertenece  $e$ . Entonces, entre todos los puntos de la superficie  $S$ , a los que corresponde un mismo punto  $z$  (estos puntos los percibimos como «situados sobre  $z$ » o «que se proyectan sobre  $z$ »), se debe tomar el único punto perteneciente al triángulo  $\delta_j = f(\Delta_j)$ .

Consideremos el vértice común, situado sobre  $z_0$ , de un ciclo de triángulos  $\{\delta_n\}$ , que representa un recubrimiento  $m$ -ple ( $m > 1$ ) de cierto entorno del punto  $z_0$ . Tal punto de la superficie  $S$  lo llamaremos punto de ramificación de la superficie de Riemann; al número  $m - 1$  lo llamaremos orden del punto de ramificación. De lo expuesto anteriormente se deduce que el conjunto de puntos de ramificación no es más que numerable y que éste no posee puntos de acumulación en  $S$  (no obstante, es fácil construir ejemplos en los que el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de ramificación de la superficie de Riemann dada, es denso sobre toda la esfera).

Ya sabemos que en cada superficie de Riemann se introduce la medida de los ángulos de un modo muy natural. Esto se realiza en  $S$  de una manera muy perceptible. Si el punto dado de la superficie  $S$ , que está situado sobre  $z_0$ , no es un punto de ramificación, entonces el parámetro local  $t = z - z_0$ , y para determinar el ángulo entre dos curvas situadas en  $S$  que pasen por  $z_0$ , se debe proyectarlas sobre la esfera y hacer luego una traslación a  $z_0$  (si  $z_0 = \infty$ , en lugar de la traslación se hace la transformación  $t = \frac{1}{z}$ ). Como en la



esfera la traslación no altera los ángulos, el ángulo entre las dos curvas dadas se mide directamente por el ángulo formado por sus proyecciones sobre la esfera. Cuando el vértice del ángulo, situado sobre  $z_0$ , es un punto de ramificación de orden  $m - 1$ , el parámetro

local  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$  y, por consiguiente, el ángulo entre las curvas en  $S$  es igual al ángulo entre sus proyecciones sobre la esfera dividido por  $m$ . Al calcular el ángulo formado por las proyecciones es necesario tener en cuenta correctamente el múltiplo de  $2\pi$ , que corresponde a la variación continua del  $\text{Arg}(z - z_0)$  cuando el punto situado en  $S$  se desplaza continuamente en un entorno del vértice del ángulo desde uno de sus lados hasta el otro.

El modelo  $S$  de la superficie de Riemann  $E$  se contempla mejor cuando la superficie es cerrada y, por consiguiente, la triangulación de la superficie consta de una cantidad finita de triángulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Comprobemos que cada punto de la superficie de la esfera pertenece al conjunto de valores  $z = f(e)$ , es decir, que  $S$  envuelve a toda la esfera. En efecto, en virtud de las propiedades conocidas de la transformación interior, el conjunto  $\{z = f(e)\}$  es abierto. Si  $z'$  es un punto de acumulación de este conjunto, entonces, como la superficie  $E$  es compacta, se puede hallar una sucesión de puntos  $e_n \in E$ , convergente hacia cierto punto  $e' \in E$ , tal que  $\{z_n = f(e_n)\}$  converge hacia  $z'$ . Como la transformación  $f(e)$  es continua, de aquí se deduce que  $f(e') = z'$ , es decir,  $z'$  pertenece al conjunto  $\{z = f(e)\}$ . Por lo tanto, este último conjunto tiene que coincidir con toda la esfera (ap. 4.5, cap. I). Excluyendo de la esfera las proyecciones de los puntos de ramificación (en el caso dado hay una cantidad finita de éstas), resulta un recinto  $G$ , cada uno de cuyos puntos  $z$  tiene una cantidad acotada de preimágenes  $f^{-1}(z)$  sobre  $E$  (no más que una en cada triángulo), siendo la transformación  $z = f(e)$  homeomorfa en un entorno de cada preimagen.

Razonando exactamente igual que en el ap. 2.3, observamos que cada punto del recinto  $G$  tiene una misma cantidad  $m$  de preimágenes en toda la superficie  $E$ . Esto significa que la superficie  $S$ , siendo el modelo de una superficie cerrada de Riemann, es un recubrimiento  $m$ -ple, o de  $m$  capas, de toda la esfera. Se suele decir también que ésta es una superficie de  $m$  hojas.

3.3. Expondremos aquí algunos conceptos auxiliares relacionados con las curvas analíticas. Una curva continua  $L$  se llama *analítica*, si su ecuación se puede expresar en la forma  $z = \lambda(t)$  donde  $\lambda(t)$  es una función analítica del parámetro  $t$  en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . Debido a esto, la función  $\lambda(t)$  es desarrollable en serie de potencias en un entorno de cada  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ :

$$\lambda(t) = \sum_0^{\infty} (a_n + ib_n)(t - t_0)^n.$$

Asignando a  $t$  valores reales y separando las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$x = \sum_0^{\infty} a_n (t-t_0)^n \quad \text{c} \quad y = \sum_0^{\infty} b_n (t-t_0)^n,$$

o sea,  $x$  e  $y$  también se expresan por series de potencias y, por consiguiente, son funciones analíticas de  $t$ .

Diremos que la curva es regular analítica, si la función  $\lambda(t)$  se puede elegir de tal modo que se cumpla la condición  $\lambda'(t) \neq 0$  en todos los puntos del segmento  $[\alpha, \beta]$ . La condición de regularidad permite expresar la ecuación del arco de la curva en un entorno de cada punto  $t = t_0$  en la forma  $y = y(x)$ , o en la forma  $x = x(y)$ , según que sea  $x'(t_0) \neq 0$  o  $y'(t_0) \neq 0$ , donde las funciones  $y(x)$  o  $x(y)$  son analíticas en un entorno del punto  $x = x_0$  o  $y = y_0$ , respectivamente.

Pueden servir de ejemplos de curvas regulares analíticas el segmento de una recta, la circunferencia, la elipse (sus ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{aligned} z &= z_0 + le^{i\theta}t, & z &= z_0 + re^{2\pi it}, \\ z &= z_0 + a \cos 2\pi t + ib \sin 2\pi t \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

La curva  $z = t^3 + it^4$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) también es analítica, sin embargo, no es regular analítica. En efecto, realicemos una transformación monótona  $t = \mu(\tau)$  tal, que la función  $z = [\mu(\tau)]^3 + i[\mu(\tau)]^4$  siga siendo analítica. Sin restringir generalidad, se puede suponer que  $\mu(0) = 0$ . Entonces las funciones  $[\mu(\tau)]^3$  y  $[\mu(\tau)]^4$  tienen que ser también analíticas en un entorno del origen de coordenadas y, por consiguiente,  $\frac{[\mu(\tau)]^4}{[\mu(\tau)]^3} = \mu(\tau)$  también es analítica en un entorno del punto  $\tau = 0$ , a excepción, posiblemente, del mismo punto  $\tau = 0$ , donde *a priori* puede haber un polo. Ahora bien, como esta función está acotada, tiene que ser también analítica en el origen de coordenadas, de donde

$$x'(\tau) = 3[\mu(\tau)]^2 \mu'(\tau) |_{\tau=0} = 0 \quad \text{e} \quad y'(\tau) = 4[\mu(\tau)]^2 \mu'(\tau) |_{\tau=0} = 0.$$

En resumen, la curva no es regular analítica. Esta circunstancia se debe al hecho de que  $y$  se expresa mediante  $x$  así:  $y = x^{\frac{4}{3}}$ , y esta última función tiene singularidad en el punto  $x = 0$  (igual que  $x = y^{\frac{3}{4}}$  en el punto  $y = 0$ ).

Obsérvese que la imagen de una curva regular analítica  $L: z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), perteneciente a un recinto  $G$ , en una transformación conforme de este recinto en algún recinto  $D$ , es también una curva regular analítica. En efecto, si la función que realiza la trans-

formación es  $w = f(z)$ , entonces la ecuación de la imagen de la curva  $L$  puede expresarse en la forma  $w = f\lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ). Pero la función  $f\lambda(t)$  es analítica en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , siendo  $\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} \neq 0$  en este segmento, de donde se deduce que la imagen de la curva  $L$  es una curva regular analítica.

Señalemos, finalmente, la siguiente propiedad importante de las curvas analíticas. Sean

$$L_1: z = \lambda_1(t') \quad (\alpha' \leq t' \leq \beta') \quad \text{y} \quad L_2: z = \lambda_2(t'') \quad (\alpha'' \leq t'' \leq \beta'')$$

dos curvas regulares analíticas. Si los conjuntos de los valores de los parámetros  $t'$  y  $t''$ , para los cuales  $L_1$  y  $L_2$  tienen puntos comunes, no son simultáneamente conjuntos finitos (por ejemplo, si el conjunto mismo de los puntos comunes es infinito), entonces  $L_1$  y  $L_2$  poseen arcos comunes (uno o dos), cuyos orígenes y extremos son los puntos iniciales y finales de las curvas  $L_1$  y  $L_2$ .

Para entender el enunciado de este teorema es suficiente examinar el ejemplo de dos arcos de circunferencias. Estos pueden cortarse por un conjunto finito, compuesto de 0, 1 ó 2 puntos, o por un conjunto infinito, compuesto de uno o dos arcos de circunferencia.

Supongamos que para un conjunto infinito  $E'$  de valores  $t'$  los puntos de la curva  $L_1$  también pertenecen a  $L_2$ . Sea  $t'_0$  un punto de acumulación del conjunto  $E'$  y sea  $\{t'_n\}$  una sucesión de puntos distintos de  $E'$ , convergente hacia  $t'_0$ . Si  $\lambda_1(t'_0) = z_0$ , entonces, debido a la condición  $\lambda'_1(t'_0) \neq 0$ , la función  $z = \lambda_1(t')$  realiza una transformación conforme de cierto entorno del punto  $t' = t'_0$  en un recinto  $g$  que contiene al punto  $z_0$ . Como esta transformación es biunívoca, a distintos valores de  $t'_n$  que caen en este entorno les corresponden distintos puntos  $z'_n = \lambda_1(t'_n)$  de la curva  $L_1$ , pertenecientes al recinto  $g$ . Estos puntos están situados en el arco  $l_1 \subset L_1$  que corresponde a cierto entorno del punto  $t'_0$ . Según la definición del conjunto  $E'$ , los puntos  $z'_n$  también están situados en  $L_2$ . Fijemos para cada uno de éstos un valor del parámetro  $t''$ :  $z'_n = \lambda_2(t''_n)$  y, pasando en caso de necesidad a subsucesiones, supongamos que  $\{t''_n\}$  converge hacia cierto punto  $t''_0$ . Es obvio que

$$\lambda_2(t''_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(t''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(t'_n) = \lambda_1(t'_0) = z_0.$$

Consideremos un entorno del punto  $t''_0$  tan pequeño que el arco correspondiente  $l_2 \subset L_2$  esté contenido en el recinto  $g$ . Es evidente que  $l_2$  es una curva regular analítica  $z = \lambda_2(t'')$  ( $t''_0 - \varepsilon \leq t'' \leq t''_0 + \varepsilon$ ), que posee un conjunto infinito de puntos  $z'_n = \lambda_2(t''_n)$  que son comunes con el arco  $l_1$ . En la transformación conforme  $t' = \lambda_1^{-1}(z)$  del recinto  $g$  en un entorno del punto  $t'_0$  al arco  $l_1$  le corresponderá

un intervalo del eje real que contiene a este punto, y al arco  $l_2$ , una curva regular analítica que corta al eje real en un conjunto infinito de puntos distintos con el punto de acumulación  $t'_0$ . La ordenada de los puntos de esta curva es una función analítica de  $t''$ , que se anula en un conjunto infinito de puntos distintos  $t''_n$  con el punto de acumulación  $t''_0$ . De aquí se deduce que ésta es idénticamente nula, es decir, la imagen del arco  $l_2$  coincide con la imagen del arco  $l_1$  en cierto entorno del punto  $t = t'_0$ . Por ello, también el arco  $l_2$  de la curva  $L_2$  coincide con el arco  $l_1$  de la curva  $L_1$  en cierto entorno del punto  $z_0 = \lambda_1(t'_0) = \lambda_2(t''_0)$ , el cual es un punto de acumulación para los puntos comunes de las curvas  $L_1$  y  $L_2$ .

Así, pues, hemos demostrado que el arco de la curva  $L_1$ , en cierto segmento  $\tau'_1 \leq t' \leq \tau'_2$  que contiene en su interior a  $t'_0$ , coincide con un arco de la curva  $L_2$  en cierto segmento  $\tau''_1 \leq t'' \leq \tau''_2$  que contiene en su interior a  $t''_0$ . Aplicando este mismo razonamiento a los puntos inicial y final del arco común hallado, podemos alargar este arco en las dos direcciones. Como según lo demostrado, todo punto de acumulación de los puntos comunes de las curvas  $L_1$  y  $L_2$  es un punto interior de su arco común, este proceso de alargamiento puede terminarse solamente cuando el arco común llegue hasta los puntos iniciales o finales de las curvas  $L_1$  y  $L_2$ . Llamando, para abreviar, extremos a los puntos iniciales o finales, tendremos las siguientes posibilidades:

a) los extremos de la curva  $L_1$  coinciden con los extremos de la curva  $L_2$ ; entonces  $L_1$  y  $L_2$  coinciden (geométricamente, aunque puedan tener distintos sentidos del recorrido);

b) existe al menos un extremo de una curva que es un punto interior de la otra, y al menos un extremo de una de las curvas que no es interior de la otra; entonces  $L_1$  y  $L_2$  no coinciden y tienen un arco común;

c) los extremos de cada una de las curvas son interiores para la otra; entonces  $L_1$  y  $L_2$ , por lo general, no coinciden y tienen dos arcos comunes (en este caso, si ambas curvas  $L_1$  y  $L_2$  son cerradas, éstas coinciden; si solamente una de las curvas es cerrada, entonces los dos arcos comunes se confunden en uno).

Todos estos casos quedan claros en la fig. 65.

3.4. El método más simple de introducción de las superficies de Riemann en el sentido propio de la palabra en la teoría de funciones es el siguiente:

Se considera por superficie  $E$  un recinto arbitrario  $G$  del plano ampliado  $w$ , y en el mismo se considera una función meromorfa arbitraria  $z = f(w) \neq \text{const.}$  Como se demostrará en el presente apartado,  $f(w)$  realiza una transformación interior del recinto  $G$  en la esfera (en el plano ampliado) y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio. Por lo tanto, toda

función meromorfa  $z = f(w)$  en un recinto dado  $G$  determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra.

Basándose en el teorema de Stoilow citado anteriormente (véase el ap. 2.2), la demostración de que  $z = f(w) \neq \text{const}$  realiza una transformación interior del recinto  $G$ , resulta evidente, puesto que

$z = f(w)$  transforma cada conjunto abierto de puntos del recinto  $G$  en un conjunto abierto del plano ampliado (de la esfera); además, ninguno de los continuos situados en  $G$  y distintos de un punto se transforma en un punto (debido al teorema interior de unicidad). No obstante, esto mismo puede obtenerse también directamente. Es suficiente construir una triangulación del recinto  $G$  tal, que la transformación  $z = f(w)$  sea homeomorfa, es decir, que la función  $f(w)$  sea univalente, en cada uno de sus triángulos y también en los entornos de sus puntos frontera, distintos de los vértices.

Comenzaremos la construcción señalando los puntos del recinto  $G$  en los que  $f(w)$  toma valores múltiples. Tales puntos son: todos los ceros de  $f'(w)$  y todos los polos múltiples de  $f(w)$ . El conjunto de los puntos indicados no es más que numerable. Numerémoslos en algún orden:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  y construyamos primero un recinto  $K_1 \subset G$  que contenga al punto  $\alpha_1$  y tal, que todos los puntos  $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  estén situados fuera de  $\bar{K}_1$  y que  $\bar{K}_1$  se pueda dividir en

una cantidad finita de sectores curvilíneos cerrados, en cada uno de los cuales  $z = f(w)$  sea univalente. La posibilidad de tal construcción se deduce del ap. 1.1, cap. V. Precisando, si

$$\begin{aligned} f(w) &= A_1 + a_h(w - \alpha_1)^h + \dots + A_1 + a_h(w - \alpha_1)^h [1 + \dots] = \\ &= A_1 + [\varphi(w)]^h, \end{aligned}$$

donde

$$\varphi(w) = \sqrt[h]{a_h(w - \alpha_1)} + \dots \quad (|h| > 1),$$

entonces la transformación  $z = f(w)$  se puede expresar en la forma siguiente:  $z = A_1 + \zeta^h$ , donde  $\zeta = \varphi(w)$  es una función univalente en un entorno  $U_1$  del punto  $w = \alpha_1$ . Elijamos ahora el recinto  $\bar{K}_1$

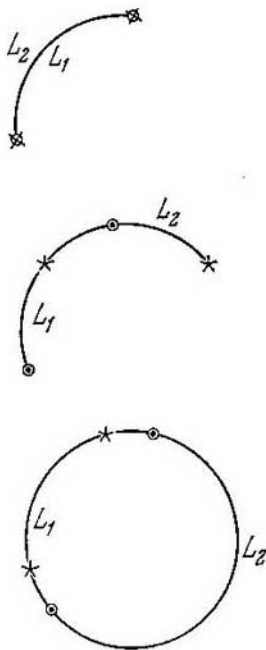


FIG. 65.

del entorno  $U_1$  de tal modo que su imagen  $\varphi(\bar{K}_1)$  sea un círculo con el centro en el punto 0:  $|\xi| \leq \rho$ . Entonces la frontera del recinto  $K_1$  será la imagen de la circunferencia:  $\varphi^{-1}(|\xi| = \rho)$ , o sea, es una curva cerrada de Jordan que es regular analítica. Dividamos el círculo  $|\xi| \leq \rho$  mediante  $|k| + 1$  radios en  $|k| + 1$  sectores con ángulos iguales en el origen de coordenadas. Las preimágenes de estos sectores en la transformación  $\xi = \varphi(w)$  serán sectores cerrados con el vértice común  $w = \alpha_1$ , los cuales forman en su conjunto todo el recinto cerrado  $\bar{K}_1$ . Sus lados comunes son imágenes de los radios del círculo  $|\xi| \leq \rho$ , es decir, son curvas regulares analíticas. No queda más que observar que la función  $z = f(w)$  (o sea,  $\zeta = \varphi(w)$  y  $z = A_1 + \zeta^k$ ) es univalente en cada uno de los sectores construidos, y también en los entornos de sus puntos frontera, a excepción del punto  $w = \alpha_1$ . Está claro que tomando  $\rho$  suficientemente pequeño se puede conseguir que el recinto  $\bar{K}_1$  pertenezca a cualquier entorno previamente asignado del punto  $\alpha_1$ . Suponiendo que para los puntos  $a_1, \dots, a_n$  ya se han construido los recintos  $K_1, \dots, K_n$ , podemos construir después el recinto  $K_{n+1} \subset G$  que contenga al punto  $a_{n+1}$ , de tal modo, que no tenga puntos comunes con  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n$ , que  $a_{n+2}, \dots, a_{n+p}, \dots$  estén situados fuera de  $\bar{K}_{n+1}$  y luego, que  $K_{n+1}$  se pueda dividir en una cantidad finita de sectores curvilíneos, en cada uno de los cuales la función  $z = f(w)$  sea univalente. La frontera del recinto  $K_{n+1}$  y los lados comunes de los sectores serán curvas regulares analíticas. De este modo, quedarán construidos los recintos  $K_n$  para todos los puntos  $a_n$  en los que  $f(z)$  toma valores múltiples. Para todos los demás puntos  $z_0$  del recinto  $G$  construiremos sus entornos  $U(z_0)$  tan pequeños que la función  $z = f(w)$  sea univalente en  $U(z_0)$ .

Supongamos ahora que  $\{G_n\}$  es una sucesión creciente de recintos que aproxima a  $G$  por el interior. Señalemos una cantidad finita de recintos  $\{K_n\}$  y de entornos  $\{U(z)\}$  que cubran  $\bar{G}_1$  (aquí nos basamos en el lema de Heine-Borel); señalemos después una cantidad finita de recintos  $\{K_n\}$  y de entornos  $\{U(z)\}$  que cubran  $\bar{G}_2 - \bar{G}_1$ , etc. Como resultado, obtendremos un conjunto numerable  $M$  de recintos (de tipo  $K_n$  o  $U(z)$ ) que cubren todo el recinto  $G$ , de modo que cualquier conjunto cerrado  $F \subset G$  queda cubierto por una cantidad finita de recintos de  $M$ . En este caso, la transformación  $z = f(w)$  o es homeomorfa en los conjuntos cerrados de  $M$  (si se trata de  $\bar{U}(z)$ ), o el recinto correspondiente ( $\bar{K}_n$ ) se divide en una cantidad finita de sectores en cada uno de los cuales esta transformación es homeomorfa (incluyendo los entornos de los puntos frontera de los sectores y excluyendo los entornos de su vértice común). Cada recinto  $K_n \subset M$ , así como cada círculo también  $U(z) \subset M$ , solamente se corta

con una cantidad finita de recintos de  $M$ . Como las fronteras de los recintos  $K_n$  y  $U(z)$  son curvas regulares analíticas, éstas pueden cortarse entre sí solamente en una cantidad finita de puntos y, por consiguiente, cada uno de los recintos pertenecientes a  $M$  se divide en una cantidad finita de recintos por todos los recintos de la familia  $M$  que tienen puntos interiores comunes con el recinto en cuestión.

Esto mismo es cierto también para los sectores que forman  $K_n$ , puesto que la frontera de cada sector consta de una cantidad finita (de tres) curvas regulares analíticas. Los recintos cerrados mencionados (las partes de los recintos  $K_n$  y  $U(z)$ ) en su conjunto cubren todo el recinto  $G$ ; además, cada conjunto cerrado  $F \subset G$  se cubre por una cantidad finita de ellos y ningún par de éstos tiene puntos interiores comunes. Consideraremos el conjunto de estos recintos cerrados como un *parquet* (o mosaico) que cubre el recinto  $G$ , y cada recinto por separado, como una *tarima* de dicho *parquet*. Según la construcción,  $z = f(w)$  determina un homeomorfismo de cada tarima del *parquet* sobre cierto recinto cerrado del plano ampliado  $z$ . La transformación también es homeomorfa en los entornos de los puntos frontera, a excepción de los puntos  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ .

No queda más que dividir cada una de las tarimas del *parquet* en triángulos, para obtener una triangulación del recinto  $G$  (o sea, del *parquet* triangular) que satisfaga a las condiciones planteadas. Obsérvese que cada tarima del *parquet* tiene frontera común con una cantidad finita de tarimas. Por consiguiente, su frontera consta de una cantidad finita de arcos (o lados), cada uno de los cuales es una componente conexa de la parte común de las fronteras de dos tarimas. A los puntos iniciales y finales de estos arcos los llamaremos *vértices del parquet* y, cuando la cantidad de vértices de alguna tarima sea menor que tres, completaremos la cantidad de vértices hasta tres, dividiendo con puntos algún lado en dos o tres nuevos lados. Finalmente, fijemos dentro de las tarimas sendos puntos y unamos todos estos puntos mediante arcos de Jordan con todos los vértices de la tarima a que pertenece el punto dado. Exigiremos también que los arcos de una misma tarima no teugan otros puntos comunes más que el inicial y que estén contenidos dentro de la tarima, a excepción de sus extremos, que son los vértices de la tarima. Precisamente estos arcos dividirán la tarima en triángulos, que en su conjunto forman la triangulación pedida.

En resumen, hemos demostrado que toda función meromorfa  $z = f(w) \not\equiv \text{const}$  en un recinto  $G$  del plano ampliado  $w$  realiza una transformación interior de este recinto  $G$  en el plano ampliado  $z$  y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Si  $z = f(w)$  y  $z = F(w)$  son dos funciones meromorfas en un mismo recinto, entonces las superficies



de Riemann correspondientes serán idénticas cuando, y sólo cuando, existe un homeomorfismo  $w' = \varphi(w)$  del recinto  $G$  sobre sí mismo tal, que  $f(w')$  se transforma en  $F(w)$ , es decir, que

$$f\varphi(w) = F(w).$$

De aquí se deduce que  $\varphi(w) = f^{-1}F(w)$ , o sea,  $\varphi(w)$  también es una función meromorfa y, por consiguiente, el homeomorfismo  $w' = \varphi(w)$  es una transformación conforme del recinto  $G$  sobre sí mismo. Por lo tanto, para el recinto dado  $G$ , determinan la misma superficie de Riemann que la función  $z = f(w)$  solamente las funciones de la forma  $z = f\varphi(w)$ , donde  $w' = \varphi(w)$  realiza una transformación conforme del recinto  $G$  sobre sí mismo.

La superficie de Riemann correspondiente y su modelo  $S$ , se llaman superficie de Riemann de la función  $z = f(w)$ , o también superficie de Riemann de la función inversa  $w = f^{-1}(z)$ . La última denominación se debe a que la superficie  $S$  se emplea ordinariamente para estudiar en ella la función inversa a la dada.

Ocurre pues, que  $w = f^{-1}(z)$ , considerada como función de la variable compleja  $z$ , es decir, en la esfera, es multiforme (claro, si se excluye el caso elemental en que la función  $z = f(w)$  sea univalente en el recinto  $G$ ). Considerándola como función del punto en la superficie de Riemann  $S$ , ésta resulta uniforme.

En efecto, para caracterizar los puntos de la superficie  $S$  no basta señalar sus proyecciones  $z$ , sino que también hay indicar el número (o índice) del triángulo  $\delta_j$  a que pertenecen. El triángulo  $\delta_j$  es la imagen homeomorfa de un triángulo determinado  $\Delta_j$  y, por consiguiente, al punto  $z \in \delta_j$  le corresponde un punto determinado  $w \in \Delta_j$ , el cual es el valor de la función  $f^{-1}(z)$  en el punto dado de la superficie de Riemann. El valor de la función en el triángulo de la esfera, sobre el cual está situado el triángulo  $\delta_j \subset S$ , representa una rama uniforme de la función  $f^{-1}(z)$  en este triángulo. *La determinación de la superficie de Riemann por la función  $f^{-1}(z)$  no sólo revela todo el conjunto de las ramas uniformes de la función multiforme, sino que hace que sea geoméricamente perceptible su relación mutua.*

La transformación  $z = f(w)$  no es homeomorfa en cualquier entorno de cada uno de los puntos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ , o sea, de los ceros de  $f'(w)$  o en los polos múltiples de  $f(w)$ . Para todos los demás puntos del recinto  $G$  existen entornos en los que esta transformación es homeomorfa. De aquí se deduce (véase el ap. 3.2) que todos los puntos de ramificación de la superficie  $S$  están situados sobre las imágenes de los puntos  $\alpha_n$ :  $f(\alpha_n) = A_n$ , es decir, sobre las imágenes de los ceros de  $f'(w)$  y de los polos múltiples de  $f(w)$ . Supongamos que en un entorno del punto  $\alpha_n$  la función  $f(w)$  posee



un desarrollo de la forma:

$$A_n + a_k (w - \alpha_n)^k + a_{k+1} (w - \alpha_n)^{k+1} + \dots \quad (a_k \neq 0, |k| \geq 1)$$

(si  $A_n = \infty$ , aquí no se escribe  $A_n$ ). Entonces, cada valor  $z \neq A_n$ , situado en un entorno suficientemente pequeño del punto  $A_n$ , la función  $f(w)$  lo toma en  $|k|$  puntos distintos de un entorno del punto  $\alpha_n$ . Por consiguiente, el punto de ramificación de la superficie  $S$  que corresponde a  $\alpha_n$  y que está situado sobre  $A_n$ , es de orden  $|k| - 1$ . Para la función inversa misma  $w = f^{-1}(z)$  el punto  $A_n$  también es un punto de ramificación (algebraico) en el sentido explicado en el ap. 5.2, cap. II. Precisando, el ciclo de triángulos  $\Delta_{j_1}, \dots, \Delta_{j_p}$  de la triangulación del recinto  $G$ , que tienen un vértice común  $\alpha_n$ , se transforma mediante  $z = f(w)$  en un ciclo de triángulos  $\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_p}$  de la superficie  $S$  con el vértice común  $A_n$ . El último ciclo es un recubrimiento  $|k|$ -ple de cierto entorno del punto  $A_n$ . Si se fija en cada uno de los triángulos  $\delta_{j_1}, \dots, \delta_{j_p}$  la rama uniforme de la función  $f^{-1}(z)$  que transforma este triángulo en el triángulo correspondiente del ciclo  $\Delta_{j_1}, \dots, \Delta_{j_p}$ , entonces, al hacer un recorrido el punto  $z$  alrededor de  $A_n$  estas ramas se irán convirtiendo continuamente una en otra a medida que el punto en  $S$ , situado sobre  $z$ , va desplazándose del triángulo  $\delta_{j_1}$  a  $\delta_{j_2}$ , de  $\delta_{j_2}$  a  $\delta_{j_3}$ , etc.

Cuando el punto  $z$  da  $|k|$  vueltas en la esfera en un mismo sentido alrededor de  $A_n$ , el punto de la superficie situado sobre él recorrerá todos los triángulos (cada uno de ellos una sola vez) con el vértice común en el punto considerado de ramificación y volverá a la posición inicial en el triángulo  $\delta_{j_1}$ . A la vez, las ramas de la función inversa volverán a la rama inicial. Vemos, pues, que el concepto de punto de ramificación de una superficie de Riemann y el concepto introducido anteriormente de punto algebraico de ramificación de una función multiforme están estrechamente ligados entre sí. El primero es la imagen geométrica del segundo.

3.5. Obsérvese que la superficie  $S$  es homeomorfa al recinto  $E = G$ . Por esto, pueden obtenerse todas las propiedades de la función  $f^{-1}(z)$  que se observan al estudiarla en  $S$ , considerando solamente el recinto  $G$  triangulado del mismo modo que se indicó en el ap. 3.4, es decir, dividido en recintos de univalencia de la función  $z = f(w)$ , cuyas posiciones relativas satisfacen a las condiciones que se imponen a una triangulación en general. En el § 5 del cap. II, estudiando las funciones multiformes que son inversas a las funciones elementales enteras y meromorfas, también utilizamos el método de división del recinto dado en recintos de univalencia, sin exigir para ello que estos recintos proporcionen una triangulación del recinto. En efecto, para el estudio de la función inversa la triangula-

ción última es superflua. Pero después de que se ha establecido que una función meromorfa siempre realiza una transformación interior, en cada caso concreto en que se necesite construir el modelo de la superficie de Riemann correspondiente podemos negarnos de la triangulación y entarimar el recinto dado  $G$  con un parquet de cualquier forma, con la condición de que  $f(w)$  sea univalente en cada tarima de este parquet. Designando estas tarimas, igual que anteriormente, con  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , y sus imágenes  $f(\Delta_j)$  con  $\delta_j$ , el modelo de la superficie de Riemann  $S$  se formará por el conjunto de todas las  $\{\delta_j\}$ , donde se deben pegar entre sí las fronteras de distintas  $\delta_j$  en aquellas partes que son las imágenes de las partes comunes de las fronteras de las  $\Delta_j$  correspondientes.

Explicaremos lo expuesto en unos cuantos ejemplos concretos.

1) Sea  $G$  el plano ampliado y  $z = w^m$  ( $m$  es un número natural  $> 1$ ). Dividamos  $G$ , con rayos que partan del origen de coordenadas, en  $2m$  ángulos iguales:  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{2m}$ . En cada uno de los recintos cerrados  $\bar{\Delta}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2m$ ) la función  $w^m$  es univalente. Supongamos, para precisar, que uno de estos rayos coincide con la parte positiva del eje real, y sea  $\Delta_1$  el ángulo  $0 < \arg z < \frac{\pi}{m}$ .

Entonces las imágenes  $\bar{\delta}_j$  de los recintos cerrados  $\bar{\Delta}_j$  serán los semiplanos superior e inferior  $w$ ; además,  $\bar{\delta}_j$  con subíndices impares designarán los semiplanos superiores y con subíndices pares, los inferiores. Para obtener el modelo pedido de superficie de Riemann no queda más que pegar entre sí las fronteras de dichos semiplanos por el mismo esquema con que se unen entre sí las fronteras de los recintos  $\Delta_j$ . Si la parte positiva del eje real que figura en la frontera del semiplano  $\delta_j$ , se designa con  $j_+$ , y la parte negativa con  $j_-$ , entonces  $1_-$  se debe pegar con  $2_-$ ,  $2_+$  con  $3_+$ ,  $\dots$ ,  $(2m-1)_-$  con  $2m_-$  y, finalmente,  $2m_+$  con  $1_+$ . Este esquema de pegar un semiplano con otro se muestra en la fig. 66, donde se ha tomado  $m = 4$ . Como resultado se obtiene sobre la esfera una superficie de  $m$  hojas con dos puntos de ramificación de orden  $m-1$ , situados sobre  $z = 0$  y  $z = \infty$ . Este es el modelo de la superficie de Riemann de la función  $\sqrt[m]{z}$ .

En esta superficie la función  $\sqrt[m]{z}$  es uniforme y analítica en todos los puntos, a excepción del punto de ramificación que está situado sobre  $z = \infty$ , en el cual tiene un polo.

2) Sea  $G$  el plano finito y  $z = e^w$ . Dividamos  $G$  con rectas paralelas al eje real en franjas de anchura  $\pi$  cada una. Supongamos, para precisar, que una de estas rectas es el eje real. Designemos con  $\Delta_1$  la franja  $0 < y < \pi$  y numeremos las franjas según su orden; las que están situadas sobre  $\Delta_1$  con números enteros crecientes y las que están situadas bajo  $\Delta_1$ , con números enteros decrecientes. En el caso dado las franjas cerradas  $\bar{\Delta}_j$  no están contenidas completamente en el

recinto  $G$ ; excluirémos de éstas el punto frontera  $w = \infty$ . Entonces, en los conjuntos  $\overline{\Delta_j} \setminus \infty$  la función  $e^w$  será univalente. Esta transforma cada uno de éstos en un semiplano cerrado  $z$  del cual se han excluido los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$ . En este caso, a la franja de subíndice impar le corresponde el semiplano superior, y a la franja de subíndice par, el inferior. No queda más que pegar entre sí el conjunto infinito numerable de semiplanos superiores e inferiores  $\delta_j$  ( $j = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ) por el esquema según el

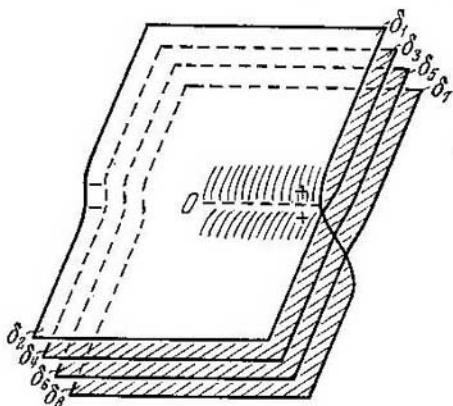


FIG. 66.

cual vienen unidas entre sí las franjas  $\Delta_j$ . El esquema correspondiente se muestra en la fig. 67; éste es análogo al esquema de la fig. 66, pero el conjunto de recintos  $\delta_j$  es infinito y entre éstos no hay primero ni último, por lo cual ya no se puede cerrar toda la superficie como antes se hacía, pegando el último con el primero. Resulta, pues, una superficie de infinitas hojas cuyos puntos están situados sobre todos los puntos de la esfera, excluyendo  $z = 0$  y  $z = \infty$ . Sobre estos últimos no hay ningún punto de la superficie construida. (Obsérvese que esta superficie no contiene ningún punto de ramificación, pues la función  $z = e^w$  es univalente en un entorno de cada punto del recinto  $G$ ).

La superficie obtenida representa el modelo de la superficie de Riemann de la función  $\text{Ln } z$ . Sobre ésta, la función  $\text{Ln } z$  es uniforme y analítica en todos los puntos sin excepción.

3) Sea  $G$  el plano finito y  $z = \text{sen } w$ . Dividamos  $G$  con rectas paralelas al eje imaginario, primero en franjas de anchura  $\pi$  y después, con el eje real, en semifranjas. Supongamos, para precisar, que una de las franjas es simétrica respecto del eje imaginario.

Llamemos  $\Delta'_1$  a la semifranja superior  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$ , y numeremos según su orden las semifranjas del semiplano superior: las que están situadas a la derecha de  $\Delta'_1$  con números enteros crecientes y las que están a la izquierda, con números enteros decrecientes. Resultan las semifranjas  $\Delta'_j$ ,  $j = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ . Del mismo modo, llamando  $\Delta''_1$  a la semifranja inferior

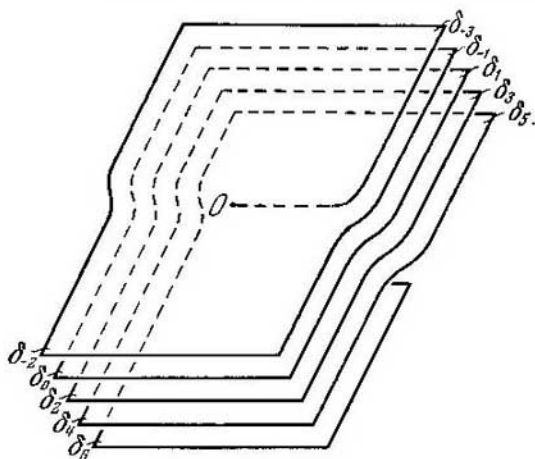


FIG. 67.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y < 0$ , numeremos las semifranjas del semiplano inferior que están situadas a la derecha de  $\Delta''_1$  con números enteros crecientes y las que están a la izquierda, con números enteros decrecientes. Resultan las semifranjas  $\Delta''_j$ ,  $j = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ . Las semifranjas cerradas  $\bar{\Delta}_j$  y  $\bar{\Delta}''_j$  no están contenidas completamente en el recinto  $G$ ; excluirémos de ellas el punto  $z = \infty$ . Entonces obtenemos los conjuntos  $\bar{\Delta}_j \setminus \infty$  y  $\bar{\Delta}''_j \setminus \infty$ , en cada uno de los cuales la función  $z = \operatorname{sen} w$  es univalente. La función  $z = \operatorname{sen} w$  transforma estos conjuntos en los semiplanos superior e inferior cerrados, respectivamente, de los cuales se excluye el punto  $z = \infty$ . Los semiplanos superiores son las imágenes de las semifranjas  $\Delta_j$  de subíndices impares y de las semifranjas  $\Delta''_j$  de subíndices pares; los semiplanos inferiores son las imágenes de las semifranjas  $\Delta_j$  de subíndices pares y de las semifranjas  $\Delta''_j$  de subíndices impares. No queda más que pegar entre sí el conjunto infinito numerable de semiplanos superiores e inferiores  $\delta'_j$ ,  $\delta''_j$  por el mismo

esquema según el cual están unidos entre sí las semifranjas  $\Delta'_j$  y  $\Delta''_j$  (véase la fig. 68). Resulta, pues, una superficie de infinitas hojas que se extiende sobre toda la esfera, a excepción de un punto  $z = \infty$ , sobre el cual no está situado ningún punto de la superficie. Como sen  $w$  no toma nunca el valor  $\infty$  y su derivada, cos  $w$ , se anula para  $w = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , todos los puntos de ramificación están situados sobre los puntos de la esfera sen  $(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \pm 1$ .

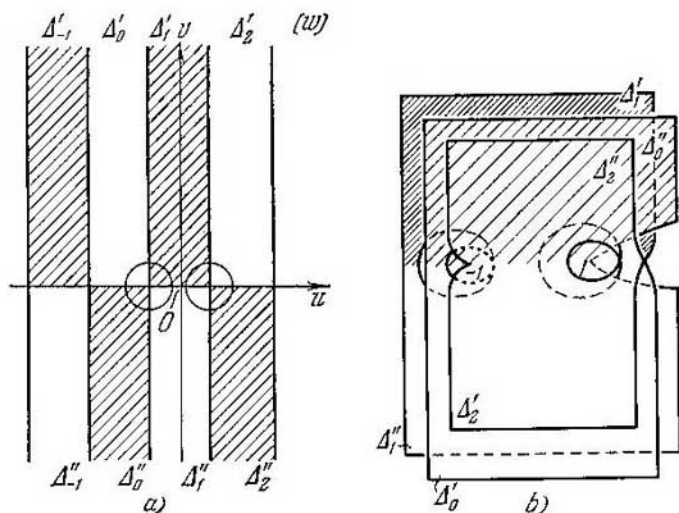


FIG. 68.

El conjunto de estos puntos en la superficie es infinito; el orden de cada uno de ellos es 1 (puesto que el seno toma doblemente los valores  $\pm 1$  en los puntos  $\frac{\pi}{2} + n\pi$ ). En la fig. 68, b están representados dos puntos de ramificación, los cuales son las imágenes de  $w = -\frac{\pi}{2}$  y  $w = \frac{\pi}{2}$ . La superficie construida es el modelo de la superficie de Riemann Arc sen  $z$ . Esta función es uniforme y analítica en todos los puntos de la superficie sin excepción.

4) Sea  $G$  el plano finito y  $z = \wp(w)$ . Supongamos, para simplificar, que los períodos fundamentales de la función  $\wp(w)$  son el

número real  $2\alpha$  y el número imaginario puro  $2i\beta$ . Dividamos todo el plano en una red de rectángulos congruentes al rectángulo  $0 < x < 2\alpha$ ,  $0 < y < 2\beta$ , y dividamos luego cada uno de estos rectángulos en cuatro rectángulos pequeños iguales entre sí. Ya sabemos (ap. 6.3, cap. VII) que la función  $\wp(w)$  es univalente en el rectángulo cerrado  $0 \leq x \leq \alpha$ ,  $0 \leq y \leq \beta$ , y transforma a éste en el semiplano inferior cerrado de tal modo que los homólogos a los vértices del rectángulo  $0, \alpha, \alpha + i\beta, i\beta$  son los puntos del eje real  $\infty, e_1, e_2$  y  $e_3$ . En general, rayando los rectángulos pequeños en el orden del ajedrez, comenzando por el que acabamos de examinar, resulta

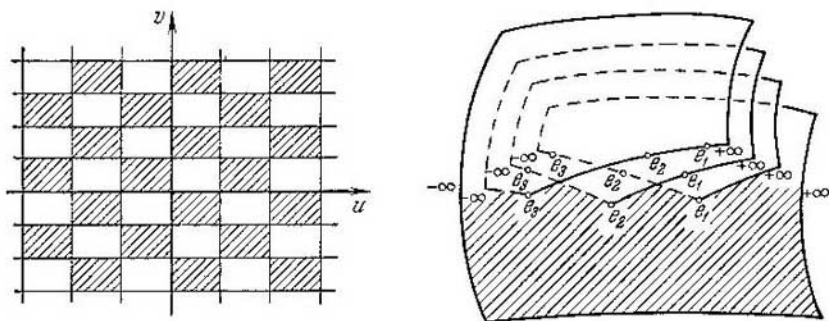


FIG. 69.

que todos los rectángulos rayados se transforman mediante  $z = \wp(w)$  en el semiplano inferior, y los no rayados, en el semiplano superior. Para obtener el modelo de la superficie de Riemann para la función que es inversa a  $z = \wp(w)$ , o sea, para la integral elíptica

$$w = \int_{\infty}^z \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

es necesario pegar entre sí un conjunto infinito numerable de ejemplares de semiplanos superiores e inferiores por el esquema según el cual están unidos unos con otros los rectángulos pequeños.

En la fig. 69 se muestran ambos esquemas; en la parte de la derecha del dibujo vemos cómo se pega un ejemplar del semiplano inferior con cuatro ejemplares de semiplanos superiores. Esto corresponde al método de unión de un rectángulo rayado con los cuatro contiguos que no están rayados. Como resultado se obtiene una superficie de infinitas hojas que se extiende sobre toda la esfera.

Como  $z = \infty$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  son valores múltiples de  $z = \wp(w)$ , y además, dobles (correspondientes a los polos dobles de  $\wp(w)$  o a los ceros simples de  $\wp'(w)$ ), los puntos de ramificación del modelo de la superficie de Riemann considerada están situados sobre los puntos de la esfera  $\infty$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ . El orden de cada uno de ellos es igual a la unidad; además, sobre cada uno de los puntos indicados de la esfera hay un conjunto infinito numerable de puntos de ramificación de la superficie (que corresponde a que la función  $\wp(w)$  toma cada uno de los valores múltiples en un conjunto infinito de puntos distintos). La función

$$w = \int_{\infty}^z \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

es uniforme y analítica en toda la superficie construida.

#### § 4. PROLONGACION ANALITICA. FUNCION ANALITICA COMPLETA E IMAGEN ANALITICA

4.1. Sean  $G$  y  $D$  dos recintos del plano ampliado  $z$  y supongamos que  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  son dos funciones uniformes y analíticas en estos recintos. Se dice que estas funciones son la *prolongación analítica inmediata una de la otra*, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- los recintos  $G$  y  $D$  tienen al menos un punto común;
- existe un recinto  $g$  que está contenido tanto en el recinto  $G$  como en el recinto  $D$ , en cuyos puntos  $f(z) = \varphi(z)$ .

En virtud del teorema interior de unicidad,  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  tienen que coincidir en todos los puntos de la componente conexa  $g'$  de la intersección de los recintos  $G$  y  $D$ , que contiene al recinto  $g$ . Pero la intersección de los recintos  $G$  y  $D$  puede no ser conexa; entonces, en las demás componentes puede no cumplirse la igualdad  $f(z) = \varphi(z)$ .

Como ejemplo, consideremos el recinto  $G$  cuya frontera es la semirrecta  $-\infty \leq x \leq 0$ ,  $y = 0$ , y el recinto  $D$  cuya frontera es la semirrecta  $0 \leq x \leq +\infty$ ,  $y = 0$ . Sea  $f(z) = \ln |z| + i\theta$ , donde  $\theta$  es el valor del argumento del punto  $z$  que satisface a la condición  $-\pi < \theta < \pi$ , y  $\varphi(z) = \ln |z| + i\alpha$ , donde  $\alpha$  es el valor del argumento del punto  $z$  que satisface a la condición  $0 < \alpha < 2\pi$ ; estas funciones son uniformes y analíticas en los recintos correspondientes. Los recintos  $G$  y  $D$  tienen puntos comunes que en su conjunto forman dos recintos distintos: los semiplanos superior e inferior. En este último los valores de  $\theta$  y  $\alpha$  están ligados en cada punto por la relación

$$\alpha = \theta + 2\pi,$$



de donde se deduce que en estos puntos  $f(z) \neq \varphi(z)$ . Está claro que en el semiplano superior  $g$  se tiene:

$$\alpha = \theta \quad \text{y} \quad \varphi(z) = f(z).$$

De todo lo expuesto se deduce que  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  son la prolongación analítica inmediata una de la otra.

Modifiquemos un poco este ejemplo. Sin variar los recintos  $G$  y  $D$  y la función  $f(z)$ , tomemos en el recinto  $D$  en lugar de  $\varphi(z) = \ln |z| + i\alpha$  otra función  $\psi(z) = \ln |z| + i\beta$ , donde  $\beta$  es el valor del argumento  $z$  que satisface a la condición  $-\pi < \beta \leq 0$ . Como  $\beta$  y  $\alpha$  están ligados en todos los puntos del recinto  $D$  por la relación

$$\alpha = \beta + 2\eta,$$

se tiene,  $\varphi(z) \neq \psi(z)$  en todos los puntos del recinto  $D$ . Pero en el semiplano inferior,  $\beta = \theta$  y, por consiguiente,  $f(z) = \psi(z)$ . Así, pues,  $f(z)$  son prolongaciones inmediatas una de la otra, mientras que  $\varphi(z)$  y  $\psi(z)$  (definidas en recintos coincidentes) no son prolongaciones inmediatas una de la otra.

Generalicemos el concepto de prolongación inmediata; sean  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  dos funciones analíticas en los recintos arbitrarios  $G$  y  $D$ , respectivamente. Diremos que cada una de éstas es la *prolongación analítica* de la otra (sin el epíteto «inmediata»), si existe una cantidad finita de recintos  $G_0 = G, \dots, G_n = D$  y en ellos sendas funciones analíticas  $f_0(z) = f(z), \dots, f_n(z) = \varphi(z)$ , tales que  $f_k(z)$  es la prolongación inmediata de  $f_{k-1}(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Al conjunto formado por el recinto  $G$  y la función uniforme y analítica en el mismo  $f(z)$ , lo llamaremos *elemento*  $\{G, f(z)\}$  (ya empleamos este término en el cap. III para el caso particular en que  $G$  es un círculo) y diremos que el recinto  $G$  es el *campo del elemento*. Al sistema de elementos

$$\{G_0, f_0(z)\}, \dots, \{G_n, f_n(z)\},$$

donde  $f_k(z)$  es la prolongación inmediata de  $f_{k-1}(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), lo llamaremos *cadena de elementos que une*  $\{G_0, f_0(z)\}$  y  $\{G_n, f_n(z)\}$ . Se puede decir que dos elementos son la prolongación analítica uno de otro\*), si existe una cadena de elementos que los une.

Como ejemplo, consideremos el conjunto de recintos  $G_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) determinados por las condiciones

$$\pi k < \theta_k < \pi(k + 2),$$

\*) A continuación se considerarán equivalentes las expresiones: «prolongación de una función  $f(z)$  que es uniforme y analítica en el recinto  $G$ » y «prolongación del elemento  $\{G, f(z)\}$ ».

donde  $\theta_h = \theta_h(z)$  es el valor correspondiente de  $\text{Arg } z$ , y en cada uno de los recintos  $G_h$  la función  $f_h(z) = \ln |z| + i\theta_h(z)$ . El lector puede comprobar fácilmente que dos funciones cualesquiera  $f_\mu(z)$  y  $f_m(z)$  son prolongación analítica una de la otra. Además, si para precisar se supone que  $m > \mu$  y  $m = \mu + p$ , entonces  $\{G_\mu, f_\mu(z)\}, \dots, \{G_m, f_m(z)\}$  forman una cadena de  $p + 1$  elementos que une  $\{G_\mu, f_\mu(z)\}$  y  $\{G_m, f_m(z)\}$ .

De las definiciones dadas se deduce inmediatamente que la relación de prolongación analítica entre los elementos posee las siguientes propiedades:

a) propiedad reflexiva: cada elemento es la prolongación analítica de sí mismo;

b) propiedad simétrica: si el elemento  $\{D, \varphi\}$  es la prolongación del elemento  $\{G, f\}$ , entonces el elemento  $\{G, f\}$  es la prolongación del elemento  $\{D, \varphi\}$ ;

c) propiedad transitiva: si el elemento  $\{D, \varphi\}$  es la prolongación del elemento  $\{G, f\}$ , y el elemento  $\{E, \psi\}$  es la prolongación del elemento  $\{D, \varphi\}$ , entonces el elemento  $\{E, \psi\}$  es la prolongación del elemento  $\{G, f\}$ .

4.2. Consideremos ahora el conjunto de todos los elementos posibles, es decir, de todos los recintos del plano ampliado y de todas las funciones uniformes y analíticas en los recintos correspondientes. Podemos dividirlos en clases, considerando que dos elementos pertenecen a una misma clase cuando, y sólo cuando, uno es la prolongación del otro. Es obvio que cada elemento pertenece a alguna clase, y también que cada elemento  $\{G, f\}$  de una clase  $K$  caracteriza por completo a esta clase, en el sentido de que cualquier elemento  $\{D, \varphi\}$  pertenece a la clase  $K$  si es prolongación del elemento  $\{G, f\}$ , y no pertenece a dicha clase en caso contrario.

Diremos que cada una de las clases indicadas  $K$  define una *función analítica completa*  $F(z)$ ; aquí, distintas clases definen distintas funciones analíticas completas. El elemento  $\{G, f\} \in K$  se llama *elemento de la función*  $F(z)$  o también *rama uniforme de la función*  $F(z)$  en el recinto  $G$  (ya empleamos este término en casos particulares). A los valores de los elementos de la función  $F(z)$  los llamaremos valores de esta función.

Sea  $F(z)$  una función analítica completa y sea  $M$  el conjunto de todos los puntos pertenecientes a los campos de los elementos de esta función. Está claro que este conjunto no es vacío, puesto que no es vacía la clase  $K$  determinada por  $F(z)$ . Por otra parte, éste es abierto, pues, si  $z_0 \in M$ , entonces  $z_0$  es un punto de cierto recinto  $G$  que figura en el elemento  $\{G, f\} \in K$ , por lo cual existe un entorno del punto  $z_0$  que pertenece a  $G$  (y, por consiguiente, a  $M$ ). Finalmente,  $M$  es un conjunto conexo. En efecto, sean  $z_0$  y  $z'$  dos puntos distintos de  $M$ . Supongamos que  $z_0 \in G_0$ , donde  $\{G_0, f_0\} \in K$  y  $z' \in G'$ ,

$\{G', f'\} \in K$ ; según la definición de clase de elementos, tiene que existir una cadena que una  $\{G_0, f_0\}$  y  $\{G', f'\}$ :

$$\{G_0, f_0\}, \dots, \{G_n, f_n\} = \{G', f'\}.$$

Como  $\{G_{k-1}, f_{k-1}\}$  y  $\{G_k, f_k\}$  son prolongaciones inmediatas uno de otro, los recintos  $G_{k-1}$  y  $G_k$  tienen que tener puntos comunes. Sea  $\zeta_k$  un punto común de  $G_{k-1}$  y  $G_k$  y sea  $\gamma_k$  una curva continua, perteneciente a  $G_k$ , que una  $\zeta_k$  con  $\zeta_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Entonces, uniendo también  $z_0$  con  $\zeta_1$  en el recinto  $G_0$  y  $\zeta_n$  con  $z'$  en el recinto  $G_n$  mediante curvas continuas  $\gamma_0$  y  $\gamma_n$ , resulta una curva continua  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  (en cuyo recorrido el extremo de cada arco  $\gamma_k$  ( $k < n$ ) se toma por origen del siguiente arco  $\gamma_{k+1}$ ), perteneciente a  $M$  y que une  $z_0$  con  $z'$ .

Resumiendo:  $M$  es un recinto. Este se llama **campo de existencia** de la función analítica completa  $F(z)$ . Esta denominación se debe a que no existe ningún elemento de la función  $F(z)$  que esté determinado en algún punto no perteneciente al recinto  $M$ .

Antes de examinar ejemplos, introduzcamos otro término conveniente. El elemento  $\{D, \varphi\}$  se llama **subordinado** al elemento  $\{G, f\}$ , si  $D \subset G$  y  $\varphi(z) = f(z)$  ( $z \in D$ ). Esto se escribirá así:  $\{D, \varphi\} \subset \{G, f\}$ . Es evidente que si  $\{D, \varphi\} \subset \{G, f\}$ , entonces estos elementos son prolongación inmediata uno de otro. Por ello, cada clase  $K$  que determina una función analítica completa tiene que contener, además de un elemento  $\{G, f\}$ , también todos los elementos subordinados a  $\{G, f\}$ .

Obsérvese también que si un elemento  $\{D, \varphi\}$  es la prolongación inmediata del elemento  $\{G, f\}$  y  $D \subset G$ , entonces  $\{D, \varphi\} \subset \{G, f\}$ . En efecto, existe un recinto  $g \subset D \subset G$ , en el cual  $f(z) = \varphi(z)$ ; por consiguiente, en virtud del teorema de unicidad  $f(z) = \varphi(z)$  en todos los puntos del recinto  $D$ .

**4.3. Ejemplo 1.** Sea  $f(z)$  una función meromorfa en el plano finito (en particular, entera). Esta es uniforme y analítica en el recinto  $G$  que se obtiene del plano ampliado al excluir los puntos singulares de la función  $f(z)$ , los cuales forman lo más un conjunto infinito numerable con el único punto de acumulación en el infinito.

Demostremos que la clase  $K$  que contiene al elemento  $\{G, f\}$  consta solamente de elementos subordinados a  $\{G, f\}$ . Evidentemente, para ello es suficiente demostrar que toda prolongación inmediata del elemento  $\{G, f\}$  (o del elemento subordinado a él) representa un elemento subordinado a  $\{G, f\}$ . Supongamos lo contrario, y sea  $\{D, \varphi\}$  la prolongación inmediata del elemento  $\{G, f\}$ , sin estar subordinado a este último. Entonces el recinto  $D$  tiene que contener puntos no pertenecientes a  $G$ , es decir, puntos singulares

de la función  $f(z)$ . Sea  $z_0$  uno de éstos. Como la parte común de los recintos  $G$  y  $D$  también es un recinto y  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  coinciden entre sí en un recinto  $g$  perteneciente a esta parte común, resulta que éstas también coinciden entre sí en toda la parte común. Por ello, éstas coinciden en un entorno del punto  $z_0$  (a excepción del punto  $z_0$ ):

$$f(z) = \varphi(z), \quad 0 < |z - z_0| < \rho,$$

y, por consiguiente,  $z_0$  es un punto singular aislado de la función  $f(z)$ . Mas para la función  $\varphi(z)$  este mismo punto es regular, lo cual es imposible. Hemos obtenido una contradicción. Así, pues, todas las prolongaciones analíticas del elemento  $\{G, f\}$  están subordinadas a este elemento. De aquí se deduce que el campo de existencia de la función analítica completa  $F(z)$  determinada por la clase  $K$ , coincide con el recinto  $G$ , y los valores de  $F(z)$  coinciden en todos los puntos con los valores de  $f(z)$  ( $F(z)$  no toma otros valores). Esto permite identificar  $F(z)$  con  $f(z)$  y considerar cada función meromorfa en el plano finito como una función analítica completa.

**Ejemplo 2.** Sea  $G$  algún recinto, cuya frontera conste de una cantidad finita de curvas de Jordan sin puntos comunes entre sí. Demostremos que éste es el campo de existencia de una función uniforme y analítica. Con este fin, consideremos una sucesión de puntos del recinto  $G$  que no tenga puntos de acumulación en el interior de  $G$  y tal que todo punto frontera del recinto  $G$  sea un punto de acumulación de esta sucesión (instamos al lector a que lleve a cabo la construcción de una sucesión semejante).

Según el ap. 3.4, cap. VII, existe en el recinto  $G$  una función uniforme y analítica  $f(z) \not\equiv 0$  que se anula en cada punto de la sucesión. Consideremos el elemento que consta del recinto  $G$  y de la función  $f(z)$ , y demostremos que solamente su elemento subordinado puede ser su prolongación inmediata.

Supongamos lo contrario, y sea  $\{D, \varphi\}$  una prolongación inmediata del elemento  $\{G, f\}$  que no está subordinada a este último. Entonces el recinto  $D$  tiene que contener tanto puntos pertenecientes a  $G$  como puntos no pertenecientes a  $G$ . Examinemos una componente conexa  $g'$  de la intersección de los recintos  $G$  y  $D$ , en la cual sea  $f(z) = \varphi(z)$ . Como  $g'$  no puede coincidir con  $D$ , entre los puntos frontera de  $g'$  tiene que haber puntos interiores del recinto  $D$ . Sea  $\xi_0$  uno de éstos;  $\xi_0$  no puede ser un punto interior del recinto  $G$ , pues en caso contrario  $g'$  podría ampliarse uniéndole cierto entorno del punto  $\xi_0$ . Evidentemente,  $\xi_0$ , siendo un punto de acumulación del recinto  $G$ , es un punto frontera de  $G$ .

Construyamos un entorno  $U_0$  del punto  $\xi_0$ , perteneciente a  $D$ , y sea  $g''$  aquella componente conexa de la intersección de los recintos  $G$  y  $U_0$ , en cuya frontera está situado  $\xi_0$ . Debido a las hipótesis respecto de la frontera del recinto  $G$ , tal componente es única. Por

consiguiente, ésta está contenida en el recinto  $g'$ , para el cual  $\xi_0$  también es un punto frontera. Pero, según la construcción, en el recinto  $g''$  hay un conjunto infinito de ceros de la función  $f(z)$ , los cuales también tienen que ser todos ceros de la función  $\varphi(z)$ . Por ello, el punto  $\xi_0$ , que es interior al recinto  $D$ , es un punto de acumulación de los ceros de la función  $\varphi(z)$ , de donde  $\varphi(z) \equiv 0$  y, por consiguiente,  $f(z) \equiv 0$ . Resulta una contradicción con la hipótesis respecto de la función  $f(z)$ .

Así, pues, todas las prolongaciones inmediatas del elemento  $\{G, f\}$  están subordinadas a este elemento, de donde se deduce que el campo de definición de la función analítica completa correspondiente  $F(z)$  coincide con  $G$ , y todos los valores de  $F(z)$  coinciden con los valores de  $f(z)$ . Por esta razón, podemos identificar la función analítica completa  $F(z)$  con la función uniforme  $f(z)$  en el recinto  $G$ .

En todos los casos semejantes a éste, en los que el campo de definición  $G$  de una función uniforme y analítica  $f(z)$  coincide con el campo de existencia de esta función, la frontera del recinto  $G$  se llama *frontera natural* de la función  $f(z)$ .

Pueden servir de ejemplos elementales de funciones para las cuales la frontera natural es la circunferencia unidad, las sumas de las series de potencias examinadas en el ap. 6.3, cap. III, con puntos singulares que llenan toda la circunferencia unidad (por ejemplo,  $f(z) = \sum z^{2^n}$ ).

**Ejemplo 3.** Consideremos la función multiforme  $\text{Ln } z$  en el recinto  $E: 0 < |z| < \infty$ . En cada recinto simplemente conexo  $G \subset E$  esta función posee un conjunto infinito numerable de ramas uniformes analíticas.

Consideremos todos los recintos simplemente conexos posibles  $G \subset E$  y en cada uno de ellos todas las ramas uniformes analíticas posibles de la función  $\text{Ln } z$ , y demostremos que el conjunto  $K$  de todos los elementos  $\{G, f\}$  forman una clase. En otras palabras, se necesita demostrar que dos elementos cualesquiera de  $K$  son la prolongación uno del otro, y luego, que cualquier elemento que es la prolongación de cierto  $\{G, f\} \in K$ , también pertenece a  $K$ . Supongamos primero que la frontera del recinto  $G$  es el rayo  $0 \leq x < \infty$ ,  $y = 0$ . Entonces, todas las ramas uniformes de la función  $\text{Ln } z$  en este recinto se expresan en la forma  $f_{2k}(z) = \ln |z| + i\theta_{2k}$ , donde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  y  $\theta_{2k}$  es el valor del  $\text{Arg } z$  que satisface a la relación  $2\pi k < \theta_k < 2\pi(k+1)$ . Es obvio, que en este caso  $\{G, f_{2\mu}\}$  y  $\{G, f_{2m}\}$  son la prolongación uno del otro para cualesquiera  $\mu$  y  $m$  (compárese con el ap. 4.1) y, por consiguiente, pertenecen a una misma clase.

Consideremos ahora un recinto arbitrario  $D$  y en el mismo, una rama uniforme  $\varphi(z)$  de la función  $\text{Ln } z$ . Supongamos que  $z_0 \in D$  y que  $z_0$  no pertenece a la frontera del recinto  $G$  (o sea, que no es

un número real no negativo). En un entorno del punto  $z_0$ , que no contenga puntos frontera del recinto  $G$ , la función  $\varphi(z)$  tiene la forma  $\varphi(z) = \ln |z| + i\theta_{2k_0}$  (puesto que todos los valores del  $\text{Arg } z$  en el entorno indicado se agotan con las funciones  $\theta_{2k} = \theta_{2k}(z)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); por ello, en el entorno indicado  $\varphi(z)$  coincide con  $f_{k_0}(z)$ , es decir,  $\{D, \varphi\}$  es la prolongación inmediata del elemento  $\{G, f_{k_0}\}$  y, por consiguiente, pertenece a la misma clase que cualquiera de los elementos  $\{G, f_{2k}\}$ .

Así, pues, todos los elementos del conjunto considerado  $K$  pertenecen a una misma clase. No queda más que demostrar que éstos agotan toda esta clase, para lo cual es suficiente convencerse de que la prolongación inmediata de cualquier elemento de  $K$  pertenece a  $K$ .

Supongamos que  $\{G, f\} \in K$  y que  $\{D, \varphi\}$  es la prolongación inmediata del elemento  $\{G, f\}$ . Evidentemente,  $\{D, \varphi'\}$  también es la prolongación inmediata del elemento  $\{G, f'\}$  (donde  $\varphi'(z)$  y  $f'(z)$  son las derivadas). Pero  $f'(z) = \frac{1}{z}$ ; por lo tanto, también

$\varphi'(z) = \frac{1}{z}$ . De esto se deduce que el recinto  $D$  no puede contener el origen de coordenadas (pues  $\varphi'(z)$  tiene que ser regular en todos los puntos del recinto  $D$ ). Pero éste tampoco puede contener al punto  $z = \infty$ , pues  $\varphi(z)$ , siendo regular en este punto, tendría un desarrollo de Laurent de la forma  $\varphi(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ , de donde  $\varphi'(z) = -\frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \dots \neq \frac{1}{z}$ .

En resumen,  $D$  es un recinto simplemente conexo perteneciente a  $E$ :  $0 < |z| < \infty$ .

Sea  $z_0$  un punto común de los recintos  $G$  y  $D$ , en cuyo entorno  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  coinciden, y sea  $\varphi_0(z)$  una rama uniforme cualquiera de  $\text{Ln } z$  en el recinto  $D$ .

Como  $\varphi(z) - \varphi_0(z) = f(z) - \varphi_0(z) = 2k_0\pi i$  en un entorno del punto  $z_0$  (no olvidemos que  $f(z)$  y  $\varphi_0(z)$  son ramas uniformes de  $\text{Ln } z$  en este entorno), se tiene  $\varphi(z) - \varphi_0(z) = 2k_0\pi i$  en todo el recinto  $D$ . Por consiguiente,  $\varphi(z) = \varphi_0(z) + 2k_0\pi i$  también es una rama uniforme de  $\text{Ln } z$  en el recinto  $D$ , con lo cual se termina la demostración.

Vemos, pues, que el conjunto de todas las ramas uniformes de  $\text{Ln } z$  en todos los recintos simplemente conexos, pertenecientes a  $E$ , coincide con el conjunto de todos los elementos que determinan una función analítica completa. Esto permite hablar de  $\text{Ln } z$  como de una función analítica completa con el campo de existencia  $0 < |z| < \infty$ .

4.4. Si el recinto  $G$  es un círculo  $|z - z_0| < r$  o la parte exterior al círculo  $|z| > r$ , entonces una función analítica  $f(z)$  en este

recinto se expresa en forma de una serie convergente

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{o sea} \quad f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{respectivamente.}$$

En cada uno de estos casos el elemento  $\{G, f\}$  se caracteriza por completo por la serie de potencias dada y por el radio  $r$  del círculo, en cuyo interior o exterior se considera la suma de una de las series. Tales elementos los llamaremos *c i r c u l a r e s*. A continuación, hablando de elementos circulares, no señalaremos ordinariamente el radio  $r$ , suponiendo que éste toma uno de los valores que corresponden a las condiciones del problema en cuestión (por ejemplo, un valor suficientemente pequeño) y que garantizan la convergencia de la serie de potencias. Demostremos que, utilizando solamente elementos circulares, se puede introducir el concepto de función analítica completa del mismo modo que se hizo anteriormente para los elementos correspondientes a recintos de forma arbitraria.

Sea  $K$  la clase de todos los elementos posibles que determinan una función analítica completa  $F(z)$ , y sea  $k$  la subclase de la misma que consta solamente de elementos circulares. Esta subclase (e incluso cualquiera de sus elementos) determina unívocamente toda la clase  $K$  y, por consiguiente, determina la misma función analítica completa. Esta última afirmación debe entenderse no sólo en el sentido abstracto de que, una vez dada  $k$  siempre se puede averiguar si un elemento cualquiera dado pertenece a la clase  $K \subset k$  o no pertenece, sino que en el sentido de que todo elemento no circular de  $K$  (es decir, toda rama uniforme de la función  $F(z)$  en cierto recinto  $G$ ) puede expresarse mediante elementos de  $k$ . En efecto, los desarrollos de esta rama en series de potencias en los entornos de distintos puntos del recinto  $G$  son, evidentemente, elementos circulares de  $k$ . Representando  $G$  en forma del límite de una sucesión de recintos crecientes  $\{G_n\}$  y observando que cada uno de los conjuntos cerrados  $\overline{G}_1, \overline{G} \setminus \overline{G}_1, \dots, \overline{G}_{n+1} \setminus \overline{G}_n, \dots$ , que en su conjunto cubren a  $G$ , puede a su vez cubrirse por una cantidad finita de círculos pertenecientes a  $G$ , hallamos que para la representación de la rama dada es suficiente no más que un conjunto numerable de elementos circulares. Basándose en todas estas observaciones, al definir una función analítica completa podemos considerar solamente elementos circulares.

Generalicemos el concepto de elemento circular, incluyendo para ello también aquellas series de potencias generalizadas que se obtienen al invertir las series de la forma  $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  o  $\sum_0^{\infty} a_n z^{-n}$  (véase el ap. 5.1, cap. IV). Precizando, vamos a considerar las



series siguientes:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{v}}, \quad \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{-\frac{n}{v}}, \quad (4.4:1)$$

donde  $m$  es entero y  $v$  es un número natural, en los recintos de la forma  $|z - z_0| < r$  y  $|z| > r$ , respectivamente. Diremos que un elemento de la forma (4.4:1) está escrito en forma canónica, si  $a_m \neq 0$  y las fracciones del conjunto  $\left\{ \frac{n}{v} \right\}$ , escritas para aquellos valores de  $n$  para los cuales  $a_n \neq 0$ , no pueden simplificarse por un mismo número (mayor que la unidad). Suponiendo que el elemento está escrito en forma canónica, llamémosle no ramificado si  $v = 1$ , y ramificado si  $v > 1$ . Al número  $v - 1$  lo llamaremos orden de ramificación del elemento. Al punto  $z_0$  (respectivamente,  $\infty$ ) lo llamaremos centro del elemento; diremos que  $r$  es el radio del elemento y que  $|z - z_0| < r$  ( $0 < |z| > r$ , respectivamente) es el círculo del mismo. Un elemento no ramificado se llama regular si  $m \geq 0$ . Los elementos no regulares se llaman irregulares.

Extendamos el concepto de prolongación analítica a los elementos generalizados. Evidentemente, es suficiente extender el concepto de prolongación analítica inmediata al caso de elementos ramificados. Consideremos, para precisar, el elemento

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{v}} \quad (|z-z_0| < r), \quad (4.4:2)$$

expresado en la forma canónica (siendo  $v > 1$ ). Su suma es una función  $v$ -forme en el círculo  $|z - z_0| < r$ . Para cada punto  $z_1$  perteneciente al círculo indicado y distinto de  $z_0$ , existe un entorno  $|z - z_1| < \rho$ , donde  $\rho = \min \{ |z_1 - z_0|, r - |z_1 - z_0| \}$ , en el cual la suma de la serie tiene  $v$  ramas analíticas uniformes. Para fijar una de ellas, es suficiente fijar una de las  $v$  ramas uniformes

de la función  $(z - z_0)^{\frac{1}{v}}$ . Diremos que las ramas uniformes del elemento (4.4:2) en los círculos  $|z - z_0| < \rho$ , donde  $|z_1 - z_0| < r$  y  $z_1 \neq z_0$ , son sus elementos subordinados. Está claro que todos los elementos subordinados de un elemento ramificado son no ramificados y, además, regulares (en los puntos del círculo  $|z - z_0| < r$ , distintos del centro, la suma de la serie (4.4:2) no se hace infinita). Diremos que dos elementos de la forma (4.4:1) son la prolongación inmediata uno del otro, si tienen al menos un elemento subordinado común. Después de esto se formula naturalmente la definición de prolongación analítica para los elementos generalizados y, finalmente, se introduce el concepto de

imagen analítica, que es similar al concepto de función analítica completa. Precizando, dividamos en clases el conjunto de todos los elementos posibles de la forma (4.4:1), colocando en una misma clase a dos elementos cuando, y sólo cuando, éstos son prolongaciones analíticas uno del otro. Respecto de cada clase obtenida diremos que ésta determina una imagen analítica. Excluyendo todos los elementos de ramificación de la clase que determina la imagen analítica, resulta una clase con elementos circulares no ramificados solamente, la cual determina una función analítica completa. Por consiguiente, la imagen analítica se diferencia de la función analítica completa en que se agregan todos los elementos ramificados que son prolongaciones analíticas de los elementos de la función dada.

Así, por ejemplo, las series de potencias que representan todas las ramas uniformes posibles de la función  $\sqrt[n]{z}$ , o sea, las series de la forma

$$\sqrt[n]{z_0} \sum_0^{\infty} \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{z-z_0}{z_0} \right)^n,$$

donde  $z_0$  son números complejos cualesquiera, distintos de 0 y  $\infty$ , determinan una función analítica completa. Agregando al conjunto de los elementos regulares correspondientes los elementos ramifica-

dos, que se expresan por una misma serie degenerada de  $z^{\frac{1}{n}}$  y que, no obstante, se distinguen entre sí según que se trate del entorno del punto  $z = 0$  o  $z \neq \infty$ , obtenemos la imagen analítica, la cual expresa la función multiforme  $\sqrt[n]{z}$  en todo el campo de su definición.

De un modo similar, todas las series de potencias posibles que representan las ramas uniformes de la función  $\text{Arcsen } z$  en los entornos de los puntos  $z_0 \neq \pm 1$  (sobre éstos están situados los puntos de ramificación de  $\text{Arcsen } z$ ), determinan una función analítica completa. Agregando a éstas el conjunto infinito de elementos ramificados

que representan  $\text{Arcsen } z$  en los entornos de los puntos  $\pm 1$  (instamos al lector a que halle estos desarrollos aplicando la fórmula  $\text{Arcsen } z =$

$= \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ), obtenemos la imagen analítica, la cual representa

a la función multiforme  $\text{Arcsen } z$  en todo el campo de su definición. Obsérvese que en el caso de funciones meromorfas en todo el plano o de tales funciones multiformes, inversas a las meromorfas, cuyas superficies de Riemann no tienen puntos de ramificación, la función analítica completa coincide con la imagen analítica.

§ 5. PROLONGACION A LO LARGO DE UNA CURVA. TEOREMA DE MONODROMIA. ESTRELLA RECTILINEA DE UN ELEMENTO. LA IMAGEN ANALITICA COMO SUPERFICIE DE RIEMANN

5.1. Sea  $L: z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) una curva continua y sea  $e$ :

$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  ( $|z - z_0| < r$ ) un elemento circular regular

con el centro en el punto inicial de la curva dada  $z_0 = \lambda(\alpha)$ . Supongamos que para cierto valor del parámetro  $\tau$ ,  $\alpha < \tau \leq \beta$ , se puede señalar un número finito de valores intermedios del parámetro  $t$ :

$t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_k = \tau$  y para cada uno de éstos un elemento circular  $e_j: \sum_0^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n$ , de tal modo que se cumplan las condiciones siguientes:

1)  $e_0 = e$ ;

2)  $e_{j+1}$  es la prolongación inmediata de  $e_j$  ( $j = 0, \dots, k-1$ );

3) el centro del elemento  $e_j$  es el punto  $z_j = \lambda(t_j)$  de la curva  $L$  ( $j = 0, \dots, k$ );

4) cada arco  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$  está cubierto por los círculos de los elementos  $e_j$  y  $e_{j+1}$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ).

En estas condiciones, se dirá que el elemento  $e$  se prolonga analíticamente a lo largo del arco  $L_{[\alpha, \tau]}$  de la curva  $L$  y que la cadena de elementos  $e_0, \dots, e_k$  realiza la prolongación analítica a lo largo del arco indicado; finalmente, el elemento  $e' = e_k$  se llamará resultado de la prolongación del elemento  $e$  a lo largo de este arco.

De la definición se deduce que si la cadena  $e_0, e_1, \dots, e_n$  realiza la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo del arco  $z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \tau$ ), entonces la cadena de elementos  $e_n, e_{n-1}, \dots, e_1, e_0$  realiza la prolongación del elemento  $e_n$  a lo largo del mismo arco, pero recorrido en sentido contrario, siendo el resultado de la prolongación el elemento inicial  $e_0$ .

Obsérvese que toda prolongación analítica se puede considerar como la prolongación a lo largo de cierta curva. Precisando, si el elemento  $e'$  es la prolongación del elemento  $e_0$  y  $e_0, e_1, \dots, e_k = e'$  es una cadena de elementos que liga  $e_0$  con  $e'$ , entonces, uniendo con segmentos rectilíneos los centros de los círculos de cada par de elementos vecinos, resulta una poligonal  $\Lambda$ , a lo largo de la cual la cadena dada realiza la prolongación analítica del elemento  $e_0$ .

La introducción del concepto de prolongación a lo largo del arco de una curva tiene su justificación en el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *El resultado de la prolongación analítica de un elemento  $e$  a lo largo de un arco dado  $[\alpha, \tau]$  de la curva  $L$  no depende de la cadena de elementos que realizan esta prolongación.*

**D e m o s t r a c i ó n .** Sean  $e_0, e_1, \dots, e_k$  y  $e'_0, e'_1, \dots, e'_k$  dos cadenas de elementos que realizan la prolongación de un mismo elemento  $e = e_0 = e'_0$  a lo largo de un arco  $L_{[\alpha, \tau]}$  de la curva  $L$ . Las sumas de las series de potencias, correspondientes a los elementos de una y otra cadena, determinan en este arco dos funciones analíticas  $f(z)$  y  $\varphi(z)$ , por lo general, multiformes. Ahora bien, considerándolas como funciones del parámetro  $t$ , éstas son uniformes. En efecto, supongamos que  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ . Entonces  $z = \lambda(t)$  pertenece al arco que está cubierto por los círculos de los elementos  $e_j$  y  $e_{j+1}$ . Si este punto pertenece solamente a uno de estos dos círculos, por ejemplo, al círculo  $e_j$ , entonces  $f(z)$  se determina como la suma de la serie del elemento  $e_j$ . Si el punto pertenece a la parte común de los dos círculos, entonces para determinar  $f(z)$  se puede tomar cualquiera de las dos series posibles, pues ambas sumas tienen que coincidir en esta parte. Así, pues, cuando el punto  $z$  en la curva se toma junto con su valor correspondiente del parámetro  $t$ , el valor de la función  $f(z)$  se determina de un modo único. La multiformidad de esta función se debe a que un mismo punto de la curva  $L$  puede corresponder a distintos valores de  $t$  y, por consiguiente, puede pertenecer a arcos que están cubiertos por pares distintos de círculos de elementos vecinos de la cadena.

En los puntos de la parte inicial del arco  $L$ , comenzando desde el punto  $z_0$  hasta el primer punto de intersección de  $L$  con la circunferencia  $|z - z_0| = r$  que limita al círculo del elemento  $e$ , ambas funciones  $f(z)$  y  $\varphi(z)$  coinciden. Sea  $T, \alpha < T \leq \tau$ , el extremo superior de aquellos valores del parámetro que, para cada  $t', \alpha \leq t' < T$ , los valores de las funciones  $f(z) = f\lambda(t)$  y  $\varphi(z) = \varphi\lambda(t)$  coinciden en el arco  $L_{[\alpha, \tau]}$ .

Supongamos primero que  $T < \tau$ ; entonces existen unos números  $u$  y  $u'$  tales que  $t_u \leq T \leq t_{u+1}$  y  $t'_{u'} \leq T \leq t'_{u'+1}$ , de modo que  $Z = \lambda(T)$  está situado en el arco que está cubierto por los círculos de los elementos  $e_u$  y  $e_{u+1}$  de una cadena y, a la vez, está situado en el arco que está cubierto por los círculos de los elementos  $e'_{u'}$  y  $e'_{u'+1}$  de otra cadena. Supongamos, para precisar, que  $Z = \lambda(T)$  está situado en el círculo del elemento  $e_u$  de la primera cadena y en el círculo del elemento  $e'_{u'+1} = e'_v$  de la segunda cadena. Entonces  $f(z) = f\lambda(t)$  se expresa en un entorno del punto  $Z = \lambda(T)$  por la serie  $\sum_0^{\infty} \alpha_n (z - Z)^n$ , que está subordinada a la serie  $\sum_0^{\infty} a_n^{(u)} (z - z_u)^n$ , y la función  $\varphi(z) = \varphi\lambda(t)$ , por la serie  $\sum_0^{\infty} \alpha'_n (z - Z)^n$ , que está subordinada a la serie  $\sum_0^{\infty} a_n^{(v)} (z - z_v)^n$ . Como los valores de las funciones  $f\lambda(t)$  y  $\varphi\lambda(t)$ , según la hipótesis: coinciden para todos

los valores de  $t$ :  $\alpha \leq t < T$ , resulta, en virtud del teorema de unicidad, aplicado a las series  $\sum_0^{\infty} \alpha_n (z - Z)^n$  y  $\sum_0^{\infty} \alpha'_n (z - Z)^n$ , que estas series son idénticas y, por consiguiente, los valores de las funciones  $f\lambda(t)$  y  $\varphi\lambda(t)$  coinciden en cierto entorno del punto  $T$ , lo cual contradice a la definición del punto  $T$  como el extremo superior.

De aquí se deduce que  $T = \tau$ , y luego, aplicando el razonamiento que acabamos de exponer a las series

$$\sum_0^{\infty} a_n^{(h)} (z - \zeta)^n \quad \text{y} \quad \sum_0^{\infty} a_n'^{(h')} (z - \zeta)^n, \quad \text{donde} \quad \zeta = \lambda(\tau),$$

deducimos que estas series son idénticas. Pero las series indicadas representan los elementos  $e_k$  y  $e_{k'}$ ; por consiguiente, el teorema de la coincidencia de estos elementos queda demostrado \*).

Otra propiedad importante de la prolongación a lo largo de una curva, que se puede considerar como una generalización de la propiedad que acabamos de demostrar, consiste en que el arco, a lo largo del cual se efectúa la prolongación, se puede cambiar entre ciertos límites, sustituyéndolo por arcos de otras curvas que tengan el mismo origen y extremo, sin que por eso varíe el resultado de la prolongación.

Antes de dar el enunciado exacto y demostrar esta proposición, demos demos el siguiente lema:

*L e m a.* Sea  $e$  un elemento arbitrario y supongamos que  $l$  es una curva continua  $z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) perteneciente al círculo  $K$  de este elemento. Entonces el elemento  $e_0$  con el centro en el punto inicial  $z_0$  de la curva  $l$ , es prolongable a lo largo de  $l$  y el resultado de la prolongación es un elemento  $e'$  con el centro en el punto final  $z'$  de la curva  $l$ , que también está subordinado a  $e$ .

Sea  $\rho > 0$  la distancia desde  $l$  hasta la frontera del círculo  $K$  (si esta distancia es igual a  $\infty$ , hacemos  $\rho = 1$ ). Dividamos el segmento  $[\alpha, \beta]$  por los puntos  $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_k = \beta$  en partes tan pequeñas que cada arco  $l_{[t_j, t_{j+1}]}$  quede contenido en el círculo  $|z - z_j| < \rho$ , donde  $z_j = \lambda(t_j)$ ; ahora se cumplen las condiciones  $|z_{j+1} - z_j| < \rho$ . Entonces cada círculo  $|z - z_j| < \rho$  estará contenido en  $K$  y contendrá dentro de sí mismo al arco  $l_{[t_j, t_{j+1}]}$ . En cada uno de estos círculos la suma de la serie que expresa a  $e$  puede desarrollarse en serie de potencias de  $z - z_j$ . La última serie determina el elemento  $e_j$  que tiene el centro en  $z_j$  y está subordinado al elemento  $e$ . Como el centro  $z_{j+1}$  del elemento  $e_{j+1}$  está contenido

\*) Las diferencias posibles entre los radios de los círculos de los elementos  $e_k$  y  $e_{k'}$ , no se tienen en cuenta.

en el círculo del elemento  $\varepsilon_j$  ( $j = 0, 1, \dots, k-1$ ) y en un entorno del punto  $z_{j+1}$  las series  $\varepsilon_{j+1}$  y  $\varepsilon_j$  representan una misma función analítica uniforme (precisamente la suma de la serie del elemento  $e$ ), resulta que  $\varepsilon_{j+1}$  es la prolongación inmediata del elemento  $\varepsilon_j$  y, por consiguiente,  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  forman una cadena de elementos que une el elemento  $\varepsilon_0 = e_0$ , que tiene el centro  $z_0$  y está subordinado al elemento  $e$ , con el elemento  $\varepsilon_k = e'$  que tiene el centro  $z'$  y también está subordinado al elemento  $e$ . Esta cadena realiza la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de  $l$ , puesto que

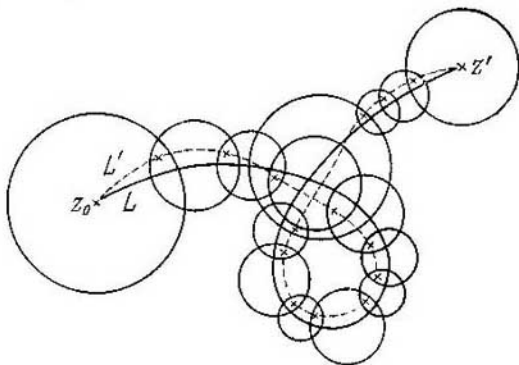


FIG. 70.

los centros  $z_j = \lambda(t_j)$  de los círculos de los elementos de la cadena están todos en  $l$  y el arco  $l_{[t_j, t_{j+1}]}$  se cubre con los círculos de los dos elementos vecinos  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_{j+1}$  (e incluso con el círculo del solo elemento  $\varepsilon_j$ ). Con esto se termina la demostración del lema.

**Teorema 2.** Supongamos que la cadena de elementos  $e_0, e_1, \dots, e_n = e'$  realiza una prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de una curva continua  $L: z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) y sea también  $L': z = \mu(t')$  ( $\alpha' \leq t' \leq \beta'$ ) una curva continua con el origen  $z_0$  y el extremo  $z'$  en  $L$  y tal, que para cierta subdivisión del segmento  $[\alpha', \beta']$

$$\alpha' = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n < t'_{n+1} = \beta'$$

cada punto  $z'_j = \mu(t'_j)$  (excluyendo el origen y el extremo de la curva  $L'$ ) es común para los círculos de los elementos  $\varepsilon_{j-1}$  y  $\varepsilon_j$  y cada arco  $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$  de la curva  $L'$  está contenido en el círculo del elemento  $\varepsilon_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) (fig. 70).

En estas condiciones, el elemento  $e_0$  puede prolongarse a lo largo de  $L'$  y el resultado de la prolongación es el mismo elemento  $e'$ .

**D e m o s t r a c i ó n.** Consideremos los elementos  $e'_j$ , que tienen los centros  $z'_j$  y están subordinados a los elementos correspondientes  $e_j$ . Como  $z'_{j+1}$  está contenido en el círculo del elemento  $e_j$  y  $e_{j+1}$  es la prolongación inmediata del elemento  $e_j$ , se puede elegir  $e'_{j+1}$  de tal manera que éste también esté subordinado al elemento  $e_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ).

Apliquemos el lema al elemento  $e_j$  y a la curva  $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$ , contenida en el círculo de este elemento. Hallemos la cadena de elementos  $e_0^{(j)} = e'_j, e_1^{(j)}, \dots, e_{h_j}^{(j)} = e'_{j+1}$  que realiza la prolongación del elemento  $e_j$  a lo largo de  $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$ . El resultado de la prolongación es  $e_{j+1}$ . Pero de aquí se deduce que la cadena de elementos

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{(0)} = e'_0 = e_0, \quad \varepsilon_1^{(0)}, \dots, \varepsilon_{h_0}^{(0)} = e'_1 = e_0^{(1)}, \\ \varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_{h_1}^{(1)} = e'_2 = e_0^{(2)}, \dots, \varepsilon_1^{(n)}, \dots, \varepsilon_{h_n}^{(n)} = e'_n = e' \end{aligned}$$

realiza la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de  $L'$ , y el resultado de la prolongación es  $e'$ , con lo cual se termina la demostración.

Señalemos el caso particular del teorema en que  $L$  es un segmento de una recta que une dos puntos  $z_0$  y  $z'$ . Si la cadena de elementos  $e_0, e_1, \dots, e_n$  realiza la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de  $L$ , entonces siempre se puede indicar un entorno del punto  $z'$  tal, que para cualquier punto  $\zeta$  de este entorno la poligonal de dos lados  $L'$ , compuesta del segmento de la recta que une  $z_0$  con  $\zeta$  y del segmento que une  $\zeta$  con  $z'$ , satisface a las condiciones del teorema 2 (fig. 71). De aquí se deduce que si el elemento  $e_0$  es prolongable analíticamente a lo largo del segmento rectilíneo  $[z_0, z_1]$ , entonces  $z_1$  posee un entorno tal, que para cada punto  $\zeta$  perteneciente a este entorno la prolongación analítica del elemento  $e_0$  a lo largo de  $[z_0, \zeta]$  también es posible y, además, la prolongación a lo largo de la poligonal con los vértices  $z_0, \zeta$  y  $z_1$  da el mismo resultado que la prolongación a lo largo de  $[z_0, z_1]$ .

5.2. Este apartado lo dedicamos a la demostración de un teorema importantísimo de la teoría de las funciones.

**T e o r e m a d e m o n o d r o m i a.** *Si un elemento  $e_0$  es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente a un recinto simplemente conexo dado  $G$ , entonces la función  $f(z)$  determinada en este recinto por todos los elementos que se obtienen en las prolongaciones indicadas, es uniforme.*

**D e m o s t r a c i ó n.** Demostraremos el teorema por el método de reducción a lo absurdo. Supongamos que  $f(z)$  no es uniforme en el recinto  $G$ . Entonces, en cierto punto  $z_1 \in G$  ésta tiene al menos dos valores distintos y, por consiguiente, existen al menos dos elementos distintos  $e'_1$  y  $e''_1$ , con el centro  $z_1$ , que son los resultados de la



prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de dos curvas  $L_1$  y  $L_2$  que están situadas en el recinto  $G$  y unen el punto  $z_0$  (el centro del elemento  $e_0$ ) con el punto  $z_1$ . Supongamos que, prolongando  $e_0$  a lo largo de  $L_1$ , se obtiene en el punto  $z_1$  el elemento  $e'_1$ , y a lo largo de  $L_2$ , se obtiene en el mismo punto el elemento  $e''_1$ . Entonces, prolongando  $e''_1$  a lo largo de  $L_2$  hasta el punto  $z_0$  tiene que resultar un elemento  $e''_0$  distinto de  $e_0$ .

En efecto, si resultase el elemento  $e_0$ , entonces la prolongación de éste a lo largo de  $L_2$  en el sentido directo daría  $e'_1$ , a pesar de que

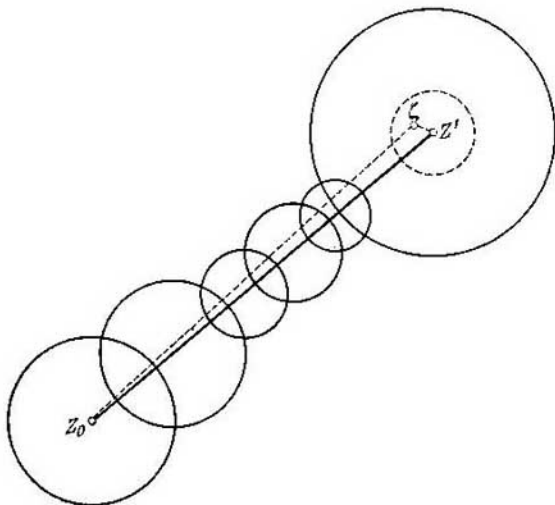


FIG. 71.

se había supuesto que el resultado de esta prolongación es el elemento  $e''_0$  distinto de  $e_0$ . En resumen, negar la justeza del teorema equivale a admitir la existencia de una curva continua cerrada  $L$ , perteneciente al recinto  $G$  ( $L = L_1 \cup L_2$ ), tal que la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de  $L$  da un elemento  $e''_0$  distinto de  $e_0$ . Comprobemos de que en esta afirmación la curva  $L$  se puede sustituir por una poligonal. En efecto, teniendo alguna cadena de elementos que realice la prolongación analítica a lo largo de  $L$ , podemos sustituir esta cadena por una nueva, introduciendo para ello elementos subordinados, de tal modo que las cuerdas de la curva  $L$  que unen los centros de los elementos vecinos sean más cortas que la distancia desde  $L$  hasta la frontera del recinto  $G$ . La poligonal  $A$  formada por estas cuerdas está situada en el recinto  $G$ , y la cadena

construida realiza una prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de  $A$ , resultando el elemento  $e'_0$  distinto de  $e_0$ .

Razonando igual que en la demostración del teorema integral de Cauchy (ap. 2.3, cap. III), se demuestra que  $A$  se puede sustituir primero por una poligonal sin autointersecciones, y después por un circuito triangular  $A$  perteneciente al recinto  $G$ .

En efecto, recorramos sucesivamente los lados de la poligonal  $A$ , comenzando desde el punto  $z_0$ , hasta que un nuevo lado encuentre por primera vez uno de los lados ya recorridos en cierto punto  $z_1$ . Llamemos  $A_1$  a la poligonal cerrada que se obtiene al recorrer  $A$ , comenzando desde  $z_1$  hasta que se vuelve a llegar por primera vez a este punto; está claro que  $A_1$  no posee autointersecciones. Sea  $e_1$  el resultado de la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de la parte de la poligonal  $A$ , desde  $z_0$  hasta el primer paso por  $z_1$ . Si en la prolongación del elemento  $e_1$  a lo largo de  $A_1$ , al volver al punto  $z_1$  resulta un elemento  $e'_1$  distinto de  $e_1$ , entonces en los razonamientos ulteriores  $A$  se sustituye por la poligonal  $A_1$ . Si como resultado de la prolongación del elemento  $e_1$  a lo largo de  $A_1$  resulta el mismo elemento  $e_1$ , entonces se excluye  $A_1$  de  $A$ ; queda una poligonal  $A \setminus A_1$  con una autointersección menos que  $A$  y tal que al prolongar el elemento  $e_0$  a lo largo de  $A \setminus A_1$  resulta un elemento  $e'_0$  distinto de  $e_0$ .

Continuando este razonamiento, después de una cantidad finita de pasos obtendremos una poligonal cerrada  $A'$ , situada en el interior de  $G$ , sin autointersecciones, y tal, que al prolongar a lo largo de  $A'$  un elemento  $e'$  (el cual, a su vez, es el resultado de la prolongación del elemento  $e_0$  en el interior de  $G$ ) resulta un elemento distinto de  $e'$ . Obsérvese que si en el proceso de liberación de la poligonal  $A$  de las autointersecciones nos encontramos con lados que se recorren doblemente, en sentidos opuestos entre sí, entonces cada uno de estos lados se puede despreciar inmediatamente, puesto que la prolongación a lo largo de éste no altera al elemento que se prolonga.

Una vez obtenido el polígono, limitado por la poligonal  $A'$ , lo dividimos primero en polígonos convexos, y después cada uno de éstos lo dividimos en triángulos.

Sea  $\delta$  uno de los lados de estos triángulos, no situado en  $A'$  y sean  $\zeta_0$  y  $\zeta'$  el origen y extremo, respectivamente ( $\zeta_0$  y  $\zeta'$  están situados en  $A'$  y  $\zeta_0$  precede a  $\zeta'$  al recorrer  $A'$  en el sentido elegido).

Si el elemento  $e_0$  es el resultado de la prolongación del elemento  $e'$  a lo largo de  $A'$  desde el punto inicial  $z'$  hasta  $\zeta_0$ , entonces, prolongándolo luego, por una parte, a lo largo de  $\delta$  y, por otra parte, a lo largo de la parte de la poligonal  $A'$  desde  $\zeta_0$  hasta  $\zeta'$ , obtenemos en el punto  $\zeta'$  dos elementos, respectivamente:  $e'$  y  $e''$ . Estos también pueden coincidir, entonces la parte de la poligonal  $A'$  desde  $\zeta_0$  hasta  $\zeta'$  se puede despreciar, sustituyéndola por el segmento  $\delta$ .

Obtenemos una nueva poligonal cerrada  $\Lambda''$ , compuesta de una cantidad menor de triángulos que  $\Lambda$ ; además, prolongando el elemento  $e'$  a lo largo de  $\Lambda''$  resulta un elemento distinto de  $e'$ . Si  $\varepsilon''$  no coincide con  $\varepsilon'$ , entonces formamos una poligonal cerrada  $\Lambda'''$  con la parte de la poligonal  $\Lambda'$  comprendida entre los puntos  $\xi_0$  y  $\xi'$  y el segmento  $\delta$ , recorrido en dirección desde  $\xi'$  hacia  $\xi_0$ . Al prolongar el elemento  $\varepsilon_0$  a lo largo de  $\Lambda'''$  tiene que resultar un elemento distinto de  $\varepsilon_0$ .

Repitiendo semejantes razonamientos, disminuimos cada vez la cantidad de triángulos en que se divide la parte interior al circuito considerado y, después de un número finito de pasos, obtenemos un triángulo  $\Delta$  perteneciente a  $G$ , tal que al prolongar a lo largo del mismo un elemento  $\varepsilon$  con el centro en uno de los vértices  $\xi$  de este triángulo (aquí  $\varepsilon$  es el resultado de la prolongación del elemento  $\varepsilon_0$  a lo largo de una curva situada en el recinto  $G$ ), resulta un elemento distinto de  $\varepsilon$ .

La mediana del lado opuesto a  $\xi$  divide a  $\Delta$  en dos triángulos; al menos uno de éstos,  $\Delta_1$ , posee la misma propiedad que  $\Delta$ , es decir, al prolongar el elemento  $\varepsilon$  a lo largo de  $\Delta_1$ , resulta un elemento distinto de  $\varepsilon$ . Trazando en  $\Delta_1$  la mediana del lado opuesto a  $\xi$ , resulta un nuevo triángulo  $\Delta_2$  que posee las propiedades de los triángulos  $\Delta$  y  $\Delta_1$ . Repitiendo este proceso, construimos una sucesión de triángulos encajados  $\{\Delta_n\}$  con el vértice común  $\xi$ ; sus lados opuestos están situados en un lado del triángulo  $\Delta$  y, evidentemente, se contraen hacia cierto punto  $\eta$  de este lado.

Pero, como ya sabemos (véase el final del precedente apartado), el punto  $\eta$  posee un entorno  $U$  tal, que para cualquier punto  $z \in U$ , al prolongar el elemento  $\varepsilon$  a lo largo de la poligonal  $\xi z \eta$ , resulta el mismo elemento  $\varepsilon$  que al prolongarlo a lo largo del segmento  $\xi \eta$ . Sean  $\eta'_n$  y  $\eta''_n$  los vértices del triángulo  $\Delta_n$  que pertenecen a este entorno (se supone que  $n$  es suficientemente grande). Entonces, sin alterar el resultado, se puede sustituir la prolongación a lo largo de  $\Delta_n$  por las siguientes prolongaciones: a) del elemento  $\varepsilon$  a lo largo de  $\xi \eta'_n \eta$ , resultando el elemento  $\tilde{\varepsilon}$ , b) del elemento  $\tilde{\varepsilon}$  a lo largo de  $\eta''_n \xi$ , lo cual equivale a prolongar  $\tilde{\varepsilon}$  a lo largo de  $\eta \xi$ , resultando de nuevo, evidentemente,  $\varepsilon$ . Así, pues, al prolongar el elemento  $\varepsilon$  a lo largo de  $\Delta_n$  tiene que resultar de nuevo  $\varepsilon$ , en contra de la propiedad del triángulo  $\Delta_n$  que se deduce de su construcción. Con la contradicción obtenida se termina la demostración del teorema de monodromía.

5.3. En este apartado nos ocuparemos de la prolongación de un elemento dado  $\varepsilon_0$  con el centro en  $z_0$  sobre distintos rayos rectilíneos que parten del punto  $z_0$ . Está claro que en cada rayo existe una parte inicial, a lo largo de la cual la prolongación es posible.

Su longitud no es menor que el radio del elemento  $e_0$ . Si mediante la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo del rayo dado no se puede alcanzar un punto arbitrario de este rayo, entonces en el rayo tiene que haber algún punto  $z_1$ , distinto de  $z_0$ , tal que la prolongación del elemento  $e_0$  es posible a lo largo del segmento del rayo, comenzando desde  $z_0$  y hasta cualquier punto del intervalo  $(z_0, z_1)$ , y es imposible a lo largo de todo el segmento  $[z_0, z_1]$ .

Señalemos en cada rayo que parta del punto  $z_0$  el punto correspondiente  $z_1$ , haciendo  $z_1 = \infty$  si la prolongación es posible a lo

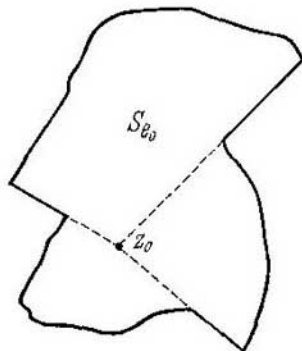


FIG. 72.

largo de todo el rayo, y consideremos el conjunto de puntos pertenecientes a todos los semiintervalos posibles  $(z_0, z_1)$ . Este conjunto  $S_{e_0}$  se llama *estrella rectilínea del elemento  $e_0$* . Este contiene todos los puntos del plano que se pueden alcanzar prolongando analíticamente el elemento  $e_0$  a lo largo de todos los segmentos rectilíneos posibles con el origen común en el punto  $z_0$ . Fácilmente se comprueba que  $S_{e_0}$  es un recinto. En efecto,  $z_0$  es un punto interior del conjunto  $S_{e_0}$ , pues todo el círculo del elemento  $e_0$  está contenido en  $S_{e_0}$ . Si  $z_1 \neq z_0$  y  $z_1 \in S_{e_0}$ , entonces, como ya se había señalado en el ap. 5.1, el punto  $z_1$  posee un entorno  $U$  tal, que el elemento  $e_0$  se puede prolongar analíticamente a lo largo de cualquier segmento  $[z_0, \xi]$ , donde  $\xi \in U$ . Por consiguiente,  $U \subset S_{e_0}$  y  $S_{e_0}$  es un conjunto abierto. Inmediatamente se demuestra que el conjunto  $S_{e_0}$  es conexo, pues dos puntos cualesquiera  $z_1$  y  $z_2$ , pertenecientes a  $S_{e_0}$ , pueden unirse en  $S_{e_0}$  mediante una poligonal compuesta de dos lados:  $[z_1, z_0]$  y  $[z_0, z_2]$ .

En la fig. 72 está representado un recinto del tipo  $S_{e_0}$ . Obsérvese que el recinto  $S_{e_0}$  siempre es simplemente conexo. En efecto, supongamos que en el interior de una curva cerrada de Jordan  $\gamma$ , situada

en  $S_{e_0}$ , hay un punto  $\zeta$  no perteneciente a  $S_{e_0}$ . Tracemos por  $z_0$  un rayo que pase por  $\zeta$ . Este rayo encontrará a la curva  $\gamma$  en un punto  $z_1$  tal, que  $\zeta \in [z_0, z_1]$ . Según la definición del conjunto  $S_{e_0}$ , el segmento  $[z_0, z_1]$  está contenido en este recinto; por consiguiente, también  $\zeta \in [z_0, z_1]$  está contenido en el mismo, en contra de la hipótesis.

Así, pues, la estrella rectilínea es un recinto simplemente conexo. Sea  $z_1 \neq z_0$  un punto arbitrario de  $S_{e_0}$  y sea  $e_1$  el elemento con

el centro  $z_1$ , representado por la serie  $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_1)^n$ , y que se obtiene al prolongar el elemento  $e_0$  a lo largo del segmento rectilíneo  $[z_0, z_1]$ . Haciendo  $f(z_1) = a_0$ , se define  $f(z)$  como función uniforme en todo el recinto  $S_{e_0}$ . Demostremos que esta función es analítica en el recinto dado. En efecto, para el punto  $z_1$  existe un entorno  $U$ , perteneciente a  $S_{e_0}$ , tal que, para cualquier punto  $\zeta \in U$ , al prolongar el elemento  $e_0$  a lo largo de la poligonal  $z_0 \zeta z_1$ , resulta el mismo elemento  $e_1$ . De aquí se deduce que al prolongar el elemento  $e_1$  a lo largo del segmento  $[z_1, \zeta]$  resulta el mismo elemento  $e$  con el centro  $\zeta$ :  $\sum_0^{\infty} \alpha_n (z - \zeta)^n$  que al prolongar el elemento  $e_0$  a lo largo del segmento  $[z_0, \zeta]$ . Pero si el entorno  $U$  y, por consiguiente, también el punto  $\zeta$ , pertenece al círculo de convergencia del elemento  $e_1$ , entonces el resultado de la prolongación del elemento  $e_1$  a lo largo de  $[z_1, \zeta]$  tiene que ser un elemento con el centro  $\zeta$  que está subordinado a  $e_1$ . Por consiguiente,  $e$  es un elemento subordinado a  $e_1$ , y el valor  $f(\zeta) = \alpha_0$  del término independiente de la serie que representa al elemento  $e$ , coincide con el valor de la suma de la serie  $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_1)^n$  en el punto  $z = \zeta$ . Así, pues, hemos demostrado que

$$f(\zeta) = \sum_0^{\infty} a_n (\zeta - z_1)^n$$

en todos los puntos de cierto entorno del punto  $z_1 \in S_{e_0}$ , de donde se deduce que la función  $f(z)$  es analítica en este entorno, y luego, como  $z_1$  es un punto arbitrario del recinto, resulta que  $f(z)$  es analítica en todo el recinto  $S_{e_0}$ .

En resumen, prolongando el elemento  $e_0$  a lo largo de todos los rayos posibles que parten de  $z_0$ , resulta una función uniforme y analítica  $f(z)$  en la estrella  $S_{e_0}$  del elemento dado.

Demostremos que esta función se puede expresar en forma de una serie de polinomios uniformemente convergente en el interior de  $S_{e_0}$ . Por consiguiente, quedará resuelto (al menos teóricamente) el pro-

blema de la prolongación analítica del elemento  $e_0$  a lo largo de los rayos que parten del centro del elemento.

Sea  $F$  un conjunto acotado y cerrado de puntos de  $S_{e_0}$ . Exigiremos que para cada punto  $z \in F$  pertenezcan también a este mismo conjunto  $F$  todos los puntos del segmento rectilíneo  $[z_0, z]$ ; siempre se puede satisfacer a esta condición completando el conjunto dado inicialmente con los puntos de todos los segmentos rectilíneos posibles que unan  $F$  con  $z_0$ . Sea  $L$  una curva cerrada y rectificable de Jordan, perteneciente a  $S_{e_0}$ , que contenga en su interior a  $F$  (siempre se puede hallar tal curva, utilizando una sucesión creciente de recintos simplemente conexos, contruidos con cuadrados y que aproximen a  $S_{e_0}$  por el interior; se puede tomar por  $L$  la frontera de uno de tales recintos). Para cualquier punto  $z \in F$  la función se puede expresar por la integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (5.3:1)$$

Obtendremos el resultado pedido desarrollando  $\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$  en una serie de polinomios, integrando esta serie término a término y observando que para calcular los coeficientes de la serie hallada sólo se necesitan conocer los coeficientes de Taylor de la función  $f(z)$  en el punto  $z_0$ , es decir, se necesitan conocer los coeficientes de la serie de potencias que representa al elemento dado  $e_0$ .

Estudieemos el conjunto de puntos  $E(F, L)$  que describe el punto  $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$  cuando  $z$  recorre todo el conjunto  $F$  y  $\zeta$  recorre toda la curva  $L$ . Comprobemos que éste es un conjunto acotado y cerrado. En efecto, si  $\delta > 0$  es la distancia desde el punto  $z_0$  hasta la curva  $L$  y  $M = \sup_{z \in F} |z - z_0|$ , entonces  $|w| \leq \frac{M}{\delta}$ . Por otra parte, si  $w'$  es un punto de acumulación para  $w_n = \frac{z_n - z_0}{\zeta_n - z_0}$ , entonces, pasando a subsucesiones, podemos exigir que  $\{z_n\}$  y  $\{\zeta_n\}$  sean convergentes. Como los conjuntos  $F$  y  $L$  son cerrados, se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z' \in F, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta' \in L,$$

de donde

$$w' = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_0}{\zeta_n - z_0} = \frac{z' - z_0}{\zeta' - z_0} \in E(F, L),$$

o sea, el conjunto considerado también es cerrado. Señalemos que éste no contiene ningún número real positivo  $u \geq 1$ . Esto es consecuencia de que  $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$  puede tomar valores reales positivos

sólo cuando  $z$  y  $\zeta$  están situados en un rayo que parta del punto  $z_0$ . Pero en este caso, el punto  $\zeta$ , no perteneciente a  $F$ , no puede estar situado entre  $z_0$  y  $z$ , por consiguiente,  $w = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} < 1$ .

Consideremos la función  $\frac{1}{1-w}$  en el recinto simplemente conexo  $G$ , cuya frontera es la parte del eje real:  $u \geq 1, v = 0$ . Como esta función es uniforme y analítica en el recinto  $G$ , según el teorema de Runge ésta puede desarrollarse en una serie de polinomios, uniformemente convergente en el interior de  $G$ :

$$\frac{1}{1-w} = \sum_0^{\infty} P_n(w), \quad \text{donde} \quad P_n(w) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}w + \dots + c_{h_n}^{(n)}w^{h_n}. \quad (5.3.2)$$

Sustituyendo aquí  $w$  por  $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$  y observando que si  $z \in F$  y  $\zeta \in L$  el punto  $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$  está contenido en el conjunto acotado y cerrado de puntos  $E(F, L)$ , perteneciente a  $G$ , deducimos que la serie (5.3.2) es uniformemente convergente. Poniendo esta serie en lugar de  $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$  en la fórmula (5.3.1) e integrando término a término, obtenemos:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \left[ c_0^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta + c_1^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} d\zeta (z-z_0) + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{h_n}^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{h_n+1}} d\zeta (z-z_0)^{h_n} \right]$$

o bien

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \left[ c_0^{(n)} f(z_0) + c_1^{(n)} \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \dots \right. \\ \left. \dots + c_{h_n}^{(n)} \frac{f^{(h_n)}(z_0)}{h_n!} (z-z_0)^{h_n} \right]. \quad (5.3.3)$$

Hemos obtenido el desarrollo de la función  $f(z)$  en una serie de polinomios, que es uniformemente convergente en el conjunto  $F$  y, como  $F$  es arbitrario, en el interior de  $S_{e_0}$ . Los coeficientes  $c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \dots, c_{h_n}^{(n)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) no dependen de  $f(z)$  y pueden calcularse una vez para siempre. Además de ellos en la fórmula figuran los coeficientes  $\frac{f^{(h)}(z_0)}{h!}$ , o sea, los coeficientes de la serie de potencias que determina el elemento  $e_0$ . El desarrollo ob-



tenido (éste se llama desarrollo de Mittag-Leffler) resuelve, evidentemente, el problema de la prolongación del elemento a lo largo de rayos rectilíneos.

5.4. Construyamos en forma explícita la sucesión de polinomios  $\{P_n(w)\}$  que converge hacia  $(1-w)^{-1}$  en el recinto  $G$ , cuya frontera es la semirrecta  $w = u \geq 1$ , y hallemos una cota para la aproximación de estos polinomios. Vamos a seguir aquí el método propuesto por P. Painlevé \*).

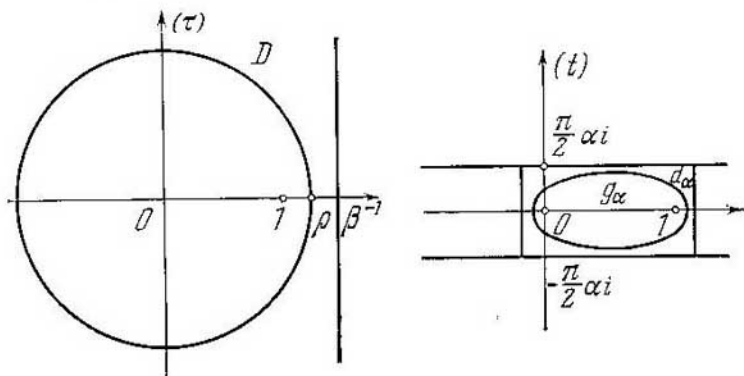


FIG. 73.

Sea  $\alpha > 0$  un parámetro, que a continuación va a tomar valores arbitrariamente pequeños. Hagamos  $\gamma = \exp(-\alpha^{-1})$ ,  $\beta = 1 - \gamma$  y consideremos la transformación

$$t = \varphi(\tau) = -\alpha \ln(1 - \beta\tau) \quad (\varphi(0) = 0) \quad (5.4:1)$$

del semiplano  $D$ :  $\operatorname{Re} \tau < \beta^{-1}$  en la franja  $\Delta$ :  $|\operatorname{Im} t| < \frac{1}{2} \pi \alpha$  (fig. 73); obsérvese que  $\varphi(1) = 1$ .

El recinto  $D$  contiene al círculo cerrado  $|\tau| \leq \rho = 1 + \frac{1}{2} \gamma$ , pues  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{1-\gamma} > 1 + \gamma > \rho$ . La transformación (5.4:1) hace corresponder a este círculo un recinto cerrado  $g_\alpha$  que pertenece a  $\Delta$  y contiene en su interior al segmento del eje real  $0 \leq t \leq 1$ . Está claro que para todos los puntos de  $g_\alpha$  se cumplen las desigualdades:

$$-\alpha \ln(1 + \beta\rho) \leq \operatorname{Re} t \leq \alpha \ln(1 - \beta\rho).$$

Pero  $-\alpha \ln(1 - \beta\rho) = -\alpha \ln \left[ \frac{1}{2} \gamma(1 + \gamma) \right] = 1 + \alpha \ln 2 - \alpha \ln(1 + \gamma) < 1 + \frac{1}{2} \alpha \ln 2$  y  $-\alpha \ln(1 + \beta\rho) > -\alpha \ln 2$  (puesto que  $\beta\rho < 1$ ). De aquí se deduce

\*) Véase la nota de P. Painlevé en el apéndice al libro: E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, 2 éd., Paris, 1928, págs. 101-148.

que el recinto  $g_\alpha$  está contenido en el rectángulo  $d_\alpha$ :

$$-\alpha \ln 2 < \operatorname{Re} t < 1 + \alpha \ln 2, \quad |\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{2} \alpha,$$

el cual para  $\alpha \rightarrow 0$  se contrae hacia el segmento  $0 \leq t \leq 1$ .

Supongamos ahora que  $f(t)$  es una función analítica y acotada en valor absoluto en  $g_\alpha$ :  $|f(t)| \leq M$ . Haciendo  $t = \varphi(\tau)$ , obtenemos una función  $f\varphi(\tau)$ , analítica y acotada en valor absoluto por la misma constante en el círculo  $|\tau| \leq \rho$ . Para ésta se tiene el desarrollo

$$f\varphi(\tau) = \sum_0^{\infty} A_q(f) \tau^q, \quad (5.4:2)$$

de donde

$$f(1) = f\varphi(1) = \sum_0^{\infty} A_q(f). \quad (5.4:2')$$

Además

$$\begin{aligned} \left| f(1) - \sum_0^v A_q(f) \right| &\leq \sum_{v+1}^{\infty} |A_q(f)| \leq M \sum_{v+1}^{\infty} \rho^{-q} = M(\rho-1)^{-1} \rho^{-v} = \\ &= 2M\gamma^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}\gamma\right)^{-v}. \end{aligned} \quad (5.4:3)$$

Para calcular  $A_q(f)$  observamos que en un entorno del punto  $t=0$

$$f(t) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k$$

y, por consiguiente,

$$f\varphi(\tau) = f(0) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \alpha^k [1 - \ln(1 - \beta\tau)]^k.$$

Hagamos

$$(-1)^k [\ln(1 - \beta\tau)]^k = \beta^k \tau^k k! \left[ \frac{E_k^{(k)}}{k!} + \frac{E_{k+1}^{(k)}}{(k+1)!} \beta\tau + \frac{E_{k+2}^{(k)}}{(k+2)!} \beta^2 \tau^2 + \dots \right],$$

donde  $E_{k+j}^{(k)}$  son unos coeficientes numéricos que no dependen ni de  $f(t)$  ni de  $\alpha$ . Poniendo en el desarrollo de  $f\varphi(\tau)$ , resulta la serie de potencias:

$$f\varphi(\tau) = f(0) + \sum_1^{\infty} \frac{(\beta\tau)^q}{q!} [E_q^{(q)} \alpha^q f^{(q)}(0) + E_q^{(q-1)} \alpha^{(q-1)} f^{(q-1)}(0) + \dots + E_q^{(1)} \alpha f'(0)].$$

Comparando con (5.4:2), hallamos:

$$A_0(f) = f(0), \quad A_q(f) = \frac{\beta^q}{q!} \sum_{j=1}^q E_q^j \alpha^j f^{(j)}(0) \quad (q \geq 1). \quad (5.4:4)$$

Para hallar  $E_q^{(j)}$  hacemos  $f(t) = e^t$ ; entonces

$$f\varphi(\tau) = \exp[-\alpha \ln(1 - \beta\tau)] = (1 - \beta\tau)^{-\alpha} = \sum_0^{\infty} \frac{(\beta\tau)^q}{q!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+q-1).$$

Por consiguiente,

$$A_q(e^t) = \frac{\beta^q}{q!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+q-1);$$

como en el caso dado  $f^{(j)}(0) = 1$ , por la fórmula (5.4:4) hallamos:

$$A_q(e^t) = \frac{\beta^q}{q!} \sum_{j=1}^q E_q^{(j)} \alpha^j \quad (q \geq 1).$$

Comparando las dos expresiones de  $A_q(e^t)$  sacamos la conclusión de que los números  $E_q^{(j)}$  son los coeficientes de  $\alpha^j$  en el desarrollo del polinomio  $\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+q-1)$ . Esto permite escribir  $A_q(f)$  en el caso general en forma del siguiente producto simbólico:

$$A_q(f) = \frac{\beta^q}{q!} \alpha f' (\alpha f' + 1) (\alpha f' + 2) \dots (\alpha f' + q - 1), \quad q \geq 1. \quad (5.4:4')$$

Aplicaremos los resultados obtenidos a la aproximación de la función  $(1-w)^{-1}$ . Construyamos primero para cada  $n \geq 1$  el recinto  $G_n$  (fig. 74); sus

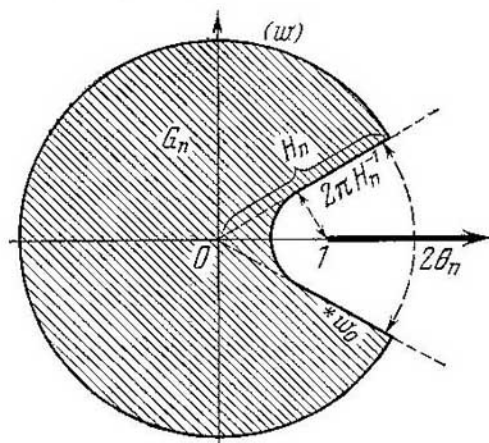


FIG. 74.

dimensiones dependen de la elección del número  $H_n > 4\pi$ . Esta elección la haremos un poco más adelante. Obsérvese que los números  $H_n$ , creciendo, tienden hacia el infinito de tal modo que  $\{G_n\}$  forma una sucesión de recintos encajados que converge hacia el recinto  $G$  que es la estrella rectilínea de la función  $(1-w)^{-1}$ . Sea  $w_0$  cualquier punto de  $\bar{G}_n$ . Entonces  $f(t) = (1-tw_0)^{-1}$  es una función analítica en todos los puntos del segmento  $0 \leq t \leq 1$ , y  $f(1) = (1-w_0)^{-1}$ . Para acotar el módulo máximo de  $f(t)$  en un recinto  $G_n$  (véase la fig. 73) que contiene a este segmento y poder utilizar después la desigualdad (5.4:3), transformemos el recinto  $\bar{G}_n$  mediante la función  $t = \frac{1}{w}$ . Obtendremos el

recinto  $\bar{B}_n$  representado en la fig. 75. Designemos su frontera con  $b_n$ ; de un modo semejante a la frontera del recinto  $G_n$ , ésta consta de dos arcos de circunferencias y de dos segmentos rectilíneos. Como el polo  $t_0 = w_0^{-1}$  de la función  $f(t) = (1 - tw_0)^{-1}$  pertenece a  $\bar{B}_n$ , para aplicar la acotación (5.4:3) a  $f(t)$  es suficiente exigir que el recinto cerrado  $\bar{g}_\alpha$  que contenga al segmento  $[0, 1]$  esté situado en el interior del contorno  $b_n$ . Esto, a su vez, se cumple, si el rectángulo  $d_\alpha: -\alpha \ln 2 < \operatorname{Re} t < 1 + \alpha \ln 2, |\operatorname{Im} t| < \alpha \frac{\pi}{2}$  está contenido en el interior de  $b_n$ . Consideremos el rectángulo mayor, con los lados paralelos a los ejes coordenados, que está inscrito en  $b_n$  (véase la fig. 75). Es obvio que su altura es igual al doble

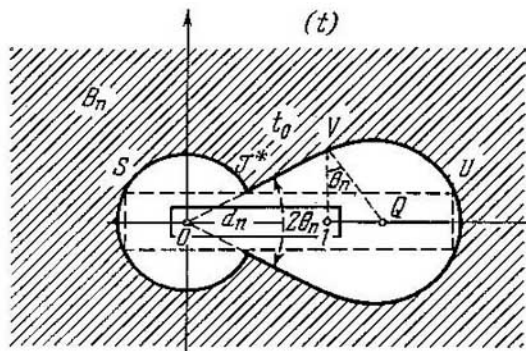


FIG. 75.

de la ordenada del punto  $\mathcal{F}$  que es la imagen del punto  $w = H_n e^{-\theta_n}$  en la transformación  $t = w^{-1}$ . Por ello, la mitad de la altura del rectángulo es igual a  $H_n^{-1} \operatorname{sen} \theta_n = 2\pi H_n^{-2}$  (véase la fig. 74). Por otra parte, el valor absoluto de la abscisa del punto  $S$  coincide con la abscisa del punto  $\mathcal{F}$ , es decir, es igual a  $H_n^{-1} \cos \theta_n = H_n^{-1} \sqrt{1 - 4\pi^2 H_n^{-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2} H_n^{-1} > \frac{1}{2} H_n^{-1} > 2\pi H_n^{-2}$  ( $H_n > 4\pi$ ).

Finalmente, la abscisa de  $U$  es mayor que  $OQ$ , donde  $Q$  es el centro de la circunferencia en la que está situada  $U$ . Como

$$OQ = OV \sec \theta_n = \sec^2 \theta_n = (1 - 4\pi^2 H_n^{-2})^{-1} > 1 + 4\pi^2 H_n^{-2},$$

la abscisa del punto  $U$  es superior a  $1 + 2\pi H_n^{-2}$ . Hagamos

$$\alpha_v = 2H_v^{-2}; \tag{5.4:5}$$

entonces para cualquier  $v \geq n$  el rectángulo  $d_{\alpha_v}$  estará situado dentro del rectángulo considerado, y la distancia entre sus fronteras será no menor que  $\pi H_n^{-2}$ . De aquí se deduce que el recinto correspondiente  $\bar{g}_{\alpha_v}$  está situado en el interior del contorno  $b_n$  para todos  $v \geq n$ , y la distancia entre  $\bar{g}_{\alpha_v}$  y  $b_n$  es mayor que  $\pi H_n^{-2}$ .

Acotemos ahora  $|f(t)| = |(1 - w_0 t)^{-1}|$ ,  $w_0 \in \bar{G}_n$ ,  $t \in g_{\alpha_v}$ ,  $v \geq n$ ; obsérvese que  $|t| < 2$ . Si  $|w_0| \leq \frac{1}{3}$ , entonces

$$\frac{1}{|1 - tw_0|} < \frac{1}{1 - \frac{1}{3}|t|} < 3;$$

si  $|w_0| > \frac{1}{3}$ , entonces  $|t_0| = |w_0^{-1}| < 3$ , y como  $t_0 = w_0^{-1} \in \bar{B}_n$ , se tiene:

$$\frac{1}{|1 - tw_0|} = \frac{|t_0|}{|t_0 - t|} < \frac{3}{\pi} H_n^2 < H_n^2.$$

Así, pues,

$$|f(t)| = |(1 - wt)^{-1}| < H_n^2, \quad w \in \bar{G}_n, \quad t \in g_{\alpha_v}, \quad v \geq n. \quad (5.4:6)$$

Aplicaremos la acotación (5.4:3) a la función  $f(t) = (1 - tw)^{-1}$  ( $w \in \bar{G}_n$ ,  $t \in g_{\alpha_v}$ ,  $v \geq n$ ). En el caso dado  $f^{(j)}(0) = j! w^j$ , por lo cual  $A_q(f)$ , determinados por las fórmulas (5.4:4), son polinomios de grado  $q$  respecto de  $w$ . Precisando:

$$A_0(f) = 1; \quad A_q(f) = \frac{\beta_v^q}{q!} \sum_{j=1}^q E_q^j \alpha_v^j j! w^j,$$

donde

$$\alpha_v = 2H_v^{-2}, \quad \beta_v = 1 - \exp(-\alpha_v^{-1}) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right). \quad (5.4:7)$$

Hagamos

$$p_0(w) = 1, \quad p_v(w) = 1 + \sum_{q=1}^v A_q(f) = 1 + \sum_{j=1}^v j! \alpha_v^j w^j \sum_{q=1}^v E_q^j \frac{\beta_v^q}{q!}. \quad (5.4:8)$$

La fórmula (5.4:3) da para  $f(t) = (1 - w)^{-1}$  en cada punto  $w \in \bar{G}_n$ , siendo  $v \geq n$ :

$$|(1 - w)^{-1} - p_v(w)| < 2M\gamma_v^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_v\right)^{-v}.$$

Aquí  $\gamma_v = \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right)$  y en virtud de (5.4:6) se puede hacer  $M = H_n^2$ .

Expresemos  $2H_n^2 \gamma_v^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_v\right)^{-v}$  en la forma

$$\exp\left\{\frac{1}{2} H_v^2 - v \ln\left(1 + \frac{1}{2} \gamma_v\right) + 2 \ln H_n + \ln 2\right\}.$$

Para que esta cantidad tienda a 0 cuando  $v \rightarrow \infty$  es necesario, evidentemente, garantizar que la diferencia

$$\frac{1}{2} H_v^2 - \frac{1}{2} v \gamma_v = -\frac{1}{2} \left[v \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right) - H_v^2\right],$$

tienda a  $-\infty$ , para lo cual, a su vez, es suficiente exigir que  $H_v$  cumpla la condición:

$$2H_v^2 \exp\left(\frac{1}{2} H_v^2\right) \leq v \quad (5.4:9)$$

para todos los valores suficientemente grandes de  $v$  (por ejemplo, se puede tomar  $H_v = c \sqrt{\ln v}$ , donde  $0 < c < \sqrt{2}$ ).

A continuación vamos a suponer que ya se cumple la condición (5.4:9). Entonces

$$v \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right) - H_v^2 \geq \frac{1}{2} v \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right)$$

y, por consiguiente, para cualquier  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon < 1$ ):

$$|(1-w)^{-1} - p_v(w)| < \exp\left\{-\frac{1-\varepsilon}{4} v \exp\left(-\frac{1}{2} H_v^2\right)\right\} \quad (5.4:10)$$

para todos  $w \in \bar{G}_n$  y  $v \geq n > n(\varepsilon)$ .

Para  $v=n$  de (5.4:10) se deduce que la fórmula

$$(1-w)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n j! \alpha_n^j w^j \sum_{q=1}^n E_q^{(j)} \frac{\beta_n^q}{q!} \right\} \quad (5.4:11)$$

es válida para todos  $w \in G$ , y que la convergencia de la sucesión  $\{p_n(w)\}$  es uniforme en el interior de  $G$ . Por ello, en el desarrollo (5.3:2) del apartado anterior se puede hacer  $P_n(w) = p_n(w)$ .

5.5. En este apartado daremos una solución del problema de la prolongación analítica de una función en su estrella, distinta de la expuesta en el ap. 5.3. Precisando, demostraremos el siguiente **teorema**: *Cualquiera que sea la sucesión creciente de números naturales  $\{m_v\}$  que satisfaga a la condición  $\frac{m_{v+1}}{m_v} \rightarrow +\infty$ , siempre se puede hallar una sucesión de números reales  $\{\theta_k\}$  tal, que para toda función  $f(z)$  analítica en cierto punto  $z_0$  se tiene el desarrollo:*

$$f(z) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ \sum_0^{m_{2v-1}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z-z_0)^k + \sum_{m_{2v-1}+1}^{m_{2v}} \theta_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z-z_0)^k \right\}, \quad (5.5:1)$$

el cual es uniformemente convergente en el interior de toda la estrella  $S_{e_0}$  de la función  $f(z)$ .

Es importante subrayar aquí que las sucesiones  $\{m_v\}$  y  $\{\theta_k\}$  no dependen de la función  $f(z)$ . La demostración de este teorema se reducirá a la división de la serie de potencias  $\sum_0^{\infty} w^k$  en la suma de dos series de potencias  $\sum_0^{\infty} \theta_k w^k$

y  $\sum_0^{\infty} (1 - \theta_k) w^k$ , donde cada una de éstas posee una subsucesión de sumas parciales uniformemente convergente en el recinto  $G$ , cuya frontera es la semirrecta  $w = u \geq 1$ .

En general, una serie de potencias  $\sum_0^{\infty} a_k (w - w_0)^k$  con el radio de convergencia finito  $R$ , se llama **superconvergente**, si existe una subsucesión de sumas parciales  $\left\{ \sum_0^{n_v} a_k (w - w_0)^k \right\}$  que es uniformemente convergente en el interior de algún recinto que contenga al círculo  $|w - w_0| < R$  como

parte propia. Fácilmente se observa que la serie  $\sum_0^{\infty} w^k$  no posee la propiedad de superconvergencia. En efecto, ninguna subsucesión de sus sumas parciales  $\sum_0^{n_v} w^k = \frac{w^{n_v+1} - 1}{w - 1}$  puede converger en los puntos que están situados fuera de la circunferencia unidad. De aquí que, si

$$\sum_0^{\infty} w^k = \sum_0^{\infty} \theta_k w^k + \sum_0^{\infty} (1 - \theta_k) w^k, \quad |w| < 1,$$

y ambas series en el segundo miembro son superconvergentes, entonces necesariamente tienen que cumplirse las condiciones:

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\theta_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|1 - \theta_k|} = 1. \quad (5.5:2)$$

En efecto,  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\theta_k|} \leq 1$  y  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|1 - \theta_k|} \leq 1$ ; si se supone que, por ejemplo,  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\theta_k|} < 1$ , entonces el radio de convergencia de la serie  $\sum_0^{\infty} \theta_k w^k$  resulta mayor que 1. Como, según la hipótesis, la serie  $\sum_0^{\infty} (1 - \theta_k) w^k$  es superconvergente, existe una sucesión creciente de números naturales  $\{n_v\}$  tal, que la sucesión  $\left\{ \sum_0^{n_v} (1 - \theta_k) w^k \right\}$  converge uniformemente en cierto entorno del punto  $w_0$ ,  $|w_0| = 1$ . Pero la serie  $\sum_0^{\infty} \theta_k w^k$  es uniformemente convergente en un entorno de cualquier punto de la circunferencia unidad; por ello, la sucesión

$$\left| \sum_0^{n_v} w^k = \sum_0^{n_v} \theta_k w^k + \sum_0^{n_v} (1 - \theta_k) w^k \right|$$

también converge uniformemente en los entornos de los puntos de la circunferencia unidad, lo cual, como ya vimos, es imposible.

Para lo que sigue, es conveniente considerar el conjunto de todas las funciones que son analíticas en un recinto  $G$  como un espacio vectorial topológico (completo). Este se puede metrizar de tal modo que la convergencia según la norma sea equivalente a la convergencia uniforme en el interior de  $G$ . Para esto es suficiente hacer

$$\|f\| = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{M_k}{1 + M_k}, \quad (5.5:3)$$

donde  $M_k = \max_{\Gamma_k} |f(w)|$ ,  $\Gamma_k$  es la frontera del recinto  $G_k$  y  $\{G_k\}$  son los recintos construidos en el ap. 5.4.

Es obvio que  $\|g+h\| \leq \|g\| + \|h\|$ ; en efecto, si  $m_h = \max |g|$  y  $\mu_h = \max |h|$ , entonces

$$\frac{m_h + \mu_h}{1 + m_h + \mu_h} \leq \frac{m_h}{1 + m_h} + \frac{\mu_h}{1 + \mu_h}.$$

De (5.5:3) se tiene para cualquier  $k \geq 1$ :

$$2^{-k} \frac{M_k}{1 + M_k} \leq \|f\| = \sum_1^k 2^{-j} \frac{M_j}{1 + M_j} + \sum_{k+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{M_j}{1 + M_j} \leq M_k + 2^{-k}. \quad (5.5:4)$$

Si la sucesión de las funciones  $\{f_n(w)\}$  converge hacia cero uniformemente en el interior de  $G$ , entonces para cualquier  $k \geq 1$  se tiene:  $M_k^{(n)} = \max_{\Gamma_k} |f_n(w)| \rightarrow 0$ , y, por consiguiente,  $\|f_n\| \rightarrow 0$ . Recíprocamente: de la condición  $\|f_n\| \rightarrow 0$  se deduce que  $2^{-k} \frac{M_k^{(n)}}{1 + M_k^{(n)}} \rightarrow 0$  para cualquier  $k \geq 1$ , es decir,  $\{f_n(w)\}$  converge hacia cero uniformemente en el interior de  $G$ .

Demostremos ahora dos lemas.

**L e m a 1.** *Supongamos que los números positivos  $\Delta_n$  satisfacen a las condiciones:*

$$\Delta_n \geq 2 \ln H_n. \quad (5.5:5)$$

Entonces cada relación

$$\|f\| < \exp(-n\Delta_n) = \delta_n \quad (5.5:6)$$

implica la desigualdad

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| < 2^{n+1} \exp\left(-\frac{1}{3} n\Delta_n\right) + 2^{-n} = o(1). \quad (5.5:7)$$

En efecto,

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| < \max_{\bar{G}_n} \left| \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} w^k \right| + 2^{-n} = \mu_n + 2^{-n}. \quad (5.5:8)$$

Como el círculo  $|w| < 1 - 2\pi H_n^{-1}$  pertenece a  $\bar{G}_n$ , se tiene:

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| < M_n (1 - 2\pi H_n^{-1})^{-k},$$

donde  $M_n = \max_{\bar{G}_n} |f(w)|$ ; además,  $|w| \leq H_n$  si  $w \in \bar{G}_n$ .

Por ello

$$\begin{aligned} \mu_n &< M_n \sum_{h=0}^n H_n^h (1 - 2\pi H_n^{-1})^{-h} < M_n (n+1) H_n^n (1 - 2\pi H_n^{-1})^{-n} = \\ &= M_n \exp\{n \ln H_n + \ln(n+1) - n \ln(1 - 2\pi H_n^{-1})\}. \end{aligned}$$

En el exponente el término principal es, evidentemente,  $n \ln H_n$ . En virtud de (5.5:5)

$$n \ln H_n \leq \frac{1}{2} n \Delta_n.$$



Por consiguiente,

$$\mu_n < M_n \exp \left( \frac{2}{3} n \Delta_n \right) \quad (5.5:9)$$

para todos los  $n$  suficientemente grandes.

Para acotar  $M_n$ , obsérvese primero que, debido a (5.5:4)

$$\frac{M_n}{1+M_n} < 2^n \|f\|.$$

De la condición (5.5:6) se deduce que  $2^n \|f\| < 2^n \delta_n = o(1)$ ; por ello, para todos los valores de  $n$  suficientemente grandes  $2^n \|f\| < 2^{-1}$ , de donde

$$M_n < \frac{2^n \|f\|}{1-2^n \|f\|} < 2^{n+1} \|f\| < 2^{n+1} \exp(-n\Delta_n).$$

Ahora de la desigualdad (5.5:9) se deduce que

$$\mu_n < 2^{n+1} \exp \left( -\frac{1}{3} n \Delta_n \right)$$

y, finalmente, en virtud de (5.5:8)

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| < 2^{n+1} \exp \left( -\frac{1}{3} n \Delta_n \right) + 2^{-n} = o(1).$$

El lema 1 queda demostrado.

Sea  $\{\lambda_n\}$  una sucesión de números positivos tal, que la diferencia  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ , creciendo, tiende hacia  $+\infty$ . Se puede hacer, por ejemplo,  $\lambda_n = n \ln(n+1)$ ; entonces  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \approx \ln n$ . En general, la sucesión  $\{\lambda_{n+1} - \lambda_n\}$  puede tener un crecimiento arbitrariamente lento. Fijando una sucesión tal, hagamos:

$$m_n = [e^{\lambda_n}], \quad N_n = m_n |\Delta_{m_n}|^2, \quad \pi_n(w) = p_{m_n}(w). \quad (5.5:10)$$

Aquí  $\Delta_v$  son los números que figuran en el lema 1,  $p_v(w)$  son los polinomios determinados por las fórmulas (5.4:8). Obsérvese que debido a la definición  $\pi_n(w)$  es un polinomio de grado  $m_n$ .

Exijamos también que los números  $\{\Delta_v\}$  cumplan la condición:

$$\Delta_{m_n} < \exp \left\{ \frac{1}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \right\}. \quad (5.5:11)$$

En virtud de (5.5:5) esto origina unas restricciones al crecimiento posible de los números  $H_{m_n}$ , los cuales determinan las dimensiones de los recintos  $G_{m_n}$ . Someteremos a estos números a unas restricciones más:

$$H_{m_{n+1}}^2 < \frac{2}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n). \quad (5.5:12)$$

**Lema 2.** Los polinomios de la sucesión  $\{\pi_n(w) = p_{m_n}(w)\}$  satisfacen a las condiciones:

$$\|(1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w)\| < 2^{-n-1} \exp(-m_n \Delta_{m_n}). \quad (5.5:13)$$

Obsérvese que de las condiciones  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow +\infty$  y de (5.5:10) se deduce que

$$n = o(\lambda_n) = o(m_n). \quad (5.5:14)$$

Por otra parte, en virtud de (5.5:10) y (5.5:11):

$$\frac{m_{n+1}}{N_n} = \frac{m_{n+1}}{m_n \cdot |\Delta_{m_n}|^2} \approx \frac{\exp(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\Delta_{m_n}^2} > \exp \left\{ \frac{1}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \right\}.$$

Por consiguiente, para todos los valores suficientemente grandes de  $n$

$$m_{n+1} > N_n \text{ y } H_{N_n} < H_{m_{n+1}} \quad (5.5:15)$$

Acotemos la norma  $\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \|$  aplicando las desigualdades (5.5:4) y (5.4:10) (en la última sustituimos  $v$  por  $m_{n+1}$  y  $n$  por  $N_n$ ):

$$\begin{aligned} \| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| &= \| (1-w)^{-1} - p_{m_{n+1}}(w) \| < \\ &< \max_{\Gamma_{N_n}} | (1-w)^{-1} - p_{m_{n+1}}(w) | + 2^{-N_n} < \\ &< \exp \left\{ -\frac{1-\varepsilon}{4} m_{n+1} e^{-\frac{1}{2} H^2 m_{n+1}} \right\} + \exp(-N_n \ln 2). \end{aligned}$$

En virtud de (5.5:10) y (5.5:12)

$$m_{n+1} e^{-\frac{1}{2} H^2 m_{n+1}} > [e^{\lambda_{n+1}}] e^{-\frac{1}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} > (1-\varepsilon') \exp \left( \frac{2}{3} \lambda_{n+1} + \frac{1}{3} \lambda_n \right).$$

Por lo tanto

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| < \exp \left\{ -\frac{1-\varepsilon'}{4} e^{\frac{2}{3} \lambda_{n+1} + \frac{1}{3} \lambda_n} \right\} + \exp(-N_n \ln 2). \quad (5.5:16)$$

Para deducir la desigualdad (5.5:13) de (5.5:16), escribamos la primera en la forma:

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| < \exp \{ -(m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2) \}.$$

Ahora es suficiente demostrar que la razón del valor absoluto del último exponente al valor absoluto de cada uno de los exponentes del segundo miembro de (5.5:16) es un infinitésimo (para  $n \rightarrow \infty$ ). En efecto, en virtud de (5.5:10), (5.5:11) y (5.5:14)

$$\begin{aligned} \frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{\exp \left( \frac{2}{3} \lambda_{n+1} + \frac{1}{3} \lambda_n \right)} &< \{ e^{\lambda_n} \cdot e^{\frac{1}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} + \\ &+ (n+1) \ln 2 \} e^{-\frac{2}{3} \lambda_{n+1} - \frac{1}{3} \lambda_n} = e^{-\frac{1}{3} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} + \\ &+ (n+1) \ln 2 e^{-\frac{2}{3} \lambda_{n+1} - \frac{1}{3} \lambda_n} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Del mismo modo, en virtud de (5.5:10) y (5.5:14)

$$\begin{aligned} \frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{N_n} &\approx \frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{m_n \Delta_{m_n}^2} \approx \\ &= \frac{1}{\Delta_{m_n}} + \frac{(n+1) \ln 2}{m_n \Delta_{m_n}^2} \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

El lema 2 queda demostrado.

Ahora se puede pasar a demostrar el teorema principal de este apartado. Consideremos las dos series de polinomios:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{ \pi_{2j}(w) - \pi_{2j-1}(w) \} \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} \{ \pi_{2j-1}(w) - \pi_{2j-2}(w) \}, \quad (5.5:17)$$

y hagamos  $\pi_0(w) = 0$ . Según el lema 2 se tiene:

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1}(w) - \pi_n(w)\| &< 2^{-n-1} \exp(-m_n \Delta_{m_n}) + \\ &+ 2^{-n} \exp(-m_{n-1} \Delta_{m_{n-1}}) < 2^{-n+1} \exp(-m_{n-1} \Delta_{m_{n-1}}) = 2^{-n+1} \delta_{m_{n-1}}. \end{aligned} \quad (5.5:18)$$

De aquí se deduce que las series (5.5:17) son convergentes según la norma  $\gamma$ , por consiguiente, representan funciones analíticas en este recinto. En particular estas funciones son analíticas en el círculo unidad.

Hagamos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \{\pi_{2j}(w) - \pi_{2j-1}(w)\} &= \varphi(w), \\ \sum_{j=1}^{\infty} \{\pi_{2j-1}(w) - \pi_{2j-2}(w)\} &= \psi(w). \end{aligned} \quad (5.5:19)$$

Observando que

$$\varphi(w) + \psi(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\pi_k(w) - \pi_{k-1}(w)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(w) = (1-w)^{-1}, \quad (5.5:20)$$

tendremos en el círculo unidad:

$$\varphi(w) = \sum_0^{\infty} \theta_k w^k, \quad \psi(w) = \sum_0^{\infty} (1 - \theta_k) w^k, \quad (5.5:21)$$

donde

$$\theta_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \{\pi_{2j}^{(k)}(0) - \pi_{2j-1}^{(k)}(0)\}, \quad (5.5:22)$$

y según las fórmulas (5.4:8), donde hay que hacer  $v = m_v = [c^{\lambda v}]$ :

$$\frac{1}{k!} \pi_v^{(k)}(0) = \alpha_v^k \sum_{q=1}^v E_q^k \frac{\beta_v^q}{q!}. \quad (5.5:23)$$

De las fórmulas (5.5:22) y (5.5:23) se deduce que todos los números  $\theta_n$  son reales.

Comprobemos mediante el lema 1 que las sucesiones

$$\left\{ \sum_0^{m_{2n}} \theta_k w^k \right\} \text{ y } \left\{ \sum_0^{m_{2n-1}} (1 - \theta_k) w^k \right\} \quad (5.5:24)$$

son uniformemente convergentes en el interior de  $G$  y, por consiguiente, ambas series (5.5:21) son superconvergentes. De aquí, según la observación hecha al comienzo de este apartado, se deduce que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\theta_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|1 - \theta_k|} = 1. \quad (5.5:25)$$

Demostremos que la serie  $\sum_0^{\infty} \theta_k w^k$  es superconvergente. Hagamos

$$\sum_{j=1}^v \{\pi_{2j}(w) - \pi_{2j-1}(w)\} = \Pi_v(w); \quad (5.5:26)$$

evidentemente,  $\Pi_\nu(w)$  es un polinomio de grado  $m_{2\nu}$ . Según la definición de  $\varphi(w)$  y de la desigualdad (5.5:18), se tiene:

$$\begin{aligned} \|\varphi(w) - \Pi_\nu(w)\| &\leq \sum_{\nu+1}^{\infty} \|\pi_{2j}(w) - \pi_{2j-1}(w)\| < \\ &\ll \sum_{\nu+1}^{\infty} 2^{-2j+2} \delta m_{2j-2} < \delta m_{2\nu} \sum_{\nu+1}^{\infty} 2^{-2j+2} < \delta m_{2\nu}. \end{aligned} \quad (5.5:27)$$

Según el lema 4, de aquí se deduce que

$$\left\| \sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \{\varphi^{(k)}(0) - \Pi_\nu^h(0)\} w^k \right\| \rightarrow 0 \quad \text{si } \nu \rightarrow \infty,$$

es decir, que la sucesión de polinomios

$$\left\{ \sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) w^{(k)} - \sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \Pi_\nu^{(k)}(0) w^k \right\}$$

converge uniformemente hacia 0 en el interior de  $G$ .

Pero

$$\sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) w^k = \sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \theta_h w^h, \quad \text{y} \quad \sum_{h=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \Pi_\nu^h(0) w^h = \Pi_\nu(w)$$

(recordemos que  $\Pi_\nu(w)$  es un polinomio de grado  $m_{2\nu}$ ).

Como, en virtud de la definición de  $\Pi_\nu(w)$ , la sucesión  $\{\Pi_\nu(w)\}$  converge uniformemente hacia  $\varphi(w)$  en el interior de  $G$ , la sucesión  $\left\{ \sum_{k=1}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) w^k \right\}$  tiene que converger uniformemente hacia  $\varphi(w)$  en el interior de  $G$ .

Así, pues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k = \varphi(w). \quad (5.5:28)$$

Análogamente obtenemos:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_{2\nu}-1} (1 - \theta_k) w^k = \psi(w). \quad (5.5:29)$$

Queda demostrado que verifica la fórmula

$$\begin{aligned} (1-w)^{-1} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \sum_0^{m_{2\nu}} \theta_k w^k + \sum_0^{m_{2\nu}-1} (1 - \theta_k) w^k \right] = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \sum_0^{m_{2\nu}-1} w^k + \sum_{m_{2\nu-1}+1}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k \right], \end{aligned} \quad (5.5:30)$$

donde la convergencia es uniforme en el interior de recinto  $G$ .

De este desarrollo se obtiene el desarrollo de una función analítica arbitraria  $f(z)$  en su estrella rectilínea  $S_{z_0}$  del mismo modo que esto se hizo en el ap. 5.3 para obtener (5.3:3) de (5.3:2). Resulta definitivamente:

$$f(z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \sum_0^{m_{2\nu-1}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z-z_0)^k + \sum_{m_{2\nu+1}}^{m_{2\nu}} \theta_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (z-z_0)^k \right\}, \quad (5.5:31)$$

donde la convergencia es uniforme en el interior de  $S_{z_0}$ .

Recordemos que aquí

$$m_n = [e^{\lambda_n}],$$

donde  $\{\lambda_n\}$  es una sucesión arbitraria de números positivos que cumple la única condición

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow +\infty.$$

Claro, se podría haber comenzado con cualquier sucesión creciente de números naturales  $\{m_n\}$  que cumpla la única condición

$$\frac{m_{n+1}}{m_n} \rightarrow \infty;$$

en efecto, es suficiente hacer

$$\lambda_n = \ln m_n.$$

El teorema principal de este apartado queda demostrado completamente.

Basándose en las propiedades generales de las series de potencias superconvergentes, se puede afirmar que cualquier sucesión  $\{m_n\}$  que satisfaga a las condiciones del teorema de este apartado también tiene que cumplir la condición

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} > 1.$$

Es verosímil que para ésta tiene que cumplirse también la siguiente condición más fuerte:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{n+1}}{m_n} = \infty$$

y, en particular, que ninguna progresión geométrica  $\{\rho^n\}$  puede tomarse por sucesión  $\{m_n\}$ .

5.6. Vamos a considerar la imagen analítica  $A$  como un espacio topológico y sus elementos componentes como puntos de este espacio. A dos elementos los consideraremos idénticos si tienen un centro común y se representan por series iguales, independientemente de los círculos concéntricos con el círculo de convergencia en que éstos se consideren.

Sea  $e: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{\nu}}$  (o  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-\frac{n}{\nu}}$ ) un elemento de  $A$ , y sea  $|z-z_0| < R$  (o  $|z| > R$ ) el recinto de convergencia de la serie que lo representa; llamaremos  $\rho$ -e n t o r n o del elemento  $e$  ( $\rho \leq R$  si  $z_0 \neq \infty$  y  $\rho \geq R$  si el centro del elemento es el punto del infinito)

al conjunto de aquellos elementos que están subordinados a  $e$  (incluyendo a  $e$ ), cuyos centros pertenecen al recinto  $|z - z_0| < \rho$  (o  $|z| > \rho$ , respectivamente).

Fácilmente se comprueba que en esta definición se cumplen todas las condiciones del ap. 1.1, de modo que la imagen analítica se convierte en un  $T_2$ -espacio. No queda más que comprobar que  $A$  es conexo, que posee una base numerable y que es localmente homeomorfa al círculo.

Haremos la prueba comenzando por la última propiedad. Si  $e_0$  es un elemento no ramificado, entonces a cada punto de su recinto de convergencia le corresponde un elemento subordinado único con el centro en este punto. Suponiendo, para precisar que el centro  $z_0$  del elemento  $e_0$  es un punto finito, pongamos en correspondencia a cada elemento  $e$  con el centro  $z$ , que pertenezca al  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$ , el centro de este elemento. Entonces el  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$  se transformará en el círculo  $|z - z_0| < \rho$ , siendo esta transformación biunívoca. Además, ésta es bicontinua. Así, por ejemplo, si la imagen del elemento  $e_1$  (es decir, el centro de este elemento) es  $z_1$ ,  $|z_1 - z_0| < \rho$  y  $|z - z_1| < \delta$  es un entorno del punto  $z_1$  que está contenido en el círculo  $|z - z_0| < \rho$ , entonces es suficiente tomar un  $\delta$ -entorno del elemento  $e_1$  para afirmar que la imagen de cada elemento de este entorno cae en el círculo  $|z - z_1| < \delta$ .

En resumen, un entorno (cualquiera) de un elemento no ramificado admite una transformación homeomorfa sobre un círculo; además, puede realizarse esta transformación sobre un círculo suponiendo que la imagen del elemento es su centro.

Supongamos ahora que  $e_0$  es un elemento ramificado (de nuevo, para precisar, con el centro finito  $z_0$ ) y que  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\frac{n}{v}}$  es su expresión canónica. Como a cada punto  $z_1$ , distinto de  $z_0$  y perteneciente al recinto de convergencia, le corresponden varios (precisamente  $v > 1$ ) elementos distintos que están subordinados al elemento  $e_0$ , la transformación del elemento en su centro no será biunívoca en el entorno considerado. Para hallar una transformación homeomorfa del entorno del elemento  $e_0$  sobre el círculo, introduzcamos el parámetro  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$ . Si  $z_1 \neq z_0$ , entonces la función  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$  toma en este punto  $v$  valores distintos:  $t_1, \dots, t_v$ , cada uno de los cuales puede convertirse en otro mediante una rotación alrededor del origen en un ángulo múltiplo de  $\frac{2\pi}{v}$ . Respectivamente, el entorno del punto  $z_1$  que no contenga a  $z_0$  se transforma mediante  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$  en  $v$  recintos distintos  $g_j$  ( $j =$

= 1, . . . ,  $\nu$ ), sin puntos comunes entre sí, que también se convierten uno en otro mediante las rotaciones indicadas. En este caso, cada uno de los recintos  $g_j$  contiene uno de los puntos  $t_1, \dots, t_\nu$ , y sólo uno; precisamente  $t = t_j$ .

Para fijar en un entorno del punto  $z_1$  una de las  $\nu$  ramas analíticas uniformes de la función  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$  es suficiente señalar a cuál de los recintos descritos anteriormente pertenecen los valores de la rama o (lo que es lo mismo) cuál de los valores  $t_1, \dots, t_\nu$  toma la rama  $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$  en el punto  $z = z_1$ . Si  $z_1$  pertenece al recinto de convergencia de la serie  $\sum_m a_n (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ , entonces, imponiendo la misma condición a  $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ , se determina una de las  $\nu$  ramas analíticas uniformes de la suma  $\nu$ -forme de esta serie, es decir, uno de los  $\nu$  elementos  $e_1^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) que tiene el centro  $z_1$  y está subordinado a  $e_0$ .

Es importante señalar que a distintos valores  $t_j$  les corresponden también distintos elementos  $e_1^{(j)}$ . En efecto, supongamos lo contrario y sean  $t_j$  y  $t_{j+p}$  dos valores distintos a los cuales les corresponden elementos idénticos  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$ . Como  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$  se representan en un entorno del punto  $z_1$  por la suma de la serie  $\sum_m a_n (z - z_0)^{\frac{n}{\nu}}$ , donde  $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} = t$  recorre los recintos  $g_j$  y  $g_{j+p}$ , respectivamente, pasando a la variable  $t$  obtenemos para  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$  la expresión  $\sum_m a_n t^n$ ,  $t \in g_j$  y  $t \in g_{j+p}$ . Pero si a cierto  $z$  del entorno del punto  $z_1$  le corresponde un valor de  $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$  en el recinto  $g_j$  igual a  $t$ , entonces al mismo  $z$  le corresponde un valor de  $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$  en el recinto  $g_{j+p}$  igual a  $e^{2\pi i \frac{p}{\nu}} t$ ; por esta razón, los valores de  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$  se pueden expresar en el recinto  $g_j$  por las series  $\sum_m a_n t^n$  y  $\sum_m a_n e^{2\pi i \frac{pn}{\nu}} t^n$ . De la hipótesis hecha respecto de la coincidencia de los elementos  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$  y del teorema interior de unicidad se deduce que  $e^{2\pi i \frac{pn}{\nu}} = 1$  para todos los valores de  $n$ , para los cuales  $a_n \neq 0$ , es decir, que los números correspondientes  $\frac{pn}{\nu}$  son enteros y, por consiguiente, las fracciones  $\frac{n}{\nu}$  pueden simplificarse por un mismo número distin-

to de la unidad (se ha tenido en cuenta aquí que  $p < v$ ). Pero esta conclusión contradice a que  $\sum_m^{\infty} a_n t^{\frac{n}{v}}$  es la expresión canónica del elemento  $e_0$ . Así, pues, los elementos  $e_1^{(j)}$  y  $e_1^{(j+p)}$  son distintos.

Tomemos por imagen de cada elemento  $e_1^{(j)}$  el valor correspondiente  $t = t_j$ , haciendo esto para todos los elementos que están subordinados a  $e_0$ ; sea  $t = 0$  la imagen del elemento  $e_0$  mismo. Entonces el entorno del elemento  $e_0$  se transformará en un entorno del punto  $t = 0$ , y la correspondencia entre los elementos y sus imágenes será biunívoca. Pero también será bicontinua. En efecto, la correspondencia entre  $t$  y  $z$ , establecida mediante cada rama de

$t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$  en un entorno del punto  $z_1 \neq z_0$ , es bicontinua. También es bicontinua la correspondencia entre los elementos que están subordinados a  $e_0$  y que representan en un entorno del punto  $z_1$  cualquier rama uniforme de la función  $\sum_m^{\infty} a_n (z - z_0)^{\frac{n}{v}}$ , y sus centros  $z$  (pertenecientes a un entorno del punto  $z_1$  que no contiene a  $z_0$ ). No queda más que observar que la continuidad se conserva también en el elemento  $e_0$  y, respectivamente, en  $t = 0$ , puesto que cuando  $t$  tiende a cero los elementos correspondientes tienden hacia  $e_0$  (es decir, se sitúan en cualquier  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$  para todos los valores de  $t$  suficientemente pequeños en valor absoluto) y, recíprocamente, si  $e$  tiende a  $e_0$  los centros de los elementos  $e$  tienden a  $z_0$  y, por consiguiente,  $t$  tiende a cero.

Resumiendo, cualquier entorno de un elemento ramificado  $e_0$  de orden  $v - 1$  con el centro en  $z_0$ , se transforma (siendo ésta un homeomorfismo) mediante  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$  (donde  $z$  es el centro del elemento  $e$  del entorno considerado del elemento  $e_0$ ) en un círculo del plano  $t$  con el centro en el origen de coordenadas.

De todo lo expuesto sacamos la conclusión de que la imagen analítica con el concepto establecido anteriormente de entornos de sus elementos, es un  $T_2$ -espacio localmente homeomorfo al círculo.

5.7. Dedicamos este apartado a la demostración de que toda imagen analítica posee una base numerable y también, que es un espacio conexo. De aquí, junto con lo establecido en el ap. 5.6, se deduce que la imagen analítica se puede considerar como una superficie.

Hagamos previamente unas cuantas observaciones elementales.

Sea  $e_0$  un elemento arbitrario:  $\sum_m^{\infty} a_n (z - z_0)^{\frac{n}{v}}$ , y sean  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon$  dos elementos subordinados del mismo, los cuales son por tanto regulares. Ya se vio en el ap. 5.1 que si  $e_0$  es un elemento regular, entonces



$\varepsilon_0$  y  $\varepsilon$  se pueden unir entre sí mediante una cadena de elementos también regulares que están subordinados al elemento  $\varepsilon_0$ .

Demostremos que la última propiedad conserva su valor también cuando  $\varepsilon_0$  es un elemento irregular.

Realicemos la transformación  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$ ; entonces a  $\varepsilon_0$  le corresponderá un elemento circular no ramificado  $\varepsilon'_0$  con el centro  $t = 0$ , y a los centros de los elementos  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon$  les corresponderán unos puntos  $\tau_0$  y  $\tau$  pertenecientes al círculo  $K'$  del elemento  $\varepsilon'_0$ . Unamos  $\tau_0$  y  $\tau$  con una curva continua  $\gamma'$  que no pase por el centro del círculo  $K'$ , y sea  $\varepsilon'_0, \dots, \varepsilon'_n$  una cadena de elementos subordinados al elemento  $\varepsilon'_0$  que una el elemento  $\varepsilon'_0$ , cuyo centro es  $\tau_0$ , con el elemento  $\varepsilon'_n$ , cuyo centro es  $\tau$ . Volviendo a la variable  $z = z_0 + t^v$ , obtenemos en el recinto de convergencia del elemento  $\varepsilon_0$  una curva  $\gamma$  (la imagen de la curva  $\gamma'$ ) que no pasa por  $z_0$  y une los puntos  $\xi_0$  y  $\xi$  (los centros de los elementos  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon$ ). A los círculos de los elementos  $\varepsilon_j$  les corresponden unos recintos simplemente conexos  $g_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ), de los cuales cada uno que sigue tiene una parte común (conexa) con la anterior; además, el par de recintos  $g_j$  y  $g_{j+1}$  cubren el arco  $\sigma_j \subset \gamma$  que une la imagen del centro del elemento  $\varepsilon_j$  con la imagen del centro del elemento  $\varepsilon_{j+1}$ . Los elementos mismos  $\varepsilon_j$  se transforman en ramas  $\varphi_j(z)$  de la suma de la serie  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^{\frac{m}{v}}$ , que son uniformes y analíticas en los recin-

tos  $g_j$ ; aquí  $\varphi_0(z)$  coincide con  $\varepsilon_0$  en un entorno del punto  $\xi_0$ ,  $\varphi_n(z)$  coincide con  $\varepsilon$  en un entorno del punto  $\xi$  y, además,  $\varphi_j(z)$  y  $\varphi_{j+1}(z)$  coinciden en la parte común a los recintos  $g_j$  y  $g_{j+1}$ . Señalemos en  $\gamma$  sendos puntos  $\xi_j$  en las partes comunes de los recintos  $g_j$  y  $g_{j+1}$  ( $j = 0, \dots, n$ ), y sea  $\varepsilon_j$  aquel elemento, entre los que tienen el centro  $\xi_j$  y están subordinados al elemento  $\varepsilon_0$ , cuyos valores coinciden con los valores  $\varphi_j(z)$  y  $\varphi_{j+1}(z)$  en un entorno del punto  $\xi_j$ . No queda más que dividir cada arco  $\sigma_j$  con los extremos  $\xi_j$  y  $\xi_{j+1}$  en partes tan pequeñas que  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_{j+1}$  se puedan unir mediante una cadena de elementos subordinados a  $\varphi_j(z)$  y  $\varphi_{j+1}(z)$  y, por consiguiente, a  $\varepsilon_0$ , con los centros en los puntos de división (la existencia de semejantes cadenas se demuestra exactamente igual que el lema del ap. 5.1). Evidentemente, las cadenas halladas para diferentes valores de  $j$  se unen en una cadena, compuesta solamente de elementos regulares, que une  $\varepsilon_0$  con  $\varepsilon$ . Así, la propiedad pedida queda demostrada.

En particular, si  $\varepsilon_0$  y  $\varepsilon$  tienen un mismo centro, entonces  $\tau_0$  y  $\tau$  están situados en una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y se puede tomar por  $\gamma'$  un arco de esta circunferencia. Entonces la curva  $\gamma$  en el recinto de convergencia del elemento  $\varepsilon_0$

será una circunferencia con el centro  $z_0$ , recorrida múltiplemente al prolongar el elemento  $\varepsilon_0$  en el elemento  $\varepsilon$ .

Aplicando esta observación, demostremos que *si dos elementos  $e_0$  y  $e'$  con un centro común  $z_0$  tienen un elemento subordinado común  $\varepsilon$ , entonces  $e_0$  y  $e'$  coinciden*. Este aserto se deduce inmediatamente del teorema de unicidad si  $e_0$  y  $e'$  son elementos no ramificados. Si, por ejemplo,  $e_0$  es un elemento ramificado y su orden es  $v - 1$ , entonces, además de  $\varepsilon$ , existen también  $v - 1$  elementos, distintos entre sí y distintos de  $\varepsilon$ , que tienen el mismo centro y están subordinados al elemento  $e_0$ . Cada uno de éstos se puede obtener mediante una prolongación analítica del elemento  $\varepsilon$  a lo largo de una circunferencia (recorrida múltiplemente) con el centro  $z_0$ . Todas estas prolongaciones se realizan con elementos subordinados al elemento  $e_0$ . Como en este caso no se sale fuera de los límites del recinto de convergencia del elemento  $e'$ , estos últimos también están subordinados a  $e'$ , lo cual se comprueba examinando uno tras otro los elementos de la cadena, comenzando desde  $\varepsilon$ . De aquí que todos los  $v$  elementos que están subordinados al elemento  $e_0$  y que tienen un centro común con  $\varepsilon$ , también están subordinados a  $e'$ . Por consiguiente, el orden de ramificación del elemento  $e'$  no es menor al orden de ramificación del elemento  $e_0$ ; pero en este razonamiento  $e_0$  y  $e'$  pueden cambiarse de sitio, por lo cual el orden de ramificación del elemento  $e'$  también es igual a  $v - 1$ . Aplicando la transforma-

ción  $t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}}$  hacemos corresponder a  $e_0$  y  $e'$  dos elementos no ramificados con el centro común  $t = 0$ , que tengan un elemento común subordinado  $\varepsilon'$ . Por consiguiente, los elementos homólogos coinciden y, por lo tanto, coinciden también los elementos dados  $e_0$  y  $e'$ .

Sean ahora  $e_0$  y  $e'$  dos elementos arbitrarios de la imagen analítica  $A$ . En virtud de la definición del concepto de imagen analítica, existe una cadena de elementos  $e_0, e_1, \dots, e_n = e'$ , pertenecientes a  $A$  y que unen  $e_0$  con  $e'$ . Demostremos que si entre los elementos  $e_1, \dots, e_{n-1}$  hay irregulares, entonces la cadena dada se puede sustituir por otra cuyos elementos intermedios son todos regulares. En efecto, sea  $e_k$  un elemento irregular de la cadena ( $1 \leq k \leq n - 1$ ) y sean  $e_0$  y  $e'$  unos elementos subordinados a él que, por lo tanto, son regulares y que sean comunes a  $e_{k-1}$  y  $e_{k+1}$ , respectivamente. Acabamos de ver que  $e_0$  y  $e'$  pueden unirse mediante una cadena de elementos regulares. Excluyendo el elemento  $e_k$  de la cadena inicial y poniendo en su lugar los elementos  $e_0$  y  $e'$  junto con la cadena de elementos regulares que los une, resulta una nueva cadena que une  $e_0$  con  $e'$  y que contiene un elemento irregular menos que la cadena inicial. Repitiendo este razonamiento, se obtiene el resultado pedido.

Demostremos que el conjunto de todos los elementos distintos entre sí de la imagen analítica  $A$  que tienen un mismo centro  $z_0$ , no es más que numerable. Supongamos, para precisar, que  $z_0 = 0$  (si  $z_0 = \infty$ , entonces, mediante la sustitución de la variable  $\zeta = \frac{1}{z}$ , obtendremos el caso considerado; si  $z_0 \neq \infty$  y  $z_0 \neq 0$ , hacemos la sustitución:  $\zeta = z - z_0$ ). Sea  $e_0$  un elemento fijado con el centro  $0$  y sea  $e \in A$  un elemento arbitrario con el mismo centro. Según lo demostrado, existe una cadena de elementos regulares de  $A$  que une  $e_0$  con  $e$  (solamente pueden ser irregulares en esta cadena los elementos extremos  $e_0$  y  $e$ ). Sea ésta la cadena  $e_0, e_1, \dots, e_n = e$ . Si los centros  $z_1$  y  $z_{n-1}$  de los elementos  $e_1$  y  $e_{n-1}$  no satisfacen a la condición de que  $x_1, y_1, x_{n-1}, y_{n-1}$  sean números racionales, entonces incluimos entre  $e_0$  y  $e_1$  o entre  $e_{n-1}$  y  $e_n$  sendos elementos que estén subordinados al elemento  $e_1$  o a  $e_{n-1}$ , de tal modo que los centros de estos elementos satisfagan a la condición correspondiente. Supongamos que ya se ha efectuado esta operación y que  $e_1$  y  $e_{n-1}$  denotan elementos cuyos centros tienen coordenadas racionales. Uniendo los centros de los elementos  $e_1, \dots, e_{n-1}$  de la cadena por segmentos rectilíneos, resulta una poligonal tal, que al prolongar el elemento  $e_1$  a lo largo de ella se obtiene el elemento  $e_{n-1}$ .

Aplicando el teorema 2 del ap. 5.1 se puede sustituir esta poligonal por otra con el mismo origen y extremo, cuyas coordenadas de todos sus vértices sean racionales, de modo que el resultado de la prolongación del elemento  $e_1$  a lo largo de ella sea de nuevo  $e_{n-1}$ . Como todas las poligonales posibles con coordenadas racionales de sus vértices forman un conjunto numerable, y el conjunto de los elementos  $e_1$ , con coordenadas racionales del centro y que están subordinados al elemento  $e_0$ , también es numerable (la cantidad de elementos que tienen un mismo centro y están subordinados al elemento  $e_0$ , es finita), los resultados de las prolongaciones descritas forman solamente un conjunto numerable.

Cada elemento  $e_{n-1}$ , obtenido como resultado de semejante prolongación, determina un elemento único  $e$  con el centro  $z = 0$ , al cual está subordinado  $e_{n-1}$  (si, en general, existe tal elemento  $e$ ). Por ello, puede haber lo más un conjunto numerable de elementos distintos  $e$  con el centro  $z = 0$ , como se quería demostrar.

Ahora no es difícil demostrar que cada imagen analítica contiene no más que un conjunto numerable de elementos irregulares (incluyendo los ramificados).

En efecto, consideremos el conjunto  $E$  de todos los elementos regulares de la imagen  $A$  con los centros de coordenadas racionales. Como sólo puede haber un conjunto numerable de tales centros y para cada uno de éstos el conjunto de los elementos correspon-

dientes no es más que numerable, resulta que el conjunto  $E$  es numerable. Pongamos en correspondencia a cada elemento irregular  $e_0 \in A$ , con el centro  $z_0$  y el radio  $R$ , un elemento subordinado cualquiera del mismo,  $\varepsilon$ , cuyo centro  $\zeta$  tenga coordenadas racionales, y exijamos que la distancia  $|z_0 - \zeta|$  sea menor que  $1/2R$ . Como  $\varepsilon \in E$ , resulta una aplicación del conjunto de todos los elementos irregulares en el conjunto numerable  $E$ . Demostremos que esta aplicación es biyectiva. En efecto, supongamos que a dos elementos irregulares distintos  $e_0$  y  $e'$  les corresponde un mismo elemento  $\varepsilon$ . Siendo regular, el elemento  $\varepsilon$  se representa por una serie, dispuesta según las

potencias enteras no negativas de  $z - \zeta$ :  $\sum_0^{\infty} \alpha_n (z - \zeta)^n$  y esta serie

es convergente en el círculo  $|z - \zeta| < |\zeta - z_0|$ , y también en el círculo  $|z - \zeta| < |\zeta - z'|$  (donde  $z'$  es el centro del elemento  $e'$ ), puesto que debido a la elección del punto  $\zeta$ , cada uno de estos círculos pertenece al recinto de convergencia del elemento  $e_0$  o  $e'$  y no contiene dentro de sí a los puntos  $z_0$  o  $z'$ , en los cuales los elementos  $e$  y  $e'$  o bien tienen un polo, o bien un punto de ramificación. De aquí se deduce ahora que  $z_0$  y  $z'$  no pueden estar situados

en el interior del círculo de convergencia de la serie  $\sum_0^{\infty} \alpha_n (z - \zeta)^n$ ;

por esto ambos círculos  $|z - \zeta| < |\zeta - z'|$  y  $|z - \zeta| < |\zeta - z_0|$  coinciden, es decir,  $|\zeta - z'| = |\zeta - z_0|$ , y representan el círculo de convergencia del elemento  $\varepsilon$ ; los puntos  $z_0$  y  $z'$ , situados en la frontera de este círculo, son para  $\varepsilon$  puntos singulares. Pero todos los puntos de la circunferencia  $|z - \zeta| = |\zeta - z_0|$ , distintos de  $z_0$ , están situados en el interior del círculo de convergencia del elemento  $e_0$ , son distintos de su centro y, por consiguiente, no pueden ser singulares para  $\varepsilon$ . De aquí se deduce que  $z' = z_0$ , o sea,  $e_0$  y  $e'$  tienen un centro común y, por consiguiente,  $e_0$  coincide con  $e'$ , pues  $\varepsilon$  es su elemento subordinado común. Así, pues, el conjunto de todos los elementos irregulares de la imagen analítica que poseen centros finitos, puede aplicarse biyectivamente al conjunto numerable  $E$  y, por consiguiente, el mismo o es finito, o es numerable. No queda más que agregarle también los elementos irregulares con el centro en el punto del infinito. Como este conjunto no es más que numerable, de aquí se deduce finalmente que la afirmación enunciada es cierta.

De todo lo demostrado en este apartado se deduce que la imagen analítica  $A$ , considerada como un espacio topológico, posee una base numerable. En efecto, para obtener tal base agregamos al conjunto  $E$  de todos los elementos regulares cuyas coordenadas ambas son racionales, el conjunto de todos los elementos regulares, con el centro  $z = \infty$  y, por fin, el conjunto de todos los elementos irregulares. El conjunto de todos los elementos enumerados es numerable.

Para cada uno de éstos consideramos el conjunto de todos sus entornos con radios racionales. El conjunto  $B$  de todos los entornos obtenidos de este modo es numerable.

Demostremos que éste es una base para  $A$ . En efecto, sea  $U_0$  un  $\rho_0$ -entorno de un elemento arbitrario  $e_0 \in A$ . Si  $e_0$  es un elemento irregular, entonces su  $\rho$ -entorno, para el cual  $0 < \rho < \rho_0$  y  $\rho$  es racional, pertenece al conjunto  $B$  y está contenido en  $U_0$ . Si  $e_0$  es un elemento regular, entonces en su  $\frac{\rho_0}{2}$ -entorno se puede elegir un elemento  $e'$  (también regular) cuyas coordenadas del centro sean racionales. Debido a la elección del elemento  $e'$ , su radio será mayor que  $\frac{\rho_0}{2}$ . Sea  $\rho$  un número racional tal, que  $|z_0 - z'| < \rho < \frac{\rho_0}{2}$  ( $z'$  es el centro del elemento  $e'$ ). Entonces el círculo  $|z - z'| < \frac{\rho_0}{2}$  contiene a  $z_0$  y está contenido en el círculo  $|z - z_0| < \rho_0$ . Por consiguiente, el  $\rho$ -entorno del elemento  $e'$  pertenece a  $B$ , está contenido en  $U_0$  y contiene al elemento  $e_0$ . Queda demostrado que  $B$  es una base numerable del espacio  $A$ .

Demostremos, finalmente, que la imagen analítica  $A$  representa un espacio conexo. Supongamos que esto no es así. Entonces  $A$  se puede dividir en dos conjuntos no vacíos  $A_0$  y  $A'$  disjuntos, ninguno de los cuales contiene elementos de acumulación del otro. Supongamos que  $e_0 \in A_0$  y  $e' \in A'$ . En virtud de las propiedades de los conjuntos  $A$  y  $A'$ , tiene que existir un entorno del elemento  $e_0$  que pertenece a  $A_0$  y un entorno del elemento  $e'$  que pertenece a  $A'$ . Tomemos en estos sendos elementos regulares. Tendremos los elementos regulares  $\varepsilon_0 \in A_0$  y  $\varepsilon' \in A'$ . Según lo demostrado en este apartado tiene que existir una cadena  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon'$  que une  $\varepsilon_0$  con  $\varepsilon'$ , en la cual los elementos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  y, por consiguiente, todos los elementos de la cadena, son regulares. Como el primero y último elementos de la cadena pertenecen a distintos conjuntos  $A_0$  y  $A'$ , tiene que haber en ella dos elementos vecinos  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_{j+1}$  tales que uno de ellos —sea  $\varepsilon_j$ — pertenece a  $A_0$  y el otro a  $A'$ . Representemos por  $g$  el recinto formado por los círculos de estos elementos (éste, verdaderamente, es un recinto, o sea un conjunto abierto y conexo, puesto que los círculos de los elementos  $\varepsilon_j$  y  $\varepsilon_{j+1}$  tienen una parte común). A cada punto  $\xi \in g$  le corresponde un elemento  $\varepsilon$ , y sólo uno, que tiene el centro en este punto y está subordinado a  $\varepsilon_j$  o a  $\varepsilon_{j+1}$  (en la parte común de los círculos está subordinado a  $\varepsilon_j$  y a  $\varepsilon_{j+1}$  simultáneamente). Por esto, todos los puntos del recinto  $g$  se dividen en dos clases:  $a_0$  y  $a'$ , según que sean centros de los elementos  $\varepsilon$  de  $A_0$  o de  $A'$ . Como los conjuntos  $a_0$  y  $a'$  no son vacíos y son disjuntos y el conjunto  $g$  es conexo, al menos uno de ellos, por ejemplo,  $a_0$ , tiene que contener puntos de acumulación del otro. Supongamos, por ejemplo, que el punto  $\alpha_0 \in a_0$  es un punto

de acumulación para  $a'$ . Entonces su elemento correspondiente del conjunto  $A_0$  tiene que ser de acumulación para los elementos del conjunto  $A'$ , y resulta una contradicción con la hipótesis hecha. Por consiguiente, la imagen analítica, considerada como un espacio topológico, es conexa.

Hagamos un resumen de lo establecido en el presente apartado y en el anterior. La imagen analítica es un  $T_2$ -espacio, si se introduce en ella de un modo adecuado el concepto de entornos de sus elementos. Este espacio es localmente homeomorfo al círculo (del plano finito), posee una base numerable y es conexo. Por lo tanto, cada imagen analítica se puede considerar como una superficie.

5.8. Demostremos que es natural considerar a cada imagen analítica como una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Sea  $A$  una imagen analítica. Pongamos en correspondencia a cada elemento  $e_0 \in A$  su centro  $z_0$ . Resulta una transformación unívoca  $z_0 = \varphi(e_0)$  de la imagen analítica dada en la esfera. Esta transformación es continua en cada elemento  $e_0$ , pues, para cualquier  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el  $\varepsilon$ -entorno del elemento  $e_0$  se transforma en un  $\varepsilon$ -entorno del punto  $z_0$ . Demostremos que la transformación  $z = \varphi(e)$  es interior y que, por consiguiente, convierte a  $A$  en una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra.

Respecto de cada elemento  $e \in A$  o de cada conjunto  $E \subset A$ , diremos que éstos están situados sobre sus imágenes  $z = \varphi(e)$  o  $G = \varphi(E)$ . Cuando la transformación  $z = \varphi(e)$  sea homeomorfa sobre  $E$ , diremos que  $E$  está situado «univalentemente» sobre  $G = \varphi(e)$  (o que forma una hoja).

Ordenemos de algún modo todos los puntos de la esfera, sobre los que están situados elementos ramificados de la imagen analítica  $A$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  (puede haber un conjunto finito o numerable de tales puntos) y consideremos una sucesión  $\{\tau_n\}$  de triangulaciones de la esfera que satisfaga a las condiciones siguientes:

a) la triangulación  $\tau_{n+1}$  se obtiene de  $\tau_n$  mediante una subdivisión de los triángulos de la triangulación  $\tau_n$ , donde todos los vértices de los triángulos de  $\tau_n$  son también vértices de los triángulos de  $\tau_{n+1}$  y cada uno de los últimos triángulos está contenido en cierto triángulo de  $\tau_n$  (los triángulos se entienden como conjuntos cerrados);

b) el punto  $\alpha_n$  se encuentra entre los vértices de los triángulos de la triangulación  $\tau_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ );

c) el diámetro máximo de los triángulos de la triangulación  $\tau_n$  tiende a cero cuando  $n$  crece indefinidamente.

Tomemos en  $A$  todos los conjuntos de elementos que están situados «univalentemente» sobre los triángulos de la triangulación  $\tau_1$ , y conservemos solamente aquellos que, o no contienen en general

elementos ramificados, o bien contienen solamente un elemento ramificado que está situado sobre el punto  $\alpha_1$ . Evidentemente, todos estos conjuntos son triángulos en la superficie  $A$ , y el elemento ramificado sólo puede estar situado en un vértice de un triángulo. Representemos por  $T$ , el conjunto de todos estos triángulos. En general, si ya se han elegido en  $A$  ciertos conjuntos de triángulos  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , definamos un nuevo conjunto  $T_{n+1}$ , incluyendo en éste todos los triángulos que están «univalentemente» situados sobre los triángulos de  $\tau_n$  y que no están contenidos en los triángulos de los conjuntos  $T_1, T_2, \dots, T_n$  donde cada uno de ellos contiene no más de un elemento ramificado; además, estos últimos tienen que estar situados sobre los puntos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Esta definición recurrente suministra una sucesión  $\{T_n\}$  de conjuntos de triángulos en  $A$ . Designemos con  $T$  el conjunto de todos estos triángulos, y demostremos que cualquier elemento  $e_0 \in A$  pertenece al menos a uno de los triángulos del conjunto  $T$ . Supongamos primero que  $e_0$  es un elemento no ramificado con el centro  $z_0$ ; entonces  $z = \varphi(e)$  realiza una transformación biunívoca y bicontinua de cualquier  $\rho$ -entorno de  $e_0$  en el círculo  $|z - z_0| < \rho$ . Si  $n$  es tan grande que los diámetros de los triángulos de  $\tau_n$  son todos menores que  $\rho$ , entonces todos los triángulos  $\delta \in \tau_n$  que contienen al punto  $z_0$  estarán contenidos en el círculo  $|z - z_0| < \rho$ . Por ello, sus preimágenes  $\Delta$  en el  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$  se transforman en  $\delta$  mediante  $z = \varphi(e)$  de tal modo que esta transformación es un homeomorfismo y, por consiguiente,  $\Delta$  son triángulos que están situados «univalentemente» sobre  $\delta$ . Como  $\Delta$  consta solamente de elementos regulares, éstos tienen que pertenecer al conjunto  $T_n$ , claro, si no están contenidos en alguno de los conjuntos  $T_1, \dots, T_{n-1}$ ; en este caso todos los triángulos  $\Delta$  contienen al elemento dado  $e_0$ .

Supongamos que  $e_0$  es un elemento ramificado de orden  $\nu$ , situado sobre el punto  $\alpha_m$ . De las condiciones b) y a) se deduce que para todos los  $n \geq m$  el punto  $\alpha_m$  es un vértice de los triángulos del sistema  $\tau_n$ . Fijando un  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$ , elijamos ahora  $n$  tan grande que todos los triángulos de  $\tau_n$  con el vértice  $\alpha_m$  estén contenidos en el círculo  $|z - z_0| < \rho$ , y sea  $\delta$  cualquiera de estos triángulos. La suma  $\nu$ -forme de la serie que representa al elemento  $e_0$  se descompone en el recinto  $\delta$  en  $\nu$  ramas analíticas uniformes. Los elementos de cada una de éstas  $f_j(z)$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) están situados uno a uno sobre los puntos del triángulo  $\delta$  y el conjunto de los mismos  $\Delta_j$  se transforma biunívoca y bicontinua en  $\delta$ . Por esta razón, sobre  $\delta$  están situados «univalentemente»  $\nu$  triángulos distintos  $\Delta_j$  que están contenidos en el  $\rho$ -entorno considerado de  $e_0$ . Cada uno de ellos contiene un solo elemento ramificado, precisamente  $e_0$ , el cual representa el vértice común de estos triángulos (éstos no tienen otros elementos comunes).



De todo lo expuesto se deduce que los triángulos  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \nu$ ) pertenecen al conjunto  $T_n$ , si es que no pertenecen a alguno de los conjuntos  $T_1, \dots, T_{n-1}$ .

En resumen, para cualquier elemento  $e_0 \in A$  existen triángulos del sistema  $T$  que contienen a  $e_0$ . Hemos obtenido un sistema de triángulos que cubren toda la superficie  $A$ ; además, en cada triángulo de este sistema la transformación  $z = \varphi(e)$  es homeomorfa. También es homeomorfa en un entorno de cada punto frontera de los triángulos obtenidos que sea distinto de los vértices, puesto que todos estos puntos son regulares (véase el ap. 5.4).

Ahora bien, formalmente, todo lo demostrado no es bastante para asegurar que  $z = \varphi(e)$  es una transformación interior, puesto que, generalmente, el sistema  $T$  no realiza una triangulación de la superficie  $A$ . Comprobemos que se puede obtener de  $T$  una triangulación de la imagen analítica  $A$  haciendo una subdivisión de los triángulos de este sistema. Obsérvese primero que dos triángulos distintos de  $T$  no tienen puntos interiores comunes. Supongamos lo contrario: sean  $\Delta' \in T_m$  y  $\Delta'' \in T_n$  dos triángulos situados sobre  $\delta' \in \tau_m$  y  $\delta'' \in \tau_n$ , respectivamente, que tienen un punto (un elemento) interior común e situado sobre un punto  $\zeta$ . Entonces los triángulos  $\delta'$  y  $\delta''$  tienen el punto interior común  $\zeta$ . Por ello, éstos tienen que pertenecer a distintas triangulaciones ( $m \neq n$ ) y uno de ellos tiene que estar contenido en el otro, por ejemplo,  $\delta'' \subset \delta'$ , lo cual es posible sólo si  $n > m$ . Los elementos de  $\Delta'$  y  $\Delta''$  determinan dos funciones uniformes y analíticas  $f_1(z)$  y  $f_2(z)$  en los recintos simplemente conexos  $\delta'$  y  $\delta''$ . Como estas funciones coinciden en un entorno del punto  $\zeta$ , éstas tienen que coincidir también en todo el triángulo  $\delta''$ , de donde se deduce que todos los elementos que forman  $\Delta''$  están contenidos en  $\Delta'$  y, por lo tanto,  $\Delta'' \subset \Delta'$ . Pero esto contradice a la definición del conjunto de triángulos  $T_n$ , pues, si  $n > m$  ninguno de los triángulos  $T_n$  puede estar contenido en los triángulos de  $T_m$ .

Demostremos que cada elemento posee un entorno que se cubre por una cantidad finita de triángulos de  $T$ . En efecto, al demostrar la existencia de los triángulos de  $T$ , a los cuales pertenece  $e_0$ , se observó que para un número suficientemente grande  $n$  existe un entorno del elemento  $e_0$  que se cubre por una cantidad finita de triángulos de  $T$ :  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ . Estos últimos agotan todos los triángulos del sistema  $T$  que cubren este entorno. En efecto, cualquiera de estos triángulos tiene que tener un punto interior común con uno de los triángulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  y, por consiguiente, coincide con él. Una vez establecido esto, consideremos cualquier triángulo  $\Delta \subset T$  y situado sobre un triángulo  $\delta$  de la esfera; en virtud de lo expuesto, la frontera del triángulo  $\Delta$  puede contener solamente una cantidad finita de vértices de los triángulos del



sistema  $T$ . Supongamos que éstos están situados sobre los puntos frontera  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  del triángulo  $\delta$ . Fijemos en el interior de  $\delta$  un punto arbitrario  $\zeta$  y unámoslo mediante arcos de Jordan con todos los puntos  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ . Exigiremos que estos arcos no tengan otros puntos comunes más que  $\zeta$ , y que cada uno de ellos no tenga otros puntos comunes con la frontera del triángulo  $\delta$  más que su extremo  $\zeta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Estos arcos dividen a  $\delta$  en  $n$  triángulos con el vértice común  $\zeta$ . Respectivamente, el triángulo  $\Delta$  se divide en  $n$  triángulos  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , situados sobre los triángulos  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Si se efectúa semejante construcción sobre todos los triángulos que forman  $T$  (los cuales, según lo expuesto en el apartado anterior y la construcción misma, no hay más que un conjunto numerable), entonces, debido a todo lo establecido en el presente apartado, resulta una triangulación de la superficie  $A$ . Como en cada triángulo de la triangulación, la transformación  $z = \varphi(e)$  es homeomorfa, siendo homeomorfa también en un entorno de cada punto frontera de los triángulos, que sea distinto de los vértices (todos los puntos de ramificación están contenidos en el conjunto de los vértices), resulta que  $z = \varphi(e)$  es una transformación interior.

Así, pues, la transformación  $z = \varphi(e)$ , que pone en correspondencia a cada elemento de la imagen analítica  $A$  el centro de este elemento, convertido a  $A$  en una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. De lo expuesto se deduce que sus puntos de ramificación son todos los elementos ramificados de  $A$ , y únicamente ellos, coincidiendo el orden de un punto de ramificación con el orden de ramificación del elemento correspondiente. La transformación interior  $z = \varphi(e)$ , que está estrechamente ligada con la definición misma de la superficie  $A$ , es analítica en  $A$  (a excepción de puntos aislados, que son polos de la transformación  $z = \varphi(e)$ ), debido a la teoría general de las funciones. Se obtiene otra función analítica, tan estrechamente ligada con la definición de imagen analítica como la anterior, al poner en correspondencia a cada ele-

mento  $e_0$  que se expresa por la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{v}}$  (o por la serie

$\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{-\frac{n}{v}}$ ), el valor de este elemento en su centro, es decir, el número

$a_0$  si  $m \geq 0$ , y  $\infty$  si  $m < 0$ . Designando este valor con  $w$ :  $w = \psi(e)$ , obtenemos de nuevo una función uniforme y analítica en  $A$ , a excepción de polos. Su analiticidad es debida a que, en un entorno de cada elemento de  $A$ ,  $\psi(e)$  es desarrollable en serie de potencias enteras del parámetro local correspondiente. Si  $e_0$  es un elemento no ramificado de centro finito, el parámetro local  $t$  es igual a  $z - z_0$  y para  $\psi(e)$  obtenemos la siguiente expresión en un entorno del

punto  $e_0$ :

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

En efecto, los valores de los elementos de un entorno del elemento  $e_0$ , es decir, de los elementos subordinados a  $e_0$ , tienen que coincidir en los centros de estos elementos con los valores que toma en estos mismos puntos la suma de la serie que expresa a  $e_0$ . Análogamente, en un entorno de un elemento no ramificado  $e_0$  con el centro en el punto del infinito,  $t = \frac{1}{z}$  y para  $\psi(e)$  obtenemos:

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

En el caso de un elemento ramificado, se tiene:

$$t = (z - z_0)^{\frac{1}{v}} \quad (\text{o } t = z^{-\frac{1}{v}})$$

y para  $\psi(e)$  obtenemos de nuevo:

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

Extendiendo el concepto de función meromorfa a las funciones que son analíticas, a excepción de polos, en la superficie de Riemann, llamaremos a éstas meromorfas en esta superficie. Entonces, se puede hacer el siguiente resumen de los resultados obtenidos: *toda imagen analítica A representa una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Haciendo corresponder a los elementos  $e \in A$  sus centros  $z$  o los valores  $w$  de los elementos en estos centros, obtenemos dos funciones meromorfas en A:  $z = \varphi(e)$  y  $w = \psi(e)$ .*

Aclaremos lo expuesto con un ejemplo. Sea  $w = f(z) \neq \text{const}$  una función meromorfa en el plano finito. En el ap. 3.4 se vio que tal función realiza una transformación interior del plano finito y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Comprobemos que esta superficie coincide con aquella que resulta al considerar el conjunto de todos los elementos de la función  $z = f^{-1}(w)$  como una imagen analítica  $A$  y al convertir después esta imagen en una superficie de Riemann del modo expuesto en el presente apartado. En efecto, en un caso la superficie de Riemann se obtiene del plano finito (los elementos son puntos) mediante la transformación interior  $w_0 = f(z_0)$ , en el segundo caso, dicha superficie se obtiene de la imagen analítica  $A$  (los elementos son series de potencias generalizadas, dispuestas según las potencias de  $w - w_0$ ) mediante la transformación interior que hace corresponder a cada elemento  $e_0$  su centro  $w_0$ . Comprobemos que las dos superficies son idénticas hallando una transformación homeomorfa de la segunda sobre la primera, de modo que una de las

transformaciones interiores se convierta en la otra. La transformación homeomorfa pedida  $z_0 = F(e_0)$  se obtiene haciendo corresponder al elemento  $e_0$  que se expresa por la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (w-w_0)^{\frac{n}{v}}$  (o por la serie  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n w^{-\frac{n}{v}}$ ), el valor de la suma de la serie en el punto  $w_0$ , es decir, el valor correspondiente de la función  $z_0 = f^{-1}(w_0)$ .

La transformación de la imagen analítica  $A$  en el plano finito, obtenida de este modo, es uniforme y continua. Pero es también biunívoca, puesto que la función  $w = f(z)$  es uniforme y, por consiguiente, cualquier punto dado  $z_0 \neq \infty$  determina completamente el elemento de esta función con el centro  $z_0$  y, a la vez, también el elemento  $e_0$  de la función inversa.

Finalmente, la transformación inversa  $e_0 = F^{-1}(z_0)$  también es continua, puesto que para cualquier  $\rho$ -entorno del elemento  $e_0$  se puede señalar un entorno del punto  $z_0$  tal, que todos los valores correspondientes de  $w = f(z)$  caigan en el círculo  $|w - w_0| < \rho$  (o en el recinto  $|w| > \rho$  si  $w_0 = \infty$ ) y, por consiguiente, los elementos  $e$  con el centro  $w$  caigan en el entorno dado del elemento  $e_0$ .

En resumen, las superficies de infinitas hojas, obtenidas en el ap. 3.4 mediante las transformaciones  $w = e^z$  o  $w = \operatorname{sen} z$  del plano finito, coinciden con las superficies que representan las imágenes analíticas formadas por todos los elementos de  $\operatorname{Ln} w$  o de  $\operatorname{Arcsen} w$ . Poniendo en correspondencia a cada elemento de la primera de estas imágenes el valor  $z$  o el valor  $w$ , obtenemos la función  $z = \operatorname{Ln} w$  o la función  $w = e^z$ , respectivamente, como funciones uniformes y analíticas de los elementos de la imagen. Del mismo modo, en la segunda imagen obtenemos las funciones uniformes  $z = \operatorname{Arcsen} w$  o  $w = \operatorname{sen} z$ .

## § 6. PUNTOS SINGULARES. FUNCIONES ALGEBRAICAS

6.1. Ya nos encontramos con el concepto de punto singular en distintos lugares del presente curso. En los casos más simples éste era un punto singular aislado de carácter uniforme o un punto de ramificación. En cada uno de ellos la función dejaba de ser analítica por causas muy sencillas: porque se perdía la continuidad (polo, punto singular esencial), o porque en cualquier entorno del punto la función no era uniforme (punto de ramificación). El concepto de punto singular de un elemento (circular) de una función analítica era de un carácter más general. Este punto, situado en la frontera del círculo de convergencia del elemento, se definía como un punto tal que en un entorno del mismo no se puede señalar una función uniforme y analítica que coincida con los valores del elemento dado en la parte común del círculo de convergencia y del

entorno considerado. Particularmente, éste podría ser un polo, un punto singular esencial o un punto de ramificación.

Ahora, basándose en la teoría de la prolongación analítica, ha llegado la hora de desarrollar el concepto general de punto singular de una función analítica que abarque como casos particulares los tipos especiales anteriores.

Sea  $e_0$  un elemento circular regular con el centro  $z_0$  y sea  $L$  una curva continua:  $z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), con el origen en el punto  $z_0$ . Si es posible la prolongación analítica del elemento  $e_0$  a lo largo de toda la curva  $L$ , se dice que todos los puntos de la curva  $L$  son regulares (respecto de la prolongación considerada). En caso contrario, existe un número  $\tau$ ,  $\alpha < \tau \leq \beta$ , tal, que es posible la prolongación a lo largo de cualquier arco  $L_{[a, \tau]}$  para  $t < \tau$  y es imposible a lo largo del arco  $L_{[\tau, \beta]}$ . En este caso el punto de la curva  $L$  que se determina por el valor del parámetro  $t = \tau$ , se llama punto singular respecto de la prolongación considerada (todos los puntos que le preceden son regulares). Expresándose descriptivamente: un punto singular de una función analítica es un obstáculo en el camino de la prolongación analítica.

El lector puede convencerse fácilmente de que si una función  $f(z)$  es uniforme y analítica en un recinto  $G$ , a excepción de polos o puntos singulares esenciales, entonces estos últimos son singulares en el sentido que acabamos de explicar para la prolongación de un elemento regular de esta función a lo largo de cualquier curva que pase por ellos. Exactamente igual, si  $\zeta_0$  es un punto singular de un elemento circular  $e_0$ , entonces también es un punto singular, en el sentido que acabamos de explicar, para la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de cualquier curva que una el centro  $z_0$  con el punto  $\zeta_0$  y pertenezca al círculo de convergencia con todos sus puntos, a excepción del extremo  $\zeta_0$ .

Examinemos desde el nuevo punto de vista el concepto de punto de ramificación que conocemos hasta ahora sólo en forma de ejemplos particulares ( $\sqrt[n]{z}$ ,  $\text{Ln } z$ , etc). Sea  $e_0$  un elemento regular con el centro  $z_0$ , que pueda prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente a un recinto  $G$  de la forma  $0 < |z - \zeta| < \rho$ .

Para estudiar la función  $f(z)$ , a priori multiforme, y definida en el recinto  $G$  mediante todas las prolongaciones posibles del elemento  $e_0$  a lo largo de las curvas pertenecientes a este recinto, hagamos la transformación auxiliar  $t = \text{Ln}(z - \zeta)$ . Como resultado, el recinto  $G$  se transformará en el semiplano  $D$ :  $\text{Re } t < \ln \rho$ , es decir, en un recinto simplemente conexo. Al elemento  $e_0$  le corresponderá un elemento regular  $e_0$  con el centro  $t_0$ . Este puede obtenerse fijando una rama uniforme y analítica de la función  $t = \text{Ln}(z - \zeta)$  en

un entorno del punto  $z_0$  y examinando después la función  $f(\zeta + e^t)$  en un entorno del punto  $t_0$  (los valores de la rama en el punto  $z_0$ ). Como  $e_0$  se puede prolongar analíticamente a lo largo de todas las curvas pertenecientes a  $G$ , resulta que  $e_0$  también se puede prolongar analíticamente a lo largo de todas las curvas pertenecientes a  $D$ . En virtud del teorema de monodromía, resulta una función  $f^*(t)$  uniforme y analítica en el semiplano. Esta función es el resultado de la transformación de  $f(z)$  mediante  $t = \text{Ln}(z - \zeta)$ , es decir,  $f^*(t) = f(\zeta + e^t)$ .

Respecto de  $f^*(t)$  son posibles las siguientes hipótesis:

- 1) esta función posee un período múltiplo de  $2\pi i$ ;
- 2) no posee un período de esta forma.

Examinemos primero el caso 1). Sea  $\omega = 2k\pi i$  ( $k$  es un número natural) un período de la función  $f^*(t)$ , y supongamos que ningún número de la forma  $2n\pi i$ , donde  $n$  es un número natural menor que  $k$ , es período de  $f^*(t)$ . Entonces  $f^*(t + 2k\pi i) = f^*(t)$  para cualquier  $t \in D$  y, cualquiera que sea el número natural  $n < k$ , no puede cumplirse la igualdad

$$f^*(t + 2n\pi i) = f^*(t)$$

para todos los  $t$ , y tampoco para un conjunto infinito de valores de  $t$  con un punto de acumulación en el semiplano  $\text{Re } t < \ln \rho$  (en caso contrario, en virtud del teorema interior de unicidad, se cumpliría la igualdad para todos los  $t$ , y  $2n\pi i$  sería un período de la función  $f^*(t)$ ). El cambio de  $t_0$  por  $t_0 + 2k\pi i$  bajo el signo de la función  $f^*(t)$  puede ser obtenido mediante su prolongación analítica a lo largo de cualquier curva continua que una  $t_0$  con  $t_0 + 2k\pi i$ . A este cambio le corresponde la prolongación analítica del elemento  $e_0$  a lo largo de una curva cerrada que comienza y termina en el punto  $z_0$ . Recorriendo esta curva se efectúa un recorrido  $k$ -ple alrededor del punto  $\zeta$  en sentido positivo, puesto que  $\text{Im} \{ \text{Ln}(z - \zeta) \} = \text{Im } t$  aumenta en este caso en  $2k\pi$ . Como se ha supuesto que la función  $f^*(t)$  es periódica, los valores del elemento que se obtiene como resultado de la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de la curva indicada, tienen que coincidir en un entorno del punto  $z_0$  con los valores correspondientes del elemento  $e_0$ . Por ello, los mismos elementos tienen que coincidir. Evidentemente, la misma conclusión es cierta también respecto de cualquier elemento  $e_1$  con el centro  $z_1$  que se obtiene de  $e_0$  mediante la prolongación a lo largo de una curva  $A$  perteneciente al recinto  $G$ : prolongando  $e_1$  a lo largo de una curva cerrada  $L_1$  con el origen y el extremo en el punto  $z_1$ , la cual efectúa  $k$  vueltas alrededor del punto  $\zeta$ , volvemos a obtener el elemento inicial  $e_1$ . Además, no existe un elemento  $e'$  que pueda convertirse en sí mismo al efectuar la prolongación a lo largo de una curva cerrada  $L'$  perteneciente a  $G$  y que de menos de  $k$  vueltas

(pero no menos de una vuelta) alrededor de  $\zeta$ . Obsérvese que a la prolongación de un elemento  $e'$  a lo largo de una curva cerrada que pertenezca al recinto  $G$  y no de ninguna vuelta alrededor de  $\zeta$ , le corresponde en el plano  $t$  una prolongación a lo largo de una curva cerrada perteneciente a  $D$  y, por consiguiente, el resultado de la prolongación del elemento  $e'$  a lo largo de tal curva siempre coincide con  $e'$ .

Si  $k = 1$ , o sea, si  $f^*(t)$  es de período  $2\pi i$ , entonces la prolongación de cualquiera de los elementos de la función  $f(z)$  a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente a  $G$ , da un resultado que coincide con el elemento inicial. En otras palabras, la función  $f(z)$  es en este caso uniforme y analítica en todo el recinto  $G$ . El punto  $\zeta$  es para ésta un punto regular o un punto singular aislado de carácter uniforme, según que sea posible la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de alguna curva continua que pase por el punto  $\zeta$ , o que no sea posible la prolongación del elemento  $e_0$  a lo largo de una de tales curvas. Por consiguiente, si  $k = 1$  la función  $f(z)$  se expresa en el recinto  $G$  por una serie de Laurent (en particular, por una serie de Taylor dispuesta según las potencias de  $z - \zeta$ ).

Sea  $k > 1$ , de modo que  $2\pi i$  no es un período de la función  $f^*(t)$ . Entonces la función  $f(z)$  es multiforme, es precisamente  $k$ -forme. En efecto, para cualquier  $t \in D$  las sucesiones de los coeficientes de Taylor de los desarrollos de la función  $f^*(t)$  en los entornos de los puntos  $t, t + 2\pi i, \dots, t + (k-1)2\pi i$  no pueden coincidir por completo, es decir, tienen que diferenciarse entre sí por lo menos en un coeficiente. De aquí se deduce que para cada punto  $z \in G$  existen  $k$  elementos distintos de la función  $f(z)$  con el centro  $z$ . Como  $2k\pi i$  es un período de la función  $f^*(t)$ , existen no más de  $k$  elementos distintos de la función  $f(z)$  que tienen un centro dado. En resumen,  $f(z)$  es una función  $k$ -forme que es analítica en el recinto  $G$ . Si  $e$  es uno de sus elementos, entonces pueden obtenerse todos los demás  $k-1$  elementos con el mismo centro prolongando  $e$  en el recinto  $G$  a lo largo de curvas continuas cerradas que efectúen alrededor del punto  $\zeta$  1, 2,  $\dots$ ,  $k-1$  vueltas, respectivamente, en un mismo sentido.

En este caso,  $\zeta$  es un punto de ramificación de orden finito  $k-1$ .

Para obtener la expresión analítica de la función  $f(z)$  en un entorno del punto  $\zeta$ , realicemos la transformación  $(z - \zeta)^{-\frac{1}{k}} = \delta$ . Entonces el recinto  $G$  se transforma en el recinto  $G_1$ :  $0 < |\delta| < R^{\frac{1}{k}}$  y la función  $f(z)$  se convierte en la función  $f_1(\delta)$ . Se obtiene esta última prolongando uno de sus elementos a lo largo de todas las curvas posibles pertenecientes al recinto  $G_1$ . En el plano de la variable  $\tau = \text{Ln } \delta = \frac{1}{k} t$  a ésta le corresponde una función uniforme y

analítica  $f_1^*(\tau) = f^*\left(\frac{1}{k}t\right)$  de período  $2\pi i$ ; de aquí, según lo anterior, se deduce que  $f_1(\zeta)$  es una función uniforme y analítica en el recinto  $G_1$ . Para esta última obtenemos un desarrollo de la forma

$$f_1(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta^n,$$

y, por consiguiente,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (z - \zeta)^{\frac{n}{k}}.$$

Tal es la forma general de las funciones analíticas en un entorno de un punto de ramificación de orden finito  $k - 1$ .

Si  $f(z)$  posee un límite finito o infinito en el punto  $\zeta$ , entonces esto mismo se verifica también para  $f_1(\zeta)$  en el origen de coordenadas, de donde se deduce que entre los coeficientes  $\alpha_n$  de subíndice negativo solamente una cantidad finita de ellos son distintos de cero. El punto de ramificación se llama en este caso punto algebraico de ramificación. Si  $f(z)$  no posee límite en el punto  $\zeta$ , entonces lo mismo es cierto también para  $f_1(\zeta)$  en el origen de coordenadas, de donde se deduce que entre los coeficientes  $\alpha_n$  de subíndice negativo hay un conjunto infinito de ellos que son distintos de cero. El punto de ramificación pertenece en este caso a la categoría de trascendentes. Así, por ejemplo, las funciones  $\sqrt[k]{z}$  y  $\exp(\sqrt[k]{z})$  tienen un punto algebraico de ramificación en el origen de coordenadas, mientras que la función  $\exp\left(\frac{1}{\sqrt[k]{z}}\right)$

tiene en el mismo un punto trascendente de ramificación; el orden del punto en todos estos ejemplos es el mismo e igual a  $k - 1$ .

Analicemos, finalmente, el caso en que la función  $f^*(t)$  no tiene un período de la forma  $2k\pi i$  ( $k$  es natural). Entonces las sucesiones de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de la función  $f^*(t)$  en los entornos de cualesquiera de los puntos  $t$ ,  $t + 2\pi i$ ,  $t - 2\pi i$ ,  $t + 4\pi i$ ,  $t - 4\pi i$ , . . . no pueden coincidir por completo, es decir, tienen que diferenciarse entre sí por lo menos en un coeficiente. De aquí se deduce que para cualquier  $z \in G$  existe un conjunto infinito de elementos distintos de la función  $f(z)$  con este centro y, por consiguiente,  $f(z)$  es una función de  $z$  de infinitas hojas en cualquier entorno del punto  $\zeta$ . De un elemento cualquiera de la función  $f(z)$  con el centro dado se puede pasar a cualquier otro con el mismo centro mediante la prolongación analítica a lo largo de una curva cerrada que de una cantidad determinada de vueltas alrededor del punto  $\zeta$ . La prolongación a lo largo de curvas que no den ninguna vuelta alrededor de este punto (es decir, que al recorrerlas sea igual



a cero la  $\text{Var Arg } (z - \zeta)$ , no varía el elemento inicial. Por ello, en el caso dado el punto  $\zeta$  también es un punto de ramificación de la función  $f(z)$  y, además, de orden infinito. Tal género de puntos también se consideran como puntos trascendentes de ramificación y se denominan **logarítmicos**.

La expresión analítica de la función en un entorno de un punto logarítmico puede obtenerse, por ejemplo, transformando el semiplano  $D$  en un círculo mediante  $\tau = \frac{t-\alpha}{t+\alpha}$ , donde  $\alpha$  es un punto cualquiera perteneciente a  $D$ . Entonces  $f^*(t)$  se convierte en una función  $F(\tau)$  uniforme y analítica en un entorno del origen de coordenadas. Por esto, para  $F(\tau)$  se tiene el desarrollo

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tau^n,$$

de donde

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( \frac{t-\alpha}{t+\alpha} \right)^n$$

y, finalmente,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ \frac{\text{Ln}(z-\zeta) - \alpha}{\text{Ln}(z-\zeta) + \alpha} \right]^n.$$

Por cierto, este desarrollo es de poco uso en las aplicaciones. En casos particulares, para la función  $f(z)$  en un entorno de un punto singular logarítmico se pueden obtener unos desarrollos más simples y más cómodos. He aquí dos ejemplos.

**Ejemplo 1.** La función  $f(z)$  adquiere un sumando constante  $A$  al hacer un recorrido simple (de una vuelta) alrededor del punto  $\zeta$  en sentido positivo. Entonces  $f(z) = \frac{A}{2\pi i} \text{Ln}(z - \zeta)$  no varía al hacer tal recorrido y, por consiguiente, representa una función uniforme y analítica en un recinto de la forma  $0 < |z - \zeta| < R$ . Por ello, para  $f(z)$  se verifica el desarrollo

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i} \text{Ln}(z - \zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (z - \zeta)^n.$$

**Ejemplo 2.** La función  $f(z)$  adquiere un factor constante  $a \neq 0$  al hacer un recorrido simple alrededor del punto  $\zeta$  en sentido positivo. Entonces

$$f(z) \exp \left[ -\frac{\ln a}{2\pi i} \text{Ln}(z - \zeta) \right] = f(z) (z - \zeta)^{-\frac{\ln a}{2\pi i}}$$



no varía al hacer tal recorrido y, por consiguiente, para  $f(z)$  se verifica el desarrollo

$$f(z) = (z - \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \alpha_n (z - \zeta)^n.$$

Todo lo expuesto aquí respecto de los puntos de ramificación se refería al caso de un punto finito  $\zeta$ . Sin embargo, las definiciones y deducciones se extienden inmediatamente al caso del punto del infinito haciendo el cambio de  $z - \zeta$  por  $\frac{1}{z}$ .

6.2. La definición de punto singular, dada en el precedente apartado, no es todavía completa, puesto que no contiene las condiciones según las cuales dos puntos singulares, definidos de modos distintos, tienen que considerarse como idénticos. Completémosla con la siguiente condición.

Sean  $e_1, e_2$  dos elementos circulares regulares de una función analítica completa y sean  $L_1: z = \lambda_1(t_1)$ , y  $L_2: z = \lambda_2(t_2)$  dos curvas continuas que partan de sus centros  $z_1, z_2$  y que tengan al menos un punto común  $\zeta_0$ , que corresponde a los valores de los parámetros  $t_1 = \tau_1$  y  $t_2 = \tau_2$ . Supongamos que este punto es singular para la prolongación de  $e_1$  a lo largo de  $L_1$  y de  $e_2$  a lo largo de  $L_2$ . Si para cualquier entorno del punto  $\zeta_0$  existe un  $\varepsilon > 0$  tal, que el elemento obtenido de  $e_1$  mediante la prolongación a lo largo de  $L_1$  hasta algún punto  $z' = \lambda_1(t')$ ,  $\tau_1 - \varepsilon < t' < \tau_1$ , puede ser prolongado a lo largo de cierta curva, perteneciente al entorno dado, obteniendo el elemento que resulta de  $e_2$  mediante su prolongación a lo largo de  $L_2$  hasta algún punto  $z'' = \lambda_2(t'')$ ,  $\tau_2 - \varepsilon < t'' < \tau_2$  (y recíprocamente), entonces el punto singular  $\zeta_0 = \lambda_1(\tau_1) = \lambda_2(\tau_2)$  se considera como un mismo punto singular de la función analítica completa correspondiente. Si no se cumplen las condiciones indicadas, se dice que hay dos puntos singulares distintos de la función analítica que tienen un mismo alijo  $\zeta_0$ .

Para ilustrar esto, consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{(1 + \sqrt{z})(1 + \sqrt[4]{z})}.$$

Sea  $L_1 = L_2$  la circunferencia unidad, recorrida simplemente en sentido positivo, comenzando desde el punto  $z = 1$ . Designemos con  $e_1$  el elemento que representa la rama uniforme de esta función determinada en un entorno del punto  $z = 1$  por las condiciones:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \arg z\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \arg z\right) \right],$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{1}{4} \arg z\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4} \arg z\right) \right].$$

Como resultado de la prolongación analítica a lo largo de  $L$  (la prolongación analítica siempre es una prolongación continua)  $\sqrt{z}$  se convierte en

$$-\sqrt[+]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} \arg z \right) \right]$$

y, por lo tanto, los valores de  $f(z)$  tienden al infinito cuando  $z \rightarrow 1$ . De aquí se deduce que  $z = 1$  es un punto singular para la prolongación considerada.

Designemos ahora con  $e_2$  el elemento que representa aquella rama uniforme de la función  $f(z)$  en un entorno del punto  $z = 1$  que se define por las condiciones

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt[+]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} \arg z \right) \right], \\ \sqrt[6]{z} &= \sqrt[6]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{6} \arg z + \frac{4\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{6} \arg z + \frac{4\pi}{6} \right) \right]. \end{aligned}$$

Después de la prolongación a lo largo de  $L_2$   $\sqrt{z}$  se convierte en

$$-\sqrt[+]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} \arg z \right) \right],$$

y  $\sqrt[6]{z}$  se convierte en

$$-\sqrt[6]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{6} \arg z \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{6} \arg z \right) \right].$$

Por consiguiente, los valores de  $f(z)$  tienden al infinito cuando  $z \rightarrow 1$ . De aquí que  $z = 1$  también es un punto singular para esta prolongación. Fácilmente se observa que éste es distinto del punto singular indicado anteriormente. En efecto, los valores de  $f(z)$ , que se obtienen después de la prolongación de los elementos elegidos a lo largo de  $L_1 = L_2$ , pertenecen a dos ramas uniformes distintas de  $f(z)$  en un entorno del punto  $z = 1$ :

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \left\{ 1 - \sqrt[+]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} \arg z \right) \right] \right\}^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \sqrt[6]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{6} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{6} \arg z \right) \right] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \left\{ 1 - \sqrt[+]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{2} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2} \arg z \right) \right] \right\}^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \sqrt[6]{|z|} \left[ \cos \left( \frac{1}{6} \arg z \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{1}{6} \arg z \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, no se puede pasar de unos a otros mediante la prolongación analítica a lo largo de curvas pertenecientes a un entorno suficientemente pequeño del punto  $z = 1$  (el radio del entorno no

tiene que superar a 1). De aquí se deduce que  $z = 1$  representa dos puntos singulares distintos de la función  $f(z)$ .

El lector puede comprobar fácilmente que uno de éstos es un polo de primer orden y el otro es un polo de segundo orden.

Sea  $G$  un recinto arbitrario simplemente conexo que, para precisar, supondremos que está acotado, y sea  $e_0$  un elemento regular con el centro en cierto punto  $z_0 \in G$ . Supongamos que este elemento se puede prolongar analíticamente a lo largo de cualesquiera curvas pertenecientes al recinto  $G$ . Como resultado, se obtiene una función uniforme y analítica  $f(z)$ . Sea  $\zeta_0$  un punto alcanzable de la frontera, determinado por un semiintervalo de Jordan  $\gamma \subset G$ . Si es posible la prolongación del elemento considerado de la función  $f(z)$  con el centro en el punto inicial del semiintervalo  $\gamma_0$  a lo largo de todo  $\gamma_0$ , incluyendo el punto final  $\zeta_0$ , entonces para cualquier otro semiintervalo de Jordan  $\gamma$  que determine el mismo punto alcanzable  $\zeta_0$ , también es posible la prolongación del elemento de la función  $f(z)$  con el centro en el punto inicial del semiintervalo  $\gamma$  a lo largo de todo  $\gamma$ , incluyendo el punto final. Además, el resultado de la prolongación en ambos casos es el mismo.

En efecto, sea  $\varepsilon_0$  el elemento que es el resultado de la prolongación a lo largo de  $\gamma_0$ . Si  $\gamma$  y  $\gamma_0$  tienen puntos de intersección en cualquier entorno del punto  $\zeta_0$ , entonces tal punto de intersección  $\zeta$  existirá en el círculo de convergencia del elemento  $\varepsilon_0$ . Se puede exigir también que todo el arco  $\widehat{\zeta\zeta_0}$  pertenezca a este círculo. Como la función  $f(z)$  es uniforme, la prolongación a lo largo de  $\gamma_0$  y  $\gamma$  tiene que proporcionar un mismo elemento  $\varepsilon$  con el centro  $\zeta$ . Este elemento está subordinado al elemento  $\varepsilon_0$  y, por consiguiente, agregando también un elemento  $\varepsilon$  más a la cadena de elementos que realiza la prolongación del arco  $\gamma$ , contando desde su punto inicial hasta el punto  $\zeta$ , y observando que el arco  $\widehat{\zeta\zeta_0}$  queda cubierto por los círculos de los elementos  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_0$ , resulta una cadena que realiza la prolongación a lo largo de la curva  $\gamma$  (incluyendo su punto final) y que da el mismo resultado que la prolongación a lo largo de  $\gamma_0$ .

Supongamos ahora que  $\gamma$  y  $\gamma_0$  no tienen puntos comunes en cierto entorno del punto  $\zeta_0$ . Entonces se puede trazar una tercera curva  $\gamma'$  que determine el mismo punto alcanzable y tenga puntos comunes con  $\gamma_0$  y  $\gamma$  en cualquier entorno de su extremo común  $\zeta_0$ . Para convencerse de la existencia de tal curva, es suficiente realizar una transformación conforme del recinto  $G$  en el círculo y recordar que las curvas que determinan un mismo punto alcanzable corresponden a semiintervalos de Jordan del círculo unidad que terminan en un mismo punto de la circunferencia. Aplicando el resultado establecido anteriormente a  $\gamma_0$  y  $\gamma'$ , y después a  $\gamma'$  y  $\gamma$ , nos convencemos de que la proposición que se demuestra es cierta.

De lo demostrado se deduce que, si el punto alcanzable  $\xi_0$  es un punto singular respecto de la prolongación del elemento de la función  $f(z)$  a lo largo de la curva  $\gamma_0$  que determina este punto alcanzable, entonces éste también es un punto singular para la prolongación de los elementos de la función  $f(z)$  a lo largo de cualquier otra curva  $\gamma$  que determine el mismo punto alcanzable. Comprobemos que este punto singular queda siendo el mismo, independientemente de la curva  $\gamma_0, \gamma, \gamma', \dots$  (entre las que determinan el punto alcanzable dado) que se use para la prolongación. Esta afirmación es evidente cuando  $\gamma$  y  $\gamma_0$  se cortan en cualquier entorno del punto  $\xi_0$ , como esto se deduce inmediatamente de la condición de identidad de los puntos singulares, enunciada al comienzo de este apartado. Si  $\gamma$  y  $\gamma_0$  no tienen puntos comunes en cierto entorno del punto  $\xi_0$ , a excepción del extremo, entonces se traza una curva auxiliar  $\gamma'$  que tenga puntos comunes tanto con  $\gamma$  como con  $\gamma_0$  en cualquier entorno del punto  $\xi_0$ , reduciendo el último caso al anterior.

Las proposiciones demostradas aquí justifican la división del conjunto de todos los puntos alcanzables del recinto dado en dos clases: puntos regulares y singulares de una función  $f(z)$  analítica en este recinto. Precisando, un punto alcanzable es regular o singular según que sea posible o no la prolongación del elemento de la función  $f(z)$  a lo largo de una curva cualquiera que determine este punto alcanzable.

El lector puede comprobar fácilmente que cuando el recinto es un círculo, la nueva definición de puntos regulares y singulares de una función analítica es equivalente a la definición dada en el ap. 6.3 del capítulo III.

Establezcamos, finalmente, el concepto de elemento frontera singular no alcanzable. Sea  $\varepsilon$  un elemento frontera del recinto  $G$  que contenga más de un punto; tal elemento necesariamente contiene puntos no alcanzables. Todo intervalo de Jordan  $\gamma$  que pertenece al recinto  $G$ , a excepción de sus extremos, divide a  $G$  en dos recintos. Sea  $g_\gamma$  aquel recinto cuya frontera contiene a  $\varepsilon$ . Supongamos que para cierto intervalo  $\gamma$  todos los puntos alcanzables de la frontera del recinto  $G$  que figuran en la frontera del recinto  $g_\gamma$ , son singulares para  $f(z)$ . En estas condiciones,  $\varepsilon$  se llama elemento frontera singular no alcanzable de la función  $f(z)$ . Si unimos mediante un arco de Jordan  $\lambda$  algún punto  $z_0 \in g_\gamma$  con un punto no alcanzable  $\xi$ , perteneciente a  $\varepsilon$ , de tal modo que el primer punto de intersección del arco  $\lambda$  con la frontera del recinto  $g_\gamma$  pertenezca al recinto  $G$ , entonces este punto, según la hipótesis, será singular respecto de la prolongación de  $f(z)$  a lo largo de  $\lambda$ . Por lo tanto, el mismo punto  $\xi$  no es un obstáculo inmediato para la prolongación analítica, pero a este punto le preceden obstáculos en cualquier camino que conduzca al mismo desde el recinto  $g_\gamma$ .

Aclaremos el concepto de elemento frontera singular no alcanzable en un ejemplo. Sea  $G$  el recinto del plano  $z$  representado en la fig. 76. Su frontera consta del arco de la curva  $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  en el semiintervalo  $0 < x \leq 1$ , del segmento del eje imaginario:  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , y del arco  $AB$  de la circunferencia que une los puntos  $(1, \operatorname{sen} 1)$  y  $(0, 1)$ . Consideremos también el recinto  $D$  del plano  $w$

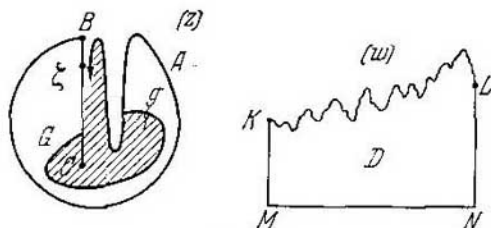


FIG. 76.

que está representado en la misma figura. Este está limitado por una curva de Jordan  $KL$ , cuyos arcos ninguno es analítico\*), y por la poligonal  $KMNL$ . Supongamos que  $w = f(z)$  transforma conformemente  $G$  en  $D$  de tal modo que los homólogos a los puntos  $A$ ,  $B$  ( $B$  se considera aquí como un punto alcanzable) y  $C$  son los puntos  $L$ ,  $M$  y  $K$ , respectivamente. Entonces, la imagen del segmento  $BC$  (si se le considera como formado por puntos alcanzables solamente) será el segmento  $MK$  y la imagen de la curva  $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  será el arco  $KL$ . Evidentemente, cada punto de la curva  $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  es singular para la función  $f(z)$  (punto singular alcanzable). En efecto, cualquier arco de esta curva (determinado por la condición  $0 < \alpha \leq x \leq \beta \leq 1$ ) es regular y analítico. Si se supone que algún punto de la curva considerada es regular para  $f(z)$ , entonces se puede hallar un arco de esta curva en el cual  $f(z)$  será analítica, y la derivada  $f'(z)$  no se anulará. La imagen de tal arco en la transformación  $w = f(z)$  tiene que ser también un arco regular analítico perteneciente a la curva  $KL$ . Pero esta última no contiene arcos analíticos, de donde se deduce lo que se afirmaba.

Consideremos ahora un elemento frontera  $e$  del recinto  $G$  que contenga todos los puntos del segmento  $BC$ . Entre éstos, es alcanzable solamente el punto  $C$ . Este elemento frontera figura por completo en la frontera del recinto  $g \subset G$  que está rayado en la fig. 76. Además,

\*) Tal curva es, por ejemplo, la gráfica de una función  $y = \psi(x)$  que es continua en el segmento  $a \leq x \leq b$  y no es diferenciable en ningún punto del mismo.

forman parte de la frontera del recinto  $g$  los puntos del arco  $y = \sin \frac{1}{x}$ . Ya vimos que éstos son puntos singulares para  $f(z)$ . Por consiguiente, según la definición,  $\varepsilon$  es un elemento frontera singular no alcanzable para  $f(z)$ . Es importante señalar que en este ejemplo todos los puntos del segmento  $BC$ , considerados como puntos frontera alcanzables del recinto  $G$ , son regulares para  $f(z)$ . Esto es debido a que la función  $w = f(z)$  transforma el segmento rectilíneo alcanzable  $BC$  en el segmento rectilíneo  $KM$  (véase a continuación en el ap. 7.1).

6.3. El final de este párrafo lo dedicaremos al estudio de las funciones algebraicas. Consideremos una ecuación algebraica de grado  $n$  respecto de  $w$ :

$$F(z, w) \equiv p_0(z) + p_1(z)w + \dots + p_n(z)w^n = 0, \quad (6.3:1)$$

donde  $p_j(z)$  ( $j = 0, \dots, n$ ) son polinomios en  $z$ , siendo  $p_n(z) \neq 0$  y los polinomios  $p_0(z), p_1(z), \dots, p_n(z)$  no poseen un divisor común de grado mayor que cero, es decir, no poseen ceros comunes. Supondremos también que la ecuación (6.3:1) es *irreducible*, o sea, que el polinomio  $F(z, w)$  no puede expresarse en la forma  $F(z, w) = F_1(z, w)F_2(z, w)$ , donde  $F_1(z, w)$  y  $F_2(z, w)$  son polinomios de grados menores que  $n$  respecto de  $w$ . Si no se cumple esta condición, entonces la ecuación dada puede sustituirse por dos ecuaciones de grado inferior respecto de  $w$

$$F_1(z, w) = 0 \quad \text{y} \quad F_2(z, w) = 0$$

considerando cada una de ellas por separado para definir  $w$  en función de  $z$ .

Señalemos todos los ceros  $z_1, \dots, z_m$ , distintos entre sí, del polinomio  $p_n(z)$  y del polinomio  $D(z)$  que es el discriminante de (6.3:1).  $D(z)$  se halla excluyendo  $w$  entre las dos ecuaciones:

$$F(z, w) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1(z, w)}{\partial w} = 0.$$

Para cada punto finito  $z_0$  del plano, distinto de  $z_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), la ecuación (6.3:1) posee  $n$  raíces finitas distintas  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , y la derivada

$$\frac{\partial F(z_0, w_j)}{\partial w} \neq 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

En virtud del teorema de las funciones implícitas (ap. 5.5, cap. IV), en un entorno del punto  $z_0$  existen  $n$  funciones uniformes y analíticas  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  que satisfacen a las condiciones:

$$f_j(z_0) = w_j \quad \text{y} \quad F[z, f_j(z)] = 0. \quad (6.3:2)$$

En resumen, a cada punto  $z_0$  del plano, distinto de  $z_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), le corresponden  $n$ , y sólo  $n$ , elementos regulares distintos con el centro en este punto, que satisfacen en un entorno del punto  $z_0$  a la ecuación (6.3:1).

Designemos con  $G$  el recinto que se obtiene del plano finito al excluir los puntos  $z_1, \dots, z_m$ , y demos-tremos que cada uno de los elementos  $f_j(z)$  puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que pertenezca al recinto  $G$ . En efecto, sea  $L: z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) una curva continua con el punto inicial  $z_0$ , situada en el recinto  $G$ . Supongamos que  $\zeta = \lambda(\tau)$ ,  $\alpha < \tau < \beta$ , es un punto singular respecto de la prolongación analítica del elemento  $f_{j_0}(z)$  a lo largo de  $L$ . Según lo establecido anteriormente, este punto posee un entorno  $U$  en el cual están definidos  $n$  elementos regulares  $\varphi_j(z)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) que satisfacen a la ecuación (6.3:1). Sea  $z_1 = \lambda(t_1)$  un punto de la curva  $L$ , perteneciente a  $U$ , y tal que  $t_1 < \tau$  y el arco  $L_{[t_1, \tau]}$  está contenido en  $U$ .

Los elementos  $\psi_j(z)$  con el centro en el punto  $z_1$  que están subordinados a los elementos  $\varphi_j(z)$ , respectivamente, satisfacen a la ecuación (6.3:1) en el entorno del punto  $z_1$  y son todos distintos entre sí (puesto que los elementos  $\varphi_j(z)$  con el centro común  $\zeta$  son todos distintos entre sí). Sea  $\chi(z)$  el elemento con el centro en el punto  $z$  que se obtiene de  $f_{j_0}(z)$  mediante la prolongación a lo largo de  $L_{[z, t_1]}$ . Entonces el elemento de la función  $F[z, \chi(z)]$  con el mismo centro representará el resultado de la prolongación del elemento de la función  $F[z, f_{j_0}(z)]$  con el centro  $z_0$ , a lo largo de  $L_{[z, t_1]}$ , y como  $F[z, f_{j_0}(z)] = 0$  en un entorno del punto  $z_0$ , también  $F[z, \chi(z)] = 0$  en un entorno del punto  $z_1$ . Pero sólo pueden existir  $n$  elementos distintos con el centro dado que satisfagan a la ecuación (6.3:1). De aquí se deduce que  $\chi(z)$  coincide con uno de los elementos  $\psi_j(z)$ :  $\psi_{h_0}(z)$ . Observando que el elemento  $\psi_{h_0}(z)$  está subordinado al elemento  $\varphi_{h_0}(z)$  con el centro  $\zeta$  y que el arco  $L_{[t_1, \tau]}$  está cubierto por los círculos de los elementos  $\psi_{h_0}(z)$  y  $\varphi_{h_0}(z)$ , sacamos la conclusión de que el elemento  $f_{j_0}(z)$  se prolonga a lo largo de todo el arco  $L_{[z, \tau]}$  y, por consiguiente, la hipótesis de que  $\zeta = \lambda(\tau)$  es un punto singular para la prolongación considerada, no es cierta.

Así, pues, queda demostrado que cualquier elemento regular que satisfaga a la ecuación (6.3:1) puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que pertenezca al recinto  $G$ ; la prolongación se efectúa mediante elementos que satisfacen a la misma ecuación.

Sea  $\tilde{U}_h$  un entorno del punto  $z_h$  que no contenga a los puntos  $z_j$  distintos de  $z_h$ . Tomemos uno de los elementos  $f_{j_0}(z)$  con el centro en el punto  $z_0 \in \tilde{U}_h$ , y prolonguémoslo a lo largo de todas las curvas posibles del recinto  $\tilde{U}_h$  que no pasen por  $z_h$ . Como resultado se obtiene una función  $\varphi(z)$ , generalmente multiforme, que satisface

a la ecuación (6.3:1):

$$F[z, \varphi(z)] = 0, \quad z \in \bar{U}_h.$$

La función  $\varphi(z)$  puede ser uniforme o multiforme, pero no más de  $n$ -forme en  $\bar{U}_h$ . En el primer caso, el punto  $z_h$  a priori puede ser para  $\varphi(z)$  o regular, o polo, o punto singular esencial. En el segundo caso,  $z_h$  será un punto de ramificación de orden finito (no superior a  $n - 1$ ). En todos los casos,  $\varphi(z)$  posee en un entorno del punto  $z_h$  un desarrollo de la forma

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_j (z - z_h)^{\frac{j}{v}},$$

donde  $v$  es un número natural, no mayor que  $n$ .

Demostremos que entre los coeficientes  $A_j$  de subíndice negativo solamente una cantidad finita de ellos pueden ser distintos de cero (por lo tanto, se excluyen los casos de punto singular esencial y de punto de ramificación no algebraico). Para esto es suficiente demostrar que  $\varphi(z)$  tiende hacia un límite finito o infinito cuando  $z$  tiende a  $z_h$ .

Demostremos previamente el siguiente lema de la dependencia continua de las raíces de una ecuación algebraica de sus coeficientes.

L e m a. *Supongamos que los coeficientes del polinomio*

$$P(w) = c_0 + c_1 w + \dots + c_{n-1} w^{n-1} + w^n$$

*satisfacen a las condiciones  $|c_j| \leq M$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) ( $M > 0$ ). Entonces para un  $k$  fijado,  $1 \leq k \leq n$ , y cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede señalar un  $\delta_h = \delta(\varepsilon; M, k)$  tal, que si  $|c_0| < \delta_h, \dots, |c_{h-1}| < \delta_h$  la ecuación  $P(w) = 0$  posee al menos  $k$  raíces que en valor absoluto son menores que  $\varepsilon$ .*

D e m o s t r a c i ó n. Sean  $w_1, \dots, w_n$  los ceros del polinomio  $P(w)$ , dispuestos por orden de no decrecimiento de sus módulos. Observando que para  $|w| > M + 1$  se tiene:

$$|P(w)| \geq |w|^n \left( 1 - \frac{M}{|w|} - \dots - \frac{M}{|w|^{n-1}} \right) > |w|^n \left( 1 - \frac{M}{|w| - 1} \right) > 0,$$

sacamos la conclusión de que los módulos de todos los ceros no superan a  $M + 1 = M'$ .

Demostremos ahora el lema por el método de inducción, comenzando desde  $k = 1$ .

En efecto,  $c_0 = (-1)^n w_1 \dots w_n$  y, por consiguiente,

$$|w_1| \leq |w_1 \dots w_n|^{\frac{1}{n}} = |c_0|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon,$$

si  $|c_0| < \delta_1 = \varepsilon^n$ .



Supongamos que ya se ha conseguido demostrar que  $|w_1|, \dots, |w_j|$  ( $j < k$ ) pueden hacerse menores que cualquier  $\varepsilon$ , si  $|c_0|, \dots, |c_{j-1}|$  se toman menores que  $\delta_j = \delta_j(\varepsilon, M)$ . Observando que, sin contar el signo,  $c_j$  es la suma de todos los productos posibles de  $n - j$  ceros del polinomio  $P(w)$  de subíndices distintos, obtenemos:

$$|c_j| \geq |w_{j+1} \dots w_n| - \sum |w_{a_1} \dots w_{a_{n-j}}|,$$

donde la suma contiene  $\binom{n}{j} - 1$  términos y cada uno de éstos contiene al menos un factor de subíndice no superior a  $j$ . Por ello, si  $|c_0|, \dots, |c_{j-1}|$  son menores que

$$\delta'_j - \delta_j(\varepsilon', M), \quad \text{donde } \varepsilon' = \varepsilon^{n-j} M^{j-n} \binom{n}{j}^{-1} < \varepsilon$$

(siendo  $\varepsilon < 1$ ).

se tiene:

$$\begin{aligned} |w_{j+1}| &\approx |w_{j+1} \dots w_n|^{\frac{1}{n-j}} \approx \left\{ |c_j| \left[ \binom{n}{j} - 1 \right] M^{n-j-1} \varepsilon' \right\}^{\frac{1}{n-j}} < \\ &< M' \binom{n}{j}^{\frac{1}{n-j}} \varepsilon'^{\frac{1}{n-j}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

si  $|c_j| < M'^{n-j-1} \varepsilon'$ . Haciendo  $\delta_{j+1} = \min(\delta'_j, M'^{n-j-1} \varepsilon')$ , hallamos que  $|w_1| < \varepsilon, \dots, |w_{j+1}| < \varepsilon$  si  $|c_0| < \delta_{j+1}, \dots, |c_j| < \delta_{j+1}$ . El lema queda demostrado.

Consideremos ahora los siguientes casos posibles: a)  $p_n(z_h) \neq 0$  b)  $p_n(z_h) = 0$ . En el caso a) la ecuación

$$F(z_h, w) = p_0(z_h) + p_1(z_h)w + \dots + p_n(z_h)w^n = 0$$

posee las raíces  $a_1, \dots, a_r$  de órdenes de multiplicidad  $k_1, \dots, k_r$ ,

siendo  $\sum_{j=1}^r k_j = n$ .

Haciendo  $w = a_j + w'$ , tendremos:

$$F(z, w) = \pi_0(z) + \pi_1(z)w' + \dots + \pi_n(z)w'^n,$$

donde  $\pi_n(z) = p_n(z)$  y, por consiguiente,  $\pi_n(z) \neq 0$  en cierto entorno  $U_0$  del punto  $z_h$ .

Escribamos la ecuación  $F(z, w) = 0$  para  $z \in U_0$  en la forma

$$\frac{\pi_0(z)}{\pi_n(z)} + \frac{\pi_1(z)}{\pi_n(z)}w' + \dots + \frac{\pi_{n-1}(z)}{\pi_n(z)}w'^{n-1} + w'^n = 0 \quad (6.3:3)$$

y observemos que para  $z = z_h$  ésta posee una raíz  $k_j$ -ple en el punto  $w' = 0$  (puesto que la ecuación  $F(z_h, w) = 0$  posee una raíz  $k_j$ -ple en el punto  $a_j$ ). De aquí se deduce que sus coeficientes  $\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}$  ( $s = 0, \dots, \dots, k_j - 1$ ) se anulan para  $z = z_h$ .

Apliquemos el lema a la ecuación (6.3:3). Fijando  $\varepsilon > 0$  tan pequeño que los  $\varepsilon$ -entornos  $V_j$  de los puntos  $a_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ) no tengan puntos comunes, elijamos según el lema los números  $\delta_{nj} = \delta(\varepsilon; M, k_j)$ ; tomamos por  $M$  el máximo de los extremos superiores de los módulos  $\left| \frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)} \right|$  en  $U_0$ . Teniendo en cuenta que las funciones racionales  $\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}$  son continuas en  $U_0$ , podemos sustituir  $U_0$  por un entorno menor  $U_j$  del punto  $z_h$ , de modo que para todos los  $z \in U_j$  se cumplan las desigualdades

$$\left| \frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)} \right| < \delta_{kj} \quad (s = 0, 1, \dots, k_j - 1).$$

Entonces hallamos que para cada  $z \in U_j$  la ecuación (6.3:3) tiene al menos  $k_j$  raíces (respecto de  $w'$ ) situadas en el círculo  $|w'| < \varepsilon$  y, por consiguiente, la ecuación  $F(z, w) = 0$  tiene al menos  $k_j$  raíces en el círculo  $V_j$ :  $|w - a_j| < \varepsilon$ .

Designemos con  $U$  algún entorno del punto  $z_0$  que esté contenido en todos los  $U_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ). Entonces para todos los  $z \in U$  la ecuación  $F(z, w) = 0$  tiene al menos  $k_j$  raíces en  $V_j$  ( $j = 1, \dots,$

$\dots, r$ ), y como  $\sum_{j=1}^r k_j = n$  y los entornos  $V_j$  de subíndices distintos no tienen puntos comunes, resulta que todas las raíces sin excepción de la ecuación  $F(z, w) = 0$  están contenidas en el conjunto de estos entornos y cada entorno  $V_j$  contiene exactamente  $k_j$  raíces.

Volvamos a examinar la función  $\varphi(z)$  estudiada en un entorno del punto  $z_h$  y elijamos el entorno considerado  $|z - z_h| < \rho$  tan pequeño que éste quede contenido en  $U$ . Como todos los valores de  $\varphi(z)$  son raíces de la ecuación  $F(z, w) = 0$ , éstos tienen que pertenecer al conjunto de los entornos  $V_j$  ( $j = 1, \dots, r$ ), los cuales no tienen puntos comunes entre sí dos a dos. Por otra parte, la imagen  $\varphi(0 < |z - z_h| < \rho)$  es un conjunto conexo (un recinto). Por ello, esta imagen está contenida completamente en uno de los entornos  $V_j$ :  $|w - a_{j_0}| < \varepsilon$ . Así, pues, para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede señalar un  $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$  tal, que para  $0 < |z - z_h| < \rho$  todos los valores de la función  $\varphi(z)$  están contenidos en el círculo  $|w - a_{j_0}| < \varepsilon$ . Por esta razón, en el desarrollo  $\varphi(z) =$

$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j (z - z_h)^{\frac{j}{v}}$  todos los coeficientes de subíndice negativo

tienen que ser iguales a cero (en caso contrario la función  $\varphi(z)$  no estaría acotada en un entorno del punto  $z_k$ ). Definitivamente, para  $\varphi(z)$  obtenemos el desarrollo

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} A_j (z - z_k)^{\frac{j}{v}}.$$

Por lo tanto, en el caso a) (en el que  $p_n(z_k) \neq 0$ )  $z_k$  es un punto regular para  $\varphi(z)$  (si  $v = 1$ ), o un punto de ramificación algebraico. En el mismo punto  $z = z_k$  la función  $\varphi(z)$  toma un valor finito  $\varphi(z_k) = a_{j_0} = A_0$ .

Examinemos el caso b) (en el que  $p_n(z_k) = 0$ ). En este caso  $p_n(z)$  tiene la forma  $p_n(z) = (z - z_k)^q P_n(z)$ , donde  $q$  es un número natural y  $P_n(z)$  es un polinomio que no se anula en el punto  $z_k$ . Escribamos la ecuación  $F(z, w) = 0$  en la forma

$$(z - z_k)^{q(n-1)} F(z, w) = p_0(z) (z - z_k)^{q(n-1)} + \dots + P_n(z) \times \\ \times (z - z_k)^{qn} w^n = 0$$

y sustituyamos aquí  $(z - z_k)^q w$  por  $W$ . Haciendo

$$p_0(z) (z - z_k)^{q(n-1)} = P_0(z), \quad p_1(z) (z - z_k)^{q(n-2)} = \\ = P_1(z), \quad \dots, \quad p_{n-1}(z) = P_{n-1}(z),$$

obtenemos la ecuación

$$P_0(z) + P_1(z)W + \dots + P_{n-1}(z)W^{n-1} + P_n(z)W^n = 0, \quad (6.3:4)$$

en la cual  $P_n(z_k) \neq 0$ .

A esta ecuación tiene que satisfacer en un entorno del punto  $z = z_k$  la función  $W = (z - z_k)^q \varphi(z)$ , la cual es indefinidamente prolongable en un entorno del punto  $z_k$  a lo largo de todas las curvas que no pasan por el punto  $z_k$ . Como a la ecuación (6.3:4) y a la función  $(z - z_k)^q \varphi(z)$  puede aplicarse todo lo establecido en el caso a), hallamos para esta función el siguiente desarrollo en un entorno del punto  $z_k$ :

$$(z - z_k)^q \varphi(z) = \sum_0^{\infty} A_j (z - z_k)^{\frac{j}{v}},$$

de donde

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} A_j (z - z_k)^{\frac{j}{v} - q} = \sum_{j=-qv}^{\infty} A'_j (z - z_k)^{\frac{j}{v}},$$

siendo  $A'_j = A_{j+qv}$ .

Así, pues, en el caso b) el desarrollo de la función  $\varphi(z)$  puede contener una cantidad finita de términos con exponentes negativos, de modo que  $\varphi(z)$  puede tomar el valor  $\infty$  en el punto  $z_k$ .

Estudiemos, finalmente, la función  $\varphi(z)$  que se obtiene en un entorno  $U$  del punto del infinito mediante la prolongación analítica de uno de los elementos  $f_{j_0}(z)$  que satisfacen a la ecuación (6.3:1). Elegiremos este entorno de tal modo que  $U$  no contenga ninguno de los puntos  $z_1, \dots, z_m$ .

Efectuando la transformación  $\zeta = \frac{1}{z}$ , obtenemos en lugar de (6.3:1) la ecuación

$$p_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \dots + p_n\left(\frac{1}{\zeta}\right)w^n = 0,$$

o bien, multiplicando todos los coeficientes por  $\zeta^N$ , donde  $N$  es el mayor grado de los polinomios  $p_0(z), \dots, p_n(z)$ , obtenemos:

$$q_0(\zeta) + \dots + q_n(\zeta)w^n = 0,$$

donde

$$q_j(\zeta) = \zeta^N p_j\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (j=0, \dots, n)$$

son polinomios respecto de  $\zeta$ . A esta ecuación tiene que satisfacer la función  $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , la cual es prolongable indefinidamente en un entorno del punto  $\zeta = 0$  a lo largo de todas las curvas que no pasan por este punto. Según lo anterior,  $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  posee un desarrollo de la forma

$$\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \zeta^{\frac{j}{v}}$$

(si  $q_n(0) \neq 0$ ) o de la forma más general

$$\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{j=\mu}^{\infty} A_j \zeta^{\frac{j}{v}},$$

donde  $\mu$  puede ser negativo, si  $q_n(0) = 0$ .

Volviendo a  $z = \frac{1}{\zeta}$ , hallamos en un entorno del punto  $z = \infty$ :

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} A_j z^{-\frac{j}{v}}, \text{ o bien } \varphi(z) = \sum_{\mu}^{\infty} A_j z^{-\frac{j}{v}}.$$

He aquí un resumen de lo establecido en este apartado.

*La ecuación algebraica (6.3:1) de grado  $n$  determina en el plano ampliado  $w$  como función  $n$ -forme de  $z$ . Esta función se expresa me-*

dian te elementos de la forma  $\sum_{\mu}^{\infty} A_{j\mu} (z - z_0)^{\frac{j}{\mu}}$  si  $z_0 \neq \infty$ , o de la forma  $\sum_{\mu}^{\infty} A_{j\mu} z^{-\frac{j}{\mu}}$  si  $z_0 = \infty$ . Si el punto  $z_0 \neq \infty$  es distinto de los puntos  $z_1, \dots, z_m$ , en los cuales se anula el polinomio  $p_n(z)$  o el discriminante de la ecuación  $D(z)$ , entonces se tienen  $n$  elementos regulares distintos con el centro  $z_0$ . Son posibles elementos irregulares solamente en el caso en que su centro sea uno de los puntos  $z_1, \dots, z_m$  o sea el punto del infinito.

6.4. Ahora demostraremos que todos los elementos obtenidos en el apartado precedente forman una imagen analítica, es decir, que cualquiera de estos elementos puede obtenerse de cualquiera otro mediante la prolongación analítica. Es suficiente demostrar que cualquier elemento regular que satisface a la ecuación  $F(z, w) = 0$  puede prolongarse analíticamente en cualquier otro elemento regular con el mismo centro, que satisfaga a esta ecuación. En efecto, si  $f_{j_0}(z)$  y  $\varphi_{h_0}(z)$  son dos elementos con distintos centros  $z_0$  y  $\zeta$ , entonces podemos prolongar primero  $f_{j_0}(z)$  en cierto elemento  $\varphi_{j_1}(z)$  con el centro  $\zeta$  (véase el apartado precedente), y después prolongar  $\varphi_{j_1}(z)$  en el elemento  $\varphi_{h_0}(z)$ . No queda más que observar que cada uno de los elementos irregulares que satisfacen a la ecuación  $F(z, w) = 0$  se determina mediante la prolongación analítica de elementos regulares.

Para demostrar que dos elementos regulares con un mismo centro  $z_0$  pueden prolongarse analíticamente uno en el otro, emplearemos el método de reducción a lo absurdo.

Supongamos que el elemento  $f_1(z)$  con el centro  $z_0$  puede prolongarse en los elementos  $f_2(z), \dots, f_k(z)$  ( $k < n$ ) con el mismo centro y que no puede prolongarse en los demás elementos  $f_{k+1}(z), \dots, f_n(z)$ . Prolonguemos el elemento  $f_1(z)$  de todos los modos posibles en el recinto  $G$ . Resulta una función  $f(z)$  que, por lo general, es multiforme ( $k$ -forme). Sea  $L \subset G$  una curva continua que una el punto  $z_0$  con el punto  $\zeta \in G$ . Si se prolongan a lo largo de  $L$  dos elementos distintos  $f_s(z)$  y  $f_t(z)$ , entonces tienen que resultar también dos elementos distintos  $\varphi_s(z)$  y  $\varphi_t(z)$  con el centro  $\zeta$ . En efecto, si fuese  $\varphi_s(z) = \varphi_t(z) = \varphi(z)$ , entonces prolongando  $\varphi(z)$  a lo largo de  $L$  obtendríamos también en el punto  $z_0$  elementos iguales  $f_s(z) = f_t(z)$ , en contra de la hipótesis. De aquí se deduce que, prolongando a lo largo de  $L$  todos los  $k$  elementos  $f_1(z), \dots, f_k(z)$ , tenemos que obtener también en el punto  $\zeta$   $k$  elementos distintos entre sí  $\varphi_1(z), \dots, \varphi_k(z)$ . Sea  $L$  un camino cerrado, que comience y termine en el punto  $z_0$ , a lo largo del cual el elemento  $f_1(z)$  se convierte en un elemento  $f_{\alpha_1}(z)$  distinto de  $f_1(z)$ . Entonces, prolongando  $f_{\alpha_1}(z)$  a lo largo de  $L$  (en la misma dirección), tenemos

que obtener un elemento  $f_{a_2}(z)$  distinto de  $f_{a_1}(z)$ . Si éste también es distinto de  $f_1(z)$ , entonces lo prolongamos a lo largo de  $L$  y obtenemos un elemento  $f_{a_3}(z)$  distinto de  $f_{a_1}(z)$  y  $f_{a_2}(z)$  (como a lo largo de  $L$  se han prolongado tres elementos distintos:  $f_1(z)$ ,  $f_{a_1}(z)$  y  $f_{a_2}(z)$ , los resultados de sus prolongaciones  $f_{a_1}(z)$ ,  $f_{a_2}(z)$  y  $f_{a_3}(z)$  también tienen que ser distintos entre sí). Reiterando este proceso, obtenemos un elemento  $f_{a_{j-1}}(z)$  que, al prolongarlo a lo largo de  $L$ , resulta el elemento  $f_1(z)$ . En efecto, el número de elementos distintos con el centro  $z_0$  que pueden obtenerse como resultado de todas las prolongaciones posibles del elemento  $f_1(z)$ , es igual a  $k$ , y, por consiguiente, el proceso descrito de obtención de los elementos  $f_{a_1}(z)$ ,  $f_{a_2}(z)$ , . . . , que son distintos de  $f_1(z)$  y son distintos entre sí, tiene que terminarse no más tarde que en el  $(k-1)$ -ésimo paso. De este modo, a cada curva cerrada  $L$  le corresponde su ciclo de elementos  $f_1(z)$ ,  $f_{a_1}(z)$ , . . . ,  $f_{a_{j-1}}(z)$  tal, que cada elemento siguiente se obtiene del anterior mediante la prolongación a lo largo de  $L$  en sentido positivo, y el elemento  $f_1(z)$  mediante la prolongación del elemento  $f_{a_{j-1}}(z)$ . Si  $j < k$ , entonces, tomando un elemento  $f_{\beta_0}(z)$  que no figure en  $L$ , y prolongándolo reiteradamente a lo largo de  $L$ , obtenemos un nuevo ciclo  $f_{\beta_0}(z)$ ,  $f_{\beta_1}(z)$ , . . . ,  $f_{\beta_{l-1}}(z)$  de elementos distintos de los considerados anteriormente. Por lo tanto, de todos los elementos  $f_1(z)$ , . . . ,  $f_h(z)$  pueden construirse ciclos (respecto de la curva dada  $L$ ), donde los elementos de dos ciclos distintos son, necesariamente, distintos entre sí.

Formemos el producto

$$\begin{aligned} [w - f_1(z)] [w - f_2(z)] \dots [w - f_h(z)] = \\ = w^h - A_{h-1}(z) w^{h-1} + \dots + A_0(z). \end{aligned} \quad (6.4:1)$$

Como los elementos  $f_1(z)$ , . . . ,  $f_h(z)$  son prolongables analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente a  $G$ , esto mismo es cierto también para los coeficientes  $A_0(z)$ , . . . ,  $A_{h-1}(z)$  del polinomio en  $w$  obtenido, los cuales son funciones simétricas elementales de  $f_1(z)$ , . . . ,  $f_h(z)$ . Por consiguiente, estos coeficientes son funciones analíticas en  $G$  (*a priori*  $k$ -formes). No obstante, la prolongación del sistema de elementos  $f_1(z)$ , . . . ,  $f_h(z)$  con el centro  $z_0$  a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente a  $G$  (exactamente igual que la prolongación del sistema  $\varphi_1(z)$ , . . . ,  $\varphi_h(z)$  con cualquier otro centro  $\xi$ ), proporciona de nuevo el mismo sistema de elementos, pero dispuestos en otro orden, el cual puede ser establecido conociendo los ciclos que corresponden a la curva dada. Por ello, el resultado de la prolongación del elemento de cada una de las funciones simétricas  $A_j(z)$  a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente al recinto  $G$ ,

tiene que coincidir con el elemento inicial de esta función. Por lo tanto, las funciones  $A_j(z)$  ( $j = 0, \dots, k-1$ ) son uniformes en el recinto  $G$ , y los puntos frontera de este recinto  $z_1, \dots, z_m$  y  $\infty$  pueden ser para éstas puntos regulares, polos o puntos singulares esenciales. Pero este último caso se excluye. En efecto, en los entornos de los puntos  $z_s$  los valores de la función multiforme  $f(z)$  se expresan por una o varias series de la forma  $\sum_{\mu} A_{\mu}(z-z_s)^{\frac{\rho}{v}}$  (véase el apartado precedente). Exactamente igual, en un entorno del punto del infinito se tienen desarrollos de la forma  $\sum_{\mu'} A_{\mu'} z^{-\frac{\rho'}{v'}}$ . Poniendo en las expresiones de las funciones simétricas  $A_j(z)$  en lugar de los  $k$  elementos de la función  $f(z)$  las series correspondientes, y efectuando las operaciones de multiplicación y suma sobre estas series absolutamente convergentes, hallaremos para cada una de las funciones  $A_j(z)$  el desarrollo en un entorno del punto  $z_s$  (o de  $z = \infty$ ), el cual contiene solamente un número finito de términos con potencias negativas de  $z - z_s$  (respectivamente, con potencias positivas de  $z$ ). Esto significa que ninguna de las funciones  $A_j(z)$  puede tener puntos singulares esenciales en el plano ampliado. Por consiguiente, todas las funciones  $A_j(z)$  son racionales. Expresando cada una de ellas en forma de fracción irreducible

$$A_j(z) = \frac{\tilde{P}_j(z)}{Q_j(z)},$$

donde  $\tilde{P}_j(z)$  y  $Q_j(z)$  son polinomios (si  $A_j(z) \equiv 0$ , hacemos  $\tilde{P}_j(z) \equiv 0$  y  $Q_j(z) \equiv 1$ ), y denotando con  $Q(z)$  el mínimo común múltiplo de los polinomios  $Q_j(z)$  ( $Q(z) \neq 0$ ), representamos la igualdad (6.4:1) en la forma

$$\begin{aligned} & [w - f_1(z)] \dots [w - f_k(z)] = \\ & = \frac{1}{Q(z)} [P_k(z) w^k + P_{k-1}(z) w^{k-1} + \dots + P_0(z)], \end{aligned}$$

donde

$$P_k(z) = Q(z) \text{ y } P_j(z) = \frac{\tilde{P}_j(z) Q(z)}{Q_j(z)} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

Por lo tanto, la función  $k$ -forme  $f(z)$  obtenida mediante todas las prolongaciones posibles de uno de los elementos, que satisfacen a la ecuación algebraica (6.3:1), satisface a la ecuación algebraica

$$P_k(z) w^k + P_{k-1}(z) w^{k-1} + \dots + P_0(z) = 0. \quad (6.4:2)$$

Obsérvese que los coeficientes de la ecuación obtenida no tienen un común divisor mayor que de grado cero, es decir, no tienen ceros comunes. En efecto, sea  $z - a$  algún divisor del coeficiente  $P_h(z) = Q(z)$ ; entonces  $z - a$  es divisor al menos de uno de los denominadores  $Q_j(z)$  de las fracciones  $\frac{\tilde{P}_j(z)}{Q_j(z)}$ . Supongamos que  $Q_{j_0}(z)$  es divisible por la potencia más alta de  $z - a$ . El numerador correspondiente  $\tilde{P}_{j_0}(z)$  no es divisible por  $z - a$  y, además, el factor complementario  $\frac{Q(z)}{Q_{j_0}(z)}$  tampoco es divisible por  $z - a$ . De aquí se deduce que

$$P_{j_0}(z) = \frac{Q(z)}{Q_{j_0}(z)} \tilde{P}_{j_0}(z)$$

tampoco es divisible por  $z - a$  y, por consiguiente,  $z - a$  no puede ser un común divisor de los coeficientes de la ecuación (6.4:2).

Demostremos que el polinomio

$$\Phi(z, w) = P_0(z) + \dots + P_k(z) w^k$$

(cuyo grado  $k$  satisface a la condición  $1 \leq k < n$ ) tiene que ser un divisor del polinomio inicial considerado

$$F(z, w) = p_0(z) + \dots + p_n(z) w^n.$$

Como este último se suponía irreducible, obtendremos una contradicción, de donde deduciremos que  $k$  no puede ser menor que  $n$ , y en fin de cuentas, que todos los elementos que satisfacen a la ecuación algebraica irreducible forman una imagen analítica (y que todos los elementos regulares forman una función  $n$ -forme y analítica en el recinto  $G$ ).

Para la demostración, obsérvese que

$$F(z, w) = p_n(z) [w - f_1(z)] \dots [w - f_n(z)]$$

y

$$\Phi(z, w) = P_k(z) [w - f_1(z)] \dots [w - f_k(z)],$$

conservándose estas relaciones para todas las prolongaciones posibles de los elementos regulares  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  en el recinto  $G$ . Por ello

$$\frac{F(z, w)}{\Phi(z, w)} = \frac{p_n(z)}{P_k(z)} [w - f_{k+1}(z)] \dots [w - f_n(z)].$$

Puede aplicarse al producto  $[w - f_{k+1}(z)] \dots [w - f_n(z)]$  todo lo que se estableció para el producto  $[w - f_1(z)] \dots [w - f_k(z)]$ .



Como resultado, obtenemos:

$$[w - f_{h+1}(z)] \dots [w - f_n(z)] = \frac{1}{R_{n-h}(z)} \{R_{n-h}(z) w^{n-h} + \dots + R_0(z)\},$$

donde  $R_0(z), \dots, R_{n-h}(z)$  son polinomios que no tienen un factor común de grado mayor a cero.

Así, pues,

$$\frac{F(z, w)}{\Phi(z, w)} = \frac{P_n(z)}{P_h(z) R_{n-h}(z)} [R_0(z) + \dots + R_{n-h}(z) w^{n-h}],$$

o bien,

$$F(z, w) = \frac{P_n(z)}{P_h(z) R_{n-h}(z)} [P_0(z) + \dots + P_h(z) w^h] \times \\ \times [R_0(z) + \dots + R_{n-h}(z) w^{n-h}]. \quad (6.4:3)$$

Expresemos  $\frac{P_n(z)}{P_h(z) R_{n-h}(z)}$  en forma de fracción irreducible  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ . Es obvio que el grado del polinomio  $P(z)$  tiene que ser igual a cero. En caso contrario  $P(z)$  tendría al menos un cero  $z = a$  y de la relación (6.4:3) se deduciría que  $F(a, w) = 0$  para todos los  $w$ , lo cual es imposible, puesto que los coeficientes  $p_0(a), \dots, p_n(a)$  de este polinomio no son todos iguales a cero. Exactamente igual,  $Q(z)$  es un polinomio de grado cero. En caso contrario  $Q(z)$  tendría al menos un cero  $z = b$  y el polinomio  $F(b, w)$  tomaría el valor  $\infty$  para todos los valores de  $w$ , lo cual es imposible. (Afirmando que el segundo miembro de la igualdad (6.4:3) es infinito para  $z = b$ , nos basamos en que los polinomios  $P_n(z)$ , así como los polinomios  $R_i(z)$ , no tienen un cero común).

Por lo tanto, la relación (6.4:3) puede expresarse en la forma

$$F(z, w) = C [P_0(z) + \dots + P_h(z) w^h] [R_0(z) + \dots + R_{n-h}(z) w^{n-h}],$$

donde  $C$  es una constante distinta de cero, lo cual, sin embargo, contradice a que la ecuación (6.3:1) es irreducible.

Por consiguiente, hemos demostrado que todos los elementos que satisfacen a una ecuación algebraica irreducible, forman una imagen analítica.

Considerando  $w$  como función de  $z$ , obtenemos una función  $n$ -forme  $w = f(z)$  que es analítica en el recinto  $G$  y que en los puntos frontera  $z_1, \dots, z_m$  y  $\infty$  de este recinto no tiene otras singularidades más que, posiblemente, polos o puntos algebraicos de ramificación. Esta función  $w = f(z)$  se llama *algebraica* y la imagen analítica correspondiente, considerada como superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra, se llama *superficie de Riemann* de esta función.

Como la imagen analítica contiene  $n$  elementos distintos sobre cada punto del plano ampliado (a excepción de los puntos

$z_1, \dots, z_m$  y  $\infty$ ), la superficie de Riemann es de  $n$  hojas. Sobre los puntos  $z_1, \dots, z_m, \infty$  pueden estar situados elementos ramificados de la imagen analítica: los puntos de ramificación de la superficie. Se puede preparar un modelo de esta superficie tomando  $n$  ejemplares del plano ampliado, uniendo en cada uno de éstos los puntos  $z_1, \dots, z_m$  y  $\infty$  en algún orden mediante una poligonal  $A$  sin autointersecciones, recortando cada ejemplar a lo largo de  $A$  y pegando después los bordes de los cortes de un mismo ejemplar o de ejemplares distintos en algún orden. Para especificar el orden en que deben pegarse los bordes indicados, fijemos en cada ejemplar algún punto  $z_0$  no situado en  $A$ , y prolongamos analíticamente cada uno de los elementos de la imagen con el centro en este punto. En virtud del teorema de monodromía, obtenemos en cada ejemplar una rama uniforme algebraica de la función  $f(z)$ . Al prolongar el elemento que determina una rama, a lo largo de una curva que termina en algún punto de la poligonal (distinto de  $z_1, \dots, z_m$  y  $\infty$ ), obtenemos en este punto uno u otro elemento de la función  $f(z)$ , según a cuál de los dos bordes del corte conduzca la curva. Si los elementos obtenidos en uno y otro borde del corte de un ejemplar determinado, resultan idénticos, entonces los puntos correspondientes del corte se pegan entre sí de tal modo que la parte del corte se elimine en el ejemplar dado. En caso contrario, el borde del corte del ejemplar dado se pega con el borde del corte de otro ejemplar que porte los mismos elementos de la función  $f(z)$ . Después de hacer todos estos pegados se obtiene el modelo pedido. A la prolongación de cualquier elemento de la función  $f(z)$  a lo largo de cierta curva  $L$  del plano  $z$  le corresponde un desplazamiento sobre la superficie dada desde una de sus hojas a otra. Si la curva  $L$  es cerrada, entonces, como resultado del desplazamiento resulta, por lo general, que llegamos a un punto de la superficie distinto del inicial, a pesar de que éste está situado sobre el mismo punto del plano  $z$ . En otras palabras, sobre las curvas cerradas del plano  $z$  están situadas curvas, por lo general, no cerradas, de la superficie de Riemann considerada.

Señalemos, en conclusión, que la propiedad de las funciones algebraicas de tener una cantidad finita de determinaciones y no poseer otros puntos singulares más que polos y puntos algebraicos de ramificación, situados sobre una cantidad finita de puntos del plano ampliado, es característica para estas funciones. Precisando, se verifica la siguiente proposición:

*T e o r e m a.* Supongamos que la función  $f(z)$ , admitiendo una prolongación analítica indefinida a lo largo de todas las curvas continuas pertenecientes al recinto  $G$ , cuya frontera consta de una cantidad finita de puntos  $z_1, z_2, \dots, z_m, \infty$ , es no más que  $n$ -forme en el recinto  $G$ , se expresa en los entornos de los puntos  $z_j$  por desarrollos de

la forma  $\sum_{\mu}^{\infty} A_{\mu} (z - z_j)^{\frac{p}{v}}$  ( $\mu$  es un número entero,  $v$  es un número natural) y en un entorno del punto  $z = \infty$  se expresa por desarrollos de la forma  $\sum_{\mu'}^{\infty} A_{\mu'} z^{-\frac{p}{v}}$ . Entonces esta función es algebraica.

Para la demostración, es suficiente observar que los razonamientos hechos en la primera mitad de este apartado, donde se estableció que la función  $f(z)$ , obtenida mediante la prolongación analítica en el recinto  $G$  de un elemento que satisface a la ecuación (6.3:1), tiene que satisfacer ella misma a una ecuación algebraica (6.4:2), se basaban solamente en aquellas propiedades de la función que fueron incluidas en la hipótesis del último teorema.

### § 7. PRINCIPIO DE SIMETRIA. TRANSFORMACION DE UN SEMIPLANO EN UN POLIGONO ARBITRARIO

7.1. Este párrafo lo dedicaremos a un principio especial de la prolongación analítica de importancia capital que posee numerosas aplicaciones.

**Principio de simetría** (principio de Riemann — Schwarz). Sea  $G$  un recinto, en cuya frontera figura como arco de Jordan alcanzable un arco de una circunferencia o un segmento rectilíneo  $\gamma$ , y sea  $d \subset G$  un recinto limitado por una curva de Jordan

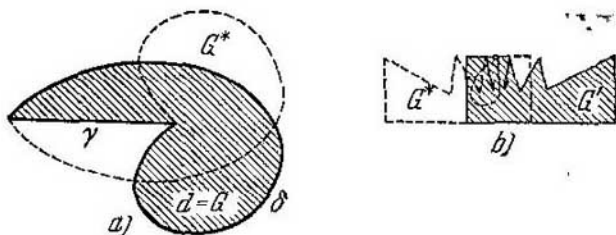


FIG. 77.

acotada  $\delta + \gamma$  adjunta a  $\gamma$  ( $d$  puede coincidir con  $G$  (fig. 77, a), o diferenciarse de  $G$  (fig. 77, b)). Sea  $f(z)$  una función uniforme, definida en  $G + \gamma$ , que sea continua en el sentido generalizado en  $d + \gamma$  y meromorfa en el recinto  $G$  y que tome en  $\gamma$  valores pertenecientes a una circunferencia o recta  $\Gamma$  (en particular, valores reales). En estas condiciones, la función  $f(z)$  puede prolongarse analíticamente a través del arco  $\gamma$  (del recinto  $d$ ) en el recinto  $G^*$  que es simétrico a  $G$  respecto de  $\gamma$ . La función  $f^*(z)$ , obtenida como resultado de la prolongación, es meromorfa en el recinto  $G^*$  y sus valores  $f^*(z^*)$  y  $f(z)$  en los puntos

$z^*$  y  $z$  que son simétricos respecto de  $\gamma$  ( $z^* \in G^*$  y  $z \in G$ ), son simétricos respecto de  $\Gamma$ .

Obsérvese que los recintos  $G$  y  $G^*$  pueden tener puntos comunes (véase la fig. 77). En este caso, la función que coincide con  $f(z)$  en el conjunto  $G + \gamma$  y con  $f^*(z)$  en el recinto  $G^*$ , siendo  $f(z) \neq \text{const}$ , es, por lo general, hiforme, puesto que para un mismo punto perteneciente a los recintos  $G$  y  $G^*$  tienen que obtenerse dos valores distintos de la función, los cuales son simétricos respecto de  $\Gamma$ .

El principio de simetría no sólo da las condiciones suficientes para la posibilidad misma de la prolongación analítica de una función  $f(z)$  a través de un arco de circunferencia o de un segmento de recta, sino que también señala el recinto al cual se realiza la prolongación, indicando también un método simple para la construcción de esta prolongación. El hecho de que éste se enuncie para la clase de las funciones meromorfas (y no simplemente para las analíticas), es completamente natural: si  $f(z)$  no tiene polos en el recinto  $G$ , pero en algunos puntos  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  toma un valor que se representa por el centro de la circunferencia  $\Gamma$  (suponemos aquí que  $\Gamma$  no es una recta), entonces en los puntos  $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*, \dots$  que son simétricos a  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  respecto de  $\gamma$ , la función  $f^*(z)$ , según la condición, tiene que ser infinita, es decir, tiene que tener polos.

Comenzando la demostración, hagamos una transformación homográfica del plano  $z$  que aplique el arco  $\gamma$  en un segmento  $\lambda$  del eje real. Exactamente igual, hagamos una transformación homográfica del plano de valores de las funciones  $f(z)$  y  $f^*(z)$  de modo que a la línea  $\Gamma$  le corresponda el eje real; supongamos que en este caso el recinto  $G$  se transforma en  $g$  y  $G^*$  en  $g^*$ , y que las funciones  $f(z)$  y  $f^*(z)$  se transforman en  $\varphi(\zeta)$  y  $\varphi^*(\zeta)$ . En las transformaciones homográficas, a los puntos que son simétricos respecto de  $\gamma$  o de  $\Gamma$  les corresponden puntos simétricos respecto del eje real, se conserva la continuidad de las funciones (en el sentido generalizado) y las funciones meromorfas se transforman en funciones meromorfas; por ello, es suficiente demostrar el teorema para aquel caso particular en que  $\gamma$  es un segmento del eje real,  $\Gamma$  es el eje real y la transformación de simetría significa la transformación de los números complejos en sus conjugados. Así, pues, suponemos que  $f(z)$  toma en  $\gamma$  valores reales y que las funciones  $f(z)$  y  $f^*(z)$  toman valores conjugados para valores conjugados de la variable independiente:

$$f^*(z) = \overline{f(z)}.$$

Entonces, si  $f(z)$  posee en un entorno del punto  $z_0 \in G$  un desarrollo de la forma

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

entonces  $f^*(z)$  poseerá en un entorno del punto  $\bar{z}_0 \in G^*$  el desarrollo:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=\mu}^{\infty} \bar{a}_n (z - \bar{z}_0)^n,$$

de donde se deduce que la función  $f^*(z)$  es meromorfa en  $G^*$ .

Sea ahora  $\zeta_0$  un punto arbitrario del segmento  $\gamma$ , distinto de sus extremos. Se puede suponer que  $\zeta_0 \neq \infty$ ; en caso contrario se efectúa la sustitución  $\xi = \frac{1}{z}$  que transforma al punto  $\infty$  en el origen de coordenadas. Como  $\gamma$  es un arco alcanzable de la frontera del recinto  $G$ , existe un semicírculo con el centro  $\zeta_0$  que pertenece al recinto  $d \subset G$ . Demostremos que la función  $F(z)$ , que es igual a  $f(z)$  en este semicírculo y en su diámetro y es igual a  $f^*(z)$  en el semicírculo simétrico al dado respecto del diámetro, es meromorfa en el mismo. Precisamente de esto, se desprende que la función  $f^*(z)$  es la prolongación analítica de la función  $f(z)$ .

Se puede suponer que  $f(\zeta_0) \neq \infty$ ; en caso contrario sería suficiente considerar  $\frac{1}{f(z)}$  en lugar de  $f(z)$ .

Considerando que el semicírculo con el centro  $\zeta_0$  es tan pequeño que  $f(z)$  conserva en el mismo valores finitos, obtenemos una función  $F(z)$  que es uniforme y continua en un entorno del punto  $\zeta_0$  (para demostrar que es continua nos basamos en que  $f(z)$  y  $f^*(z)$  toman valores reales iguales en los puntos del segmento  $\gamma$ ) y es analítica en cada uno de los semicírculos en los que este círculo se divide por el eje real.

Del teorema de Morera se deduce que la función  $F(z)$  es analítica en todo el círculo considerado. En efecto, cualquier triángulo  $\Delta$  perteneciente al círculo, o pertenece por completo a uno de los semicírculos, o bien tiene puntos frontera comunes con el eje real, o bien, finalmente, se corta por el eje real en dos polígonos convexos, uno de los cuales pertenece a un semicírculo y el otro, al otro semicírculo. Como en los dos primeros casos la función  $F(z)$  es continua en el triángulo cerrado  $\Delta$  y es analítica en el interior del mismo, y en el último caso es continua en cada uno de los dos polígonos cerrados siendo analítica en el interior de los mismos, resulta, según la observación hecha al teorema integral de Cauchy (véase el tomo I, cap. 3, pág. 227-228), que la integral de  $F(z)$  sobre cada uno de estos circuitos es igual a cero. Por ello, también resulta igual a cero la integral sobre todo el triángulo  $\Delta$ , independientemente de su posición, y, por consiguiente, la función  $F(z)$  es analítica en el entorno considerado del punto  $\zeta_0$ .

Con esto se termina toda la demostración.

Señalemos un corolario importante del principio de simetría, que también se puede considerar como una generalización de este principio.

*Supongamos que en el enunciado del principio de simetría,  $\gamma$  y  $\Gamma$  son unas curvas analíticas regulares (que, particularmente, pueden ser arcos de circunferencias o segmentos de rectas), y que se conservan las demás condiciones impuestas a la función  $f(z)$  en el recinto  $G$  (o sea, que es continua en el sentido generalizado de la palabra en el conjunto  $d + \gamma$  y es meromorfa en el recinto  $G$ ). Entonces  $f(z)$  puede prolongarse analíticamente a través del arco  $\gamma$ ; con más precisión, todos los puntos del arco  $\gamma$  en los cuales  $f(z) \neq \infty$ , son para  $f(z)$  puntos regulares.*

**D e m o s t r a c i ó n.** Si  $z = \lambda(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) es la ecuación de la curva  $\gamma$  y  $w = \Lambda(T)$  ( $A \leq T \leq B$ ) es la ecuación de la curva  $\Gamma$ , entonces mediante las transformaciones  $t = \lambda^{-1}(z)$  y  $T = \Lambda^{-1}(w)$  los entornos de los puntos  $z_0 = \lambda(t_0)$  y  $w_0 = \Lambda(T_0)$  se transforman biunívoca y conformemente en recintos que contienen a los puntos  $t_0$  y  $T_0$ , y los arcos  $\gamma$  y  $\Gamma$ , que están situados en los entornos indicados y pasan por  $z_0$  y  $w_0$ , se transforman en segmentos del eje real que contienen a los puntos  $t_0$  y  $T_0$ . Como resultado, la función  $w = f(z)$  se transforma en la función  $T = \Lambda^{-1}f\lambda(t)$ , definida en cierto recinto  $g$ , en cuya frontera figura un segmento alcanzable  $\delta$  del eje real del plano  $t$ ; además, esta función es continua en  $g + \delta$ , es meromorfa en el recinto  $g$  y toma valores reales en  $\delta$ . En virtud del principio de simetría, la función  $\Lambda^{-1}f\lambda(t)$  es analítica en cierto entorno del punto  $t_0$ ; por ello, la función

$$F(z) = \Lambda(\Lambda^{-1}f\lambda)\lambda^{-1}(z)$$

es analítica en un entorno del punto  $z_0$  y en la parte de este entorno que pertenece al recinto  $G$  coincide con  $f(z)$ . De aquí se deduce lo que se afirmaba.

En particular, si, cumpliéndose las condiciones anteriores  $f(z)$  se anula en el arco analítico alcanzable  $\gamma$ , entonces la función es idénticamente igual a cero (éste es un caso muy particular del teorema frontera de unicidad de N. N. Luzin e I. I. Privalov, que generaliza el resultado obtenido en la pág. 213). En efecto, en este caso, según lo que acabamos de demostrar,  $f(z)$  es regular en los puntos del arco  $\gamma$ , y cada punto de este arco es un punto de acumulación de los ceros de la función  $f(z)$ .

Mediante lo demostrado en este apartado, resulta la siguiente proposición de la teoría de las transformaciones conformes:

**T e o r e m a.** Si forma parte de la frontera de un recinto simplemente conexo  $G$  algún arco analítico regular alcanzable  $\gamma$ , entonces la función  $w = f(z)$  que transforma conformemente  $G$  en un círculo o en un semiplano, puede prolongarse analíticamente a través de  $\gamma$

desde el recinto  $d$  que es adyacente a  $\gamma$ , está limitado por una curva de Jordan y pertenece a  $G$ . En otras palabras, todos los puntos del arco  $\gamma$ , en los cuales  $f(z) \neq \infty$ , son regulares para  $f(z)$  respecto del recinto  $d$ .

Este teorema se desprende inmediatamente de la proposición precedente y de que la función  $f(z)$  es continua en el conjunto cerrado  $\bar{d}$ , es analítica en el recinto  $d$  y toma en  $\gamma$  unos valores que están situados en una circunferencia o en el eje real.

7.2. Apliquemos el principio de simetría a la construcción de una función que transforme conformemente el semiplano superior en un polígono arbitrario. Supongamos primero que el polígono  $G$  del plano  $z$  es un recinto, limitado por una curva cerrada de Jordan  $\gamma$  que está compuesta de  $n$  lados rectilíneos: los lados del polígono.

Designemos con  $z_1, z_2, \dots, z_n$  los vértices del polígono, dispuestos en el orden del recorrido positivo, y sean  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$  los ángulos correspondientes. Los números  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) son positivos y menores de dos. Sea  $z = \varphi(w)$  una función que transforme conformemente el semiplano superior  $\operatorname{Re} w > 0$  en el recinto  $G$ . En virtud del teorema conocido (ap. 3.6, cap. V), esta función es continua en el semiplano cerrado y establece una correspondencia biunívoca y bicontinua entre el eje real y el circuito  $\gamma$ . Sean  $a_1, \dots, a_n$  las preimágenes de los vértices del polígono. Se puede suponer que todos estos puntos son finitos. En efecto, si, por ejemplo,  $a_1 = \infty$ , la transformación  $w' = \frac{1}{a-w}$ , donde  $a$  es un

punto del eje real, distinto de  $a_1, \dots, a_n$ , transforma el semiplano superior en sí mismo y la función  $z = \varphi(w)$  en  $z = \varphi'(w')$ ; además, para la última transformación del semiplano en el polígono las preimágenes de todos los vértices del polígono son finitos. Basándose en el principio de simetría (ap. 7.1), aplicado a la función  $z = \varphi(w)$  y a los intervalos  $(a_1, a_2), \dots, (a_n, a_1)$  del eje real (uno de los cuales contiene al punto del infinito), sacamos la conclusión de que para  $\varphi(w)$  todos los puntos del eje real son regulares, a excepción, posiblemente, de los puntos  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Describamos una circunferencia con el centro en el vértice del polígono  $z_j$ , de un radio tan pequeño que no haya en su interior otros vértices del polígono. La circunferencia separa del recinto  $G$  un sector circular con el centro en el punto  $z_j$  y medida  $\alpha_j\pi$ .

Transformemos este sector en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas mediante alguna de las ramas uniformes

de la función  $t = (z - z_j) \frac{1}{\alpha_j}$ . Entonces la función  $t = [\varphi(w) - z_j] \frac{1}{\alpha_j} = \varphi_j(w)$  realizará una transformación conforme de cierto recinto  $g_j$  perteneciente al semiplano superior y cuya frontera contiene un segmento del eje real, en un semicírculo del plano  $t$ . Esta

es biunívoca y continua en el recinto cerrado, transformándose en el diámetro del semicírculo el segmento del eje real. Aplicando el principio de simetría al recinto  $g_j$  y a la función  $\varphi_j(w)$ , hallamos que la función  $t = \varphi_j(w)$  es analítica en un recinto que contiene al punto  $w = a_j$  transformando a éste en un entorno del punto  $t = 0$ . Así pues,  $\varphi_j(w)$  posee en un entorno del punto  $w = a_j$  un desarrollo de la forma

$$\varphi_j(w) = A_j(w - a_j) + \dots, \text{ donde } A_j \neq 0.$$

Por ello

$$\varphi(w) = z_j + [\varphi_j(w)]^{\alpha_j} = z_j + (w - a_j)^{\alpha_j} [B_j + C_j(w - a_j) + \dots],$$

donde  $B_j \neq 0$ .

Vemos, pues, que  $w = a_j$  es un punto de ramificación para  $\varphi(w)$ , de orden finito si  $\alpha_j$  es racional y de orden infinito si  $\alpha_j$  es irracional. Teniendo en cuenta que  $\varphi(w)$  no posee otros puntos singulares más que los hallados, obtendremos ahora la expresión analítica de esta función. Con este fin, derivemos dos veces el desarrollo hallado de la función  $\varphi(w)$ . Obtendremos:

$$\varphi'(w) = B_j \alpha_j (w - a_j)^{\alpha_j - 1} + C_j (\alpha_j + 1) (w - a_j)^{\alpha_j} + \dots,$$

$$\varphi''(w) = B_j \alpha_j (\alpha_j - 1) (w - a_j)^{\alpha_j - 2} + C_j (\alpha_j + 1) \alpha_j (w - a_j)^{\alpha_j - 1} + \dots$$

De aquí que

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j} + \dots,$$

es decir, la función  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  tiene polos simples en los puntos  $a_j$  con los residuos iguales a  $\alpha_j - 1$ . Esta no tiene otras singularidades más, puesto que todos los puntos del plano finito, distintos de  $a_j$ , son regulares para  $\varphi(w)$  y en ellos  $\varphi'(w) \neq 0$  (por ser univalente la transformación  $z = \varphi(w)$  en un entorno de tal punto). En el punto del infinito la función  $\varphi(w)$  también es regular y en un entorno de este punto la transformación  $z = \varphi(w)$  es univalente. Por ello

$$\varphi(w) = D_0 + \frac{D_1}{w} + \frac{D_2}{w^2} + \dots (D_1 \neq 0),$$

$$\varphi'(w) = -\frac{D_1}{w^2} + \dots, \quad \varphi''(w) = \frac{2D_1}{w^3} + \dots$$

y

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w} + \dots,$$

de donde se deduce que  $w = \infty$  es un punto regular para  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ .

Restando la suma  $\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j}$  de  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ , obtenemos una función



que es analítica en todos los puntos del plano ampliado, es decir, una constante (del teorema de monodromía se deduce que es uniforme).

En resumen,

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j} = C,$$

de donde

$$\varphi'(w) = C_1 \prod_{j=1}^n (w - a_j)^{\alpha_j - 1}$$

y

$$z = \varphi(w) = C_1 \int_{w_0}^w \prod_{j=1}^n (\tau - a_j)^{\alpha_j - 1} d\tau + C_2, \quad (7.2:1)$$

donde  $w_0$  es un punto cualquiera del semiplano superior o del eje real.

Esta es la expresión analítica de la función buscada. La fórmula obtenida se llama fórmula de *Christoffel-Schwarz*.

Veamos dos ejemplos particulares. Sea primero el recinto  $G$  un triángulo. Entonces los puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ , que son las preimágenes de los vértices del triángulo, pueden darse *a priori*, cuidando de que se cumpla la condición necesaria de que los recorridos sean iguales. (Si las preimágenes de los vértices son unos puntos cualesquiera  $a'_1$ ,  $a'_2$  y  $a'_3$ , es suficiente aplicar una transformación homográfica del semiplano sobre sí mismo para pasar a los puntos  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ ).

La fórmula (7.2:1) toma aquí la forma

$$z = \varphi(w) = C_1 \int_{w_0}^w (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\tau - a_3)^{\alpha_3 - 1} d\tau + C_2.$$

Para calcular las constantes  $C_1$  y  $C_2$  hacemos  $w = a_1$  y  $w = a_2$ . Resultan las ecuaciones:

$$z_j - C_1 \int_{w_0}^{a_j} (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\tau - a_3)^{\alpha_3 - 1} d\tau + C_2 \quad (i = 1, 2),$$

de las cuales se pueden hallar  $C_1$  y  $C_2$ .

Obsérvese que para la función subintegral tiene que elegirse alguna rama uniforme en el semiplano superior. Los valores en los puntos del eje real se determinan mediante la prolongación analítica o, lo que es lo mismo, basándose en razonamientos de continuidad.

Si  $G$  es un cuadrilátero, ya no se pueden asignar arbitrariamente las preimágenes de todos los cuatro vértices. Eligiendo arbitraria-

mente tres de ellos (conservando el orden del recorrido), obtenemos para la determinación de las constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y la preimagen  $a_4$  del cuarto vértice las siguientes ecuaciones:

$$z_j = C_1 \int_{w_0}^{a_j} (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\tau - a_3)^{\alpha_3 - 1} (\tau - a_4)^{\alpha_4 - 1} d\tau + C_2$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

En éstas una de las tres incógnitas figura bajo el signo integral en una combinación bastante complicada. Cuando el cuadrilátero considerado posee un eje de simetría, estas ecuaciones pueden expresarse en forma simétrica. Supongamos, por ejemplo, que  $G$  es el rectángulo  $-\alpha < x < \alpha$ ,  $0 < y < \beta$ . Debido al teorema de existencia de la transformación conforme, el rectángulo  $0 < x < \alpha$ ,  $0 < y < \beta$  se puede transformar conformemente en el primer cuadrante coordenado y, además, de tal modo que el punto  $z = 0$  se transforme en el origen de coordenadas, el punto  $z = \alpha$  en el punto 1 y el punto  $z = \beta i$  en el punto del infinito. El homólogo del punto  $z = \alpha + \beta i$  tiene que ser un punto situado en la parte positiva del eje real entre 1 y  $\infty$ . Designémoslo mediante  $\frac{1}{k}$ , donde  $0 < k < 1$ . Aplicando el principio de simetría (ap. 7.1), al rectángulo  $0 < x < \alpha$ ,  $0 < y < \beta$  y a la función que realiza la transformación hallaremos que esta misma función (prolongada analíticamente) transforma el rectángulo inicial  $G$  en el semiplano superior y sus vértices en los puntos  $\pm 1$ ,  $\pm \frac{1}{k}$ .

Observando que en el ejemplo considerado  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$ , obtenemos la siguiente expresión para la función que realiza la transformación:

$$z - C_1 \int_0^w (\tau - 1)^{-\frac{1}{2}} \left(\tau - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\tau + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} (\tau + 1)^{-\frac{1}{2}} d\tau + C_2 =$$

$$= C' \int_0^w \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2 \tau^2)}} + C_2.$$

En el ap. 1.2 del cap. V ya nos encontramos con esta fórmula.

7.3. Para las aplicaciones es necesario extender el resultado del apartado precedente a los polígonos más generales del plano ampliado que están limitados, por lo general, por curvas que no son de Jordan.

Sea de nuevo  $G$  un recinto limitado por una poligonal cerrada, compuesta de una cantidad finita de lados rectilíneos (que pueden

ser segmentos, rayos o rectas enteras). Se admiten lados múltiples, recorridos más de una vez al hacer un recorrido simple del contorno. En la fig. 78 se muestran ejemplos de polígonos para  $n = 1, 2, 3, 4$  ( $n$  es el número de lados que forman el contorno). Ahora los ángulos  $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$  de los polígonos pueden tomar también valores

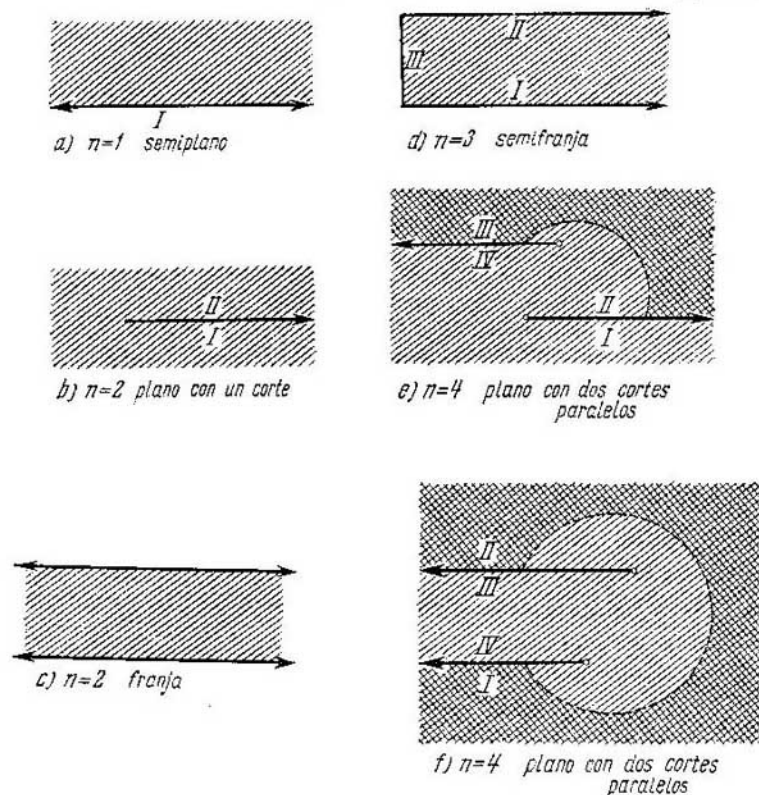


FIG. 78.

nulos y valores iguales a  $2\pi$ . Si  $z = \infty$  es un punto frontera del recinto  $G$ , convendremos en considerar a este punto, en todos estos casos, como un vértice del polígono, atribuyendo a todos los ángulos con el vértice en dicho punto valores negativos (si éstos no son iguales a cero). Por ejemplo, el polígono *a*) de la fig. 78 posee solamente un ángulo con el vértice en el punto del infinito, igual a  $-\pi$ ;

el polígono *b*) posee un ángulo con el vértice finito, igual a  $2\pi$ , y un ángulo con el vértice en el punto del infinito, igual a  $-2\pi$ ; el polígono *c*) posee dos ángulos con los vértices en el punto del infinito, ambos iguales a cero, etc.

El lector puede comprobar fácilmente que para cada polígono representado en la figura la suma de los ángulos es igual a  $(n-2)\pi$ , donde  $n$  es el número de lados del polígono. A continuación se verá que así tiene que ser, siempre que el punto del infinito no esté situado en el interior del polígono.

Demostremos que en el caso considerado ahora la función  $z = \varphi(w)$  que transforma el semiplano en un polígono, se determina por la fórmula anterior (7.2:1). La demostración es completamente semejante a la realizada en el ap. 7.2. Es nuevo solamente el caso de ángulos con el vértice finito de magnitud  $2\pi$ , y el caso de ángulos con el vértice en el punto del infinito. En el primer caso,  $\alpha_j = 2$  y la preimagen  $a_j$  del vértice correspondiente es un punto regular para la función  $z = \varphi(w)$ , puesto que el desarrollo de esta función en un entorno del punto  $w = a_j$  tiene la forma

$$\varphi(w) = z_j + B_j(w - a_j)^2 + C_j(w - a_j)^3 + \dots$$

El segundo caso necesita un exámen especial. Supongamos primero que el ángulo con el vértice en el punto  $z = \infty$  está formado por dos rectas (o rayos) no paralelas. Entonces, de acuerdo a lo convenido, éste se mide por un número negativo  $\alpha_j$ ;  $0 > \alpha_j > -2$

( $\alpha_j \neq -1$ ). Aplicando la transformación auxiliar  $t = z^{\frac{1}{\alpha_j}}$ , transformamos de nuevo el recinto  $g_j \subset G$ , contenido entre los lados que forman el ángulo considerado y situado fuera de cierto círculo con el centro en el origen de coordenadas, en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas. Los razonamientos que siguen y el resultado no se diferencian en nada de lo anterior.

Supongamos ahora que el ángulo con el vértice en el punto  $z = \infty$  está formado por dos rectas (o rayos) paralelas. Aquí son posibles los casos:

- 1) los lados del ángulo están situados en una misma recta; entonces el ángulo o es igual a  $-\pi$  (fig. 78, *a*), o es igual a  $-2\pi$  (fig. 78, *b*);
- 2) los lados del ángulo están situados en dos rectas distintas; entonces el ángulo o es igual a cero (fig. 78, *c*, *d* y *f*), o es igual a  $-\pi$  (fig. 78, *e*), o es igual a  $-2\pi$  (fig. 78, *f*).

En el caso 1) los razonamientos son los mismos que para lados no paralelos (la transformación  $t = z^{-1}$  o  $t = z^{-2}$ ).

Examinemos el caso 2), y supongamos primero que  $\alpha_j = 0$ ; entonces, mediante un segmento de recta perpendicular a los lados del ángulo, desprendemos del recinto  $G$  una semifranja  $g$  y, después,

la transformamos en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas, de tal modo que el homólogo al punto del infinito sea el origen de coordenadas. Esto puede conseguirse mediante la transformación  $t = e^{Cz}$ , donde  $Cz$  toma en la línea media de la franja valores reales negativos. De un modo semejante a lo anterior, hallamos que  $t = \exp [C\varphi(w)] = f(w)$  es una función analítica en un entorno del punto  $a_j$  (que es la preimagen del vértice considerado del ángulo), y que  $f(w)$  posee un desarrollo de la forma

$$f(w) = A(w - a_j) + B(w - a_j)^2 + \dots,$$

donde  $A \neq 0$ .

Derivando la igualdad  $\exp [C\varphi(w)] = f(w)$  dos veces respecto de  $w$ , obtenemos:

$$C \exp [C\varphi(w)] \varphi'(w) = A + 2B(w - a_j) + \dots,$$

$$C^2 \exp [C\varphi(w)] [\varphi'(w)]^2 + C \exp [C\varphi(w)] \varphi''(w) = 2B + \dots,$$

de donde

$$C\varphi'(w) = \frac{A + 2B(w - a_j) + \dots}{A(w - a_j) + B(w - a_j)^2 + \dots} = \frac{1}{w - a_j} + \dots,$$

$$C\varphi''(w) + \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \frac{2B + \dots}{A + 2B(w - a_j) + \dots} = D + \dots$$

y

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = (D + \dots) - \left( \frac{1}{w - a_j} + \dots \right) = -\frac{1}{w - a_j} + \dots$$

Hemos hallado que  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  tiene en el punto  $a_j$  un polo simple con el residuo  $-1 = \alpha_j - 1$ ; el resultado es el mismo que en el caso de un ángulo con el vértice finito.

Supongamos ahora que  $\alpha_j = -\pi$  (fig. 78, e). En este caso separamos la parte del recinto  $G$  que está contenida entre los lados del ángulo en cuestión y un arco de una circunferencia (en la fig. 78, e esta parte está doblemente rayada) y después, mediante la transformación lineal entera  $\xi = Cz + D$  la transformamos en el recinto representado en la fig. 79, a). Después mediante la función  $\xi = t' + e^{t'}$  (véase el ap. 5.7, cap. II) transformamos el recinto obtenido en un recinto de la forma b), fig. 79, y, finalmente, mediante  $t = e^{-t'}$  lo transformamos en un recinto de la forma c), fig. 79. Resulta una función  $t = f(w)$  que posee en un entorno del punto  $a_j$  un desarrollo de la forma

$$f(w) = A(w - a_j) + B(w - a_j)^2 + \dots,$$

donde  $A \neq 0$ . Derivando dos veces la relación

$$C\varphi(w) + D = \frac{1}{f(w)} - \text{Ln } f(w),$$

respecto de  $w$ , se obtiene sucesivamente:

$$C\varphi'(w) = -\frac{f'(w)}{[f(w)]^2} - \frac{f'(w)}{f(w)} = -\frac{1}{A(w-a_j)^2} + \dots,$$

$$C\varphi''(w) = \frac{2}{A(w-a_j)^3} + \dots,$$

de donde

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w-a_j} + \dots,$$

es decir, la función  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  tiene en el punto  $a_j$  un polo de primer orden con el residuo igual a  $-2 = \alpha_j - 1$ .

Supongamos, finalmente, que  $\alpha_j = -2\pi$  (fig. 78, f). Separamos la parte del recinto  $G$  que está contenida entre los lados del ángulo.

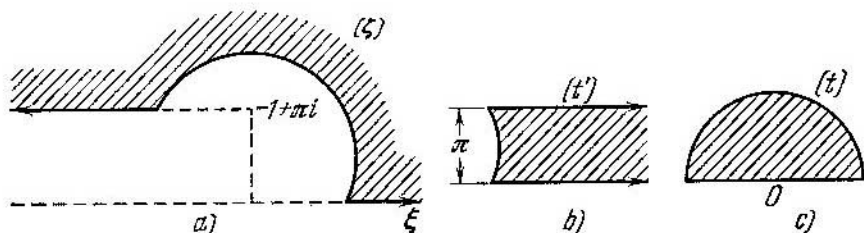


FIG. 79.

y un arco de una circunferencia (en la figura esta parte está doblemente rayada); después la transformamos mediante la función lineal entera  $\zeta = Cz + D$  en un recinto de la forma a), fig. 80; el recinto obtenido lo transformamos mediante la función  $\zeta = t' + e^{t'}$  en un recinto de la forma b), fig. 80, y, después, mediante  $t = e^{-\frac{1}{2}t'}$  lo transformamos en un recinto de la forma c), fig. 80. Obtenemos de nuevo la función

$$t = f(w) = A(w-a_j) + B(w-a_j)^2 + \dots \quad (A \neq 0),$$

la cual satisface a la relación

$$C\varphi(w) + D = \frac{1}{[f(w)]^2} - 2 \operatorname{Ln} f(w),$$

de donde, de un modo ordinario, hallamos:

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{3}{w-a_j} + \dots,$$

o sea, también en este caso  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  tiene en el punto  $a_j$  un polo simple con el residuo igual a  $-3 = \alpha_j - 1$ .

Así, pues, la preimagen  $a_j$  de cualquiera de los puntos  $z_j$  del polígono es, en todos los casos posibles, para la función  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  un polo simple con el residuo igual a  $\alpha_j - 1$ . Por ello, para  $\varphi(w)$  se verifica la fórmula (7.2:4).

Obsérvese que  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  es una función racional, cuyo residuo respecto del punto del infinito es igual a 2 (véanse los cálculos hechos

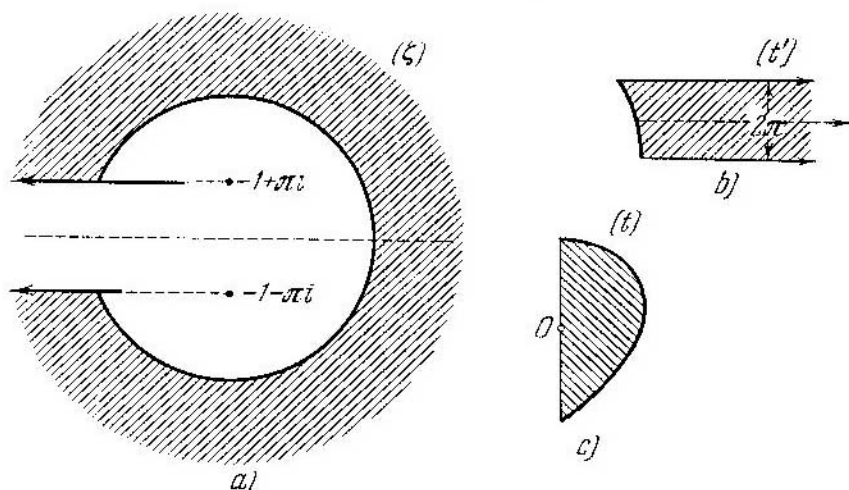


FIG. 80.

en la pág. 569). Como la suma de todos los residuos de una función racional es igual a cero, resulta

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) + 2 = 0,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2.$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos de cualquier polígono de  $n$  lados del plano ampliado, que no contenga en su interior al punto del infinito, es igual a  $(n - 2)\pi$ .

Claro, este resultado puede obtenerse geoméricamente de un modo elemental.

No nos queda más que considerar la transformación del semiplano en un polígono que contenga al punto del infinito.

En este caso la función  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  tiene de nuevo polos simples con los residuos  $\alpha_j - 1$  en todas las preimágenes de los vértices del polígono. Pero a estos  $n$  puntos singulares se agregan otros dos más; el punto  $\beta$  del semiplano superior que es la preimagen del punto del infinito y el punto  $\bar{\beta}$  conjugado con éste. Como la transformación  $z = \varphi(w)$  es univalente, el punto  $\beta$  es un polo simple de la función  $\varphi(w)$  y ésta posee en un entorno de este punto un desarrollo de la forma

$$\varphi(w) = \frac{A}{w - \beta} + \dots$$

Por esta razón, para  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  obtenemos:

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w - \beta} + \dots$$

En virtud del principio de simetría, aplicado a la función  $\varphi(w)$ , cualquier rama uniforme de esta función en el semiplano inferior tiene que tener también en el punto  $\bar{\beta}$  un polo simple. Por ello,  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  posee en un entorno del punto  $\bar{\beta}$  un desarrollo de la forma

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w - \bar{\beta}} + \dots$$

Confrontando los resultados obtenidos, hallamos para  $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  una expresión de la forma

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = C_1 + \sum_1^n \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j} - \frac{2}{w - \beta} - \frac{2}{w - \bar{\beta}},$$

de donde, después de una doble integración, resulta:

$$z = \varphi(w) = C_1 \int \frac{\prod_1^n (\tau - \alpha_j)^{\alpha_j - 1}}{(\tau - \beta)^2 (\tau - \bar{\beta})^2} d\tau + C_2. \tag{7.3:1}$$

Por lo tanto, las fórmulas por las que se realiza la transformación conforme del semiplano en un polígono, son de forma distinta, según que  $z = \infty$  sea un punto exterior o frontera del polígono (fórmula (7.2:1)), o sea un punto interior del mismo (fórmula (7.3:1)). En el último caso, al examinar la suma de los residuos de la función

$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$  sacamos la conclusión de que  $\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) - 4 + 2 = 0$ , de



donde  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n + 2$ , o sea, la suma de los ángulos del polígono es igual a  $(n + 2) \pi$ .

Ambas fórmulas fueron obtenidas con la suposición de que las preimágenes de todos los vértices son puntos finitos. Si se quiere llevar al infinito alguno de los vértices, por ejemplo  $z_n$ , es suficiente aplicar la transformación auxiliar del semiplano superior sobre sí mismo:

$$w' = \frac{1}{a_n - w}, \quad \text{o sea,} \quad w = a_n - \frac{1}{w'}.$$

La fórmula (7.2:1) toma la forma

$$z = C_1 \int_{w_0}^{a_n - \frac{1}{w'}} \prod_{j=1}^n (\tau - a_j)^{\alpha_j - 1} d\tau + C_2,$$

o bien, haciendo la sustitución bajo el signo integral  $\tau = a_n - \frac{1}{\tau'}$ :

$$\begin{aligned} z &= C_1 \int_{\frac{1}{a_n - w_0}}^{w'} \sum_{j=1}^n [(a_n - a_j) \tau' - 1]^{\alpha_j - 1} \tau'^{-\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1)} \frac{d\tau'}{\tau'^2} + C_2 = \\ &= C' \int_{w'_0}^{w'} \prod_{j=1}^{n-1} (\tau' - a_j)^{\alpha_j - 1} d\tau' + C_2. \end{aligned} \quad (7.3:2)$$

Aquí se ha tenido en cuenta que  $\sum_{j=1}^n (\alpha_j - 1) = -2$  y se han designado con  $\alpha_j$  los números  $\frac{1}{a_n - a_j}$  (los cuales son las preimágenes de los vértices del polígono, después de haber realizado la transformación  $w' = \frac{1}{a_n - w}$ ). Vemos, pues, que cuando el punto del infinito es la preimagen de uno de los vértices, la fórmula para la función que realiza la transformación conserva su forma anterior y solamente disminuye en uno la cantidad de factores bajo el signo integral (falta el factor que corresponde al vértice con la preimagen infinita). También se obtiene un resultado similar para un polígono que contenga en su interior al punto del infinito. Con más precisión, efectuando la sustitución  $w' = \frac{1}{a_n - w}$ , hallamos:

$$z = C' \int_{w'_0}^{w'} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\tau - a_j)^{\alpha_j - 1}}{(\tau - \beta')^2 (\tau - \bar{\beta}')^2} d\tau + C_2. \quad (7.3:3)$$

Señalemos también las fórmulas para transformar el círculo unidad en un polígono. Para obtenerlas, es suficiente transformar el semiplano en el círculo  $|\zeta| < 1$ .

Si  $\gamma$  es un punto arbitrario del semiplano superior, entonces se puede obtener tal transformación en la forma  $\zeta = \frac{w-\gamma}{w-\bar{\gamma}}$ . En el caso de un polígono para el cual  $z = \infty$  no es un punto interior, resulta:

$$z = C_1 \int_{w_0}^{\frac{\gamma-\bar{\gamma}\zeta}{1+\bar{\gamma}\zeta}} \prod_{j=1}^n (\tau - a_j)^{\beta_j - 1} d\tau + C_2,$$

o bien (después de hacer la sustitución  $\tau = \frac{\gamma - \bar{\gamma}\tau'}{1 + \bar{\gamma}\tau'}$  bajo el signo integral)

$$z = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{j=1}^n (\tau' - a_j)^{\alpha_j - 1} d\tau' + C_2. \quad (7.3.4)$$

Aquí  $\zeta_0$  es un punto cualquiera del círculo unidad cerrado, y  $a'_1, \dots, a'_n$  son los puntos de la circunferencia unidad que son las imágenes de los vértices del polígono. Si  $z = \infty$  es un punto interior del polígono, buscamos una transformación del círculo  $|\zeta| < 1$  en el polígono que lleve el centro del círculo al punto del infinito. Con este fin, agregamos a la transformación (7.3.4) la transformación  $\zeta = \frac{w-\beta}{w-\bar{\beta}}$  y después de unos cálculos sencillos, teniendo en cuenta

la relación  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = n + 2$ , obtenemos:

$$z = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{j=1}^n (\tau' - a_j)^{\alpha_j - 1} \frac{d\tau'}{\tau'^2} + C_2. \quad (7.3.5)$$

7.4. En este apartado ilustraremos con ejemplos las fórmulas de los apartados precedentes. Ocupémonos primeramente de la transformación del semiplano en los polígonos representados en la figura 78. Dejando de un lado los recintos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , para los cuales la transformación es bien conocida (el lector puede aplicar aquí como ejercicio la fórmula (7.2.1) o (7.3.1)), detengámonos en los recintos  $e$  y  $f$ . Supongamos que uno de los rayos que forman la frontera del recinto  $e$  va por eje real en dirección positiva desde el punto  $x_1$ , y el otro, por una recta paralela en dirección negativa desde el punto  $x_2 + ih$ . Los vértices del polígono por orden son:  $\infty, x_1, \infty, x_2 + ih$ , y los ángulos correspondientes son iguales a  $-\pi$ ,

$2\pi$ ,  $-\pi$ ,  $2\pi$ . Insistamos en que sean imágenes de estos vértices los puntos siguientes del eje real:  $0$ ,  $1$ ,  $\infty$ ,  $a$  ( $a$  es un número real negativo). Entonces la función que transforma el semiplano superior  $w$  en el polígono considerado se expresa según la fórmula (7.3:2) en la forma siguiente:

$$z = C' \int_{w_0}^w \tau^{-2} (\tau - 1) (\tau - a) d\tau + C_2 = \\ = C' w - (a + 1) C' \operatorname{Ln} w - a C' w^{-1} + C''.$$

En esta fórmula es suficiente tomar una de las ramas de  $\operatorname{Ln} w$  en el semiplano superior (el paso a otra rama influye solamente en el valor de  $C''$ ), por ejemplo,  $\ln w$ ; entonces obtenemos:

$$z = C' w - (a + 1) C' \ln w - a C' w^{-1} + C''.$$

Fácilmente se observa que  $C'$  y  $C''$  tienen que tomar aquí valores reales. En efecto, cuando  $w$  recorre el intervalo  $(1, \infty)$  el punto  $z$ , en virtud de las suposiciones hechas, tiene que recorrer el lado II situado en el eje real. Sean  $w'$  y  $w''$  dos puntos del intervalo  $(1, \infty)$  y sean  $z'$  y  $z''$  los puntos que les corresponden en el lado I; entonces, de las ecuaciones

$$z' = [w' - (a + 1) \ln w' - a w'^{-1}] C' + C'', \\ z'' = [w'' - (a + 1) \ln w'' - a w''^{-1}] C' + C''$$

obtenemos para  $C'$  y  $C''$  valores reales. Para calcular realmente los valores reales  $C'$ ,  $C''$  y  $a$ , tenemos dos ecuaciones:

$$x_1 + C' - a C' = C'', \quad x_2 - ih = C' a - (a + 1) C' \ln a - C' + C'',$$

de donde, observando que  $\ln a = \ln |a| - i\pi$ , hallamos:

$$x_1 = C' - a C' + C'', \quad x_2 = C' a - (a + 1) C' \ln |a| - C' + C'', \\ h = -(a + 1) C' \pi.$$

Por consiguiente,

$$C' = -\frac{h}{\pi(1+a)}, \quad C'' = x_1 + \frac{h(1-a)}{\pi(1+a)}, \\ 2\frac{h}{\pi} \frac{1-a}{1+a} + \frac{h}{\pi} \ln |a| = x_2 - x_1.$$

Resolviendo la última ecuación respecto de  $a$ , determinamos después de esto los valores de las constantes  $C'$  y  $C''$ , con lo cual se termina la resolución del problema.

De un modo similar se resuelve el problema de la transformación del semiplano superior en el recinto  $f)$  de la figura 78. Aquí los vértices son los puntos  $x_1$ ,  $\infty$ ,  $x_2 - ih$ ,  $\infty$ , y los ángulos correspon-

dientes son:  $2\pi$ ,  $-2\pi$ ,  $2\pi$ ,  $0$ . Insistamos en que sus preimágenes sean los puntos  $b$ ,  $\infty$ ,  $-1$  y  $0$  ( $b > 0$ ). Entonces por la fórmula (7.3:2) obtenemos:

$$\begin{aligned} z &= C' \int_{w_0}^w (\tau - b)(\tau + 1)\tau^{-1} d\tau + C_2 = \\ &= C' \left[ \frac{w^2}{2} - (b-1)w - b \ln w \right] + C''. \end{aligned}$$

Observamos de nuevo que  $C'$  y  $C''$  son números reales, y para determinar las incógnitas  $C'$ ,  $C''$  y  $b$  obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= C' \left[ \frac{b^2}{2} - (b-1)b - b \ln b \right] + C'', \quad x_2 + ih = \\ &= C' \left[ \frac{1}{2} - (b-1) - b \ln(-1) \right] + C'', \end{aligned}$$

o bien,

$$C' = -\frac{h}{b\pi}, \quad C'' = x_2 + \frac{h(2b-1)}{2b\pi} - \frac{bh}{2\pi} - \frac{h}{2b\pi} + \frac{h}{\pi} \ln b = x_1 - x_2.$$

Resolviendo la última ecuación respecto de  $b$ , calculamos después  $C'$  y  $C''$ , con lo que se termina la resolución del problema. Ob-

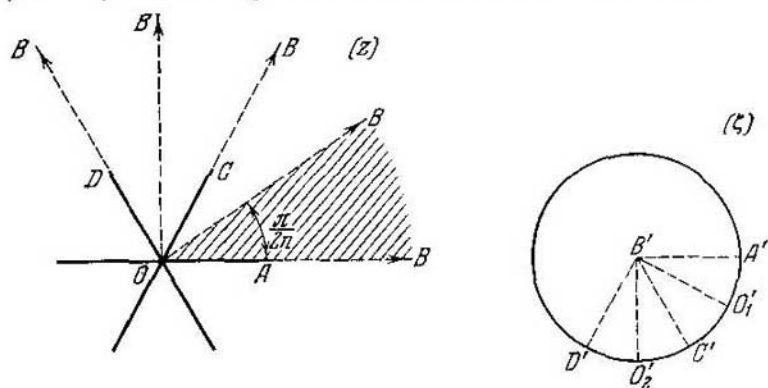


FIG. 81.

sérvese que en cada uno de los dos ejemplos considerados la existencia de raíz de la ecuación trascendente, negativa en el primer problema y positiva en el segundo, se deduce de la existencia misma de la función que realiza la transformación, por lo cual no se necesita una demostración especial.

Como último ejemplo, consideremos el polígono representado en la figura 81. Su frontera consta de  $2n$  segmentos rectilíneos que

parten del origen de coordenadas formando ángulos iguales entre sí. Como cada uno de ellos se recorre doblemente al recorrer el contorno del polígono, nos encontramos con un polígono de  $4n$  lados.

Se pide transformar el círculo unidad  $|\xi| < 1$  en este polígono, de tal modo que el punto  $\xi = 0$  vaya al punto del infinito.

Escribamos los vértices de este polígono en su orden:  $1, 0, e^{\frac{\pi i}{n}}, 0, e^{\frac{2\pi i}{n}}, 0, \dots, e^{\frac{(2n-1)\pi i}{n}}, 0$ . Los ángulos correspondientes son:  $2\pi, \frac{\pi}{n}, 2\pi, \frac{\pi}{n}, \dots, 2\pi, \frac{\pi}{n}$ . Comprobemos que sus preimágenes en la circunferencia tienen que ser los vértices de un polígono regular de  $4n$  lados. En efecto, debido al teorema de existencia, el sector circular  $A'B'O_1$  de amplitud  $\frac{\pi}{2n}$  se puede transformar conformemente

en el ángulo  $AOB$  de tal modo que los puntos  $0, 1$  y  $e^{\frac{\pi i}{2n}}$  vayan a los puntos  $\infty, 1$  y  $0$ , respectivamente. Aplicando el principio de simetría a la función  $z = \varphi(\xi)$  que realiza la transformación y al recinto  $A'B'O_1$ , hallaremos que la misma función (prolongada analíticamente) es analítica en el sector  $A'B'C'$  de amplitud doble y que transforma este sector en el ángulo  $AOC$ , de tal modo que los radios  $B'A'$  y  $B'C'$  se transforman en los rayos  $AB$  y  $CB$ , y el arco  $A'O_1C'$  se transforma en la poligonal de dos lados  $AOC$ . Aplicando el principio de simetría a la función  $z = \varphi(\xi)$ , al recinto  $A'B'C'$  y al segmento  $B'C'$ , y después a la misma función, al recinto  $C'B'D'$  y al segmento  $B'D'$ , etc, hallaremos que la función  $\varphi(\xi)$  se prolonga analíticamente a todo el círculo unidad (en el origen de coordenadas ésta tiene un polo) transformando a éste conformemente en el polígono dado de  $4n$  lados. En esta transformación las preimágenes de los vértices del polígono son los vértices de un polígono regular de  $4n$  lados inscrito en el círculo unidad.

Empezando a buscar esta función, observemos que ésta puede obtenerse directamente efectuando la transformación indicada anteriormente del sector circular en el ángulo. No obstante, como ejercicio, aplicaremos la fórmula (7.3:5). Como las preimágenes de los vértices, por orden, comenzando desde la preimágen del vértice  $A$ , son los puntos  $1, e^{-\frac{\pi i}{2n}}, e^{-\frac{2\pi i}{2n}}, \dots, e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2n}}$ , esta fórmula toma la forma

$$z = C' \int_1^{\xi} (\tau - 1) (\tau - e^{-\frac{\pi i}{2n}})^{-1} (\tau - e^{-\frac{2\pi i}{2n}}) (\tau - e^{-\frac{3\pi i}{2n}})^{-1} \dots \\ \dots (\tau - e^{-\frac{(2n-2)\pi i}{2n}}) (\tau - e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2n}})^{-1} \frac{d\tau}{\tau^2} - C'' =$$

$$\begin{aligned}
 &= C' \int_1^{\xi} (\tau^{2n} - 1) (\tau^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\tau}{\tau^2} + C'' = \\
 &= C' \int_1^{\xi} (\tau^n + \tau^{-n})^{\frac{1}{n}-1} (\tau^{n-1} - \tau^{-n-1}) d\tau + C'' = C_1 (\xi^n + \xi^{-n})^{\frac{1}{n}} + C_2.
 \end{aligned}$$

No queda más que determinar las constantes. Con este fin, hacemos  $\xi = 1$  y  $\zeta = e^{-\frac{\pi i}{2n}}$ ; obtenemos las ecuaciones:

$$1 = 2^{\frac{1}{n}} C_1 + C_2, \quad 0 = C_2.$$

Definitivamente, la función que realiza la transformación se puede expresar en la forma siguiente:

$$z = \left[ \frac{1}{2} (\xi^n + \zeta^{-n}) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Puede obtenerse el mismo resultado de otra manera. Mediante la transformación  $z_1 = z^n$  convertimos el plano en una superficie de Riemann de  $n$  hojas, y el polígono considerado en un recinto situado en esta superficie, con la frontera compuesta de  $2n$  segmentos, cada uno de longitud igual a 1, los cuales se proyectan alternadamente sobre los segmentos  $[0, 1]$  y  $[-1, 0]$  del eje real.

Aplicando la transformación  $z_1 = \frac{1}{2} (z_2 + z_2^{-1})$ , transformamos este recinto en el círculo unidad de  $n$  hojas (se debe tomar aquella rama de la función  $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$  que se anula en el punto del infinito). Finalmente, mediante la transformación  $\zeta = \sqrt[n]{z_2}$  envolvemos el círculo de  $n$  hojas en el círculo unidad de una hoja.

Es obvio que las transformaciones  $z_1 = z^n$ ,  $z_1 = \frac{1}{2} (z_2 + z_2^{-1})$  y  $\zeta = \sqrt[n]{z_2}$ , efectuadas una tras otra, son equivalentes a la sola transformación

$$z = \left[ \frac{1}{2} (\xi^n + \zeta^{-n}) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

## § 8. FUNCION MODULAR. CRITERIO DE NORMALIDAD. TEOREMA GRANDE DE PICARD Y RECTAS DE JULIA

8.1. En este apartado aplicaremos el principio de simetría a la construcción de una función importante que tiene numerosas aplicaciones teóricas. Señalemos en la circunferencia unidad del plano  $z$  tres puntos:  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y unámonos dos a dos mediante arcos de

circunferencias que sean ortogonales a la circunferencia unidad (fig. 82). Estos arcos encierran un recinto  $G_0$ , que es un triángulo con ángulos nulos. Transformemos conformemente  $G_0$  en el semiplano superior  $w$ , de tal modo que los puntos  $A, B$  y  $C$  vayan a los puntos  $0, 1$  y  $\infty$ , respectivamente; entonces los arcos  $AB, BC$  y  $CA$  se convertirán en los segmentos  $[0, 1], [1, \infty]$  y  $[\infty, 0]$  del eje real, respectivamente; éstos los designaremos en el orden indicado así: I, II y III.

Sea  $w = \chi(z)$  la función que realiza la transformación. Apliquemos a ésta y al recinto  $G_0$  el principio de simetría. Obtendremos que

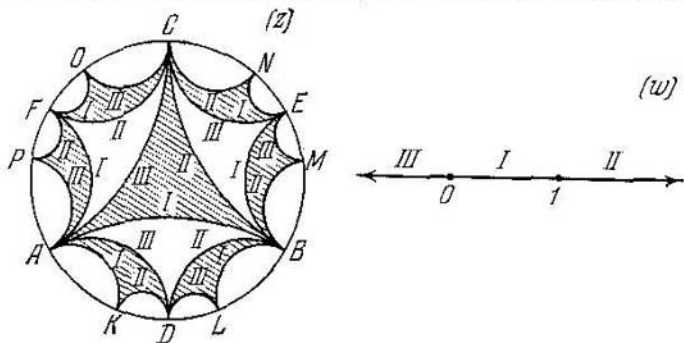


FIG. 82.

la función  $\chi(z)$  se prolonga analíticamente a través de cada uno de los arcos  $AB, BC$  y  $CA$  a los triángulos de ángulos nulos  $ABD, BCE$  y  $ACF$ . En virtud del principio de simetría, los valores que toma la función en cada uno de estos triángulos tienen que pertenecer al semiplano inferior y llenan completamente este semiplano. Apliquemos ahora el principio de simetría a la misma función y a cada uno de los triángulos  $ABD, BCE$  y  $ACF$ . Hallaremos que ésta se prolonga analíticamente a través de sus lados  $AD, DB, BE, EC, CF$  y  $AF$  a los triángulos de ángulos nulos  $ADK, DBL, BEM, ECN, CFO$  y  $FAP$ . En cada uno de éstos la función  $\chi(z)$  toma valores que llenan el semiplano superior.

Reiterando el proceso indicado de prolongación analítica, hallaremos que  $\chi(z)$  puede prolongarse analíticamente a todo el círculo unidad. En efecto, el recinto al cual se ha realizado la prolongación analítica, representa en cada etapa del proceso considerado un polígono cuyos lados son circunferencias ortogonales a la circunferencia unidad. Precisando, al principio se tiene el triángulo  $ABC$ , luego resulta el hexágono  $ADBEFC$ , en la siguiente etapa de la prolongación analítica se obtiene el dodecágono  $AKDLBMENCOFP$ , etc.

Obsérvese que el proceso mismo de prolongación analítica se puede efectuar aplicando el principio de simetría cada vez, no a los triángulos, sino a aquellos polígonos en los cuales la función ya se ha prolongado en la etapa anterior. Entonces, después del triángulo  $ABC$  se obtiene de nuevo el hexágono  $ADBECF$ , pero ya en la siguiente etapa se somete el hexágono a una transformación de simetría respecto de cada uno de sus seis lados, obteniéndose como

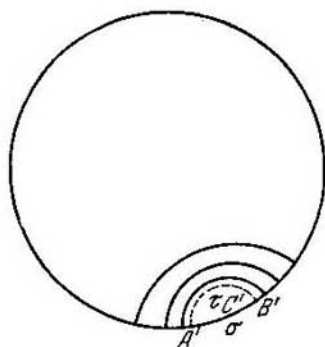


FIG. 83.

resultado un polígono de  $6 + 4 \cdot 6 = 30$  lados (que no está representado en la figura). La aplicación del principio de simetría a sus lados permite prolongar la función  $\chi(z)$  a un polígono de  $30 + 28 \times 30 = 870$  lados, etc.

Para demostrar que todo punto del círculo va a pertenecer en cierta etapa a estos polígonos, es suficiente demostrar que las longitudes de los arcos de la circunferencia unidad, en los cuales descansan los lados del polígono (se tiene en cuenta cada vez el menor de los dos arcos con los extremos dados), tienden a cero a medida que el número de lados crece indefinidamente. Esto, a su vez, es consecuencia de que cada punto de la circunferencia unidad es un punto de acumulación para los vértices de los polígonos considerados. Supongamos lo contrario; entonces tiene que existir una sucesión de arcos encajados  $\{\sigma_n\}$  de la circunferencia unidad que unen los vértices contiguos de los polígonos, los cuales se contraen hacia cierto arco  $\sigma$  que no contiene en su interior a ninguno de los vértices de los polígonos considerados. Unamos los extremos del arco  $\sigma$  con un arco  $\tau$  que sea ortogonal a la circunferencia unidad. Efectuando la transformación de simetría respecto de  $\tau$ , hallaremos en  $\sigma$  unos puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  simétricos a  $A$ ,  $B$  y  $C$  (fig. 83).



Reflejando los polígonos considerados en aquellos lados suyos que se basan en  $\sigma_n$ , hallaremos que las imágenes de los vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  estarán arbitrariamente próximos a  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  para  $n$  suficientemente grande, y, por consiguiente, comenzando desde cierto  $n$  en adelante, al menos uno de los vértices del polígono pertenece al arco  $\sigma$  (siendo distinto de sus extremos). De la contradicción obtenida se deduce que  $\chi(z)$  verdaderamente se prolonga analíticamente a todo el círculo unidad. Como el recinto es simplemente conexo, esta función es uniforme en el círculo (teorema de monodromía). Por cierto, su uniformidad se debe a que el polígono reflejado está situado en cada etapa en la parte exterior de la circunferencia en la que descansa su lado y, por lo tanto, este polígono y el que se obtiene después de la reflexión, no tienen puntos comunes. De la construcción se deduce que  $\chi(z)$  toma infinitas veces en el círculo unidad cualquier valor complejo, a excepción de tres valores:  $0$ ,  $1$  y  $\infty$ . Además, los valores del semiplano superior se toman en los triángulos rayados y los del semiplano inferior en los no rayados; los valores de los intervalos del eje real  $(0,1)$ ,  $(1, \infty)$  y  $(-\infty, 0)$  se toman en los lados de los triángulos designados por I, II y III. La función  $w = \chi(z)$  determina una superficie de Riemann, la cual puede considerarse como compuesta de un conjunto infinito de ejemplares de semiplanos superiores e inferiores, de los cuales cada semiplano superior (inferior) está ligado con tres semiplanos inferiores (superiores) a lo largo de los segmentos I, II y III del eje real. En la superficie construida la función inversa a la dada es uniforme y analítica y está acotada en valor absoluto (todos sus valores pertenecen al círculo unidad). Esta misma función, considerada como función de  $w$  (a ésta la designaremos con  $\omega(w)$ ), es multiforme y prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que no pase por los puntos  $0$ ,  $1$  y  $\infty$ . Entre los valores que toma  $\omega(w)$  en cierto punto hay uno, y sólo uno, que pertenece al triángulo cerrado  $ABC$  o que está situado dentro del triángulo  $ADB$ ; a éste lo llamaremos valor principal de  $\omega(w)$ .

Transformando el círculo unidad en el semiplano superior  $t$ , de tal modo que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  vayan a los puntos  $0$ ,  $1$  y  $\infty$ , respectivamente, el triángulo  $ABC$  de ángulos nulos se transforma también en un triángulo de ángulos nulos, representado en la figura 84. En este caso la función  $w = \chi(z)$  se transforma en una función  $w = \lambda(t)$ , llamada función modular.

La función modular es uniforme y analítica en el semiplano superior. Esta se caracteriza en que transforma un triángulo de ángulos nulos con los vértices  $0$ ,  $1$  y  $\infty$  en el semiplano superior, y lleva los vértices  $0$ ,  $1$  y  $\infty$  a los puntos  $0$ ,  $1$  y  $\infty$  del eje real. Todas sus propiedades se deducen de las propiedades de la función  $w = \chi(z)$ . He aquí, pues, que la función modular toma en un conjunto infinito

de puntos cada valor complejo, a excepción de los valores 0, 1 y  $\infty$ . Los triángulos de ángulos nulos, rayados en la figura 84, se transforman conformemente mediante  $w = \lambda(t)$  en el semiplano superior  $w$ , y los no rayados, en el semiplano inferior; los lados de los triángulos que están señalados con las notaciones I, II y III se transforman en los intervalos del eje real  $(0, 1)$ ,  $(1, \infty)$  y  $(\infty, 0)$ .

La superficie de Riemann (en el sentido propio de la palabra), determinada mediante la función modular, es idéntica a la superficie de Riemann de la función  $w = \chi(z)$ . En efecto, una de ellas se

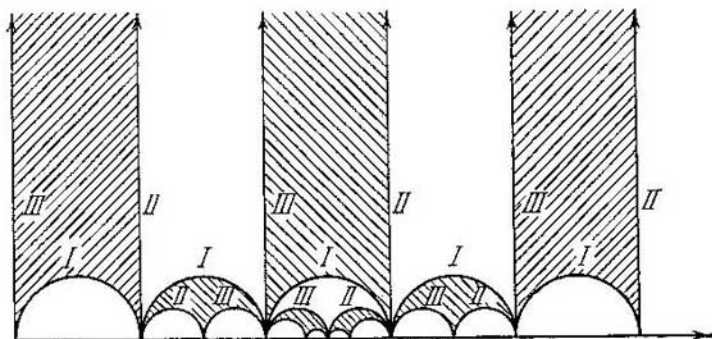


FIG. 84.

convierte en la otra mediante una transformación homográfica que transforme el círculo en el semiplano. Esta superficie de Riemann se llama *superficie de Riemann de la función modular*.

8.2. Apliquemos la función  $\omega(w)$  del precedente apartado a la demostración del teorema pequeño de Picard, el cual se demostró en el ap. 1.5 del cap. VII sólo para las funciones de orden finito.

**Teorema pequeño de Picard.** *Toda función entera  $f(z) \not\equiv \text{const}$  toma cualquier valor complejo finito, a excepción, posiblemente, de un valor.*

**Demostración.** Supongamos que para una función  $f(z)$  existen dos valores finitos  $a$  y  $b$  que ésta no toma. Entonces  $\varphi(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$  es una función entera que no toma los valores 0 y 1. Por consiguiente, todos los valores de esta función pertenecen al recinto en el cual está definida la función multiforme analítica  $\omega(w)$ . Fijemos una rama uniforme cualquiera de esta última función en un entorno del punto  $w_0 = \varphi(0)$ . Entonces en este entorno obtenemos

un elemento de la función  $\omega\varphi(z)$ , el cual es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente al plano finito y, por lo tanto, según el teorema de monodromía, determina una función uniforme y analítica en el plano finito, es decir, una función entera. Como ésta está acotada en valor absoluto (sus valores pertenecen al círculo unidad), del teorema de Liouville se deduce que  $\omega\varphi(z) \equiv \text{const.}$  Pero esto, a su vez, es posible solamente cuando  $\varphi(z) \equiv \text{const.}$  y, por consiguiente,  $f(z) \equiv \text{const.}$ , lo cual contradice a la hipótesis del teorema.

Así, pues, el teorema pequeño de Picard queda demostrado.

Más adelante completaremos este teorema demostrando que una función trascendente entera toma cada valor finito, a excepción, posiblemente, de uno, en un conjunto infinito de puntos.

Del teorema demostrado se obtiene fácilmente una proposición similar para las funciones meromorfas.

**T e o r e m a.** *Toda función meromorfa  $F(z) \not\equiv \text{const.}$  toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos.*

**D e m o s t r a c i ó n.** Supongamos que para la función  $F(z)$  existen tres valores  $a$ ,  $b$  y  $c$  que ésta no toma. Si uno de ellos, por ejemplo  $c$ , es igual a  $\infty$ , entonces  $F(z) \not\equiv \text{const.}$  es una función entera que no toma dos valores finitos  $a$  y  $b$ , lo cual es imposible. Así, pues, los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  son finitos. Formemos la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{F(z) - c};$$

ésta es una función meromorfa que no toma el valor  $\infty$ , por lo cual es entera y, además,  $\Phi(z) \not\equiv \text{const.}$  Por otra parte,  $\Phi(z)$  no toma dos valores finitos  $\frac{1}{a-c}$  y  $\frac{1}{b-c}$ . Resulta de nuevo una contradicción con el teorema pequeño de Picard, de donde se deduce que la proposición que se demuestra es cierta.

Son ejemplos elementales de funciones meromorfas con dos valores excepcionales las funciones  $e^z$  (los valores excepcionales son: 0 y  $\infty$ ) y  $\text{tg } z$  (los valores excepcionales son:  $i$  y  $-i$ ).

8.3. Apliquemos las propiedades de la función  $\omega(w)$  para obtener un criterio suficiente muy amplio de normalidad de una familia de funciones analíticas. Recordemos (véase el ap. 1.1, cap. IV) que una familia de funciones  $\{f(z)\}$ , uniformes y analíticas en un recinto  $G$ , se llama normal en este recinto, si de cualquier sucesión de funciones  $\{f_n(z)\}$  de esta familia se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente (posiblemente, al infinito idéntico) en el interior del recinto  $G$ .

**C r i t e r i o d e n o r m a l i d a d.** *Para que una familia de funciones  $\{f(z)\}$ , analíticas en un recinto  $G$ , sea normal, es suficiente*

que existan dos valores finitos  $a$  y  $b$  que no se toman en este recinto por ninguna de las funciones dadas.

**D e m o s t r a c i ó n.** Está claro que es suficiente establecer la normalidad de la familia dada en cualquier círculo perteneciente a  $G$  (compárense los razonamientos expuestos en el ap. 1.1, cap. IV). Esto significa que desde el comienzo se puede considerar que  $G$  es un círculo. Sustituyamos cada una de las funciones  $f(z)$  por  $\varphi(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$ . Entonces obtenemos una familia de funciones  $\{\varphi(z)\}$  que no toman los valores 0 y 1 en el círculo  $G$ . Si se demuestra que la familia  $\{\varphi(z)\}$  es normal, de aquí se deducirá que la familia  $\{f(z)\}$  también lo es.

Consideremos una sucesión arbitraria de funciones  $\{\varphi_n(z)\}$  y la sucesión de valores de estas funciones en algún punto  $z_0 \in G$ . Distinguiremos dos casos: a)  $\{\varphi_n(z_0)\}$  posee un punto de acumulación distinto de 0, 1 y  $\infty$ ; b) tal punto de acumulación no existe. En el caso a), pasando si es necesario a subsucesiones, tendremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = \alpha \neq 0, 1, \infty.$$

Fijemos un entorno del punto  $\alpha$  tan pequeño que no contenga a los puntos 0, 1 y  $\infty$ , y elijamos en el mismo una rama uniforme de la función  $\omega(w)$ , por ejemplo, exigiendo que el valor  $\omega(\alpha) = \beta$  sea principal (o sea, que pertenezca al cuadrilátero  $ADBC$  fig. 82; se excluyen de éste los puntos de los lados  $AD$  y  $DB$ ). Como, para valores suficientemente grandes de  $n$ , los puntos  $\varphi_n(z_0)$  pertenecen al entorno asignado, obtenemos en un entorno del punto  $z_0$  los elementos de las funciones analíticas  $\omega\varphi_n(z)$ , donde los valores de  $\omega$  pertenecen a la rama elegida. Cada uno de estos elementos puede prolongarse analíticamente a todo el círculo  $G$ , puesto que  $\varphi_n(z)$  son funciones analíticas en este círculo y todos sus valores pertenecen a aquel recinto en que la función  $\omega(w)$  no posee puntos singulares. Como resultado de la prolongación, se obtienen funciones  $\omega\varphi_n(z)$  uniformes y analíticas en el círculo  $G$ , que satisfacen a la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega\varphi_n(z_0) = \beta$ . Todos los valores de estas funciones pertenecen al círculo unidad. Por ello, la sucesión  $\{\omega\varphi_n(z)\}$  forma una familia compacta (véase el ap. 2.1, cap. IV), es decir, contiene una subsucesión  $\{\omega\varphi_{n_k}(z)\}$  que es uniformemente convergente en el interior de  $G$ . Sea  $\Omega(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega\varphi_{n_k}(z)$ ; esta función satisface a la condición  $\Omega(z_0) = \beta$  y como  $|\beta| < 1$ ,  $\Omega(z)$  no puede ser una constante de valor absoluto igual a 1. Como  $|\omega\varphi_{n_k}(z)| < 1$  en el recinto  $G$ , se tiene  $|\Omega(z)| \leq 1$  en este recinto y, en virtud del principio del módulo máximo:  $|\Omega(z)| < 1$ ,  $z \in G$  (si se verificase la igualdad

en algún punto del recinto  $G$ , sería  $|\Omega(z)| \equiv 1$ , lo cual, como se ha observado, es imposible).

Consideremos un círculo cerrado  $K$  perteneciente al recinto  $G$ ; la función  $t = \Omega(z)$  transforma este círculo en un recinto cerrado  $D$  perteneciente al círculo unidad. Por consiguiente, la función  $w = \chi(t)$  es uniformemente continua en  $D$ , de donde se deduce que la sucesión  $\{\chi \circ \varphi_{n_h}(z) = \varphi_{n_h}(z)\}$  converge uniformemente en  $K$  hacia la función  $\chi \circ \Omega(z)$ . Así, pues, en el caso a) existe una subsucesión  $\{\varphi_{n_h}(z)\}$  de la sucesión  $\{\varphi_n(z)\}$  que es uniformemente convergente en el interior de  $G$ .

No queda más que considerar el caso b) en que la sucesión  $\{\varphi_n(z_0)\}$  no posee otros puntos de acumulación más que 0, 1 y  $\infty$ . Sea 1 un punto de acumulación de esta sucesión. Sin restringir generalidad, se puede suponer entonces que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = 1$ . Formamos

la función

$$\psi_n(z) = \frac{\text{Ln } \varphi_n(z) + 2\pi i}{4\pi i},$$

asignando a  $\text{Ln } \varphi_n(z)$  en el punto  $z_0$  el valor principal, de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ln } \varphi_n(z_0) = 0,$$

y prolongando analíticamente los elementos respectivos de las funciones  $\text{Ln } \varphi_n(z)$  en el círculo  $G$  (tal prolongación es posible, puesto que  $\varphi_n(z)$  no toma los valores 0 y  $\infty$  en el recinto  $G$ ). Como resultado de la prolongación se obtienen unas funciones  $\psi_n(z)$  uniformes y analíticas en el círculo  $G$ . Estas no toman en éste los valores 0, 1 y  $\infty$ , puesto que  $\text{Ln } \varphi_n(z) \neq -2\pi i, 2\pi i, \infty$ . En el punto  $z_0$  se tiene:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z_0) = \frac{1}{2} \neq 0, 1, \infty$ .

Por lo tanto, se pueden aplicar a la sucesión  $\{\psi_n(z)\}$  los razonamientos expuestos en el caso a), es decir, existe una subsucesión  $\{\psi_{n_h}(z)\}$  que converge uniformemente en el interior de  $G$  hacia cierta función  $\Psi(z)$ . Como ninguna de las funciones  $\psi_{n_h}(z)$  toma el valor 1/2 en el recinto  $G$ , la función límite  $\Psi(z)$  no tiene que tomar este valor, si ésta no es constante (esto se deduce del teorema de Hurwitz, ap. 3.5, cap. IV). Pero  $\Psi(z_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \psi_{n_h}(z_0) = \frac{1}{2}$ ; por consiguiente,  $\Psi(z) \equiv \frac{1}{2}$ .

De aquí se deduce que las ramas uniformes elegidas de  $\text{Ln } \varphi_{n_h}(z)$  en el recinto  $G$ , convergen uniformemente en el interior del recinto hacia 0, y la sucesión de funciones  $\{\varphi_{n_h}(z)\}$  converge uniformemente hacia 1.

Si en lugar de la relación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 1$  se cumpliera la relación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 0$  o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \infty$ , consideraríamos la sucesión de funciones  $\{1 - \varphi_n(z)\}$ , o  $\left\{1 - \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}$ . Las funciones de cada una de éstas son analíticas en el recinto  $G$  y no toman los valores 0, 1 y  $\infty$ . Además, la sucesión de sus valores en el punto  $z_0$  converge hacia 1. Aplicando a ellas el caso particular examinado, hallaríamos que  $\{\varphi_n(z)\}$  contiene una subsucesión que converge uniformemente en el interior de  $G$  hacia 0 o  $\infty$ , respectivamente. Con esto se termina la demostración del teorema.

8.4. Apliquemos el teorema del precedente apartado a la demostración del teorema grande de Picard enunciado en el ap. 3.1, cap. IV.

*Teorema grande de Picard. Toda función analítica  $f(z)$  toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial  $z_0$  cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno.*

*Demostración.* Sin restringir generalidad, hagamos  $z_0 = 0$  (se obtiene este caso haciendo la transformación  $\zeta = z - z_0$  o  $\zeta = \frac{1}{z}$ ). Supongamos, por el contrario, que  $f(z)$  posee dos valores excepcionales finitos  $a$  y  $b$  en un entorno  $|z| < R$  del punto  $z_0 = 0$ . Construyamos los anillos circulares

$$\Gamma_0 \left( \frac{R}{2} < |z| < R \right), \quad \Gamma_1 \left( \frac{R}{2^2} < |z| < \frac{R}{2} \right), \dots \\ \dots, \Gamma_n \left( \frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n} \right), \dots$$

con el centro  $z_0$ , y formemos la sucesión de funciones

$$f_1(z) = f\left(\frac{z}{2}\right), \dots, f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right), \dots$$

La función  $f_n(z)$  toma en el anillo  $\Gamma_0$  los mismos valores que la función  $f(z)$  en el anillo  $\Gamma_n$ . Por ello,  $\{f_n(z)\}$  es una sucesión de funciones uniformes y analíticas en el anillo  $\Gamma_0$ , las cuales no toman los valores  $a$  y  $b$ , y, por lo tanto, es una familia normal. Extraigamos de ésta una subsucesión  $\{f_{n_h}(z)\}$  que sea uniformemente convergente en el interior de  $\Gamma_0$ . Supongamos primero que la función límite  $F(z) \neq \infty$ . Entonces el módulo  $|F(z)|$  está acotado en la circunferencia  $|z| = \rho$ ,  $\frac{R}{2} < \rho < R$ , y, por consiguiente, las funciones  $\{f_{n_h}(z)\}$  están uniformemente acotadas en esta circunferencia.

Esto significa que la función  $f(z)$  satisface a las condiciones

$$|f(z)| < M, \quad |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

y, por consiguiente, debido al principio del módulo máximo, satisface a la condición

$$|f(z)| < M, \quad 0 < |z| \leq \rho.$$

Pero esto es imposible, puesto que  $z = 0$  es un punto singular esencial de la función  $f(z)$ .

Si  $F(z) \equiv \infty$ , la sucesión de funciones analíticas  $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$ , converge uniformemente hacia cero en el interior de  $\Gamma_0$ . De aquí, razonando igual que anteriormente, sacamos la conclusión de que la función  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$  está acotada en un recinto de la forma  $0 < |z| \leq \rho$ , de donde se deduce que el punto  $z = 0$  es regular para  $\varphi(z)$  y, por consiguiente, no puede ser un punto singular esencial para  $f(z)$ , en contra de la hipótesis del teorema. El teorema queda demostrado.

De éste se desprende el teorema pequeño de Picard con el siguiente enunciado más fuerte:

*Toda función trascendente entera  $f(z)$  toma en un conjunto infinito de puntos cualquier valor finito  $A$ , a excepción, posiblemente, de uno.*

En efecto, si dos valores finitos  $a$  y  $b$  se toman solamente en un número finito de puntos, entonces tiene que existir un entorno del punto del infinito en el cual no se toman estos valores, lo cual contradice al teorema demostrado ( $z = \infty$  es un punto singular esencial para  $f(z)$ ).

El lector puede demostrar fácilmente que se verifica un aserto más general:

*Una función trascendente  $f(z)$  que es meromorfa en el plano finito, toma en un conjunto infinito de puntos cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de dos.*

Analizando la demostración del teorema fundamental de este apartado, se puede obtener una proposición más general. Sea, igual que anteriormente,  $f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$ ; introduzcamos los anillos circulares

$$\Gamma_0 \left( \frac{R}{2^4} < |z| < R \right), \quad \Gamma_1 \left( \frac{R}{2^5} < |z| < \frac{R}{2} \right), \dots \\ \dots \Gamma_n \left( \frac{R}{2^{n+4}} < |z| < \frac{R}{2^n} \right), \dots$$

que se interceptan unos con otros.

Demostremos que la familia de funciones  $\{f_n(z)\}$  no puede ser normal en el anillo  $\Gamma'_0$ . Supongamos lo contrario. Entonces existen subsucesiones de esta sucesión que son uniformemente convergentes en el interior de  $\Gamma'_0$ , en particular, son uniformemente convergentes en el anillo cerrado  $\Gamma\left(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2}\right)$ . La función límite  $F(z)$  de cualquiera de las subsucesiones tiene que ser idénticamente infinita; suponiendo lo contrario estableceríamos, razonando igual que en la demostración del teorema grande de Picard, que la función  $f(z)$  está acotada en valor absoluto en un recinto de la forma  $0 < |z| < \rho$ , lo cual es imposible. Pero si cualquier subsucesión  $\{f_{n_k}(z)\}$  que converge uniformemente en  $\Gamma$  converge hacia el infinito idéntico, de aquí se deduce que toda la sucesión  $\{f_n(z)\}$  converge uniformemente hacia el infinito en  $\Gamma$ . En caso contrario tendrían que existir un número positivo  $N$ , una sucesión de puntos  $\{z_n\}$ , pertenecientes a  $\Gamma$ , y una sucesión creciente de números naturales  $\{n_k\}$ , tales que  $|f_{n_k}(z_k)| \leq N$ . Pero esta conclusión contradice a que la subsucesión  $\{f_{n_k}(z)\}$  tiene que contener dentro de sí otra subsucesión  $\{f_{n_{k'}}(z)\}$  que converge uniformemente hacia  $\infty$  en  $\Gamma$ . Así, pues, de la hipótesis de que la sucesión  $\{f_n(z)\}$  es una familia normal en  $\Gamma'_0$ , se deduce que  $\{f_n(z)\}$  converge uniformemente hacia el infinito en  $\Gamma$ . Por ello, para un  $N$  arbitrariamente grande, en los puntos del anillo  $\Gamma$  se verifican las desigualdades  $|f_n(z)| > N$ , si  $n$  es suficientemente grande. En otras palabras,

$$\left|f\left(\frac{z}{2^n}\right)\right| > N \quad \text{si } n \geq v(N) \text{ y } z \in \Gamma.$$

Cuando  $z$  recorre el anillo  $\Gamma\left(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2}\right)$ , el punto  $\frac{z}{2^n}$  recorre el anillo  $\gamma_n\left(\frac{R}{2^{n+3}} \leq |z| \leq \frac{R}{2^{n+1}}\right)$ . Los anillos  $\gamma_n$  ( $n = v, v+1, v+2, \dots$ ) se interceptan unos con otros cubriendo todo el recinto  $0 < |z| < \frac{R}{2^{v+1}}$ . Por consiguiente, en todos los puntos de este recinto se verifica la desigualdad

$$|f(z)| > N.$$

En otras palabras,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty,$$

lo cual, no obstante, es imposible, puesto que  $z = 0$  es un punto singular esencial de la función  $f(z)$ .

Por consiguiente, hemos demostrado que la familia  $\{f_n(z)\}$  no puede ser normal en el anillo  $\Gamma'_0$ . De aquí se deduce que en este anillo existe al menos un punto  $\zeta$  tal, que en cualquier entorno del



mismo la familia  $\{f_n(z)\}$  no puede ser normal. En efecto, si todo punto del anillo  $\Gamma'_0$  poseyese un entorno en el cual la familia  $\{f_n(z)\}$  fuese normal, entonces esta familia sería también normal en  $\Gamma'_0$ .

Sea  $|z - \zeta| < \varepsilon$  un entorno arbitrariamente pequeño del punto  $\zeta$ . Como la familia  $\{f_n(z)\}$  no es normal en este entorno, las funciones de esta familia en su conjunto toman en el mismo todos los valores finitos, a excepción, posiblemente, de uno. Mejor dicho, para cualquier valor finito  $A$ , a excepción, posiblemente, de un valor  $A_0$ , existen funciones  $f_{n_h}(z)$  de subíndices  $n_h$  arbitrariamente grandes, que toman el valor  $A$  en cierto punto  $z_h$  perteneciente al entorno dado. Observando que  $f_{n_h}(z) = f\left(\frac{z}{2^{n_h}}\right)$  y designando  $\frac{z_h}{2^{n_h}}$  mediante  $\zeta_h$ , obtenemos:

$$f(\zeta_h) = A.$$

Está claro que la sucesión  $\{\zeta_h\}$  converge hacia el punto  $z = 0$  y está contenida dentro del ángulo limitado por los rayos que parten del punto  $z = 0$  y son tangentes a la circunferencia  $|z - \zeta| < \varepsilon$ . Como el punto  $\zeta$  está fijado y  $\varepsilon$  es arbitrariamente pequeño, obtenemos la siguiente proposición:

**T e o r e m a.** *Para cada punto singular esencial  $z_0$  de una función analítica  $f(z)$ , existe al menos un rayo que parte de este punto tal que en cualquier ángulo, simétrico respecto de dicho rayo, la función  $f(z)$  toma cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno, en una sucesión infinita de puntos que converge hacia  $z_0$ .*

Es obvio que este teorema es una precisión del teorema grande de Picard. Más exactamente, el teorema de Picard no dice cómo están situados los  $A$ -puntos de la función  $f(z)$  en un entorno del punto singular esencial, mientras que el último teorema afirma que para cualquier  $A$ , a excepción, posiblemente, de uno, un conjunto infinito de  $A$ -puntos se agrupa en las proximidades de cierto rayo (puede haber unos cuantos rayos de éstos e incluso un conjunto infinito).

El rayo (o los rayos), cuya existencia demuestra el teorema, se llaman **rayos de Julia**, que es el nombre del científico que los descubrió.

El caso  $z_0 = \infty$  se reduce al que acabamos de examinar mediante la transformación  $\xi = \frac{1}{z}$ . En particular, para las funciones enteras obtenemos la proposición siguiente:

**T e o r e m a.** *Sea  $f(z)$  una función trascendente entera; entonces en el plano existen unos puntos, distintos del origen de coordenadas, tales que en cualquier entorno de los mismos la familia  $\{f(2^n z)\}$  no es normal. El rayo que parte del origen de coordenadas y pasa por tal*

punto, posee la propiedad de que un ángulo de magnitud arbitrariamente pequeña, simétrico respecto de este rayo, contiene un conjunto infinito de  $A$ -puntos de la función para cualquier valor finito  $A$ , a excepción, posiblemente, de uno.

Como ejemplo, consideremos la función  $e^z$ . Esta posee dos rayos de Julia, dirigidos por las partes positiva y negativa del eje imaginario. En efecto, si  $A \neq 0$ , entonces las raíces de la ecuación  $e^z = A$  son:

$$z_k = \operatorname{Ln} A = \ln |A| + i \arg A + 2k\pi i.$$

Supongamos, para precisar, que  $k$  es positivo. Como la tangente del ángulo formado por el vector  $z_k$  y la dirección positiva del eje imaginario es igual a  $\frac{\ln |A|}{\arg A + 2k\pi}$ , ésta tiende a cero cuando  $k$  crece indefinidamente. De aquí se deduce que los puntos  $z_k$ , comenzando desde uno de ellos en adelante, pertenecen a cualquier ángulo fijado que sea simétrico respecto de la parte positiva del eje imaginario. Para  $k$  negativos y para la parte negativa del eje imaginario se obtiene un resultado similar. Obsérvese que aquí todos los puntos del eje imaginario son tales, que en cualquiera de sus entornos la familia  $\{e^{2^n z}\}$  no es normal. En efecto, en cada uno de ellos  $|e^{2^n z}| = 1$ , mientras que en los puntos que están situados en los semiplanos de la derecha y de la izquierda, la sucesión  $\{e^{2^n z}\}$  converge hacia  $\infty$  y  $0$ , respectivamente. De aquí se deduce que para los puntos del eje imaginario no existe un entorno en el que la sucesión  $\{e^{2^{n_h} z}\}$  sea uniformemente convergente.

## APENDICE

### SOBRE LA BASE EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

#### I

1. Consideremos el conjunto de todas las funciones uniformes de la variable compleja  $z$  que son analíticas en el círculo  $|z| < R$  ( $0 < R \leq \infty$ ). Si  $\{r_n\}$  es alguna sucesión monótona creciente de números positivos, que satisfacen a la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R$ , entonces, determinando la norma de una función analítica  $f(z)$  mediante la relación

$$\|f(z)\| = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\max_{|z| \leq r_n} |f(z)|}{1 + \max_{|z| \leq r_n} |f(z)|},$$

podemos considerar este conjunto como un espacio lineal  $E_R$  de tipo  $F^1$ ). De acuerdo a la norma admitida, la convergencia en este espacio se define como la convergencia uniforme de la sucesión de funciones analíticas en cada conjunto cerrado de puntos del círculo  $|z| < R$ . Está claro que este espacio no es de Banach. Es sabido<sup>2)</sup> que cualquiera que sea la definición de la norma no se puede llegar a obtener aquí un espacio de Banach, si se admite la convergencia en el sentido indicado.

2. Una funcional lineal definida en  $E_R$  siempre se puede expresar en la forma

$$L(f) = \sum_0^{\infty} l_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (1)$$

1) Las definiciones y resultados fundamentales del análisis funcional se dan en el libro de S. B a n a c h, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

2) P. U r y s o h n, Sur un problème de M. Fréchet relatif aux classes des fonctions holomorphes, *Comptes rendu du Congrès des Sociétés savantes en 1924*, Sciences.

donde  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|l_n|} = l < R$ . En efecto, si se cumple la última condición, la serie (1) es convergente para cualquier  $f(z) \in E_R$  (puesto que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|} \leq \frac{1}{R}$ ); por ello, su suma define una funcional en  $E_R$  que, evidentemente, es aditiva. Por otra parte, si  $l < r < R$ , se tiene:

$$\sum_0^{\infty} \frac{|l_n|}{r^n} < \infty, \quad \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{\max_{|z| \leq r} |f(z)|}{r^n}$$

y, por consiguiente,

$$|L(f)| < \max_{|z| \leq r} |f(z)| \sum_0^{\infty} \frac{|l_n|}{r^n}.$$

De aquí se deduce que  $L_n(f) \rightarrow 0$  cuando  $f(z) \rightarrow \theta$  ( $\theta$  es el cero del espacio  $E_R$ , es decir, la función que es idénticamente nula). Resumiendo,  $L(f)$  es una funcional lineal. Recíprocamente, si  $L(f)$  es alguna funcional lineal en  $E_R$ , entonces, haciendo  $L(z^n) = l_n$ , se tiene:

$$L(f) = L\left(\sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} l_n.$$

Si se supone que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|l_n|} \geq R$ , entonces existe una subsucesión infinita de números  $l_{n_j}$ , distintos de cero:  $\{l_{n_j}\}$ , para los cuales  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[n_j]{|l_{n_j}|} > R$ . La función  $F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{n_j}}{l_{n_j}}$  pertenece a  $E_R$ ,

por lo cual, la serie  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{l_{n_j}} l_{n_j}$  tiene que ser convergente, lo cual, evidentemente, es imposible. Por lo tanto,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|l_n|} < R$ .

En virtud de la condición demostrada, la función

$$\omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} \frac{l_n}{\zeta^{n+1}} \quad (2)$$

es analítica en el punto del infinito y  $\omega(\infty) = 0$ . Por esto,  $L(f)$  también puede expresarse en la forma

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho < R} \omega(\zeta) f(\zeta) d\zeta^3.$$

<sup>3)</sup> Compárese con L. Fa u t a p p i è, I. funzionali analitici, Memorie della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Serie sesta, Vol. III, Fasc. XI.

3. Desde el punto de vista de los problemas generales de la teoría de aproximaciones y desarrollos de las funciones en series, el espacio  $E_R$  es de un interés particular. Esto se justifica, por una parte, por aquel papel que desempeñan las funciones analíticas en el análisis y, por otra parte, por el carácter muy general del espacio  $E_R$ , que no entra en los marcos de los espacios de Banach. En este artículo nos dedicaremos al problema de la base en  $E_R$ , es decir, a buscar las condiciones que hay que imponer a una sucesión de funciones  $\{f_n(z)\}$  para que cualquier función  $f(z)$ ,  $f(z) \in E_R$ , pueda expresarse en forma de una serie

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_n f_n(z)$$

y, además, de un modo único. Conviene indagar este problema dividiéndolo en una serie de problemas separados, dispuestos en un orden de subordinación. Ahora pasamos a ello, observando que el caso más general (el estudio de los problemas aquí considerados para el espacio de las funciones analíticas en un recinto simplemente conexo arbitrario) se reduce al considerado transformando conformemente el recinto en un círculo.

4. Sea  $\{f_n(z)\}$  alguna sucesión de funciones de  $E_R$ . Diremos que ésta es completa<sup>4)</sup>, si la cápsula lineal cerrada de  $\{f_n(z)\}$  coincide con  $E_R$ , es decir, si cada función  $f(z)$ ,  $f(z) \in E_R$ , puede expresarse como el límite de una sucesión de polinomios respecto de  $\{f_n(z)\}$  (llamamos polinomios aquí a las combinaciones lineales de la forma  $c_0 f_0(z) + \dots + c_n f_n(z)$ ).

5. Si  $\{f_n(z)\}$  es una sucesión completa (a veces diremos: sistema completo), entonces toda función  $f(z)$ ,  $f(z) \in E_R$ , se expresa en la forma

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_0^{(n)} f_0(z) + \dots + c_n^{(n)} f_n(z)). \quad (3)$$

Por lo general, las columnas de los coeficientes  $\{c_k^{(n)}\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $c_k^{(n)} = 0$  para  $n < k$ ) son divergentes. Claro que es fácil demostrar que siempre se puede elegir la sucesión  $\{p_n(z)\}$  de tal modo que exista el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)}$  para todos los  $k$ ; pero, generalmente, estos límites dependen de la elección de  $\{p_n(z)\}$ . Para que ellos no dependan de  $\{p_n(z)\}$  es necesario y suficiente que del cum-

<sup>4)</sup> En el libro citado de S. B a n a c h se emplean en este sentido los términos: sucesión fundamental o cerrada.

plimiento de las relaciones

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (c_0^{(n)} f_0(z) + \dots + c_n^{(n)} f_n(z)) = 0 \\ \text{siempre se deduzca que } \lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$(k=0, 1, 2, \dots)^5).$$

Es obvio que las funciones  $\{f_n(z)\}$  que satisfacen a esta última condición son linealmente independientes y, además, no admiten desarrollos no triviales del cero. Pero un sistema de funciones linealmente independiente que no admita desarrollos no triviales del cero, puede no satisfacer a la condición (4), como muestra el ejemplo del sistema  $1, 1+z, \dots, 1+z^n, \dots$ , en el espacio  $E_1$  (aquí  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_0(z) - f_n(z)) = 0$ ). Estas observaciones justifican la definición y denominación siguientes<sup>6</sup>). Un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$  se llama sistema de independencia lineal reforzada en  $E_R$  (abreviadamente, sistema de i.l.r.), si se cumple la condición (4), es decir, si de la convergencia a cero de una sucesión de polinomios respecto de  $\{f_n(z)\}$  se deduce la convergencia a cero de cada una de las columnas de la matriz de los coeficientes de estos polinomios. Esta definición no supone que el sistema  $\{f_n(z)\}$  sea completo; no obstante, aquí lo aplicaremos solamente a los sistemas completos

6. Si  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo de i.l.r. y  $f(z)$  es alguna función de  $E_R$ , entonces de (3) se deduce que existen los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} = c_k = L_k(f) \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

$L_k(f)$  son funcionales aditivas y, en virtud de la propiedad de i.l.r. (4), son continuas en  $E_R$ , es decir, son funcionales lineales. Está claro que

$$L_k(f_m) = \delta_{km} \quad (k=0, 1, 2, \dots; m=0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

<sup>5</sup> Aquí se tiene en cuenta el primer capítulo de mi trabajo « Algunas cuestiones de la teoría de la aproximación y del desarrollo de las funciones en series ». El artículo presente es una exposición de una parte esencial del segundo capítulo de este trabajo.

<sup>6</sup> A. M a r k u s h é v i c h, Sobre la base (en el sentido amplio de la palabra) para los espacios lineales (A. M a r k u s h é v i c h, О базе (в широком смысле слова) для линейных пространств, Доклады АН СССР, XII (1943), № 6, стр. 241—243); « Generalización de un teorema de D. E. M e n s h o v («Обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова». Матем. сб., 15(57), 433—436). Desde un punto de vista un poco distinto y sólo para un espacio de Hilbert, los sistemas de independencia lineal reforzada fueron estudiados antes bajo el nombre de sistemas minimales por S. L e w i n, en su trabajo « Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen », Math. Zeitschrift Bd. 32, S. 491—511.

donde  $\delta_{hm} = 0$  para  $k \neq m$  y  $\delta_{kk} = 1$ , es decir,  $\{f_n\}$  y  $\{L_n\}$  forman un sistema biortogonal. Recíprocamente, si un sistema completo de funciones  $\{f_n(z)\}$  admite un sistema de funcionales lineales que es biortogonal con él, entonces, evidentemente, es un sistema de i.l.r. Así, pues, la existencia de un sistema de funcionales lineales  $\{L_n\}$  que sea biortogonal con el sistema completo  $\{f_n(z)\}$  es un criterio de i.l.r. del sistema  $\{f_n(z)\}$ .

Señalemos otro criterio más de sistema de i.l.r., que se demuestra fácilmente. Para que un sistema  $\{f_n(z)\}$  sea de i.l.r., es necesario y suficiente que para cualquier  $n_0$  la distancia de  $f_{n_0}(z)$  a la cápsula lineal cerrada del conjunto  $f_0(z), \dots, f_{n_0-1}(z), f_{n_0+1}(z), \dots$ , sea distinta de cero.

7. Sea  $\{f_n(z)\}$  un sistema completo de i.l.r. y sea  $\{L_n\}$  un sistema de funcionales lineales, biortogonal con  $\{f_n(z)\}$  ( $\{f_n(z)\}$  determina a este sistema de un modo único).

Si

$$L_n(f) = \sum_0^{\infty} l_j^{(n)} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \quad (l_j^{(n)} = L_n(z^j), \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{|l_j^{(n)}|} = l^{(n)} < R), \quad (7)$$

a las funciones

$$\omega_n(\zeta) = \sum_0^{\infty} \frac{l_j^{(n)}}{\zeta^{j+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

las llamaremos asociadas con  $\{f_n(z)\}$ . Cuando  $R < \infty$ , las funciones  $\omega_n(\zeta)$  pueden determinarse mediante las relaciones:

$$\omega_n(\zeta) = L_n\left(\frac{1}{\zeta-z}\right) \quad (|\zeta| \geq R). \quad (8)$$

8. En el caso de un sistema completo de i.l.r.  $\{f_n(z)\}$ , a cada función  $f(z) \in E_R$  se le asocia su desarrollo respecto de las funciones  $\{f_n(z)\}$ :

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} L_n(f) \cdot f_n(z). \quad (9)$$

Si alguna serie de la forma  $\sum_0^{\infty} c_n f_n(z)$  converge hacia  $f(z)$ , o por lo menos posee una subsucesión de sumas parciales que converge hacia  $f(z)$ , entonces, debido a la i.l.r. de  $\{f_n(z)\}$

$$c_n = L_n(f) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Pero si, recíprocamente, se sabe que la serie (9) converge hacia cierta función  $F(z)$  (o posee una subsucesión de sumas parciales que converge hacia  $F(z)$ ), entonces no se puede generalmente afirmar

que  $F(z) = f(z)$ . Podemos convencernos de esto en el ejemplo del sistema  $1, 1+z, 1+z+z^2, \dots, 1+z+\dots+z^n, \dots$  en el espacio  $E_1$ . Es obvio que éste es completo; su i.l.r. es consecuencia de la existencia de un sistema de funcionales lineales que es biortogonal con el mismo:

$$L_n(f) = \frac{f^n(0)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.$$

Pero aquí la función  $f(z) = \frac{1}{z-1} \in E_1$  posee un desarrollo cuyos coeficientes son todos ceros ( $L_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(1 + \dots + z^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f_n) = 0$ ) y el cual, por consiguiente, converge hacia  $F(z) = 0 \neq f(z)$ .

Diremos que una sucesión de funcionales lineales  $\{L_n\}$ , definidos en  $E_R$ , posee la propiedad de unicidad, si de las relaciones

$$\left. \begin{aligned} L_n(f) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad f(z) \in F_R \\ \text{se deduce que } f(z) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Esta definición no exige que el sistema  $\{L_m\}$  sea biortogonal con algún sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$ .

9. Un sistema completo de i.l.r.  $\{f_n(z)\}$ , para el cual la sucesión correspondiente de funcionales lineales (biortogonal con  $\{f_n(z)\}$ ) posee la propiedad de unicidad, lo llamaremos *base* en el sentido amplio del espacio  $E_R$ <sup>7)</sup>. En este caso, la serie (9) no puede converger hacia una función  $F(z)$  distinta de  $f(z)$ , del mismo modo que no puede poseer una subsucesión de sumas parciales que converja hacia  $F(z) \neq f(z)$ . Por lo tanto, en el caso de una base en el sentido amplio de la palabra, el desarrollo (9) puede converger hacia  $f(z)$ , o puede poseer una subsucesión de sumas parciales que converja hacia  $f(z)$ , o finalmente, puede no poseer subsucesiones de sumas parciales convergentes. Correspondientemente a esto, las funciones del espacio  $E_R$  se dividen en tres clases: *A*, *B* y *C* (en el orden de enumeración). La primera de éstas nunca es vacía (pues forman parte de ella, por ejemplo, todos los polinomios respecto de  $\{f_n(z)\}$ ). El ejemplo del sistema  $\{(z - \alpha)^n\}$  ( $\alpha \neq 0, |\alpha| < 1$ ) en el espacio  $E_1$  muestra que la clase *C* puede ser no vacía. Este sistema representa una base en el sentido amplio de la palabra (aquí las funcionales lineales que son biortogonales con  $\{(z - \alpha)^n\}$  tienen la forma  $L_n(f) = \frac{f^n(\alpha)}{n!}$ ; éstas, evidentemente, poseen la propiedad de unicidad). En este

<sup>7)</sup> Véase el primer artículo de los señalados en la llamada 6).



ejemplo figura en la clase  $C$  la función

$$\frac{1}{1-z} \sim \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} (z-\alpha) + \dots + \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} (z-\alpha)^n + \dots$$

En efecto, ninguna subsucesión de sumas parciales de su desarrollo puede converger fuera del círculo

$$|z-\alpha| < |1-\alpha|$$

(esto se comprueba mediante un cálculo simple). Se puede demostrar que toda función de la clase  $C$  siempre se expresa en forma de una suma de dos funciones de la clase  $B$  (claro, la expresión no es única<sup>8</sup>). Por lo tanto, la clase  $B$  no puede ser vacía si la clase  $C$  no es vacía. Sería interesante cerciorarse de que es justo lo recíproco.

10. Cuando las clases  $B$  y  $C$  son vacías, es decir, cuando el desarrollo (9) según los elementos de la base en sentido amplio de la palabra es convergente para cualquier función del espacio  $E_R$ , la base en sentido amplio se convierte en una base en sentido estricto de la palabra, es decir, simplemente en una base (véase más arriba el ap. 1). En otras palabras, una sucesión de funciones  $\{f_n(z)\}$  que satisface a las condiciones:

( $\alpha$ )  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo (en  $E_R$ );

( $\beta$ )  $\{f_n(z)\}$  es un sistema de i.l.r.;

( $\gamma$ ) la sucesión de funcionales lineales  $\{L_n\}$  que es biortogonal con  $\{f_n(z)\}$  (ésta existe en virtud de ( $\beta$ )) posee la propiedad de unicidad;

( $\delta$ ) para toda función  $f(z) \in E_k$  su desarrollo según las funciones  $\{f_n(z)\}$  es convergente; es una base de  $E_R$ .

Es cierto lo recíproco: si un sistema  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$ , entonces se cumplen todas las condiciones ( $\alpha$ ) — ( $\delta$ ).

Sólo se necesita demostrar la propiedad ( $\beta$ ). Para un espacio de tipo Banach los razonamientos correspondientes se pueden hallar en el libro de S. Banach<sup>4</sup>) (pág. 114). Estos razonamientos pueden extenderse también a los espacios de tipo  $F$ , basándose para esto en algunas propiedades de estos espacios, señaladas por S. Mazur y W. Orlicz<sup>9</sup>).

En resumen, un sistema  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$  cuando, y sólo cuando, se cumplen las condiciones ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) y ( $\delta$ ) de este apartado. Señalemos que sólo el cumplimiento de las primeras tres condiciones

<sup>8</sup>) Véase el segundo artículo de los mencionados en la llamada <sup>6</sup>) y también el artículo del autor « Sobre la aproximación óptima » (« О наилучшем приближении », Доклады АН СССР, 1944).

<sup>9</sup>) S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math., t. IV, 1933. La demostración completa se expone en el primer capítulo del trabajo mencionado en la llamada <sup>6</sup>).

$\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$  y  $\{\gamma\}$  significa que  $\{f_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra.

En correspondencia con las condiciones  $(\alpha) - (\delta)$  el problema de la base se divide en los problemas siguientes:

- (a) problema de complitud para un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$ ;
- (b) problema de i.l.r. para un sistema  $\{f_n\}$ ;
- (c) problema de unicidad para un sistema de funcionales lineales  $\{L_n\}$ ;

(d) problema de convergencia para las series  $\sum_0^{\infty} L_n(f) \cdot f_n(z)$  (aquí  $\{f_n(z)\}$  representa una base en el sentido amplio de la palabra).

Pasamos ahora al estudio de estos cuatro problemas, comenzando con (a) y (c), que son los centrales y están estrechamente ligados entre sí.

## II

1. Comenzaremos por establecer unos conceptos que representan la generalización de la transformación clásica de Borel empleada en la teoría de las funciones analíticas.

Sea  $F(z, \zeta)$  una función de dos variables complejas, analítica respecto de cada una de ellas en los círculos

$$|z| < R \quad \text{y} \quad |\zeta| < P \quad (0 < R \leq \infty, \quad 0 < P \leq \infty)$$

respectivamente, y, por consiguiente, analítica respecto del conjunto de las dos variables  $z, \zeta$  en el recinto tetradimensional:  $|z| < R, |\zeta| < P$ . Designaremos con  $L$  y  $\Lambda$  todas las funcionales lineales posibles definidas en los espacios  $E_R$  y  $E_P$ , respectivamente. Los conjuntos de las funciones

$$\{\Lambda [F(z, \zeta)] = f(z)\} \quad \text{y} \quad \{L [F(z, \zeta)] = \varphi(\zeta)\}$$

representan unos subconjuntos  $O$  y  $\Omega$  de los espacios  $E_R$  y  $E_P$ :

$$O \subset E_R, \quad \Omega \subset E_P.$$

Diremos que estos conjuntos están engendrados por la función  $F(z, \zeta)$  (y que son conjugados respecto de  $F(z, \zeta)$ ).

Como ejemplo, hagamos  $F(z, \zeta) = e^{z\zeta}$  ( $R = P = \infty$ ). En este caso los espacios  $E_R$  y  $E_P$  son idénticos y, además, coinciden entre sí  $O$  y  $\Omega$  (debido a la simetría de  $F(z, \zeta)$ ). Una funcional lineal arbitraria en  $E_{\infty}$  tiene la forma

$$L(f) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$$

(véase el ap. 2.4); por esta razón, las funciones engendradas por  $F(z, \zeta)$  tienen aquí la forma

$$\varphi(\zeta) = L_z(e^{z\zeta}) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r>a} e^{r\zeta} \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} dz, \quad (11)$$

o sea, representan el resultado de aplicar la transformación de Borel a la función  $\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$ , la cual es analítica en el punto del infinito.

De la condición  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \infty$  se deduce que  $\varphi(\zeta)$  es una función entera de tipo exponencial (es decir, es una función de orden inferior a la unidad, o de orden igual a la unidad pero de tipo finito). Recíprocamente, toda función de tipo exponencial puede expresarse en la forma  $L(e^{z\zeta})$ . Así, pues, en este ejemplo el conjunto  $\Omega = O$  es la colección de todas las funciones enteras de tipo exponencial.

2. Examinemos un ejemplo más general, en que  $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$  y  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$  es una función analítica en el recinto  $|z| < R'$ . Podemos considerar a  $F(z, \zeta)$  como una función analítica en el recinto  $|z| < R, |\zeta| < P$ , donde  $R \leq R', P = \frac{R'}{R}$  para  $R' < \infty$  y  $P = \infty$  para  $R' = \infty$ . Entonces, para una funcional lineal  $L(f)$  definida en  $E_R$ , se tiene:

$$L(f) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R).$$

Por ello, el conjunto  $\Omega$  consta aquí de las funciones de la forma

$$\varphi(\zeta) = L_z(F(z, \zeta)) = L_z \left[ \sum_0^{\infty} c_n z^n \zeta^n \right] = \sum_0^{\infty} a_n c_n \zeta^n.$$

Supongamos primero que  $R' < \infty$ ; entonces todas estas funciones son analíticas en el círculo cerrado  $|\zeta| \leq P = \frac{R'}{R}$  (puesto que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n c_n|} \leq \frac{a}{R'} < \frac{R}{R'} = \frac{1}{P}$ ) y, en todo caso, son analíticas en el círculo unidad cerrado (pues  $R \leq R'$ ). Lo recíproco, por lo general, no es cierto. Es fácil señalar las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto  $O$  coincida exactamente con el conjunto de las funciones que son analíticas en el círculo cerrado

$|z| \leq P = \frac{R'}{R}$ . Tales condiciones son: (a)  $c_n \neq 0$  ( $0, 1, 2, \dots$ ),  
 (b) existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \left(\frac{1}{R'}\right)$ .

Supongamos ahora que  $R' = \infty$ , es decir, que  $f(z)$  es una función entera. Supongamos que la clase de  $f(z)$  no es superior a  $[\rho, \sigma]^{10}$ . Entonces para la función entera

$$\varphi(\zeta) = L_z [F(z, \zeta)] = \sum_0^{\infty} a_n c_n \zeta^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r>R} f(z\zeta) \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$$

$$(a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < R)$$

se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| < C(r, \varepsilon) e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho} |\zeta|^\rho,$$

de donde la clase de  $\varphi(\zeta)$  es inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$ . Así, pues, en el caso considerado las funciones de la clase son funciones enteras de clase inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$ . Lo recíproco, por lo general, no es cierto. Es fácil señalar las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto  $\Omega$  coincida con el conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$ . Tales condiciones son: (a')  $c_n' \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), (b') existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n'|} = (\varepsilon \rho \sigma)^{\frac{1}{\rho}}$ .

3. Después de estos ejemplos introduciremos las definiciones siguientes (para facilitar la exposición ulterior enunciamos solamente una de ellas en términos de  $O$  y la otra en términos de  $\Omega$ ).

Una sucesión de funciones  $\{f_n(z)\}$ , pertenecientes a  $O$ , es decir, tales que  $f_n(z) = \Lambda_n(F(z, \zeta))$ , se llama relativamente completa (en  $\hat{O}$ ), si  $O$  pertenece a la cápsula lineal de  $\{f_n(z)\}$ .

Respecto de una sucesión de funcionales lineales  $\{\Lambda_n\}$  del espacio  $E_n$ , diremos que posee la propiedad de unicidad relativa (en  $\Omega$ ), si de  $\varphi(\zeta) \in \Omega$  y  $\Lambda_n(\varphi) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), se deduce que  $\varphi(\zeta) = \theta$ .

4. Teorema 1 (principio de dualidad). Un sistema de funciones  $\{f_n(z) = \Lambda_n[F(z, \zeta)]\}$  se llama relativamente completa (en  $O$ ) cuando, y sólo cuando, el sistema de funcionales  $\{\Lambda_n\}$

<sup>10</sup> Siguiendo a V. L. Goncharov, decimos que la clase de una función entera  $f(z)$  no es superior (o es inferior, respectivamente) a  $[\rho, \sigma]$ , si el orden de  $f(z)$  es inferior a  $\rho$ , o es igual a  $\rho$  pero su tipo no es superior (o es inferior, respectivamente) a  $\sigma$ .

que lo engendra de la función  $F(z, \zeta)$ , posee la propiedad de unicidad relativa (en  $\Omega$ )<sup>11</sup>).

**D e m o s t r a c i ó n.** Supongamos que el sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$ ,  $f_n(z) \in O$ , es relativamente completo. Fijando algún  $\zeta_0$ ,  $|\zeta_0| < P$ , observamos que  $F(z, \zeta_0) \in O$ . Por consiguiente, existe una sucesión de polinomios respecto de  $\{f_n(z)\}$  que converge hacia  $F(z, \zeta_0)$ , es decir

$$F(z, \zeta_0) = \sum_0^{\infty} P [f_n(z)].$$

Supongamos ahora que  $\varphi(\zeta) = L_z [F(z, \zeta)] \in \Omega$  y  $\Lambda_n(\varphi) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), donde  $\{\Lambda_n\}$  es el sistema de funcionales lineales que engendra la sucesión  $\{f_n(z)\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta_0) &= L_z [F(z, \zeta_0)] = \sum_0^{\infty} P \{L_z [\Lambda_n(F(z, \zeta))]\} = \\ &= \sum_0^{\infty} P \{\Lambda_n [L_z (F(z, \zeta))]\} = \sum_0^{\infty} P \{\Lambda_n [\varphi(\zeta)]\} = 0 \end{aligned}$$

(es fácil demostrar que  $L_z$  y  $\Lambda_n$  son conmutables). Como  $\zeta_0$  es arbitrario, de aquí sacamos la conclusión que  $\varphi(\zeta) \equiv 0$ . Así, pues, el sistema de funcionales lineales  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad relativa.

Para demostrar la segunda parte del teorema, supongamos que  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad relativa, pero que el sistema de funciones  $\{f_n(z) = \Lambda_n [F(z, \zeta)]\}$  no es relativamente completo. Entonces existen una función  $f(z) = \Lambda [F(z, \zeta)] \in O$  y un número  $r$ ,  $0 < r < R$ , tales que

$$\inf \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - \Pi [f_n(re^{i\theta})]|^2 d\theta > 0$$

(aquí  $\Pi [f_n(re^{i\theta})]$  es un polinomio respecto de  $\{f_n(re^{i\theta})\}$ ). En efecto, para las funciones analíticas, de la convergencia en media (en el sentido de  $L_2$ ) en una circunferencia  $|z| = r$  se deduce la convergencia uniforme en cada círculo concéntrico de menor radio. Ortogonalizando las funciones  $\{f_n(re^{i\theta})\}$  en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , obtenemos

<sup>11</sup>) En una forma menos general este teorema fue publicado en mi artículo «Respecto del problema de la completitud de las funciones analíticas» («К проблеме полноты аналитических функций», Доклады АН СССР, 1943).

una sucesión de polinomios  $\{P_j [f_n(re^{i\theta})]\}$ ; la serie de Fourier de la función  $f(re^{i\theta})$ , dispuesta según estos polinomios, converge en media hacia cierta función  $\tilde{f}(\theta)$  cuyo módulo es de cuadrado integrable en el intervalo  $(0, 2\pi)$ :

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_0^{\infty} a_j P_j(|f_n(re^{i\theta})|),$$

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cdot \overline{P_j[f_n(re^{i\theta})]} d\theta$$

(la convergencia se entiende en el sentido de convergencia en media). En virtud de la hipótesis

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(re^{i\theta})|^2 d\theta > 0.$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier (respecto del sistema  $\{P_j[f_n(re^{i\theta})]\}$ ) de la función  $f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)$  son iguales a cero:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot \overline{P_j[f_n(re^{i\theta})]} d\theta = 0,$$

de donde se obtiene sucesivamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot \overline{P_j[f_n(re^{i\theta})]} d\theta = 0 \quad (j = 0, 1, \dots),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot f_n(re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot \Lambda_l[F(re^{i\theta}, \zeta)] d\theta = 0$$

y

$$\Lambda_n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot F(re^{i\theta}, \zeta) d\theta \right\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Pero la función que figura entre llaves pertenece a  $\Omega$ . Por ello, como el sistema  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad (relativa), resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)] \cdot F(re^{i\theta}, \zeta) d\theta = 0.$$

Para terminar la demostración, observemos que

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(re^{i\theta}) - \sum_0^n a_j P_j [f_n(re^{i\theta})] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \Lambda \left[ F(re^{i\theta}, \zeta) \right] - \sum_0^n a_j P_j \left[ \Lambda_n \left( F(re^{i\theta}, \zeta) \right) \right] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Lambda}_n [F(re^{i\theta}, \zeta)], \end{aligned}$$

donde  $\{\tilde{\Lambda}_n\}$  es una sucesión de funcionales lineales y la convergencia se entiende en el sentido de convergencia en media.

Pasando a límites en la relación

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)]} \cdot F(re^{i\theta}, \zeta) d\theta \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)]} \cdot \tilde{\Lambda}_n [F(re^{i\theta}, \zeta)] d\theta = 0, \end{aligned}$$

obtenemos definitivamente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - \tilde{f}(\theta)|^2 d\theta = 0,$$

lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, el teorema queda demostrado por completo.

5. El teorema expuesto lo aplicaremos a continuación fundamentalmente como criterio de completitud. Es particularmente importante el caso en que la cápsula lineal cerrada  $O$  es todo el espacio  $E_R$ . Entonces un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$  que es relativamente completo (en  $O$ ), es completo en todo el espacio  $E_R$ . Llamemos a una función  $F(z, \zeta)$  completa (respecto de  $z$ ), si la cápsula lineal cerrada  $O$  es todo el espacio  $E_R$  (ejemplos sencillos muestran que una función que es entera respecto de  $z$  puede no ser entera respecto de  $\zeta$ ). En otras palabras, una función  $F(z, \zeta)$  se llama completa (respecto de  $z$ ), si existe una sucesión de funcionales lineales  $\{\tilde{\Lambda}_n\}$  tal, que la sucesión de las funciones  $\{f_n(z) = \tilde{\Lambda}_n [F(z, \zeta)]\}$  es completa en  $E_R$ , es decir, que la cápsula lineal cerrada de  $\{f_n(z)\}$  coincide con  $E_R$ . Del teorema 1 se deduce que  $F(z, \zeta)$  es completa cuando, y sólo cuando, todo sistema de funcionales  $\{\tilde{\Lambda}_n\}$  que posea la propiedad de unicidad relativa (en  $\Omega$ ), engendra un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$  que es completo en  $E_R$ . En particular,  $F(z, \zeta)$  es completa

cuando, y sólo cuando, la sucesión  $\left\{ \left[ \frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n} \right] \right\}_{\zeta=0}$  es completa en  $E_R$ .

Como ejemplo, examinemos la función  $F(z, \zeta) = f(z + \zeta)$ , donde  $f(z)$  es alguna función entera. Como los sistemas de funcionales  $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\zeta_n)$  (donde el conjunto  $\{\zeta_n\}$  tiene al menos un punto de acumulación finito) y  $\tilde{\Lambda}_n(\varphi) = \varphi^{(n)}(\zeta_0)$  poseen la propiedad de unicidad respecto al conjunto de todas las funciones enteras (que contiene en sí a  $\Omega$ ), para que la función  $F(z, \zeta)$  sea completa es necesario y suficiente que cualquiera de los sistemas de funciones  $\{f(z + \zeta_n)\}$ ,  $\{f^{(n)}(z)\}$  sea completo en  $E_\infty$ . De aquí, en particular, se deduce que  $\{f(z + \zeta_n)\}$  y  $\{f^{(n)}(z)\}$  son simultáneamente completos o no (en  $E_\infty$ ).

6. Teniendo alguna función completa  $F(z, \zeta)$ , podemos engendrar de ella un conjunto infinito de sistemas de funciones completos en  $E_R$ , mediante sucesiones arbitrarias de funcionales lineales que posean la propiedad de unicidad relativa en  $\Omega$ , en particular, mediante sistemas de funcionales que posean la propiedad de unicidad en todo el espacio  $E_R$ . Con tal método de obtención de sistemas completos se puede obtener cualquier sistema dado *a priori* (eligiendo de un modo correspondiente la función  $F(z, \zeta)$  y el sistema de funcionales  $\{\Lambda_n\}$ ). En efecto, si  $\{f_n(z)\}$  es un sistema arbitrario de funciones analíticas en  $|z| < R$ , (no necesariamente completo) entonces, tomando una sucesión creciente cualquiera de números positivos  $\{r_n\}$  que converja hacia  $R$  y haciendo la notación  $\max_{|z| \leq r_n} |f_n(z)| = m_n$ , hacemos:

$$F(z, \zeta) = \sum_0^\infty \frac{f_n(z)}{n!(1+m_n)} \zeta^n.$$

$F(z, \zeta)$  es una función analítica para  $|z| < R$ ,  $|\zeta| < \infty$  (para cada  $z$  fijado,  $|z| < R$ ,  $F(z, \zeta)$ , considerada como función de  $\zeta$  es entera de una clase no superior a  $[1, 1]$ ). En este caso

$$f_n(z) = (1+m_n) \left[ \frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n} \right]_{\zeta=0} = \Lambda_n[F(z, \zeta)] \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

### III

1. Ahora nos dedicaremos a aplicar los resultados de la sección II a los problemas de complitud y unicidad<sup>12)</sup>. Partiremos de una función completa (respecto de  $z$ ) arbitraria  $F(z, \zeta)$  que sea analítica

<sup>12)</sup> Estas proposiciones fueron señaladas parcialmente en el artículo mencionado en la llamada 11).



para  $|z| < R$ ,  $|\zeta| < P$ . Según el teorema 1, es suficiente tomar un sistema arbitrario de funcionales lineales  $\{\Lambda_n\}$  que posea la propiedad de unicidad relativa en  $\Omega$  o *a fortiori* en algún conjunto  $\Omega'$ ,  $\Omega \subseteq \Omega' \subseteq E_p$ , para obtener un sistema de funciones

$$\{f_n(z) = \Lambda_n[F(z, \zeta)]\},$$

completo en  $E_R$ .

Resulta un caso particularmente sencillo al hacer

$$F(z, \zeta) = f(z\zeta),$$

donde  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$  es una función analítica en el recinto  $|z| < R'$ ,  $R' \geq R$ , y tal que  $c_n \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Entonces

$$F(z, \zeta) = \sum_0^{\infty} c_n z^n \zeta^n$$

es una función analítica para  $|z| < R$  y  $|\zeta| < P$ , donde  $P = \frac{R'}{R} \geq 1$  si  $R' < \infty$  y  $P = \infty$  si  $R' = \infty$ . Esta es completa en  $E_R$ , pues el sistema

$$\left\{ \frac{1}{c_n \cdot n!} \left[ \frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n} \right]_{\zeta=0} = z^n \right\}$$

es completo en  $E_R$ .

En el ap. 2 de la sección II se señaló que la clase  $\Omega$  (que consta de todas las funciones de la forma  $L[f(z\zeta)]$ , donde  $L$  es una funcional lineal en el espacio  $E_R$ ) está contenida en el conjunto de las funciones que son analíticas en el círculo cerrado  $|z| \leq P = \frac{R'}{R}$  ( $R' \geq R$ ) si  $R' < \infty$ , y está contenida en el conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$  si  $R' = \infty$  y  $f(z)$  es una función de clase no superior a  $[\rho, \sigma]$ . Por ello, deseando obtener sistemas completos de la forma  $\{\Lambda_n[f(z\zeta)] = \sum_0^{\infty} \alpha_j^{(n)} c_j \zeta^j\}$ , es suficiente tomar por  $\{\Lambda_n\}$  funcionales lineales que posean la propiedad de unicidad respecto de las funciones que son analíticas para  $|z| \leq P$ , respectivamente, respecto de las funciones enteras de clase inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$ , y, en todo caso, es suficiente que  $\{\Lambda_n\}$  posean la propiedad de unicidad respecto de las funciones que son analíticas para  $|z| \leq 1$ .

2. Funcionales  $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\zeta_n)$ . Supongamos primero que el conjunto de puntos  $\{\zeta_n\}$  posee al menos un punto de acumula-

ción en el círculo  $|\xi| < P$ . Entonces el sistema  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio  $E_P$  y, por consiguiente, respecto de cualquiera de sus subconjuntos  $\Omega$ . De aquí resulta el teorema:

**T e o r e m a II<sub>1</sub>.** Si  $F(z, \xi)$  ( $|z| < R$ ,  $|\xi| < P$ ) es completa respecto de  $z$ , entonces el sistema de funciones  $\{F(z, \xi_n)\}$  es completo en  $E_R$  para cualquier sucesión de puntos  $\{\xi_n\}$  que tenga al menos un punto de acumulación en el recinto  $|\xi| < P$ .

Haciendo  $F(z, \xi) = f(z\xi)$ , resulta el teorema:

**T e o r e m a II<sub>2</sub>.** Sea  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$  una función analítica en el recinto  $|z| < R'$  ( $R' \geq R$ ), y supongamos que todos sus coeficientes de Taylor son distintos de cero. Entonces el sistema de funciones  $\{f_n(z\xi_n) = \sum_0^{\infty} c_n (z\xi_n)^n\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$  para cualquier conjunto de puntos  $\{\xi_n\}$  que tenga al menos un punto de acumulación en el círculo cerrado  $|\xi| \leq 1$ .

Aquí está contenido el siguiente teorema de A. O. Gelfond<sup>13)</sup>:

Si  $f(z)$  es analítica en el origen de coordenadas y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ , entonces el sistema  $f(\xi_0 z), f(\xi_1 z), \dots, f(\xi_n z), \dots$  es completo en cada círculo de radio finito.

En efecto, fijemos  $r, 0 < r < \infty$ . Si  $f(z)$  es analítica en el círculo  $|z| < r_0$ , entonces  $f\left(\frac{r_0}{r}z\right)$  es una función analítica en el círculo  $|z| < r$ , y como todos los puntos  $\left\{\xi_n \cdot \frac{r}{r_0}\right\}$ , comenzando desde cierto índice en adelante, están situados en el círculo  $|\xi| < 1$  y tienen en el mismo un punto de acumulación, resulta según el teorema II<sub>2</sub> que el sistema  $\left\{f\left(\xi_n \frac{r}{r_0} \cdot \frac{r_0}{r} z\right) = f(\xi_n z)\right\}$  es completo en el círculo  $|z| < r$ , que es lo que se quería demostrar.

Detengámonos también en el caso en que  $f(z)$  es una función entera de orden finito y de clase no superior a  $[\rho, \sigma]$ . Entonces las funciones  $\varphi(\xi) \in \Omega$  son enteras de clase inferior a  $[\rho, \sigma R^\rho]$ . Por esta razón, los ceros  $\{\xi_n\}$  de las funciones  $\varphi(\xi)$ , si  $\varphi(\xi) \not\equiv 0$ , tienen que satisfacer a la condición  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\xi_n|} < \rho$ , si el orden de  $\varphi(\xi)$  es menor que  $\rho$ , y a la condición  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\xi_n|^\rho} \leq \rho \sigma R^\rho e$ , si su orden es igual a  $\rho$ .

De aquí se tiene el siguiente teorema:

<sup>13)</sup> A. G e l f o n d, Sur les systèmes complètes de fonctions analytiques, Rec. math., 4 (1938), 149—156.

**Teorema II<sub>3</sub>.** Si  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$ ,  $c_n \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), es una función entera de clase no superior a  $[\rho, \sigma]$  ( $0 < \rho < \infty$ ,  $0 < \sigma < \infty$ ), entonces el sistema  $\{f(z \zeta_n)\}$  es completo en el círculo de radio  $R$ , si  $\{\zeta_n\}$  es una sucesión de números complejos, distintos entre sí, que satisface a las condiciones:

$$(a) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} > \rho$$

o bien

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} = \rho \text{ y } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\rho} > \rho \sigma R^\rho e.$$

El teorema II<sub>3</sub> se puede confrontar con el siguiente teorema de A. O. Guelfond<sup>14</sup>.

Si  $\{\zeta_n\}$  son números complejos con el único punto de acumulación en  $\infty$  y existen los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} = \mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\mu} = \nu,$$

entonces, para una función entera  $f(z)$  de orden  $\rho$  y tipo  $\sigma$ , cuyos coeficientes de Taylor sean distintos de cero, el sistema  $\{f(z \zeta_n)\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$  si se cumple la condición

$$\mu > \rho \text{ o bien } \mu = \rho \text{ y } \nu > \rho \sigma \cdot 2^{\rho-1} R^\rho / \int_0^1 \frac{dx}{2-x^\rho}.$$

En comparación con nuestro teorema, aquí se imponen las condiciones de existencia de los límites  $\frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|}$  y  $\frac{n}{|\zeta_n|^\mu}$ . Además, en una

de las desigualdades el factor  $e$  se ha sustituido por  $2^{\rho-1} / \int_0^1 \frac{dx}{2-x^\rho}$ .

Este factor, para valores grandes de  $\rho$  ( $\rho > 1 + \frac{1}{\ln 2}$ ), proporciona una cota peor que a nuestra, y mejor, para valores pequeños de  $\rho$  ( $\rho < \frac{1}{\ln 2}$ ). Respecto de la precisión del teorema II<sub>3</sub>, se pueden hacer las siguientes observaciones. Supongamos que para la función entera  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$  de clase  $[\rho, \sigma]$ , se satisfacen las condiciones del ap. 2 de la sección II: (a')  $c_n \neq 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ); (b') existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[\rho]{|c_n|} = (\rho \sigma)^{\frac{1}{\rho}}$ .

<sup>14</sup>) Véase el trabajo citado en la llamada 13).

Sea ahora  $\{\zeta_n\}$  alguna sucesión de números complejos; hagamos la notación  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} = \mu$ . Si  $\mu > \rho$ , entonces, en virtud del teorema  $\Pi_3$ , el sistema  $\{f(\zeta_n z)\}$  es completo en cualquier círculo. Si  $\mu < \rho$ , podemos construir una función entera  $\Phi_0(\zeta) \neq 0$  de orden  $\mu$  que tenga por ceros los puntos  $\{\zeta_n\}$ . Como ésta figura en el conjunto  $\Omega$  engendrado por  $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$  ( $|z| < R$ ,  $|\zeta| < \infty$ ), el sistema de funcionales  $\{\Lambda_n = \varphi(\zeta_n)\}$  no posee la propiedad de unicidad relativa en  $\Omega$  y, por consiguiente, el sistema de funciones  $\{f(\zeta_n z)\}$  no es completo en ningún círculo  $|z| < R$ . Finalmente, si  $\mu = \rho$ , entonces haciendo  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\mu} = \nu$ , deducimos de nuestro teorema que

el sistema  $\{f(\zeta_n z)\}$  es completo en el círculo  $|z| < \left(\frac{\nu}{\rho \sigma e}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ ; sin embargo, no hay fundamentos para afirmar que él no es completo en un círculo mayor.

En particular, en la teoría de las series de Dirichlet  $\sum_0^\infty a_n e^{\lambda_n z}$  es de interés la cuestión sobre las condiciones de complitud del sistema  $\{e^{\lambda_n z}\}$  en cualquier círculo (o sea, en todo el plano). De los teoremas de esta sección se deduce que tal sistema es completo en cada uno de los siguientes casos:

(a) el conjunto  $\{\lambda_n\}$  tiene al menos un punto de acumulación finito;

$$(b) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\lambda_n|} > 1;$$

$$(c) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\lambda_n|} = 1 \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty.$$

Evidentemente, todos estos casos están comprendidos en uno:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty.$$

Si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln |\lambda_n|} < 1$ , se puede construir una función entera de orden menor que la unidad, no idénticamente nula, con los ceros en los puntos  $\lambda_n$ . Por ello, las funcionales  $\{\Lambda_n\}$  no poseen aquí la propiedad de unicidad con respecto a la clase  $\Omega$  engendrada por la función  $e^{z\zeta}$ ; por consiguiente, el sistema de funciones  $\{e^{z\lambda_n}\}$  no es completo en todo el plano. Si se cumplen las condiciones (a), (b) o (c), entonces éstas también se cumplen después de desprestigiar cualquier número finito de exponentes  $\{\lambda_n\}$ . Por esto, las funciones  $e^{\lambda_0 z}, \dots, e^{\lambda_{n-1} z}$  pertenecen aquí a la cápsula lineal cerrada de las funciones  $e^{\lambda_n z}$ .

$e^{\lambda_n+2z}$ ; en particular, de aquí se deduce<sup>15)</sup> que, cumpliéndose una de las condiciones (a), (b) o (c), existe una serie universal de Dirichlet  $\sum_0^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$  para las funciones enteras (o para las funciones analíticas en un semiplano fijado).

Finalmente, señalaremos una generalización de un teorema más de A. O. Guelfond<sup>13)</sup>, referente al caso en que los puntos  $\{\zeta_n\}$  son números naturales. Para esto nos basaremos en el siguiente caso particular de una generalización del teorema de Carlson<sup>15)</sup>, perteneciente a F. y R. Nevanlinna<sup>16)</sup>.

Sea  $\varphi(\zeta)$  una función entera de clase no superior a  $|\rho, \sigma|$ , y supongamos que los puntos  $\{\zeta_n\}$  son tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\mu} = \nu > 0$ , estando situados todos ellos en un ángulo de magnitud  $2\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\rho}\right)$  con el vértice en el origen de coordenadas. Entonces, si  $\sigma < \pi\nu \cos \rho\alpha$ , la función  $\varphi(\zeta)$  que se anula en los puntos  $\{\zeta_n\}$  es idénticamente nula.

Aplicando este teorema obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

**T e o r e m a II<sub>4</sub>.** Si  $f(z)$  es una función entera de clase no superior a  $|\rho, \sigma|$  y  $\{\zeta_n\}$  es alguna sucesión de números complejos, situados en un ángulo con el vértice en el origen de coordenadas y de magnitud  $2\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ , entonces la sucesión de funciones  $\{f(z_{\zeta_n})\}$  es completa en el círculo  $|z| < R$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\rho} < \frac{\sigma R^\rho}{\pi \cos \alpha}.$$

En particular, para  $\rho = 1$  y  $\zeta_n = n$  ( $\alpha = 0$ ) obtenemos el teorema de A. O. Guelfond<sup>13)</sup>:

Si  $f(z)$  es una función entera de primer orden y tipo  $\sigma$ , el sistema  $\{f(nz)\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$  si  $\sigma < \frac{\pi}{R}$ .

3. Funcionales  $\Lambda_n(\varphi) = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\zeta_0)$ . Supongamos primero que el punto  $\zeta_0$  pertenece al círculo  $|\zeta| < P$ . Entonces el sistema  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad con respecto a todo el espacio  $E_p$  de funciones analíticas para  $|\zeta| < P$ . Por ello, obtenemos el teorema:

<sup>15)</sup> F. Carlson, Sur une classe de séries de Taylor (Thèse), Upsal, 1914, p. 58.

<sup>16)</sup> F. und R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulärer Stelle oder Linie, Acta Soc. Fennicae, t. L. N° 5, 1922.

**T e o r e m a III<sub>1</sub>.** Si  $F(z, \zeta)$  ( $|z| < R$ ,  $|\zeta| < P$ ) es una función analítica, que es completa respecto de  $z$ , entonces el sistema de funciones  $\left\{ \left[ \frac{\partial^n F(z, \zeta)}{b \zeta^n} \right]_{\zeta = \zeta_0} \right\}$  es completo en  $E_R$  para cualquier punto  $\zeta = \zeta_0$  que sea interior al círculo  $|\zeta| < P$ .

Haciendo  $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$  y  $\zeta_0 = 1$ , obtenemos el teorema:

**T e o r e m a III<sub>2</sub>.** Sea  $f(z)$  una función analítica en el recinto  $|z| \leq R'$ ,  $R' \geq R$ , y supongamos que todos sus coeficientes de Taylor son distintos de cero. Entonces el sistema  $\{z^n f^{(n)}(z)\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$ .

Este teorema lo demostró de otro modo I. I. Ibraguimov<sup>17</sup>.

Examinemos también aquí las funcionales de la forma:

$$\Lambda'_n(\varphi) = c_0 \frac{f^{(n+p)}(0)}{(n+p)!} + c_1 \frac{f^{(n+p-1)}(0)}{(n+p-1)!} + \dots + c_p \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

donde  $p$  es un número natural y todos los ceros del polinomio  $c_0 + c_1 z + \dots + c_p z^p$  no superan en valor absoluto a 1. Se ve fácilmente que las funcionales  $\{\Lambda'_n\}$  poseen la propiedad de unicidad con respecto a las funciones analíticas en el círculo unidad cerrado. En efecto, de  $\Lambda'_n(\varphi) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , se deduce, evidentemente,

que  $\varphi(\zeta) = \frac{d_0 + \dots + d_{p-1} \zeta^{p-1}}{c_0 + \dots + c_p \zeta^p}$  es una función, la cual, debido a la hipótesis respecto de  $c_0 + \dots + c_p \zeta^p$ , puede ser analítica en el círculo unidad cerrado solamente cuando es idénticamente igual a cero. De aquí resulta que para toda función  $f(z)$  que sea analítica en el círculo  $|z| < R$  y cuyos coeficientes de Taylor sean distintos de cero, el sistema  $\left\{ \frac{c_0}{(n+p)!} z^{n+p} f^{(n+p)}(z) + \dots + \frac{c_p z^n}{n!} f^{(n)}(z) \right\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$ . Exactamente igual, el sistema de funcionales

$$\Lambda''_n(\varphi) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} - \alpha_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

donde  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}|} \geq 1$ , posee la propiedad de unicidad en el círculo unidad cerrado. De aquí, similarmente a lo anterior, se deduce, en las mismas condiciones respecto de  $f(z)$ , que el sistema

$$\left\{ \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) - \alpha_n \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(z) \right\}$$

es completo en el círculo  $|z| < R$ .

<sup>17</sup>) I. I. I b r a g u i m o v, Respecto de la complitud de ciertos sistemas de funciones analíticas (И. И. И б р а г и м о в, О полноте некоторых систем аналитических функций, Известия АН СССР, серия матем., 1939, стр. 553—558).

4. Funcionales  $\Lambda_n(\varphi) = \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\zeta_n)$ . En virtud del conocido resultado de V. L. Goncharov<sup>18)</sup>, este sistema de funcionales posee la propiedad de unicidad en todo el espacio  $E_P$ , si  $\{\zeta_n\}$  tiene un punto de acumulación  $\zeta_0$  en el interior del círculo  $|\zeta| < P$  y si, además,  $\sum_0^{\infty} |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$ . Por esta razón, obtenemos el teorema:

**Teorema IV<sub>1</sub>.** Si  $F(z, \zeta)$  ( $|z| < R$ ,  $|\zeta| < P$ ) es una función analítica, completa respecto de  $z$ , entonces el sistema de funciones  $\left\{ \left[ \frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n} \right] \right\}_{\zeta = \zeta_n}$  es completo en  $E_P$ , si  $\{\zeta_n\}$  converge hacia un punto  $\zeta_0$ ,  $|\zeta_0| < P$ , y si, además,  $\sum_0^{\infty} |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$ .

Siendo  $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ , basándose en las indicaciones del ap. 1 de la presente sección, podemos afirmar que se verifica el siguiente teorema:

**Teorema IV<sub>2</sub>.** Si  $f(z)$  es una función analítica en el círculo  $|z| < R'$  ( $R' \geq R$ ), y todos los coeficientes de Taylor de  $f(z)$  son distintos de cero, entonces el sistema de funciones  $\{z^n f^{(n)}(z\zeta_n)\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$  para cualquier sucesión  $\{\zeta_n\}$  que converja hacia  $\zeta_0$ ,  $|\zeta_0| \leq 1$ , de tal modo que  $\sum_0^{\infty} |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$ .

Suponiendo que  $f(z)$  es una función entera de clase no superior a  $[1, \sigma]$ , podemos afirmar que las funciones correspondientes  $\varphi(\zeta)$ ,  $\varphi(\zeta) \in \Omega$  son enteras de clase inferior a  $[1, \sigma R]$ .

Es sabido<sup>19)</sup> que si una función entera  $\varphi(\zeta)$  de clase inferior a  $[1, \ln 2]$  satisface a las condiciones  $\varphi^{(n)}(\zeta_n) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), entonces  $\varphi(\zeta) \equiv 0$  (este resultado, a pesar de no ser definitivo, no puede mejorarse cualitativamente, pues  $\cos \frac{\pi}{4}(z+1)$

es una función de clase  $\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$ , para la cual cada una de las derivadas tiene un cero en la circunferencia unidad). Por ello, el sistema de funcionales lineales  $\{\Lambda_n(\varphi) = \varphi^n(\zeta_n)\}$ ,  $|\zeta_n| \leq 1$  engendrado por

$F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ , siendo  $R < \frac{\ln 2}{\sigma}$ , posee la propiedad de unicidad respecto de  $\Omega$ . De aquí resulta:

<sup>18)</sup> V. L. Goncharov, Recherches sur les dérivées successives de fonctions analytiques (Thèse), 1930.

<sup>19)</sup> J. M. Whittaker, Interpolatory function theory, Cambridge at the University press, 1935. A J. M. Whittaker y también Takenaka y Kakeya (trabajos de los años 1931-32) solamente les pertenece la mejoración de la constante, en el teorema establecido en Thèse por V. L. Goncharov, de  $\frac{1}{2e}$  a  $\ln 2$ .

**Teorema IV<sub>3</sub>.** Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  es una función entera de clase no superior a  $|\sigma|$  ( $0 < \sigma < \infty$ ) cuyos coeficientes de Taylor son distintos de cero, entonces el sistema de funciones  $\{z^n f^{(n)}(z \zeta_n)\}$ ,  $|\zeta_n| \leq 1$ , es completo en el círculo  $|z| < \frac{\ln 2}{\sigma}$ . (La constante  $\ln 2$  no puede ser sustituida aquí por una constante no menor que  $\frac{\pi}{4}$ .)

En el caso particular en que  $f(z) = e^z$ , obtenemos de aquí el teorema de Ibraguimov<sup>17)</sup> sobre la complitud del sistema de funciones

$$\{z^n e^{z \zeta_n}\}, \quad |\zeta_n| \leq 1,$$

en el círculo  $|z| < \ln 2$ .

$$5. \text{ Funcionales } \Lambda_n(\varphi) = \int_{\zeta}^{\zeta_0} (n) \varphi(z) dz = \varphi^{(n)}(\zeta_0) = \frac{1}{(n-1)!} \times \\ \times \int_0^{\zeta_0} \varphi(z) (\zeta_0 - z)^{n-1} dz \quad (n > 0).$$

Si  $\Lambda_n(\varphi) = 0$  y  $\zeta_0 \neq 0$  pertenece al recinto de analiticidad de  $\varphi(\zeta)$ , entonces  $\varphi(\zeta) \equiv 0$ . La manera más fácil de comprobar esto es observar que de  $\Lambda_n(\varphi) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) se deduce que  $\int_0^{\zeta_0} \varphi(z) z^n dz = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). De aquí, integrando a lo largo del rayo rectilíneo que une 0 con  $\zeta_0$  y considerando las partes real e imaginaria de  $\varphi(\rho e^{i\theta})$  como funciones de  $\rho$ :  $u(\rho)$  y  $v(\rho)$ , hallamos:

$$\int_0^{r_0} u(\rho) \rho^n d\rho = \int_0^{r_0} v(\rho) \rho^n d\rho = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

De aquí que  $u(\rho) = v(\rho) = 0$ , es decir,  $\varphi(\zeta) = 0$  a lo largo del segmento rectilíneo y, por lo tanto,  $\varphi(\zeta) \equiv 0$ . Por esto, obtenemos el teorema:

**Teorema V<sub>4</sub>.** Si  $F(z, \zeta)$  ( $|z| < R$ ,  $|\zeta| < P$ ) es una función analítica que es completa respecto de  $z$ , entonces el sistema

$$\left\{ \int_0^{\zeta_0} (n) F(z, \zeta) d\zeta = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\zeta_0} F(z, \zeta) (\zeta_0 - \zeta)^{n-1} d\zeta \right\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

es completo en el círculo  $|z| < R$  para cualquier  $|\zeta_0| < R$ .

En particular, tomando  $F(z, \zeta) = f(\zeta z)$  y  $\zeta_0 = 1$ , resulta el teorema:



**Teorema V<sub>2</sub>.** Si  $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n$  es una función analítica para  $|z| < R'$ ,  $R' \geq R$ , cuyos coeficientes de Taylor son distintos de cero, entonces el sistema

$$\left\{ z^{-n} \int_0^z f(z) d\zeta = \frac{z^{-n}}{(n-1)!} \int_0^z f(\zeta) (z-\zeta)^{n-1} d\zeta \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

es completo en  $E_R$ .

6. El teorema 1 de por sí no resuelve todavía el problema de la complitud ni tampoco el de la unicidad. Su importancia consiste en que permite pasar inmediatamente del teorema de la complitud a los teoremas de unicidad y viceversa. En lo que respecta al propio teorema de complitud, aquí resultan ser útiles los teoremas que señalan los criterios cuyo cumplimiento hace que, los sistemas que en cierto sentido son próximos a los completos, resulten completos. Sin detenerse en problemas generales, utilizaremos el siguiente resultado especial de Boas<sup>20</sup>:

Si las funciones  $\{h_n(z)\}$  ( $h_n(0) = 0$ ) pertenecen a la clase  $H_2$ <sup>21</sup>) en el círculo  $|z| < R$  y poseen una mayorante (en el sentido de Poincaré) de la misma clase  $h(z)$  ( $h(0) = 0$ ) que satisface además a la condición  $|h(z)| \leq 1$ ,  $|z| < R$ , entonces el sistema de funciones  $\{z^n |1 + h_n(z)|\}$  es completo en  $E_R$ .

Siguiendo a Boas<sup>22</sup>), examinemos dos ejemplos de aplicación de este teorema:

(a) Sea  $h_n(z) = e^{z\zeta_n} - 1$ , donde  $|\zeta_n| \leq 1$ . Entonces  $h_n(z) \leq h(z) = e^z - 1$ , y como  $h(\ln 2) = 1$ , resulta que el sistema  $\{z^n e^{z\zeta_n}\}$  es completo en el círculo  $|z| < \ln 2$  (compárese con Ibraǵimov<sup>17</sup>)).

(b) Sea

$$h_n(z) = \frac{e^{z\zeta'_n} - e^{z\zeta''_n}}{z(\zeta'_n - \zeta''_n)} - 1 \quad (\zeta'_n \neq \zeta''_n, |\zeta'_n| \leq 1, |\zeta''_n| \leq 1);$$

<sup>20</sup>) R. P. Boas, General expansion theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 26 (1940), 139-149. Véase también <sup>6</sup>) (el primero de los dos artículos) y <sup>5</sup>).

<sup>21</sup>) Según la definición, una función  $f(z)$ , analítica para  $|z| < R$ , pertenece a la clase  $H_2$ , si, y sólo si,

$$\sup_{0 < r < R} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right] < \infty$$

<sup>22</sup>) El artículo citado en la llamada <sup>20</sup>) (ejemplo (a)) y, además, R. P. Boas, Univalent derivatives of entire functions, Duke Math. J., 6, (1940), 719-721 (ejemplo (b)).

entonces

$$h_n(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-1} |(\zeta'_n)^j - (\zeta''_n)^j|}{j!} \ll \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = e^z - 1$$

y, por consiguiente, el sistema  $\left\{ z^{n-1} \frac{e^{z\zeta'_n} - e^{z\zeta''_n}}{\zeta'_n - \zeta''_n} \right\}$  es completo en el círculo  $|z| < \ln 2$ .

7. Del ap. 6 mediante el teorema I se deducen los teoremas respectivos de unicidad.

A saber, tomando  $F(z, \zeta) = e^{z\zeta}$ ,  $|z| < R$ ,  $|\zeta| < \infty$ , observamos que  $z^n e^{z\zeta_n} = \Lambda_n(e^{z\zeta})$ , donde  $\Lambda_n(\varphi) = \varphi^{(n)}(\zeta_n)$ , y como según el ap. 6 el sistema  $\{z^n e^{z\zeta_n}\}$  es completo en el círculo  $|z| < R = \ln 2$ , resulta que el sistema de funcionales  $\{\Lambda_n\}$  posee la propiedad de unicidad respecto del conjunto  $\Omega$  formado aquí por todas las funciones enteras de clase inferior a  $[1, \ln 2]$  (véase el ap. 2 de la sección II). En resumen, si para una función entera  $\varphi(\zeta)$  de clase inferior a  $[1, \ln 2]$  se tiene  $\varphi^{(n)}(\zeta_n) = 0$ , donde  $|\zeta_n| \leq 1$ , entonces  $\varphi(\zeta) \equiv 0$  (compárese con el ap. 4 de la sección III).

Exactamente igual, observando que  $z^{n-1} \frac{e^{z\zeta'_n} - e^{z\zeta''_n}}{\zeta'_n - \zeta''_n} = \tilde{\Lambda}_n(e^{z\zeta})$ , donde

$$\tilde{\Lambda}_n(\varphi) = \frac{\varphi^{(n-1)}(\zeta'_n) - \varphi^{(n-1)}(\zeta''_n)}{\zeta'_n - \zeta''_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

y  $\varphi^{(n-1)}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta$ , sacamos la conclusión de que el sistema de funcionales  $\{\tilde{\Lambda}_n\}$  también posee la propiedad de unicidad respecto al conjunto de las funciones enteras de clase inferior a  $[1, \ln 2]$ . Esta proposición puede enunciarse también del modo siguiente<sup>23)</sup>.

Toda función trascendente entera de clase inferior a  $[1, \ln 2]$  posee una subsucesión de derivadas que son univalentes en el círculo unidad.

En efecto, suponiendo lo contrario tendríamos que sacar la conclusión de que comenzando desde cierto  $n$  en adelante,  $n \geq N - 1$ , se cumplen relaciones de la forma  $\tilde{\Lambda}_n = 0$  (para una elección adecuada de los pares de puntos  $\zeta'_n, \zeta''_n$ ,  $|\zeta'_n| \leq 1$ ,  $|\zeta''_n| \leq 1$ ). Pero  $\varphi^{(N)}(\zeta)$  es una función entera de clase inferior a  $[1, \ln 2]$ , si  $\varphi(\zeta)$  es una función entera de clase inferior a  $[1, \ln 2]$ . De aquí que

<sup>23)</sup> El segundo de los artículos mencionados en la llamada 22).

$\varphi^{(n)}(\zeta) \equiv 0$  y  $\varphi(\zeta)$  es un polinomio, en contra de la hipótesis. Obsérvese que en el último teorema la constante  $\ln 2$  no puede ser sustituida por una constante que supere a  $\frac{\pi}{2}$ , pues las derivadas de la función  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)z$ ,  $\varepsilon > 0$  perteneciente a la clase  $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ , no son univalentes en el círculo unidad.

8. Del teorema de unicidad del precedente apartado, mediante el teorema 1, se pueden obtener teoremas de complitud más generales que los teoremas del ap. 6. (uno de tales teoremas más generales se expone en el ap. 4 de la sección III). Los teoremas generalizados de complitud, mediante el mismo teorema I, proporcionarán a su vez una generalización de los teoremas de unicidad del ap. 7. No obstante, preferimos hacer los razonamientos expuestos de una forma más

general. Sean  $h_n(z) = \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^j$  funciones enteras de clase inferior

a  $[1, \infty]$ , que tiene la mayorante  $h(z) = \sum_1^{\infty} h_j z^j$  (no obligatoriamente

entera), y supongamos que  $|h(z)| < 1$  para  $|z| < R$ . Entonces, según el teorema del ap. 6, sección III, el sistema  $\{z^n + z^n h_n(z) =$

$= z^n + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+j}\}$  es completo en el círculo  $|z| < R$ . Examinemos

las expresiones  $\Lambda_{\zeta}^{(n)}(\varphi) = \varphi^{(n)}(0) + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} \varphi^{(n+j)}(0)$ . Escribiendo  $\Lambda_{\zeta}^{(n)}(\varphi)$

en la forma  $\Lambda_{\zeta}^{(n)}(\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{\eta_j^{(n)} \varphi^{(j)}(0)}{j!}$  y observando que para

$j > n \sqrt[j]{|\eta_j^{(n)}|} = \sqrt[j]{|h_{j-1}^{(n)}| \cdot j!} < c_n$  debido a que  $j \sqrt[j]{|h_j^{(n)}|} < c_n$  (lo cual a su vez significa que  $h_n(z)$  pertenece a una clase inferior a  $[1, \infty]$ ), sacamos la conclusión de que  $\Lambda_{\zeta}^{(n)}(\varphi)$  son funcionales

lineales en el espacio de las funciones enteras. Pero  $z^n + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+1} = \Lambda_{\zeta}^{(n)}(e^{z\zeta})$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), y como este sistema de funciones es completo en el círculo  $|z| < R$ , sacamos la conclusión de que el sistema de funcionales

$$\{\Lambda_{\zeta}^{(n)}(\varphi) = \varphi^{(n)}(0) + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} \varphi^{(n+1)}(0)\}$$

posee la propiedad de unicidad respecto del conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a  $[1, R]$ . Supongamos ahora que

$f(z)$  es una función entera arbitraria de clase no superior a  $[1, \sigma]$ , cuyos coeficientes de Taylor son todos distintos de cero. Entonces, haciendo  $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ ,  $|z| < \frac{R}{\sigma}$ ,  $|\zeta| < \infty$ , podemos afirmar que todas las funciones que pertenecen al conjunto correspondiente  $\Omega$ , son enteras de clase inferior a  $[1, R]$ . Por consiguiente, las funcionales  $\tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)}(\varphi)$  poseen la propiedad de unicidad respecto de  $\Omega$ , de donde se deduce que el sistema de funciones

$$\left\{ \tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)} [f(z\zeta)] = z^n f^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} f^{(n+j)}(0) z^{n+j} \right\}$$

es completo en el círculo  $|z| < \frac{R}{\sigma}$ . Es obvio que, incluso en el caso particular en que  $\sigma = 1$ , este sistema es más general que el sistema

$$z^n + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+j},$$

y en general no tiene que considerarse como «próximo» a  $\{z^n\}$ . Pero el sistema de funciones  $\{\tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)} [f(z\zeta)]\}$  se engendra por la función  $z^{\zeta}$  mediante las funcionales

$$\left\{ \tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)}(\varphi) = f^{(n)}(0) \varphi^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} f^{(n+j)}(0) \varphi^{n+j}(0) \right\}.$$

De la completitud que hemos establecido del sistema de funciones para  $|z| < \frac{R}{\sigma}$  se deduce que el sistema de funcionales  $\{\tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)}(\varphi)\}$  posee la propiedad de unicidad respecto a todas las funciones enteras de clase inferior a  $[1, \sigma]$ . De nuevo, esto es un teorema de unicidad más fuerte que el establecido anteriormente para las funcionales  $\{\tilde{\Lambda}_{\zeta}^{(n)}(\varphi)\}$ . Obsérvese que la aplicación ulterior de los mismos razonamientos no da nada nuevo. En efecto, suponiendo para precisar que  $f(z)$  es una función de clase  $[1, 1]$  ( $\sigma = 1$ ), habíamos pasado de los coeficientes de la forma  $f^{(n)}(0)$  en las expresiones de los sistemas de funciones y funcionales obtenidos a los coeficientes de la forma  $|f^{(n)}(0)|^2$ ,  $|f^{(n)}(0)|^3$ , . . . Pero estos últimos, a su vez, pueden considerarse como los valores de las derivadas en el origen de coordenadas de ciertas funciones de la misma clase  $[1, 1]$ .

## IV

1. Sea  $\{f_n(z)\}$  un sistema de funciones pertenecientes a  $E_R$ :

$$\{f_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_n^{(j)} z^j\} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Si  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo, se cumplen las relaciones

$$z^j = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_{n,0}^{(j)} f_0(z) + \dots + \alpha_{n,n}^{(j)} f_n(z)] \quad (j=0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Además, según el ap. 5 de la sección I (véase la llamada <sup>b)</sup> se puede suponer que la sucesión  $\{\alpha_{n,k}^{(j)}\}$  es convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k}^{(j)} = \alpha_k^{(j)} \quad (k, j=0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Poniendo (1) en la relación (2), resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha_{n,0}^{(j)} \alpha_0^{(k)} + \dots + \alpha_{n,n}^{(j)} \alpha_n^{(k)}] = \delta_{jk} \quad (j, k=0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

donde  $\delta_{jk}=0$  para  $j \neq k$  y  $\delta_{jj}=1$ . En particular, si en lugar de las relaciones (2) se cumplen los desarrollos en serie

$$z^j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(j)} f_n(z) \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (2')$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(j)} \alpha_n^{(k)} = \delta_{jk} \quad (j, k=0, 1, 2, \dots). \quad (4')$$

2. **Teorema VI<sub>1</sub>.** Para que un sistema de funciones (1), que es completo en el espacio  $E_R$ , sea un sistema de i.l.r., es necesario y suficiente que al menos un sistema de números  $\{\alpha_k^{(j)}\}$ , determinados por las relaciones (2) y (3), satisfaga a las condiciones:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[2]{|\alpha_n^{(j)}|} = \rho_n < R \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_n^{(j)} \alpha_m^{(j)} = \delta_{nm} \quad (n, m=0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

**Demostración.** Supongamos que el sistema  $\{f_n(z)\}$  es de i.l.r. Entonces existe un sistema de funcionales lineales  $\{L_n\}$  que es biortogonal con  $\{f_n(z)\}$ . Por esto

$$\alpha_k^{(j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k}^{(j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_k [\alpha_{n,0}^{(j)} u_0(z) + \dots + \alpha_{n,n}^{(j)} u_n(z)] = L_k(z^j)$$

y, por consiguiente, en virtud del ap. 2 de la sección I,  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[2]{|\alpha_k^{(j)}|} < R$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Así, pues, la condición (5) es

consecuencia de la i.l.r del sistema. Pero ahora, en caso de i.l.r.

$$L_k [f_n(z)] = \lim_{n \rightarrow \infty} L_h \left\{ \sum_{j=0}^n a_n^{(j)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_n^{(j)} L_h(z^j) = \delta_{kn},$$

y como  $L_h(z^j) = \alpha_h^{(j)}$ , de aquí se deducen las relaciones (6).

Demostremos ahora que las condiciones (5) y (6) son suficientes para la i.l.r. del sistema (1). Sea  $f(z) = \sum_0^{\infty} a_j z^j$  un elemento arbitrario de  $E_R$  ( $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|} \leq R$ ). Definamos las funcionales  $\{L_n\}$  haciendo

$$L_n(f) = \sum_0^{\infty} a_j \alpha_n^{(j)} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Debido a las condiciones (5),  $L_n(f)$  son funcionales lineales en  $E_R$  (ap. 2.1).

No queda más que observar que, en virtud de las condiciones (6),

$$L_h[f_n(z)] = \sum_0^{\infty} a_n^{(j)} \alpha_h^{(j)} = \delta_{nh}.$$

De aquí, según el ap. 6 de la sección I, se deduce que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema de i.l.r.

3. Para que el estudio sea completo tenemos que convencernos también de que las condiciones (5) y (6), tomadas por separado, no son suficientes para que el sistema  $\{f_n(z)\}$  sea de i.l.r. Obsérvese primero que siempre se cumple la condición (6), si  $f_n(z)$  es un polinomio de grado  $n$  (¡exactamente!); además, los coeficientes  $\alpha_h^{(j)}$  se determinan mediante la resolución sucesiva de las ecuaciones (1) respecto de  $z^j$ . En efecto, si

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^n a_n^{(j)} z^j \quad (n=0, 1, 2, \dots; a_n^{(n)} \neq 0)$$

y

$$z^j = \sum_{k=0}^j \alpha_k^{(j)} f_k(z),$$

se tiene la identidad

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{h=0}^j a_n^{(j)} \alpha_h^{(j)} f_h(z) = \sum_{h=0}^n f_h(z) \sum_{j=h}^n a_n^{(j)} \alpha_h^{(j)},$$

de donde, en virtud de la independencia lineal de  $\{f_n(z)\}$ , la cual es consecuencia de la hipótesis hecha, resulta:

$$\sum_{j=h}^n a_n^{(j)} \alpha_h^{(j)} = \sum_0^{\infty} a_n^{(j)} \alpha_h^{(j)} = \delta_{nh}.$$

es decir, obtenemos las condiciones (6), a pesar de que pueden no cumplirse las condiciones (5). Señalemos, en particular, el teorema que de aquí se desprende:

**T e o r e m a VI<sub>2</sub>.** Para que un sistema de polinomios  $f_n(z) = \sum_{j=0}^n a_n^{(j)} z^j$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $a_n^{(j)} \neq 0$ ) sea un sistema de i.l.r. en  $E_n$ , es necesario y suficiente que los coeficientes  $\{\alpha_n^{(j)}\}$  determinados por las relaciones  $z^j = \sum_{h=0}^j \alpha_h^{(j)} f_h(z)$ , satisfagan a las condiciones:

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|\alpha_h^{(j)}|} = \rho_h < R \quad (h = 0, 1, 2, \dots).$$

4. Demostremos ahora que las condiciones (5) solas no son suficientes para la i.l.r. de las funciones  $\{f_n(z)\}$ , si éstas no son polinomios cuyos grados coinciden exactamente con el índice  $n$ . Esta afirmación conserva su valor también cuando se suponga que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema de funciones linealmente independiente que no admite desarrollos no triviales del cero. Resulta un ejemplo correspondiente (para el espacio  $E_1$ ) haciendo

$$f_n(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Este sistema es completo, pues haciendo  $\xi = \frac{1+z}{1-z}$  se obtiene el sistema  $\{\xi^n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), el cual es completo en el recinto transformado  $\operatorname{Re} \xi > 0$ . La independencia lineal del sistema  $\{f_n(z)\}$  y la carencia de desarrollos no triviales del cero son evidentes. Sin embargo, considerando las funciones racionales de la forma  $\frac{\xi^p}{(1+\xi)^q}$  y aproximándolas de un modo correspondiente mediante polinomios de  $\xi$  en el interior del recinto  $\operatorname{Re} \xi > -1$ , nos convencemos de que existe una sucesión de polinomios que converge hacia cero en el interior del recinto  $\operatorname{Re} \xi > 0$ , y cuyos coeficientes de una potencia fijada de  $\xi$ , precisamente de la potencia menor  $p$ -ésima, son iguales a 1. De aquí, volviendo a  $z$  mediante  $\xi = \frac{1+z}{1-z}$ , sacamos la conclusión que cada función  $f_n(z)$  pertenece a la cápsula lineal cerrada de todas las funciones que la siguen.

Se puede demostrar fácilmente que en tal caso se pueden satisfacer las relaciones (2) y (3) por unos números completamente arbitrarios  $\alpha_n^{(j)}$ , en particular, por tales números que cumplan las condiciones (5). Por lo tanto, existe un sistema de funciones linealmente independientes  $\{f_n(z)\}$ , que no admite desarrollos no triviales del cero, que satisface a las condiciones (5) y que, sin embargo, no es un sistema de i.l.r.

Obsérvese que de la propiedad del sistema de funciones  $\left\{ \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n \right\}$ , señalado aquí, se deduce<sup>5)</sup> la existencia de una serie universal de la forma  $\sum_0^{\infty} A_n \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^n$  para las funciones que son analíticas en el círculo unidad, a lo que es lo mismo, la existencia de una serie de potencias universal de la forma  $\sum_0^{\infty} A_n \zeta^n$  para las funciones que son analíticas en el semiplano  $\text{Re } \zeta > 0$ .

5. Sea  $\{f_n(z)\}$  un sistema de funciones analíticas que es completo en el espacio  $E_R$  de las funciones analíticas en el recinto  $|z| < R$ . Supongamos que es un sistema de i.l.r. Entonces existe un sistema biortogonal con él de funcionales lineales  $\{L_n\}$ . Si este último posee la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio  $E_R$ , entonces  $\{f_n(z)\}$  representa una base en el sentido amplio para  $E_R$ . Finalmente, si la serie  $\sum_0^{\infty} L_n(f) \cdot f_n(z)$  es convergente para cualquier función  $f(z) \in E_R$ , entonces  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$  (en el sentido estricto) (véase el ap. 10 de la sección 1).

Ejemplos. Interpolación (esquema lineal). Sea  $c_1, c_2, \dots$  una sucesión de puntos del plano complejo. Consideremos la sucesión de polinomios  $P_0 = 1, P_n(z) = (z - c_1) \dots (z - c_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); éstos son los polinomios de interpolación con los puntos de interpolación  $\{c_n\}$ . Es obvio que el sistema  $\{P_n(z)\}$  es completo en cualquier círculo  $|z| < R$ . Sin embargo, para la i.l.r. del sistema  $\{P_n(z)\}$  es necesario imponer a  $\{c_n\}$  unas condiciones complementarias. Precisando, para que  $\{P_n(z)\}$  sea un sistema de i.l.r. en el círculo  $|z| < R$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$|c_n| < R \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Para la demostración, consideremos las identidades

$$z^n = \sum_0^n P_j(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_j} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

De éstas deducimos que la condición necesaria y suficiente para la i.l.r. de los polinomios  $\{P_j(z)\}$  consiste en lo siguiente (véase el teorema VI<sub>2</sub> de la presente sección):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho_j} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \right| } < R \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$



Pero esta condición se satisface cuando, y sólo cuando,  $|c_n| < R$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). En efecto, sea  $|c_n| < R$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); entonces para  $j$  fijado, haciendo la notación  $\max(|c_1|, \dots, |c_{j+1}|) = r < R$ , se tiene:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho > r} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \right| = \left| \sum_{n \neq 0} \frac{A}{a^\alpha} \left(\frac{r}{\alpha}\right) a^n \right| < R_n^{j+1} r^n,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \right|} \leq r < R \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

es decir,  $\{P_n(z)\}$  es un sistema de i.l.r. en el círculo  $|z| < R$ .

Supongamos ahora que no se cumple la condición  $|c_n| < R$  para todos los  $n$ , y sea  $c_{j+1}$  el número de menor índice que satisface a la desigualdad  $|c_{j+1}| \geq R$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{j+1}(\zeta)} &= \frac{A_0}{\zeta - c_{j+1}} + \sum_{\alpha \neq c_{j+1}} \frac{A}{(\zeta - a)^{\alpha+1}} \quad (A_0 \neq 0), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho > |c_{j+1}|} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} &= \left| A_0 c_{j+1}^n + \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \neq c_{j+1}}} \frac{A}{a^\alpha} \left(\frac{n}{\alpha}\right) a^n \right| = \\ &= |A_0| \cdot |c_{j+1}|^n \left| 1 + \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \neq c_{j+1}}} \frac{A}{A_0 a^\alpha} \left(\frac{n}{\alpha}\right) \left(\frac{a}{c_{j+1}}\right)^\alpha \right|, \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^n d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \right|} = |c_{j+1}| \geq R,$$

y el sistema  $\{P_n(z)\}$  no puede ser de i.l.r. en el círculo  $|z| < R$ .

Suponiendo cumplidas las condiciones  $|c_n| < R$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), podemos escribir las funcionales lineales  $\{L_n\}$  que son biortogonales con los polinomios  $\{P_n(z)\}$  en la forma

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{R < |\zeta| = \rho > \max\{|c_1|, \dots, |c_{n+1}|\}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)}.$$

Por lo general,  $\{L_n\}$  no poseen la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio  $E_R$ , es decir, que el sistema completo y de i.l.r. de los polinomios  $\{P_n(z)\}$  no forma una base de  $E_R$  (en el sentido amplio).

Demostremos que para que el sistema  $\{P_n(z)\}$  forme una base de  $E_R$  (en el sentido amplio), es necesario y suficiente que, cumpliéndose

dose las condiciones anteriores, al menos un punto de acumulación de  $\{c_n\}$  pertenezca al círculo  $|z| < R$ . En efecto, sea

$$L_n(f) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Como  $L_0(f) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - c_1} = f(c_1)$ , de  $L_0(f) = 0$  se deduce que  $\frac{f(z)}{P_1(z)}$  es una función analítica en el círculo  $|z| < R$ . Supongamos que ya se ha demostrado que  $\frac{f(z)}{P_n(z)} = \varphi_n(z)$  es una función analítica en el círculo  $|z| < R$ ; entonces de

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{P_n(\zeta)(\zeta - c_{n+1})} = 0$$

se deduce que  $\varphi_n(c_{n+1}) = 0$ , es decir, que  $\frac{f(z)}{P_n(z)}$  es una función analítica en el círculo  $|z| < R$ . En otras palabras, las ecuaciones  $L_n(f) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) significan que  $c_1, c_2, \dots$  son ceros de la función  $f(z)$  (cada uno de ellos de orden igual a su orden de multiplicidad en la sucesión  $\{c_n\}$ ). Por esta razón,  $f(z) \equiv 0$  si la sucesión  $\{c_n\}$  posee al menos un punto de acumulación en el interior del círculo  $|z| < R$ ; si tal punto de acumulación no existe, entonces siempre se puede construir una función analítica  $f(z) \not\equiv 0$  que satisfaga a las condiciones  $L_n(f) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Así, pues, el sistema  $\{P_n(z)\}$  representa una base en el sentido amplio de la palabra cuando, y sólo cuando, todos los puntos  $\{c_n\}$  pertenecen al círculo  $|z| < R$ , y al menos un punto de acumulación de la sucesión también pertenece a este círculo. Sin embargo, cumpliéndose todas estas condiciones el sistema  $\{P_n(z)\}$  puede no ser una base, es decir, las series  $\sum_0^\infty L_n(f) \cdot P_n(z)$  pueden no ser convergentes. Por ejemplo, si  $c_n = \alpha$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $0 < \alpha < R$ , entonces  $L_n(f) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$  y para  $f(z) = \frac{1}{R-z}$  obtenemos la serie

$\sum_0^\infty \frac{(z-\alpha)^n}{(R-\alpha)^{n+1}}$ , la cual no sólo no es convergente fuera del círculo  $|z - \alpha| < |R - \alpha|$ , sino que tampoco posee fuera de este círculo ninguna subsucesión de sumas parciales que sea convergente. Siendo  $c_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), resulta una base cuando  $P_n(z) = z^n$  y la serie de interpolación

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)} P_n(z)$$

se convierte en la serie de Taylor.

Supongamos que los puntos de interpolación  $\{c_n\}$  satisfacen a la condición  $|c_n| \leq r < R$ , es decir, que todos los puntos junto con los puntos de acumulación de esta sucesión están situados en el interior del círculo  $|z| < R$ . Según lo anterior,  $\{P_n(z)\}$  representa entonces una base en el sentido amplio para  $E_R$ . Para obtener las condiciones según las cuales  $\{P_n(z)\}$  es una base de  $E_R$ , no queda más que exigir

la convergencia de la serie de interpolación  $\sum_0^{\infty} L_n(f) \cdot P_n(z)$  para cualquier función  $f(z) \in E_R$ . De los teoremas generales de la teoría de interpolación se deduce<sup>24)</sup> que esto ocurrirá cuando, y sólo cuando,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = z$  uniformemente en todo conjunto cerrado y acotado que sea exterior a la circunferencia  $|z| = r$ ; además, como se trata de las condiciones suficientes, podemos limitarnos a exigir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z| \quad \text{para } |z| > r$$

(sin la condición de uniformidad). En particular, es suficiente suponer que  $c_n \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$  o que los puntos  $\{c_n\}$  estén uniformemente distribuidos en la circunferencia  $|z| = |r| < R$  o sea, estén situados de tal modo que la cantidad de puntos  $c_1, c_2, \dots, c_n$  que caen en un arco arbitrario  $0 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq 2\pi$  de esta circunferencia sea asintóticamente igual a  $\frac{\beta - \alpha}{2\pi} n$ <sup>24)</sup>. Consideramos que es probable que el sistema  $\{P_n(z)\}$  no puede ser una base en  $E_R$  si no se cumple la condición  $|c_n| \leq r < R$  (a pesar de que se cumpla la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = z$ ).

Supongamos, en particular, que  $R = 1$ ,  $c_n = 0$  para  $n \neq k^2$  y  $c_{k^2} = \rho_k = \frac{k+1}{k+2}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Entonces  $P_n(z) = z^{n - [V\sqrt{n}]} \prod_{k=0}^{[V\sqrt{n}]} (z - \rho_k)$  ( $n > 0$ ) y, por consiguiente,

$$\sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z|^{1 - \frac{[V\sqrt{n}]}{n}} \left\{ \left( \prod_{k=0}^{[V\sqrt{n}]} |z - \rho_k| \right)^{\frac{1}{[V\sqrt{n}]}} \right\}^{\frac{[V\sqrt{n}]}{n}} \rightarrow |z|$$

para  $n \rightarrow \infty$  y  $z \neq 0, 1, \rho_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), siendo uniforme la convergencia en cada conjunto acotado y cerrado que no contenga a los puntos indicados. Examinemos el desarrollo de  $\frac{1}{P_{n+1}(z)}$  en

<sup>24)</sup> Walsh, Interpolation and approximation, §§7,2; 7,3.

fracciones simples:

$$\frac{1}{P_{n+1}(z)} = \frac{P_{n-1}[\sqrt{n+1}](z)}{z^{n+1-[\sqrt{n+1}]} + \sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} \frac{B_k}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}(z-\rho_k)},$$

donde  $B_k = \prod_{\substack{j=0 \\ (j \neq k)}}^{[\sqrt{n+1}]} (\rho_k - \rho_j)^{-1}$ , y, por lo tanto,  $|B_k| < C_1 n^{\sqrt{n}}$ .

Haciendo  $|z| = \frac{1}{4}$ , tendremos:

$$M_0 = \max_{|z|=\frac{1}{4}} |p_{n-1}[\sqrt{n+1}](z)| \leq \frac{1}{\prod_{j=0}^{[\sqrt{n+1}]} \left(\rho_j - \frac{1}{4}\right)} + \sum_{k=0}^{\sqrt{n+1}} \frac{B_k \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]} \cdot \left(\rho_k - \frac{1}{4}\right)} < 4^{[\sqrt{n+1}]+1} + C_2 n^{\sqrt{n}} < C_3 n^{\sqrt{n}}.$$

Por esto, para los coeficientes  $a_j^{(n-\sqrt{n+1})}$  del polinomio  $p_{n-1}[\sqrt{n+1}](z)$  obtenemos la cota:

$$|a_j^{(n-1-\sqrt{n+1})}| \leq \frac{M_0}{\left(\frac{1}{4}\right)^j} < C_4 \cdot 4^{n-\sqrt{n}}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |L_n(f)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho < |z| = r < 1} \frac{f(z) dz}{P_{n+1}(z)} \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{n-1-\sqrt{n+1}} a_j^{(n-1-\sqrt{n+1})} \frac{f^{(n-1-\sqrt{n+1}-j)}(0)}{(n-1-\sqrt{n+1}-j)!} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} \frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}} \right| > \left| \sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} \frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}} \right| - \\ &- C_4 \cdot 4^{n-\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1-\sqrt{n+1}} \left| \frac{f^{(n-1-\sqrt{n+1}-j)}(0)}{(n-1-\sqrt{n+1}-j)!} \right| > \\ &> \left| \sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} \frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}} \right| - C_4 \cdot 4^{n-\sqrt{n}} \cdot (n+1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -[V\overline{n+1}]\} \cdot \frac{M_f}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-[V\overline{n+1}]}} > \\
 & > \left| \sum_{h=0}^{[V\overline{n+1}]} \frac{B_h f(\rho_h)}{\rho_h^{n+1-[V\overline{n+1}]}} \right| - C_5 M_f \cdot 16^{n+1-[V\overline{n+1}]},
 \end{aligned}$$

donde  $M_f = \max_{|z|=\frac{1}{4}} |f(z)|$ . Determinemos ahora sucesivamente los números  $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  de tal modo que sea

$$\sum_{h=0}^m \frac{B_h \gamma_h}{\rho_h^{m_2-m}} = m^{m^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Se puede construir una función  $f(z)$ , uniforme y analítica en el círculo unidad, que satisfaga a las condiciones  $f(\rho_k) = \gamma_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). (Es suficiente construir primero una función  $\varphi(z)$  con polos simples en los puntos  $\rho_k$ , y después una función  $\psi(z)$  que sea meromorfa en el círculo unidad y tenga las partes principales

$$\frac{\gamma_k}{\varphi'(\rho_k)(z-\rho_k)}, \text{ haciendo finalmente}$$

$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z).$$

Entonces

$$|L_{m^2-1}(f)| > m^{m^2} - C_5 M_f 16^{m^2-m},$$

de donde, definitivamente,

$$\sqrt[m^2-1]{|L_{m^2-1}(f)|} \rightarrow \infty \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

Pero esto significa que la serie  $\sum_0^\infty L_n(f) \cdot P_n(z)$  no puede ser convergente en los puntos distintos de 0,  $\rho_k$  y, posiblemente, 1. En resumen,  $\{P_n(z)\}$ , siendo una base en el sentido amplio, no es una base. a pesar de que aquí se cumple la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z|$  (e incluso  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_n(z)} = z$ ) uniformemente en cada conjunto acotado y cerrado que no contenga a los puntos 0,  $\rho_k$ , 1.

6. Supongamos ahora que  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$  ( $R < \infty$ ) y que  $\{\omega_n(\xi)\}$  son las funciones asociadas con  $\{f_n(z)\}$ . Entonces para  $|\xi| \geq R$  la función  $\frac{1}{\xi-z} \in E_R$  tiene que admitir un desarrollo

$$\frac{1}{\xi-z} = \sum_0^\infty L_n\left(\frac{1}{\xi-z}\right) f_n(z) = \sum_0^\infty \omega_n(\xi) f_n(z),$$

uniformemente convergente respecto de  $z$  (para  $\xi$  fijado) en cada círculo  $|z| \leq r < R$ . Sin embargo, se puede deducir algo más, a saber, que la serie  $\sum_0^{\infty} \omega_n(\xi) f_n(z)$  converge hacia  $\frac{1}{\xi-z}$  uniformemente respecto de  $\xi$  y respecto de  $z$  para  $|\xi| \geq R$  y  $|z| \leq r < R$ , donde  $r$  es un número positivo cualquiera menor que  $R$ . En otras palabras, se verifica el siguiente teorema:

**T e o r e m a VII.** *Para que un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$  del espacio  $E_R$  sea una base de  $E_R$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:*

- (a) *el sistema  $\{f_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra;*  
 (b) *se verifica el desarrollo*

$$\frac{1}{\xi-z} = \sum_0^{\infty} \alpha_n(\xi) \cdot f_n(z)^{25),}$$

donde  $\{\omega_n(\xi)\}$  son las funciones asociadas con  $\{f_n(z)\}$ , y la serie es uniformemente convergente para  $|\xi| \geq R$ ,  $|z| \leq r$  para cualquier  $r$ ,  $0 < r < R$ .

Este teorema es una consecuencia directa del siguiente lema, el cual es a su vez de un interés particular.

**L e m a.** *Si  $F(z, \xi)$  es una función de dos variables complejas  $z$  y  $\xi$ , que es analítica en el recinto  $|z| < R$ ,  $|\xi| < P$ , y  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$ , entonces se verifica el desarrollo*

$$F(z, \xi) = \sum_0^{\infty} \varphi_n(\xi) f_n(z),$$

donde  $\varphi_n(\xi)$  son funciones analíticas en el recinto  $|\xi| < P$ , que pertenecen a la clase  $\Omega$  engendrada por  $F(z, \xi)$ ; el desarrollo es uniformemente convergente respecto del conjunto  $z$  y  $\xi$  en cada recinto cerrado de la forma  $|z| \leq r < R$ ,  $|\xi| \leq \rho < P$ . Si  $F(z, \xi)$  es una función analítica para  $|z| < R$ ,  $|\xi| \leq P$ , entonces se puede afirmar además que  $\varphi_n(\xi)$  son continuas (e incluso infinitamente diferenciables) para  $|\xi| \leq P$ , siendo uniformemente convergente el desarrollo  $\sum_0^{\infty} \varphi_n(\xi) f_n(z)$  en cada recinto cerrado de la forma  $|z| \leq r < R$ ,  $|\xi| \leq P$ .

**D e m o s t r a c i ó n.** Este lema resulta como una aplicación sencilla del teorema de Mazur y Orlicz<sup>26)</sup>, el cual representa a su vez

<sup>25)</sup> Como  $\{f_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra, de la convergencia de esta serie se deduce que su suma es  $\frac{1}{\xi-z}$ .

<sup>26)</sup> S. M a z u r und W. O r l i c z, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math., IV (1933).

la extensión al caso de espacios de tipo  $F$  del conocido teorema de Banach-Steinhaus<sup>27</sup>). Por ejemplo, demos­tramos la segunda mitad del lema (en el cual, con unas restricciones más rigurosas se deducen unas proposiciones más fuertes). Sean  $\{L_n\}$  funcionales lineales biortogonales con  $\{f_n(z)\}$ . Como  $\{f_n(z)\}$  es una base de  $E_R$ , la serie  $\sum_0^\infty L_n(f) \cdot f_n(z)$  es convergente para cualquier función  $f(z) \in E_R$  y, por consiguiente, en virtud del teorema mencionado<sup>26</sup>), la familia de operadores lineales  $\left\{ \sum_0^n L_j(f) f_j(z) \right\}$  es equicontinua en  $E_R$ . Sea  $\zeta_0$

un punto arbitrario del recinto cerrado  $|\zeta| \leq P$ . Entonces se puede señalar un entorno  $U_0$  tal, que para  $\zeta \in U_0$  se cumple la desigualdad

$$\left\| \sum_0^n L_j \left[ F(z, \zeta) - F(z, \zeta_0) \right] f_j(z) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para un  $\zeta > 0$  dado y para cualquier natural  $n$ . Cubramos el conjunto  $|\zeta| \leq P$  por un número finito de entornos del tipo indicado:  $U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) con los centros  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ). Como existen unos números naturales  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ), tales que

$$\left\| \sum_{n+1}^{n+p} L_j \left[ F(z, \zeta) \right] f_j(z) \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para  $n \geq n_k$  y para cualquier natural  $p$ , designando  $N = \max(n_1, \dots, n_s)$ , tendremos en virtud de las desigualdades establecidas

$$\left\| \sum_{n+1}^{n+p} L_j \left[ F(z, \zeta) \right] f_j(z) \right\| < \varepsilon \quad (*)$$

para  $n > N = N(\varepsilon)$  y  $|\zeta| \leq P$ . Supongamos que la norma de  $f(z) \in E_R$  se define así:

$$\|f(z)\| = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \frac{m_n}{1 + m_n}, \quad \text{donde } m_n = \max_{|z| \leq r_n} |f(z)| \text{ y } r_n \rightarrow R,$$

y sea  $r$  un número positivo cualquiera menor que  $R$ .

Si  $r_{n_0} \geq r$ , entonces para  $\varepsilon < \frac{1}{2^{n_0+1}}$  se tiene  $\max_{|z| \leq r} |f(z)| < \varepsilon \cdot 2^{n_0+1}$

si  $\|f(z)\| < \varepsilon$ . Así, pues, para  $|z| \leq r < R$  y  $\varepsilon < \frac{1}{2^{n_0+1}}$ , donde

<sup>27</sup>) S. B a n a c h, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. Véase también A. Z y g m u n d, Trigonometric Series, 4.55.

$n_0 = n_0(r)$ , tenemos de la relación(\*)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} L_j [F(z, \zeta)] f_j(z) \right| < \varepsilon \cdot 2^{n_0+1}$$

para  $|\zeta| \leq P$  y  $n > N = N(\varepsilon)$ . Haciendo

$$L_j [F(z, \zeta)] = \varphi_j(\zeta)$$

resulta todo lo que afirma el lema. No queda más que observar que para obtener el teorema VII se debe sustituir aquí  $\zeta$  por  $\frac{1}{\zeta}$ .

7. Las condiciones del teorema anterior no son suficientes. Tomemos, por ejemplo, el sistema de polinomios de interpolación  $\{P_n(z)\}$ , estudiado en el ap. 5 de la sección IV. Obsérvese ante todo que para cualquier sistema de i.l.r. de polinomios de interpolación  $\{P_n(z)\}$ , las funciones asociadas  $\{\omega_n(\zeta)\}$  se expresan por las fórmulas

$$\omega_n(\zeta) = \frac{1}{P_{n+1}(\zeta)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En efecto, aquí para  $|\zeta| \geq R$

$$\omega_n(\zeta) = L_n \left( \frac{1}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r > \max\{c_1, \dots, c_{n+1}\}} \frac{dz}{(\zeta - z) P_{n+1}(z)} = \frac{1}{P_{n+1}(z)}$$

Por ello, la serie de la condición (b) tiene aquí la forma

$$\sum_0^{\infty} \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(\zeta)}$$

Pero en nuestro caso  $R = 1$ ,  $c_n = 0$  para  $n \neq k^2$  y  $c_{k^2} = \rho_k = \frac{k+1}{k+2}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Por esta razón, para  $|z| \leq r < 1$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(\zeta)} \right| &= \frac{z^{|n-[\sqrt{n}]|} \prod_{h=0}^{[\sqrt{n}]} |z - \rho_h|}{|\zeta|^{|n+1-[\sqrt{n+1}]|} \prod_{h=0}^{[\sqrt{n+1}]} |\zeta - \rho_h|} \leq \frac{r^{n-[\sqrt{n}]+1} \cdot 2^{[\sqrt{n}]+1}}{|\zeta|^{n+1-[\sqrt{n+1}]} \prod_{h=0}^{[\sqrt{n+1}]} (1 - \rho_h)} \\ &= r^{n-[\sqrt{n}]+1} \cdot 2^{[\sqrt{n}]+1} ([\sqrt{n+1}] + 2)!; \end{aligned}$$

esta última cantidad es el término general de una serie convergente.

Así, pues, en este ejemplo, la serie  $\sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$  es uniformemente convergente para  $|z| \leq r < 1$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . Además, su suma es igual a  $\frac{1}{\zeta - z}$ , puesto que ella es precisamente el desarrollo de esta función



según los elementos  $\{f_n(z) = P_n(z)\}$ , los cuales forman una base en el sentido amplio de la palabra (véase el ap. 6 de la presente sección). Por lo tanto, verdaderamente se cumplen todas las condiciones del teorema anterior, a pesar de que  $\{P_n(z)\}$  no es una base.

8. Supongamos ahora que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo de i.l.r. de funciones del espacio  $E_R$ , siendo analíticas todas las funciones asociadas  $\{\omega_n(\zeta)\}$  para  $|\zeta| \geq l$ , donde  $0 \leq l < R$ . Entonces el sistema  $\{f_n(z)\}$  también es completo y es un sistema de i.l.r. para cualquier  $E_r$ ,  $l \leq r < R$ . En efecto, es obvio que se conserva la complitud, independientemente de las hipótesis que se hagan respecto de  $\{\omega_n(\zeta)\}$  para todos los  $E_r$ ,  $r < R$ . En cuanto a la propiedad de i.l.r., ésta se deduce de las relaciones

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R > |\zeta| = \rho > l} \omega_n(\zeta) f_m(\zeta) n \zeta = \delta_{nm}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots).$$

Supongamos además que se verifica el desarrollo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$$

uniformemente para  $|\zeta| \geq \rho$ ,  $|z| \leq r$ , donde  $\rho$  y  $r$  es cualquier par de números que satisfaga a las relaciones  $0 < r < R$ ,  $\rho > \max(r, l)$ . Entonces  $\{f_n(z)\}$  es una base para cualquier  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ . (En este caso diremos que  $\{f_n(z)\}$  es una base prolongable (hacia el interior) de  $E_R$ ) En efecto, para  $f(z) \in E_r$  siendo  $|z| \leq r' \leq r$ , se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r > |\zeta| = \rho' > \max(l, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho'} \sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z) f(\zeta) d\zeta = \sum_0^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \rho'} f(\zeta) \omega_n(\zeta) d\zeta \right) f_n(z),$$

ésto es el desarrollo, uniformemente convergente, de  $f(z)$  según las funciones  $\{f_n(z)\}$ . La unicidad del desarrollo es consecuencia de la i.l.r. del sistema.

Recíprocamente, supongamos que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema de funciones de  $E_R$  que es una base para todos los espacios  $E_r$ ,  $0 \leq l < r \leq R$ . Entonces, éste es completo y posee la propiedad de i.l.r. para cada uno de estos espacios. Además, según el teorema VII, se verifican los desarrollos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \omega_{r,n}(\zeta) \cdot f_n(z),$$

los cuales son uniformemente convergentes para  $|\zeta| \geq r$  y  $|z| \leq r' < r$ . Comparando los dos desarrollos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \omega_{r,n}(\zeta) f_n(z) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \omega_{R,n}(\zeta) f_n(z)$$

para  $|\zeta| \geq R$  y  $|z| < R$ , nos convencemos, en virtud de la propiedad de i.l.r. del sistema  $\{f_n(z)\}$ , que

$$\omega_{r,n}(\zeta) = \omega_{R,n}(\zeta) = \omega_n(\zeta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; l < r \leq R),$$

de donde se deduce ahora que todas las funciones  $\omega_n(\zeta)$  son analíticas para  $|\zeta| > l$  (pues las funciones  $\omega_{r,n}(\zeta)$  son analíticas para  $|\zeta| > l_{r,n}$ , donde  $l_{r,n} < r$ ). Confrontando lo dicho, obtenemos el teorema:

**T e o r e m a VIII.** *Para que un sistema de funciones  $\{f_n(z)\}$  del espacio  $E_R$  sea una base para cada uno de los espacios  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ , es necesario y suficiente que:*

(α) *sea un sistema completo de i.l.r. del espacio  $E_R$ ;*

(β) *las funciones asociadas  $\{\omega_n(\zeta)\}$  sean analíticas para  $|\zeta| > l$ ;*

(γ) *se verifique el desarrollo  $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$ , y éste sea uniformemente convergente para  $|z| \leq r$ ,  $|\zeta| > \rho$ , donde  $r$  y  $\rho$  son números cualesquiera que satisfagan a las condiciones:  $0 < r < R$ ,  $\rho > \max(r, l)$ .*

9. Si  $f_n(z)$  es un polinomio de grado  $n$  (¡exactamente!) ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), en el enunciado de las condiciones suficientes se puede no exigir que la suma de la serie uniformemente convergente  $\sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$  sea igual a  $\frac{1}{\zeta - z}$ . En efecto, en el caso particular considerado

$$z^j = \sum_{n=0}^j l_n^{(j)} f_n(z) \quad (l_n^{(j)} = 0 \text{ para } n > j)$$

y por consiguiente, según el teorema de Weierstrass de la serie doble de potencias, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_n^{(j)} f_n(z)}{\zeta^{j+1}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\zeta^{j+1}} \sum_0^{\infty} l_n^{(j)} f_n(z) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} = \frac{1}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Como ilustración sencilla al teorema VIII, consideremos el sistema  $\{f_n(z) = 1 + \dots + z^n\}$  en el espacio  $E_R$ ,  $R > 1$ . Este es un sistema completo de funciones. Para comprobar la i.l.r., construimos el sistema biortogonal de funcionales

$$L_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Aquí las funciones asociadas tienen la forma

$$\omega_n(\xi) = L_n\left(\frac{1}{\xi-z}\right) = \frac{1}{\xi^{n+1}} - \frac{1}{\xi^{n+2}} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Estas son analíticas para  $|\xi| > 0$  y, en todo caso, fuera del círculo unidad. Finalmente, la serie  $\sum_0^{\infty} \omega_n(\xi) f_n(z)$  se puede escribir en la forma

$$\sum_0^{\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \frac{\xi-1}{\xi^{n+2}}.$$

Evidentemente, esta serie es uniformemente convergente para  $|z| \leq r$ ,  $|\xi| \geq \rho$ , donde  $\rho > \max(r, 1)$ .

Debido a la observación de este apartado, se puede no comprobar que la suma de la serie es igual a  $\frac{1}{\xi-z}$ . En resumen, el sistema  $\{1 + z + \dots + z^n\}$  es una base para cualquier  $E_r$ ,  $r > 1$ .

Obsérvese que en este ejemplo la serie  $\sum_0^{\infty} \omega_n f_n(z)$  es divergente para  $|\xi| = 1$ ,  $\xi \neq 1$ ,  $|z| \leq r' < 1$ . Por esto, en virtud del teorema VIII, el sistema  $\{1 + z + \dots + z^n\}$  no puede ser una base para  $E_1$ . Esta deja de ser aquí incluso una base en el sentido amplio de la palabra, puesto que  $L_n\left(\frac{1}{1-z}\right) = 0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). Claro, este sistema conserva la complitud y la propiedad de i.l.r. en cualquier espacio  $E_r$ ,  $0 < r < \infty$ .

10. Sea  $\{f_n(z)\}$  un sistema completo de i.l.r. para todos los  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ . Estas condiciones equivalen a que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo de i.l.r. para  $E_R$  y que todas las funciones asociadas  $\{\omega_n(\xi)\}$  son analíticas para  $|\xi| > l$ . Las funciones analíticas en el recinto  $|\xi| > l$ , que se anulan en el punto del infinito, forman un espacio  $\tilde{E}_l$  de tipo  $F$ . Es evidente que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l < |\xi| = \rho < R} F(\xi) f_n(\xi) d\xi = \tilde{L}_n(F) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

representan funcionales lineales en  $E_l$ , que son biortogonales con  $\{\omega_n(\xi)\}$ . De aquí se deduce que  $\{\omega_n(\xi)\}$  representa un sistema de

i.l.r. en  $\tilde{E}_l$  (e incluso en cada espacio  $\tilde{E}_\rho$ ,  $l \leq \rho < R$ ). Si es que las funciones  $\{f_n(z)\}$  forman además una base en  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ , es decir, si se verifica el desarrollo

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_0^\infty \omega_n(\xi) f_n(z)$$

uniformemente para  $|z| \leq r$ ,  $|\xi| \geq \rho$ ,  $0 < r < R$ ,  $\max(l, r) > \rho$ , entonces  $\{\omega_n(\xi)\}$  también forma una base en cada  $\tilde{E}_\rho$ ,  $l \leq \rho < R$ , lo cual se deduce inmediatamente de la representación de la función  $F(z) \in \tilde{E}_\rho$  por la integral de Cauchy:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho < |z| = \rho' < R} \frac{F(z) dz}{\xi - z} = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \rho'} F(z) f_n(z) dz \omega_n(\xi).$$

En particular, supongamos que las funciones  $\{f_n(z)\}$ , que forman una base prolongable (hacia el interior) de  $E_R$ , tienen la forma

$$f_n(z) = z^n + a_n^{(1)} z^{n+1} + \dots = z^n \varphi_n(z),$$

donde  $\varphi_n(z)$  son unas funciones analíticas en el círculo unidad que satisfacen a las condiciones  $\varphi_n(0) = 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Entonces, fácilmente se comprueba que las funciones asociadas  $\{\omega_n(\xi)\}$  tienen la forma

$$\omega_n(\xi) = \frac{1}{\xi^{n+1}} + \frac{\alpha_n^{(1)}}{\xi^n} + \dots + \frac{\alpha_n^{(n)}}{\xi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En virtud de lo expuesto anteriormente, las funciones  $\{f_n(z)\}$  forman una base para  $E_r$  ( $l < r \leq R$ ) cuando, y sólo cuando, las funciones  $\{\omega_n(\xi)\}$  forman una base de  $\tilde{E}_\rho$  ( $l \leq \rho < R$ ). Pero, sustituyendo  $\xi$  por  $\frac{1}{z}$  y haciendo  $\omega_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n+1}(z)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) y  $1 = \varphi_0(z)$ , nos convencemos de que el problema de la búsqueda de todas las bases prolongables del espacio  $E_R$  que tienen la forma  $\{f_n(z) = z^n + a_n^{(1)} z^{n+1} + \dots\}$ , es equivalente al problema de la búsqueda de todas las bases prolongables del espacio  $E_r$  ( $r > \frac{1}{R}$ ) que tienen la forma

$$\{\varphi_n(z) = z^{n+1} + \alpha_n^{(1)} z^n + \dots + \alpha_n^{(n)}\}.$$

11. Detengámonos en la condición de unicidad que figura en la definición de base (en el sentido amplio y estricto de la palabra). Sea  $\{f_n(z)\}$  un sistema completo de i.l.r. de  $E_R$  y sea  $\{L_n\}$  el sistema de funcionales lineales que es biortogonal con  $\{f_n(z)\}$ . La condición

mencionada de unicidad consiste en que de  $L_n(f) = 0$  y  $f(z) \in E_R$  tiene que desprenderse que  $f(z) \equiv 0$ .

En particular, esto tiene que verificarse para las funciones que pertenecen a  $E_{R'}$ ,  $R' > R$ . Pero la función  $f(z) \in E_{R'}$ ,  $R' > R$ , se engendra de  $\frac{1}{\xi - z}$  por cierto funcional lineal definido en  $\tilde{E}_R$ . Por ello, según el teorema I, la condición de unicidad puede cumplirse solamente con la condición de que el sistema de funciones  $L_n\left(\frac{1}{\xi - z}\right) = \omega_n(\xi)$  sea completo en el espacio  $\tilde{E}_R$ . Obsérvese que *a priori* no hay razones para afirmar que la complitud de  $\{\omega_n(\xi)\}$  en  $\tilde{E}_R$  es suficiente para que el sistema  $\{L_n\}$  posea la propiedad de unicidad en  $E_R$ . En efecto, según el teorema I, la unicidad queda garantizada solamente con respecto a la clase  $O$  de las funciones engendradas de  $\frac{1}{\xi - z}$  mediante las funcionales definidas en  $\tilde{E}_R$ ; aquí, la clase  $O$  coincide con el conjunto de todas las funciones analíticas en el círculo cerrado  $|z| \leq R$ . Un ejemplo sencillo confirma que la complitud de  $\{\omega_n(\xi)\}$  en  $\tilde{E}_R$  no es suficiente para que el sistema  $\{L_n\}$  posea la propiedad de unicidad en  $E_R$ . Sea  $f_n(z) = 1 + \dots + z^n$  y  $R = 1$ . Aquí

$$L_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}, \quad \omega_n(\xi) = \frac{1}{\xi^{n+1}} - \frac{1}{\xi^{n+2}} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

y el sistema  $\{\omega_n(z)\}$  es completo en  $\tilde{E}_1$  (en efecto,

$$\frac{1}{\xi^{n+2}} = \left(\frac{1}{\xi^{n+1}} - \frac{1}{\xi^{n+2}}\right) + \left(\frac{1}{\xi^{n+2}} - \frac{1}{\xi^{n+3}}\right) + \dots, \quad |\xi| > 1).$$

Sin embargo, las funcionales  $\{L_n\}$  no poseen la propiedad de unicidad en  $E_1$ ; de la condición  $L_n(f) = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) solamente se deduce que  $f(z) = \frac{c}{1-z}$ .

Por el teorema I, resulta una condición suficiente para la unicidad en  $E_R$  (o incluso para la unicidad en  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ ), si se supone que las funciones  $\{\omega_n(\xi)\}$  son analíticas para  $|\xi| > l$ ,  $l < R$ , y que el sistema  $\{\omega_n(\xi)\}$  es completo en  $\tilde{E}_l$ . Resumiendo, obtenemos la proposición siguiente:

**T e o r e m a 1X.** Para que un sistema de funcionales lineales  $\{L_n\}$ , que sea biortogonal con el sistema de funciones  $\{f_n(z)\} \subset E_R$ , posea la propiedad de unicidad en  $E_R$ , es necesario (aunque no suficiente) que el sistema de funciones asociadas  $\{\omega_n(\xi)\}$  sea completo en  $\tilde{E}_R$ . Si el sistema  $\{\omega_n(\xi)\}$  es completo en  $\tilde{E}_l$ ,  $0 \leq l < R$ , entonces el sistema  $\{L_n\}$  posee la propiedad de unicidad en cada  $E_r$ ,  $l < r \leq R$ .

12. De lo expuesto en los ap. 10 y 11 se deduce que si  $\{f_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra para cada  $E_r, l < r \leq R$ , entonces el sistema de funciones asociadas  $\{\omega_n(\zeta)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra para  $\tilde{E}_r, l \leq r < R$ . En efecto, el cumplimiento de la condición indicada significa ante todo que  $\{f_n(z)\}$  es un sistema completo de i.l.r. para cada  $E_r, l < r \leq R$ ; por esta razón,  $\{\omega_n(\zeta)\}$  es un sistema de i.l.r. para todos los  $E_r, l \leq r < R$ . Por otra parte, siendo  $\{f_n(z)\}$  una base en el sentido amplio de la palabra, resulta que el sistema de funcionales lineales  $\{L_n\}$ , que es biortogonal con  $\{f_n(z)\}$ , posee la propiedad de unicidad para  $E_r, l \leq r < R$ ; por esto (teorema IX) el sistema  $\{\omega_n(\zeta)\}$  es completo en  $\tilde{E}_r, l \leq r < R$ . Finalmente, como el sistema  $\{f_n(z)\}$  es completo en  $E_r, l < r \leq R$ , del mismo teorema IX (en el cual se pueden cambiar de sitio los sistemas  $\{f_n(z)\}$  y  $\{\omega_n(\zeta)\}$ ) se deduce que el sistema de funcionales lineales  $\{\Lambda_n\}$ , definidos en  $\tilde{E}_r (l \leq r < R)$  y biortogonales con  $\{\omega_n(\zeta)\}$ , posee la propiedad de unicidad para cada  $\tilde{E}_r (l \leq r < R)$ .

En todos estos razonamientos  $\{\omega_n(\zeta)\}$  y  $\{f_n(z)\}$  pueden cambiarse de sitio (puesto que la propiedad de asociación es recíproca).

En particular, la relación establecida aquí permite demostrar la proposición siguiente:

**Teorema X.** *Supongamos que  $F(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots$  ( $|z| > l$ ) y*

$$\varphi(z) = 1 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots (|z| > l)$$

son funciones que no se anulan, y sean

$$p_n(z) = z^n + \alpha_1^{(n)} z^{n+1} + \dots + \alpha_n^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

los polinomios que representan los conjuntos de los términos de potencias con exponentes no negativos en los desarrollos de Laurent de las funciones  $\frac{|F(z)|^n F'(z)}{\varphi(z)} (n = 0, 1, 2, \dots)$  (en un entorno del punto  $z = \infty$ ).

Para que el sistema  $\{p_n(z)\}$  sea una base en el sentido amplio de la palabra para cada uno de los espacios  $E_r, r > l$ , es necesario y suficiente que  $F(z)$  sea univalente en el recinto  $|z| > l$ .

**Demostración.** Obsérvese primero que los polinomios  $\{p_n(z)\}$  representan un sistema de i.l.r. en  $E_r, r > l$ , y que las funciones asociadas con ellos tienen la forma  $\omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{|F'(z)|^{n+1}}$ . En efecto, haciendo la notación

$$\frac{|F(z)|^n F'(z)}{\varphi(z)} p_n(z) = \Delta_n(z) = \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z^2} + \dots (|z| > l),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=\rho>1} \omega_n(z) p_m(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho>1} \omega_n(z) [p_m(z) + \Delta_m(z)] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho>1} \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}} \frac{[F(z)]^m \cdot F'(z)}{\varphi(z)} dz = \delta_{nm} \\ (n=0, 1, 2, \dots, m=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (*)$$

de donde se deduce lo que se afirmaba. Si  $\{p_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra en cada  $E_r$ ,  $r > l$ , entonces, según lo anterior,  $\{\omega_n(z)\}$  también es una base en el sentido amplio de la palabra para cada  $\tilde{E}_r$ ,  $r \geq l$ . Pero si se supone que  $F(z_1) = F(z_2)$ ,  $|z_1| > l$ ,  $|z_2| > l$ ,  $z_1 \neq z_2$ , es decir, que  $F(z)$  no es univalente en el recinto  $|z| > l$ , entonces, cualquier función  $\psi(z)$  que pertenezca a la cápsula lineal cerrada de  $\left\{ \omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}} \right\}$ , tiene que satisfacer a la condición  $\psi(z_1) : \psi(z_2) = \varphi(z_1) : \varphi(z_2)$ . Esto contradice a la propiedad de complitud del sistema  $\{\omega_n(z)\}$  en el espacio  $\tilde{E}_l$ . Así, pues, queda demostrada la condición necesaria del teorema.

Para demostrar que es suficiente, supongamos que  $F(z)$  es univalente en el recinto  $|z| > l$ .

Demostremos primero que el sistema  $\left\{ \omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}} \right\}$  es completo en  $\tilde{E}_l$  (y, por consiguiente, en cualquier  $\tilde{E}_r$ ,  $r > l$ ); efectúemos para esto la transformación  $z = F^{-1}(w)$ . Esta transforma  $|z| > l$  en cierto recinto simplemente conexo  $G$  que contiene al punto  $w = \infty$ , a las funciones  $\{\omega_n(z)\}$  las transforma en las funciones  $\left\{ \frac{\varphi[F^{-1}(w)]}{w^{n+1}} \right\}$  y al espacio  $\tilde{E}_l$ , en el espacio de las funciones que son analíticas en  $G$  y que se anulan en el punto  $w = \infty$ . Como el sistema  $\left\{ \frac{\varphi[F^{-1}(w)]}{w^{n+1}} \right\}$  es completo en el espacio transformado (según el teorema de Runge), el sistema inicial  $\{\omega_n(z)\}$  es completo en  $\tilde{E}_l$ ; la i.l.r. de este sistema es consecuencia de las relaciones de biortogonalidad (\*), las cuales muestran que el sistema  $\{\omega_n(z)\}$  es asociado con  $\{f_n(z)\}$ . Finalmente, la propiedad de unicidad de las funcionales que son biortogonales con  $\{\omega_n(z)\}$  (en cada  $\tilde{E}_r$ ,  $r \geq l$ ), se deduce (según el teorema IX) de la complitud del sistema de funciones asociadas  $\{p_n(z) = (z)^n + \alpha_1^{(n)}z^{n-1} + \dots + \alpha_n^{(n)}\}$  (en cada  $E_r$ ). En resumen, el sistema  $\{\omega_n(z)\}$  es una base en el sentido amplio de la palabra para cada  $E_r$ ,  $r > l$ . La condición suficiente del teorema queda demostrada.

# BIBLIOGRAFIA

## PARA EL SEGUNDO TOMO\*)

---

### I. OBRAS DE CARACTER GENERAL

1. Mandelbrojt S., Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications Gauthier-Villars, Paris, 1952.
2. Pólya G. und Szegő G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II b. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1925.
3. Stoilow S., Teoria funcțiilor de o variabilă complexă, vol. II, Ed. Acad. R.P.R., 1958.
4. Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, Moderne Funktionentheorie, Leipzig — Berlin, 1927.
5. Carathéodory C., Funktionentheorie, B. II, Basel, 1950.
6. Carathéodory Constantin, Gesammelte Mathematische Schriften, Herausgegeben im Auftrag und mit Unterstützung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Dritter Band, München, 1955; Vierter Band, München, 1956.
7. Julia G., Principes géométriques d'analyse, t. II, Paris, 1932.
8. Milloux II., Principes. Méthodes générales, t. I, F. II Traité de théorie des fonctions publié sous la direction de M. Gaston Gulia, Paris, 1956.
9. Montel Paul, Selecta, 1897—1947, Cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel, Paris, 1947.
10. Stoilow S., Oeuvre mathématique, Bucaresti, 1964.

### II. MONOGRAFÍAS SOBRE CUESTIONES PARTICULARES

#### A. Funciones univalentes y multivalentes.

##### *Transformaciones conformes*

1. Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, изд. 2., М., 1966 (Goluzin G. M., Teoría geométrica de las funciones de variable compleja).
2. Jenkins J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
3. Courant R., Dirichlet's Principle, Conformal mapping and Minimal Surfaces, New-York; Intersc. Public., 1950.

---

\*) Aquí faltan los artículos de las revistas. No obstante muchos de los libros que se nombran a continuación contienen unos índices bibliográficos suficientemente detallados. Nuestro objetivo es recomendar al lector obras que le permitan profundizar más el tema. Junto con las monografías más recientes en los sentidos correspondientes, indicamos no pocas obras de carácter clásico, cuya lectura también es interesante e instructiva para un matemático contemporáneo.



4. Лаврентьев М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, М.—Л., 1946 (Lavréntiev M. A., Transformaciones conformes y sus aplicaciones a ciertos problemas de la mecánica).
5. Хаушан W. К., Multivalent functions, Cambridge University Press, 1958.
6. Julia G., Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes, Paris, 1931.
7. Julia G., Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, Paris, 1934.

#### B. Transformaciones casi-conformes

1. Волковыский Л. И., Квазиконформные отображения, Львов, (Volkoviski L. I., Transformaciones casi-conformes).
2. Күлзи Н. Р., Quasikonforme Abbildungen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
3. Lehto O. und Virtanen K. I., Quasikonforme Abbildungen, Berlin — Heidelberg — New York.

#### C. Funciones armónicas y subarmónicas

1. Brelot M., Elements de la theorie classique du potentiel, 3<sup>e</sup> édition (1965), Centre de documentation universitaire, Paris.
2. Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (Landrof N. S. Fundamentos de la teoria moderna del potencial).
3. Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937 (Priválov I. I., Funciones subarmónicas).

#### D. Funciones analíticas uniformes. Distribución de los valores. Propiedades límites

1. Wittich H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1955.
2. Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961 (Golubev V. V., Funciones analíticas uniformes, Funciones automorfes).
3. Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. (Dzhrbashián M. M., Transformaciones integrales y representación de las funciones en el plano complejo).
4. Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962 (Evgráfov M. A., Acotaciones asintóticas y funciones enteras).
5. Ибрагимов И. И., Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962 (Ibráguimov I. I., Propiedades extremales de las funciones enteras de grado finito).
6. Ловин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956 (Levin B. Y., Distribución de las raíces de las funciones enteras).
7. Mac-Lane G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, William Marsh Rice University, Houston 1, Texas, 1963.
8. Nevanlinna R., Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin; 2<sup>a</sup> ed., 1953.
9. Noshiro K., Cluster sets, Springer-Verlag, Berlin-Göttinger-Heidelberg, 1960.
10. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950 (Priválov I. I., Propiedades frontera de las funciones analíticas).

11. Чеботарев Н. Г. и Мейман П. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, М.—Л., 1949 (Chebotariou N. G. y Meiman P. N., El problema de Rauss—Hurwitz para los polinomios y las funciones enteras).
12. Cartwright M. L., *Integralfunctions*, Cambrige, 1956.
13. Nevanlinna R., *Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris, 1929.

*E. Funciones elípticas y automorfas*

1. Ахизер Н. И., *Элементы теории эллиптических функций*, М.—Л., 1948 (Ajieser N. I., *Elementos de la teoría de las funciones elípticas*).
2. Hurwitz A., *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, Springer, Berlin, 1929.
3. Whittaker E. T. and Watson G. N., *A course of modern analysis t. II*, Cambridge at the University press, 1927.
4. Appell P. et Lacour E., *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, 2 éd., Paris, 1922.
5. Schwarz H. A., *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass*, 2 Aufl., Erster Th., Berlin, 1893.

*F. Superficies de Riemann. Funciones algebraicas y automorfas*

1. Nevanlinna R., *Uniformisierung*, Springer, Berlin, 1953.
2. Riemann B., *Euvres*.
3. Springer G., *Introduction to Riemann surfaces*, Addison — Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA.
4. Fœrd L. R., *Automorphic Functions*, 1929.
5. Чеботарев Н. Г., *Теория алгебраических функций*, М.—Л., (Chebotariou N. G., *Teoría de las funciones algebraicas*).
6. Chevalley C., *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, American Mathematical Society, New York, 1951.
7. Schiffer M. and Spencer D. S., *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1954.
8. Appell P. et Goursat E., *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, t. I. Etude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann, 2 éd., Paris 1929; *Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendentes qui s'y rattachent*, t. II, Fontions automorphes, par Pierre Fatou, 2 éd., Paris, 1930.
9. Klein F., *Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Dritter Band. Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, Hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und Automorphe Funktionen*, Berlin, 1923.
10. Pflüger A., *Theorie der Riemannschen Flächen*, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1957.
11. Weyl H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 3 Aufl., Stuttgart, 1955.

## INDICE ALFABETICO

- Arco alcanzable de la frontera o arco de Jordan libre 94
- Banda de Möbius 456
- Base en el espacio de las funciones analíticas 596
- en sentido amplio 601
  - en sentido estricto 602
  - numerable 453
- Cadena de elementos 493
- Campo de existencia de una función analítica completa 495
- de un elemento 493
- Centro de un elemento 500
- Circulación de la velocidad 179
- Círculo de un elemento 500
- Coefficientes de Fourier 141
- Condiciones de univalencia 13
- Conjunto límite de un semiintervalo curvilíneo 63
- Constante de Euler 316
- Convergencia en media 138
- Criterio de normalidad 588
- Curva regular analítica 479
- Defecto de un valor  $A$  428
- o valor excepcional de una función meromorfa 428
- Desarrollo de Fourier 142
- de las funciones meromorfas en fracciones simples 300
  - de una función racional en fracciones simples 303
- Desigualdad de Jentzsch 228
- Ecuación de continuidad de un fluido incomprensible 179
- de Laplace 150
- Elemento 493
- de primera especie 85
  - de una función 494
  - frontera de cuarta especie 86
  - frontera de segunda especie 85
  - frontera de tercera especie 86
- Elemento frontera singular no alcanzable 549
- irregular 500
  - no ramificado 500
  - ramificado 500
  - regular 500
  - subordinado 495
- Elementos circulares 499
- frontera 80
  - subordinados 500
- Entorno selecto 456
- Espacio vectorial topológico 520
- Espacios topológicos 452
- Estrella rectilínea de un elemento 510
- Exponente de convergencia de una sucesión 287
- Extremos simples 80
- Familia normal de funciones 588
- Flujo 179
- Fórmula de Chaplignin 200
- de Christoffel—Schwarz 570
  - de Euler 320
  - de Gauss 320
  - de Poisson—Jentzsch 223
  - de Schwarz 159
  - de Stirling 334
  - integral de Cauchy 105
- Fracciones simples 303
- Franja de períodos 341
- Frontera natural de una función 497
- analítica completa 494
  - armónica mayorante 206
  - característica de la corriente 180
  - característica de una función meromorfa 427
  - completa 608
  - de Blaschke 234
  - de corriente 181
  - de Green 174
  - de orden finito 253
  - de orden infinito 253
  - de tipo infinito (o maximal) 254
  - de tipo finito 254

- Función de tipo minimal** 254  
 — de tipo normal 254  
 — doblamiento periódica (o elíptica) 339  
 — engendradora 122  
 — engendradora de los polinomios de Faber 122  
 — Gamma 313  
 —  $k$ -valente 10  
 — meromorfa de un recinto 312  
 — modular 586  
 — monoperiódica o simplemente periódica 336  
 — multivalente 10  
 — univalente 10  
**Funciones armónicas** 150  
 — armónicas conjugadas 150  
 — de cuadrado del módulo integrable 138  
 — de forma acotada 236, 250  
 — de Jacobi 405  
 — de tipo exponencial 261  
 — elípticas de Weierstrass 362  
 — meromorfas 300, 302  
 — periódicas 334  
 — subarmónicas 201  
**Generalización del teorema de Weierstrass** 311  
**Género de una función entera** 297-298  
**Hipótesis de Bieberbach** 58  
**Igualdad de Parseval** 142  
**Imagen analítica** 501  
**Indicatriz de crecimiento de una función** 266  
 — de una función 272  
**Integral de Poisson** 157  
 — elíptica de primera especie en la forma normal de Weierstrass 374  
 — eulariana de segunda especie 320  
**Integrales elípticas** 374  
**Intervalo de Jordan** 80  
**Invariantes de la función  $\wp(z)$**  372  
**Lema de Bernstéin — Walsh** 127  
**Límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones univalentes** 26-27  
**Líneas de corriente** 182  
 — equipotenciales 181  
**Máximo del módulo** 252  
**Método de sumación de Poisson (o de Abel)** 172  
**Métodos de sumación de series** 172  
**Modelo de una superficie de Riemann** 476  
**Módulo complementario de las funciones elípticas de Jacobi** 414  
**Módulo de las funciones de Jacobi** 406  
**Norma correspondiente a la convergencia uniforme en el interior de un recinto** 520, 596  
**Núcleo de la integral de Poisson** 157  
 — de una sucesión de recintos 38  
**Orden de crecimiento de una función meromorfa** 444  
 — de ramificación de un elemento 500  
 — de una función elíptica 351  
 — de una función entera 253  
**Orientación de un triángulo** 463  
**Paralelogramo fundamental de períodos** 339  
**Parámetro local** 456  
**Período de una función** 335  
 — fundamental (o primitivo) de una función 336  
**Períodos fundamentales de una función** 339  
**Polinomio armónico** 151  
 — trigonométrico 345  
**Polinomios de Chébiehev** 421  
 — de Faber 120  
**Potencial complejo** 180  
 — de velocidades 181  
**Primer teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas** 427  
**Principio de dualidad** 605  
 — de simetría de Riemann — Schwarz 564  
 — generalizado del argumento 92  
 — generalizado del módulo máximo 205  
**Problema de Dirichlet** 166  
 — de la inversión de una integral elíptica 376  
**Producto de Blaschke** 234  
**Prolongación analítica** 493  
 — analítica inmediata 492  
**Propiedad de unicidad** 601  
 — de unicidad relativa 605  
**Punto alcanzable de la frontera** 74  
 — algebraico de ramificación 544  
**Puntos congruentes** 267  
 — de ramificación 477  
 — logarítmicos de ramificación 545  
 — singulares 540

- Radio de conformidad de un recinto 37  
 — de un elemento 500  
 Rama uniforme de una función 494  
 Rayos de Julia 594  
 Recintos de Carathéodory 131  
 Relación de los defectos 428  
 Relaciones de Legendre 387  
 Reticulo de paralelogramos 337  
 Rotor de la velocidad 180
- Semiintervalo curvilíneo 63  
 — curvilíneo de Jordan 63  
 $\sigma$ -funciones asociadas 394  
 Significado de las funciones analíticas en la hidromecánica 177  
 Sistema de independencia lineal reforzada (sistema de l.l.r.) 599  
 Subrecinto inferior 95  
 — superior 95  
 Sucesión completa de funciones 598  
 — relativamente completa 605  
 Superconvergente 519  
 Superficie abstracta de Riemann 457  
 — cerrada de Riemann 478  
 — de  $m$  hojas 478  
 — de Riemann 476  
 — de Riemann de una función 485  
 — de Riemann de la función modular 587  
 — no orientable (unilateral o de una cara) 467  
 — orientable (bilateral o de dos caras) 467  
 — topológica o variedad bidimensional 454
- $T_2$ -espacios 452  
 Teorema de Borel 295  
 — de existencia de la transformación conforme (Riemann) 33  
 — de Fatou 246  
 — de Hadamard 291  
 — de Hadamard de los tres círculos 210
- de Harnack 164  
 — de Hilbert 61  
 — de la conservación del recinto en las transformaciones analíticas 7  
 — de la «desfiguración» 48  
 — de la suma para una función elíptica 395  
 — de las áreas 44  
 — de las dos constantes 212  
 — de los hermanos Riesz 249  
 — de los recintos de fronteras variables 40  
 — de M. A. Lavrentiev 108  
 — de M. V. Keldish 105  
 — de Mittag — Leffler 304  
 — de N. E. Joukowski 201  
 — de Phragmén — Lindelöf 215  
 — de R. Courant 96  
 — de rotación 50  
 — de S. N. Bernstéin 128  
 — de S. N. Merguelián 110  
 — de unicidad para las transformaciones conformes 37  
 — de Weierstrass 282  
 — generalizado de Mittag — Leffler 310  
 — grande de Picard 591  
 — integral de Cauchy generalizado 105  
 — pequeño de Picard 587, 273, 278  
 Theta funciones de Jacobi 409  
 Transformación interior 466  
 Triangulación de una superficie 463  
 Triángulo orientado 463  
 — (topológico) sobre una superficie 463
- Variedad bidimensional o superficie topológica 454  
 Valor excepcional boreliano 300  
 — excepcional de Picard 300  
 Valores frontera angulares 247  
 — frontera radiales 246

## BETEJTIN A.

### *Curso de mineralogía*

El académico Anatoli Betejtin, un notable hombre de ciencia, en su manual dedicado al estudio de los cristales, considera con plenitud y claridad las nociones contemporáneas sobre las propiedades físicas y químicas de los minerales; se estudia su ligazón mutua con su composición y estructura cristalina.

El autor investiga la naturaleza de la combinación de los minerales y el carácter sucesivo de su formación compleja en menas y rocas, enseña el empleo de esta naturaleza en la búsqueda y prospección geológica de los yacimientos de minerales.

La obra se dota de una lista de minerales según los principales elementos incorporados.

El «Curso de mineralogía» ha sido empleado por generaciones enteras de geólogos soviéticos y es de gran utilidad para los estudiantes de facultades de investigación geológica. Su valor cognoscitivo y científico lo hace muy útil para las personas que se interesan por la mineralogía como ciencia.

La obra ha sido reeditada en ruso y traducida al español, inglés y francés.

Formato 16,8 × 26,2 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 840 págs. con 390 figuras.