Álgebra

TEORÍA Y PRÁCTICA

COLECCIÓN UNICIENCIA

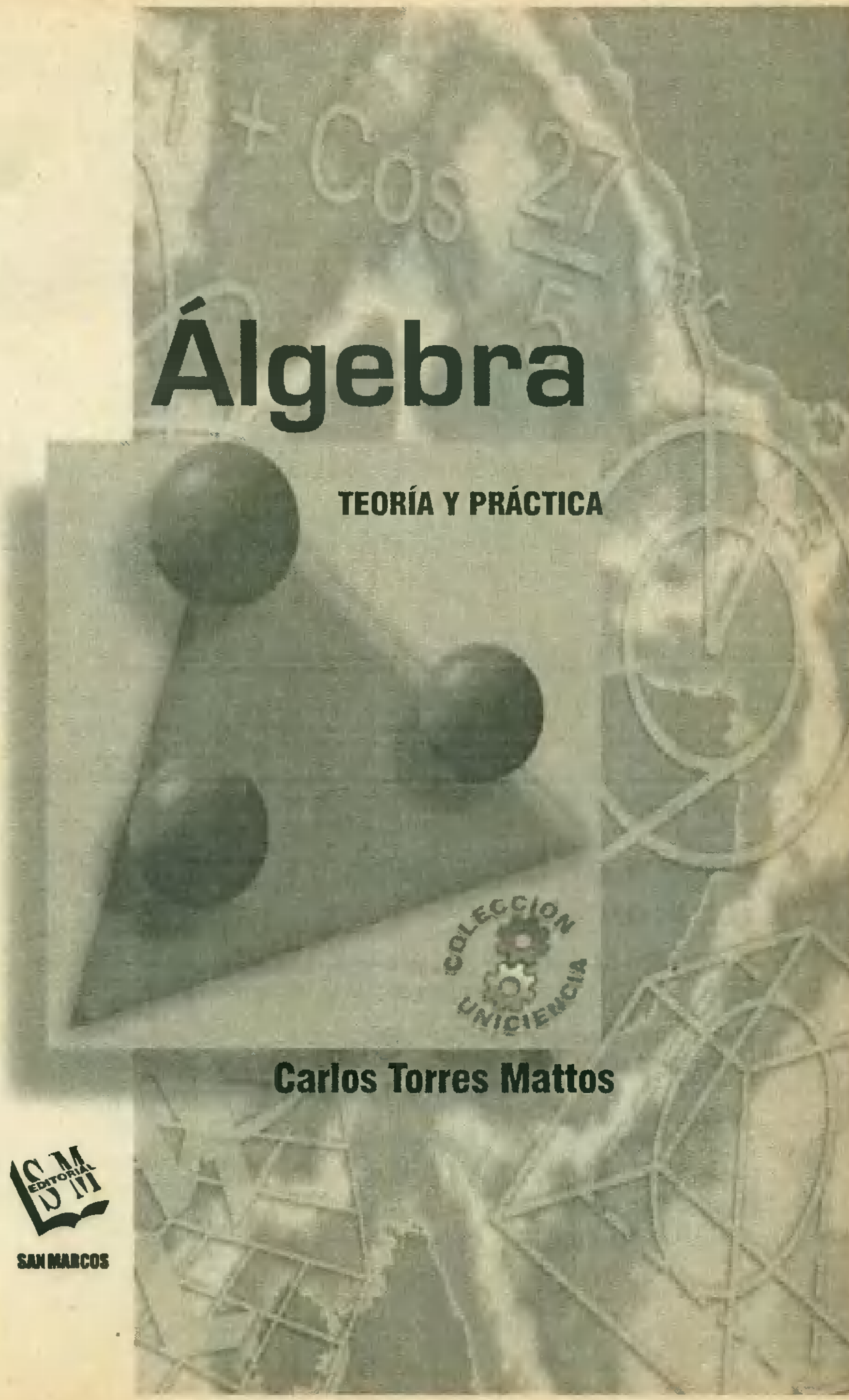
Carlos Torres Mattos

SAN MARCOS

Álgebra

TEORÍA Y PRÁCTICA

Álgebra



TEORÍA Y PRÁCTICA

COLECCIÓN UNICIENCIA

Carlos Torres Mattos

EDITORIAL SM SAN MARCOS

AÑO 2000

Hecho el depósito legal, Ley N° 26905.

REG. N° 15013298-1078

Impreso en Perú Printed in Peru

Composición, diagramación y montaje:
Editorial San Marcos
RUC. 11029221

PROLOGO

El presente libro: "Algebra Elemental Contemporánea" está organizado de modo que se use como material de consulta, práctica y autoaprendizaje para estudiantes de secundaria, aspirantes a carreras universitarias y técnicas, docentes, aficionados y autodidactas.

El desarrollo de esta obra se inicia con una breve introducción a la Lógica Matemática, involucrando luego al conjunto de los Números Reales que mediante sus axiomas y teoremas justifican y dan la consistencia necesaria al presente material.

Se ha incluido los capítulos siguientes: La Función, La Matríz, La Función Derivada, La Integral, La Probabilidad, debido a que en algunos colegios de nivel secundario de nuestro medio lo incluyen en sus programas; pero que países como: Argentina, Brasil, Colombia y España dichos capítulos son materia obligatoria desde el nivel escolar hasta el bachillerato (secundaria). Asi mismo en nuestro medio la mayoría de ellos están citados en los programas de los exámenes de admisión.

En cada capítulo se empieza estableciendo claramente las definiciones, principios, axiomas y teorema pertinentes, juntos con el material ilustrativo y descriptivo. A continuación vienen series de ejercicios, problemas resueltos y problemas propuestos, ordenados secuencialmente de acuerdo al grado de dificultad. Los proble-

mas resueltos sirven para ilustrar y ampliar la teoría, arrojan claridad sobre todos aquellos detalles que permiten la repetición de principios básicos vitales en el aprendizaje.

Finalmente deseo dedicar esta obra a todas aquellas personas que motivaron el inicio y la culminación de la misma en particular a la memoria de don Alejandro Torres Zúñiga mi padre; al igual que los amigos y colegas como don Edgardo Callirgos Benites, Alejandro Pillaca Rodríguez, Juan Manuel Guizado Estrada, Augusto Gonzales Escudero, Tomás Mendivil Calderón, José Luis Canales Peve, Robert Cabada López asi como a mis hermanos Alejandro y Miguel Angel, todos ellos aportaron sus valiosas sugerencias y sobre todo impulsando a ver materializado lo que alguna vez fue iniciativa.

También mi gratitud al personal de la Editorial San Marcos por su profesionalismo y cooperación constante, en especial al señor Aníbal Paredes Galván por su entusiasmo e innegable deseo de servicio a la gran legión de estudiosos, lectores e investigadores de nuestro país.

El Autor

INDICE

CAPÍTULO 1
LÓGICA 9

CAPÍTULO 2
ALGEBRA 29

CAPÍTULO 3
TEORÍA DE EXPONENTES Y DE LA POTENCIACIÓN 71

CAPÍTULO 4
LA REGLA POLINOMIAL 117

CAPÍTULO 5
LA ADICIÓN Y LA MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA 155

CAPÍTULO 6
LA DIVISIÓN Y LA DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA 193

CAPÍTULO 7
LA FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA 235

CAPÍTULO 8
LA FRACCIÓN ALGEBRAICA 293

CAPÍTULO 9
TEORÍA COMBINATORIA 339

CAPÍTULO 10
LA POTENCIACIÓN 381

CAPÍTULO 11
LA RADICACIÓN ALGEBRAICA 415

CAPÍTULO 12

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS "C" 453

CAPÍTULO 13

TEORÍA ELEMENTAL DEL LÍMITE 501

CAPÍTULO 14

LA FUNCIÓN DERIVADA 551

CAPÍTULO 15

LAS SUCESIONES 589

CAPÍTULO 16

LAS DESIGUALDADES 653

CAPÍTULO 17

LA ECUACIÓN 731

CAPÍTULO 18

LA FUNCIÓN 793

CAPÍTULO 19

EL LOGARITMO 853

CAPÍTULO 20

EL ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS 899

CAPÍTULO 21

LA MATRÍZ 965

CAPÍTULO 22

EL ALGEBRA COMERCIAL 1 005

CAPÍTULO 23

LA FUNCIÓN INTEGRAL 1 017

CAPÍTULO 24

LA PROBABILIDAD 1 037

CAPITULO 1

LOGICA

Gran parte del trabajo matemático se realiza con proposiciones, por tal motivo es indispensable tener claridad en el concepto de PROPOSICION y efectuar las operaciones correspondientes.

1.1 ENUNCIADO:

Definición.- Es toda oración o frase.

Ejemplos: Buenos días
¿Qué hora es?
Escribe una carta
¿Qué es la densidad?

1.2 PROPOSICION LOGICA O PROPOSICION:

Definición.- Proposición es todo enunciado al que se le puede asignar un valor veritativo, verdadero (V) o falso (F).

Notación: Mediante las letras minúsculas p, q, r, s, t, . . . que vienen a ser las variables o símbolos proposicionales.

Ejemplos:

p: "El número 20 es múltiplo de 4 y 5" .... (V)
q: "Los hipopótamos son mamíferos" .... (V)
r: "Cristóbal Colón nació en Sudamérica"........ (F)
s: " $2 + 3 + 5 = 10$ " .... (V)
t: "3 es un número par"..................................... (F)
u: "El cero es menor que -8" .... (F)
v: " $2^{10} = 1024$ " .... (V)
k: "El sol es una estrella " .... (V)

Es frecuente establecer que las proposiciones son oraciones BIVALENTES por tener la propiedad de asumir valores de verdad: **verdadero (V) o falso (F),** mientras que los enunciados carecen de dicha propiedad:

Ejemplos:
p: El delincuente no es honrado .... (V)
q: ¿A dónde viaje? .... (No es proposición)
r: No hay árboles azules .... (V)
s: Deténgase inmediatamente .... (No es proposición)
t: Bethoven no fue músico .... (F)
u: Levantemos las manos .... (No es proposición)
v: Las rectas paralelas no se intersectan .... (V)

1.3 CLASES DE PROPOSICIONES

1.3.1 **Proposición Simple o Atómica.-** Aquellas que no pueden descomponerse en otras; se les representa mediante letras proposicionales.

Ejemplo:
p: "El triángulo tiene 3 lados"
q: 10 es un múltiplo de 2
r: Es falso que 7 es par
s: $2 + 3 = 4$

1.3.2 **Proposiciones Compuestas.-** Aquellas que se obtienen de asociar proposiciones simples mediante **conectivos lógicos** y se le representa mediante esquemas proposicionales.

Ejemplo: "64 es un número par, cuadrado perfecto y cubo perfecto".

Ejemplo: "Si José es previsor, entonces aprobará el curso; pasará a otro ciclo y podrá viajar".

Ejemplo: Si $10 > 2 \Rightarrow -10 < -2 \wedge 200 - 10 < 200 - 2$

1.4 LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON PROPOSICIONES

Dadas una o más proposiciones, cuyos valores de verdad se conocen, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad.

Dichas operaciones son:

1.- La Negación
2.- La Conjunción
3.- La Disyunción
4.- La Condicional
5.- La Bicondicional

1.5 CONECTIVOS Y SIMBOLOGIA LOGICA

Desde que se puede operar con proposiciones y según sean dichas operaciones se usan ciertos símbolos denominados **conectivos lógicos**, que se muestran en el cuadro adjunto:

OPERACION	CONECTIVO LOGICO O SIMBOLOGIA	SIGNIFICADO
NEGACION	$\sim$	"No", o "No es cierto que"
CONJUNCION O PRODUCTO LOGICO	$\wedge$	y; "p y q"
DISYUNCION O SUMA LOGICA	$\vee$	ó; "p o q" (En el sentido incluyente)
CONDICIONAL O IMPLICACION	$\Rightarrow$	"p implica q" ó "Si p entonces q"
BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACION	$\Leftrightarrow$	"p sí y solo si q"
DIFERENCIA SIMETRICA	$\underline{\vee}$ Δ	"p o q" (En el sentido excluyente)

JERARQUIA DE LOS CONECTIVOS LOGICOS

Es de menor a mayor jerarquía:

$\sim$, ($\wedge$ y $\vee$) , $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, . . . etc ($\wedge$ y $\vee$ son de igual jerarquía)

1.6 DEFINICION DE LAS OPERACIONES PROPOSICIONALES Y TABLAS DE VERDAD BASICAS

1.6.1. La Negación ($\sim$)

Definición.- La negación de la proposición p es la proposición $\sim$ p (no p), cuya tabla de verdad es:

p	$\sim$ p
V	F
F	V

($\sim$ se lee también "es falso que. . ." ó "no p").

Ejemplo: Sea la proposición p:

p: Colón no nació en América; entonces la negación será la siguiente proposición:

$\sim$ p: **Es falso** que Colón no nació en América

También $\sim$ p: Colón es americano

Usualmente se dice que el símbolo “ ~ “ cambia el valor de la proposición.

Ejemplo Explicativo:

La negación de: q: Está lloviendo
será: $\sim q$: **no** está lloviendo
también: $\sim q$: **Es falso que** está lloviendo
también: $\sim q$: **No es cierto que** está lloviendo

Ejemplo: La negación de la proposición r:

r: $2 + 6 = 9$; será:
$\sim r$: $2 + 6 \neq 9$
$\sim r$: **Es falso que (2 + 6 = 9)**
$\sim r$: **No es cierto que (2 + 6 = 9)**

1.6.2. La Conjunción ($\wedge$)

Definición.- Conjunción de las proposiciones p y q es la proposición “$p \wedge q$” cuya tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(La conjunción de dos proposiciones es verdadera (V) sólo si cada componente es verdadero, en otro caso es falsa).

Usualmente el símbolo $\wedge$ se traduce también como:

$\wedge$ → “PERO”
$\wedge$ → “AUNQUE”
$\wedge$ → “SIN EMBARGO”
$\wedge$ → “NO OBSTANTE”

Ejemplo Explicativo:

Sean las proposiciones: p: “Está lloviendo”
q: “Hay fuerte viento”

Entonces $p \wedge q$ implica la proposición siguiente:

$p \wedge q$: "Está nublado y hay fuerte viento"

también $p \wedge q$: "Está nublado **pero** hay fuerte viento"

también $p \wedge q$: "Está nublado **aunque** hay fuerte viento"

también $p \wedge q$: "Está nublado **sin embargo** hay fuerte viento"

también $p \wedge q$: "Está nublado **no obstante** hay fuerte viento"

1.6.3. La Disyunción ($\vee$)

Definición.- Disyunción de las proposiciones p y q es la proposición "$p \vee q$" (p ó q) cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(La disyunción sólo es falsa (F) en el caso en que las dos proposiciones son falsas, en otro caso es verdadera).

Ejemplo Explicativo:

Sean las proposiciones

p: La luz tiene velocidad

q: El cuadrado de 9 es 81

$p \vee q$: La luz tiene velocidad **o** el cuadrado de 9 es 81.

En el lenguaje ordinario la palabra "o" es utilizada en sentido incluyente o excluyente; la conjunción o es utilizada en sentido **incluyente** y definiendo con el símbolo adecuado.

VALORES DE VERDAD

El objetivo es determinar los valores de verdad de una proposición compuesta, si se conocen los valores de verdad de las proposiciones componentes; para dicho efecto se establecen los siguientes principios:

1°.- **Principio de No Contradicción.-** "Una proposición no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo".

2°.- **Principio del Tercero Excluido.-** "Una proposición es verdadera o falsa (No se verifica un tercer caso)".

3°.- **Principio de la Composición**.- "Los valores de verdad de toda proposición compuesta, están determinados por los valores de verdad de las proposiciones componentes".

1.6.4. Disyunción Exclusiva (Δ ó $\veebar$)

Definición.- Disyunción Exclusiva o Diferencia Simétrica de las proposiciones p y q es la proposición $p \Delta q$ ó $p \veebar q$ (p o q, en sentido excluyente) cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(La verdad de $p \Delta q$ se caracteriza por la verdad de una y sólo una de las proposiciones componentes).

Ejemplo: p: Juan carlos está vivo o está muerto

Ejemplo: q: 7^4 es par o impar

Ejemplo: Diez es mayor que tres o diez es mayor que doce.

1.6.5. Condicional o Implicación ($\Rightarrow$)

Definición.- La condicional o implicación es la relación entre dos proposiciones p y q, tal que la condicional "$p \Rightarrow q$" es falsa sólo en el caso que p sea verdadera y q sea falsa; siendo verdadera en los demás casos.

La tabla de verdad correspondiente será:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(El único caso en el cual una deducción es incorrecta o falso ocurre cuando a partir de una información verdadera se obtiene una falsedad).

Ejemplo: q: Si 4 es mayor que 3, entonces 8 es mayor que 6.

Ejemplo: p: Si "n" es par entonces "n" no es impar

1.6.6. La Bicondicional o Doble Implicación o Equivalencia ($\Leftrightarrow$)

Definición.- La equivalencia de dos proposiciones "p" y "q" : "p" $\Leftrightarrow$ "q" es verdadera si ambas proposiciones componentes son verdaderas o ambas falsas; en cualquier otro caso "p $\Leftrightarrow$ q" es falsa.

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	F	F
F	F	V

(p $\Leftrightarrow$ q se lee: "p si sólo si q"
"p es una condición necesaria y suficiente para q")

Ejemplo: "n" es par si y sólo si "n" es divisible por 2

Ejemplo: "n" es divisible por 5 si y solo si termina en cero o en 5

1.6.7. SHAFFER O DE INCOMPATIBILIDAD (" I ")

Definición.- La incompatibilidad de dos proposiciones "p" y "q" : "p I q" es falsa si ambas proposiciones componentes son verdaderas, en cualquier otro caso "p I q" es verdadero.

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	p I q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

(p I q se lee: "p es incompatible con q").

Ejemplo: Con las proposiciones: p: $-3 > 4$
q: $114 > 100$
p | q: ($-3 > 4$) es incompatible con ($114 > 100$)

1.6.8. Nicod o Negación Conjunta (" $\downarrow$ ")

Definición.- La negación conjunta de dos proposiciones "p" y "q": "$p \downarrow q$" es verdadera si ambas proposiciones son falsas, en cualquier otro caso "$p \downarrow q$" es falsa.

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

("$p \downarrow q$" se lee: "ni p ni q")

Ejemplo: Sean las proposiciones:

p: Juan Carlos tiene sangre de color azul
q: Juan Carlos tiene sangre de color verde
$p \downarrow q$: ni Juan Carlos tiene sangre color azul ni Juan Carlos tiene sangre color verde

Ejemplo: Sean: p: $-1 > 0$
q: $10 < 1$
$p \downarrow q$: ni $(-1 > 0)$ ni $(10 < 1)$: ni es cierto que $(-1 > 0)$ ni es cierto que $(10 < 1)$

1.6.9. Tautología

Definición.- Una proposición será denominada TAUTOLOGIA si para cualquier valor de sus componentes, su valor de verdad **siempre es VERDADERO**.

1.6.9.1 Ejemplo Explicativo:

Obtener el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$p \vee \sim p$$

Solución:

(1) Ordenamos en columnas las componentes y sus valores de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

(2) Asignando el valor de verdad correspondiente a $p \vee \sim p$:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

$\therefore$ La proposición $p \vee \sim p$ es una TAUTOLOGIA

1.6.10 La Contradicción

Definición.- Una proposición se denominará CONTRADICCION, si para cualquier valor de sus componentes, su valor de verdad es **siempre FALSO.**

1.6.10.1 Ejemplo Explicativo:

Hallar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$p \wedge \sim p$$

Solución:

(1) Ordenando en columnas los componentes y sus valores de verdad.

p	$\sim p$
V	F
F	V

(2) Asignando el valor de verdad correspondiente a $p \wedge \sim p$:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

$\therefore$ La proposición $p \wedge \sim p$ es una contradicción

1.6.10.2 Ejemplo Explicativo:

Demostrar que la proposición:

$$\sim [(\sim a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow a)]$$

Es una Contradicción

Solución:

(1) Estableciendo la tabla de verdad de la proposición y sus componentes:

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \Rightarrow \sim b$	$b \Rightarrow a$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

$(\sim a \Rightarrow \sim b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)$	$\sim [(\sim a \Rightarrow \sim b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)]$
V	F
V	F
V	F
V	F

$\therefore$ La proposición $\sim [(\sim a \Rightarrow \sim b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)]$ es una Contradicción.

1.6.11. La Contingencia

Definición.- Es toda proposición que no sea **TAUTOLOGICA** ni **CONTRADICTORIA.** Entre sus valores de verdad se halla contenida V y F.

1.7. PROPOSICIONES EQUIVALENTES ($p \equiv q$)

Definición.- Dado las proposiciones p y q, éstas se denominan equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas.

Ejemplo Explicativo:

Sean las proposiciones r y s.

$$r:\ p \Rightarrow q \quad ; \quad s:\ (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$$

demostrar que son equivalentes.

Solución: Escribiendo las tablas de verdad correspondientes.

r:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

s:

$\sim p$	$\sim q$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$
F	F	V
F	V	F
V	F	V
V	V	V

Observar que los valores de verdad son idénticos.

$\therefore$ Las proposiciones r y s son equivalentes.

1.7.2 **Ejemplo Explicativo:**

Sean: $P_{(a)}$: $a + 8 = 11$
$q_{(b)}$: $b^2 = 9$
$r_{(c)}$: $c^2 - 5 > 2$

Si: $a = 2,\ b = 1,\ c = 3$

Hallar el Valor de Verdad de la proposición siguiente:

$$E = (P_{(b)} \wedge P_{(c)}) \Leftrightarrow (r_{(a)} \vee q_{(a)})$$

Solución:

(1) Calculamos el valor de verdad de $P_{(b)}$

$P_{(b)}$: $b^2 = 9$ Si $b = 1$: $1^2 = 9 \Rightarrow P_{(b)} \equiv F$

(2) Calculamos el valor de verdad de $P_{(c)}$

$P_{(c)}$: $c + 8 = 11$ Si: $c = 3$: $3 + 8 = 11 \Rightarrow P_{(c)} \equiv V$

(3) Calculamos el valor de verdad de $r_{(a)}$

$r_{(a)}$: $a^2 - 5 > 2$ Si: $a = 2$: $4 - 5 > 2 \Rightarrow r_{(a)} \equiv F$

(4) Calculamos el valor de verdad de $q_{(a)}$

$q_{(a)}$: $a^2 = 9$ Si: $a = 2$: $2^2 = 9 \Rightarrow q_{(a)} \equiv F$

(5) Reemplazando los valores hallados:

$$E = (F \wedge V) \Leftrightarrow (F \vee F) \quad ; \quad E = (F) \Leftrightarrow F$$

$\therefore$ $\boxed{E \equiv V\text{, es el valor de verdad de la proposición } E}$

1.7.3 **Ejemplo Explicativo:**

Sea $U = \{0, 2, 4, 6, 12, 14, 16\}$ y las proposiciones:

$$p: \exists x \in U / \sqrt{\frac{3^{10} - 3^x}{3^x - 3^2}} = 9 \quad ; \quad q: \exists x \in U / x^{-8} . x^9 = 1$$

Hallar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$K = (p \rightarrow q)$$

Solución:

(1º) Haciendo el estudio por partes:

$$p: \quad \frac{3^{10} - 3^x}{3^x - 3^2} = 3^4 \Rightarrow 3^{10} - 3^x = 3^4 (3^x - 3^2) \Rightarrow 3^{10} - 3^x = 3^{4+x} - 3^6$$

$$3^{10} + 3^6 = 3^{4+x} + 3^x \Rightarrow 3^6 (3^4 + 1) = 3^x (3^4 + 1) \Rightarrow 3^6 = 3^x$$

$$\boxed{x = 6 \in U ;\ p \equiv V}$$

(2°) En relación a la proposición q se tendrá:

$$q: \frac{1}{x^8} \cdot x^9 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

$$\therefore \boxed{x = 1 \notin U \; ; \; q \equiv F}$$

(3°) Reemplazando los valores de verdad sobre K.

$$\Rightarrow K = (V \Rightarrow F)$$

$$\therefore \boxed{K = F}$$

1.8. ALGEBRA DE LAS PROPOSICIONES (LEYES DE LA LOGICA PROPOSICIONAL)

LEY	OBSERVACION
Ley Idempotente: $p \vee p \equiv p \; ; \; p \wedge p \equiv p$	Válido para la conjunción o la disyunción.
Ley Conmutativa $p \wedge q \equiv q \wedge p \; ; \; p \vee q \equiv q \vee p$	Válido para la conjunción o la disyunción.
Ley Asociativa $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Para utilizar la asociación, las proposiciones deberán estar conectadas homogéneamente.
Ley Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$ $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$	Los conectivos que poseen la propiedad distributiva son: $\wedge, \vee$ y $\Rightarrow$
Ley de Existencia de los Elementos Neutros $V \wedge p \equiv p \wedge V \equiv p \qquad F \vee p \equiv p \vee F \equiv p$ $F \wedge p \equiv p \wedge F \equiv F \qquad V \vee p \equiv p \vee V \equiv V$	
Ley de Absorción $p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	
Ley de Complementación $p \vee \sim p \equiv V$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $\sim (\sim p) \equiv F \; ; \sim(\sim p) \equiv p$ $\sim V \equiv F$ $\sim F \equiv V$	

Ley de Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$; $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las proposiciones componentes
Implicación Material $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim(p \wedge \sim q)$	por lo
Doble Implicación $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	
Diferencia Simétrica (Δ) $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$	
$p \Leftrightarrow p \equiv V$	

1.9 EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1.9.1 Ejemplo Explicativo:

Dadas las siguientes proposiciones

p: $\exists\, x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| + 3 = 0$

q: $\exists!\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x - y = 1 \ldots\ldots\ (1) \\ x^2 + y = 5 \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

r: $\forall\, x \in \mathbb{Z}^+$: $\quad (3/7)^{3x-1} = 23^0$

~ S: $\forall\, x \in \mathbb{Q}'$: $\quad x^2 = 5$,

Hallar el valor de verdad de la proposición:

$$\sim\{[p \wedge (\sim q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [S \vee (\sim r \Rightarrow q)]\}$$

Solución:

Hallamos el valor de verdad de cada proposición:

(1°) Valor de verdad de la proposición "p"

Resolvemos la proposición abierta:

$|x| = -3$; no existe número real cuyo valor absoluto es negativo
$x \in \phi$

$\therefore \boxed{p \equiv F}$

(2°) Valor de verdad de la proposición "q"

Resolvemos el sistema de proposiciones abiertas de 2° grado

de (1) + (2) : $x^2 + x - 6 = 0$

$x = -3 \ , \ x = 2$

de (1): $y = x - 1 = -3 - 1 = -4$ $\therefore (-3, -4)$

de (1): $y = x - 1 = 2 - 1 = 1$ $\therefore (2, 1)$

$S = \{(-3, -4), (2, 1)\}$ Existen 2 soluciones no una sola como afirma "q"

$\therefore \boxed{q \equiv F}$

(3°) **Valor de verdad de la proposición "r"**

Resolviendo la proposición abierta

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} = \left(\frac{3}{7}\right)^{0} \ ; \ 3x - 1 = 0 \ , \ x = \frac{1}{3} \in \mathbf{Z}^{+} \ ; \ S = \{ \ \}$$

$\Rightarrow S = \{ \ \}$

$\therefore \boxed{r \equiv F}$

(4°) **Valor de verdad de la proposición "S"**

Al resolver: $x^2 = 5 \ , \ x = \pm\sqrt{5}$, las raíces son irracionales $\Rightarrow x \in \{ \ \}$

$\therefore \boxed{\sim S \equiv V \Rightarrow S \equiv F}$

(5°) **Sustituyendo los valores de verdad correspondientes:**

$$\sim \{[F \wedge (V \Rightarrow F)] \Leftrightarrow [F \vee (V \Rightarrow F)]\}$$

(6°) **Ejecutando las sentencias a partir del sector más interno.**

$\sim \{[F \wedge (F)] \Leftrightarrow [F \vee (F)]\}$

$\sim \{[F] \Leftrightarrow [F]\}$

$\sim \{V\}$

$\therefore \boxed{F}$ Es el valor de verdad de la proposición en estudio

1.9.2 **Ejemplo Explicativo:**

Sea: $U = \{3, 5, 7, 9\}$ y las proposiciones:

$h : \exists x \in U / x - 1 = 11 - 3x$

$S : \exists x \in U / (x-2)(x+3) = (x-2)(x+3)(x-7)$

Hallar el valor veritativo de la proposición siguiente:

$$k = (h \Rightarrow \sim s)$$

Solución:

(1°) **Determinaremos el valor de verdad de cada proposición**

$\Rightarrow$ **Valor de verdad de la proposición "h" respecto a U**

$x - 1 = 11 - 3x\ ,\ 4x = 12\ ,\ x = 3$

$\Rightarrow$ $h : \exists\, 3 \in U$

$\Rightarrow$ $\boxed{h \equiv V \Rightarrow \sim h \equiv F}$ .... (I)

(2°) **Valor de verdad de la proposición "s" respecto a "U"**

$\Rightarrow$ $(x-2)(x+3) - (x-2)(x+3)(x-7) = 0$

$\Rightarrow$ $(x-2)(x+3)[1 - x + 7] = 0$

$\Rightarrow$ $(x-2)(x+3)(8-x) = 0\ ;\ x-2 = 0 \vee x+3 = 0 \vee 8-x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 2 \vee x = -3 \vee x = 8$

$\Rightarrow$ $S: \nexists\, x \in U$

$\Rightarrow$ $\boxed{S \equiv F \Rightarrow \sim S \equiv V}$ .... (II)

(3°) Valor de verdad de la proposición: $h \Rightarrow \sim S$

$\Rightarrow$ $(h \Rightarrow \sim S)$, $\Rightarrow (V \Rightarrow V)$,

$\therefore$ $\boxed{h \Rightarrow \sim S \equiv V}$ Que es el valor veritativo de la proposición en estudio.

1.9.3 **Ejemplo Explicativo:**

Dadas las proposiciones:

p: Alejandro es artista

q: Alejandro es un buen estudiante

r: Alejandro es cirujano

Simbolizar:

"Si no es el caso que Alejandro sea un artista y un buen estudiante entonces es cirujano o no es artista".

***Solución*:**

(1°) Simbolizando preliminarmente:

$p \wedge q$: Alejandro es un artista y un buen estudiante

$\sim (p \wedge q)$: No es el caso que Alejandro sea un artista y un buen estudiante.

$r \wedge \sim p$: Alejandro es cirujano o no es artista

(2°) Conectando las proposiciones anteriores

$$\boxed{\sim (p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \sim q)}$$

1.9.4 **Ejemplo Explicativo:**

Simplificar: $[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Recuerde:

a) **La definición de bicondicional**

Sea: $r \Leftrightarrow s$

$r \Leftrightarrow s \equiv (r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow r) \equiv (\sim r \vee s) \wedge (\sim s \vee r)$

b) **La definición de condicional**

Sea: $r \Rightarrow t$

$r \Rightarrow t \equiv \sim r \vee t$

c) **El teorema de Morgan**

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Solución.

(1°) **Mediante la definición de bicondicional**

$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

(2°) **Mediante la definición de condicional, en la proposición equivalente**

$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge p\} \Rightarrow q$

$\{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \wedge p\} \Rightarrow q$

En este último, negando lo contenido en llaves a fin de **establecer la condicional.**

$\sim \{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \wedge p\} \vee q$

(3°) **De acuerdo al teorema de Morgan**

$\{\sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee \sim p\} \vee q$

Nuevamente el teorema de Morgan

$\{\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p) \vee \sim p\} \vee q$

Reiterando el teorema de Morgan

$\{(\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p) \vee \sim p\} \vee q$

$\{(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee \sim p\} \vee q$

(4°) **Mediante Asociación** $\underbrace{(p \wedge \sim q) \vee q}_{(q \vee p)} \vee \underbrace{(q \wedge \sim p) \vee \sim p}_{\sim p}$

Lo cual permite: $\underbrace{p \vee \sim p}_{V} \vee q$

$\therefore \boxed{V}$

1.9.5 **Ejemplo Explicativo:**

Simplificar: $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

Solución:

(1°) **Expresando en términos de la negación, conjunción como:**

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, una condicional se puede expresar como una disyunción al negarse su antecedente:

$$r \Rightarrow s \equiv \sim r \vee q$$

(2°) **Se tendrá hasta ahora:**

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p \equiv [(\sim p \vee q) \wedge q] \Rightarrow p$$

Sustituyendo nuevamente la condicional mediante la negación del antecedente:

$$\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge q] \vee p$$

(3°) **En el corchete ocurre lo siguiente:**

$q \wedge (\sim p \vee q) \equiv q$; mediante la ley de absorción; también se puede lograr dicho resultado mediante distribución:

$$\begin{aligned} q \wedge (\sim p \vee q) &\equiv \underbrace{(q \wedge (\sim p))}_{} \vee (q \wedge q) \\ &\equiv q \vee q \\ &\equiv q \end{aligned}$$

(4°) **Se dispone ahora de:**

$$\sim [\underbrace{(\sim p \vee q) \wedge q}_{q}] \vee p$$

$\therefore$ $\boxed{\sim q \vee p}$ Es la simplificación

1.10 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

(1°) Si la proposición

$$(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s) \text{ es falsa}$$

hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

(b) $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow ((\sim q \vee r) \wedge s]$

(c) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$

Rpta: FFF

(2°) Dada la siguiente proposición

$$(p \wedge q) \square (p \Leftrightarrow q)$$

¿Cuál es el conectivo que deberá ser en lugar del rectángulo para que la proposición sea una tautología.

Rpta: $\Rightarrow$

(3°) Simplificar: $\sim[\sim(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)]$

Rpta: $p \vee q$

(4°) De las siguientes fórmulas

(I) $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

(II) $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$

(III) $(\sim p \vee q) \Rightarrow p$

¿Cuáles son lógicamente equivalentes?

Rpta: (I) y (II)

(5°) Si la proposición: $\sim(p \wedge q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$

es verdadera, entonces los valores de verdad de p y q serán respectivamente.

Rpta: F y F

(6°) Si el esquema: $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

tiene valor de verdad falso, hallar el valor de verdad de los esquemas:

I) $[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$

II) $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$

III) $\sim(q \vee r) \vee (p \vee q)$

Rpta: B

(7°) ¿Cuál de los siguientes no señala una tautología?

(I) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

(II) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(III) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

(IV) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

(V) $\sim(p \wedge \sim q)$

Rpta: III

(8°) Dadas las fórmulas:

(I) : $(\sim p \vee q) \Rightarrow p$

(II) : $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$

(III) : $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

¿Cuáles son lógicamente equivalentes?

Rpta: (II) y (III)

(9°) Si $r \# s$ significa "ni r ni s". Indicar cuales de las siguientes proposiciones son tautologías.

(I) $(r \# s) \Leftrightarrow \sim (r \vee s)$

(II) $\sim (r \wedge s) \Leftrightarrow r \# s$

(III) $\sim (r \# s) \Leftrightarrow r \Delta s$

(IV) $[(r \# s) \# (s \# r) \Leftrightarrow r \wedge s$

Rpta: IV

(10°) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente **a**?:

"Es obligatorio pagar 100 soles y ser miembro activo para escuchar el concierto"

(I) Pagar 100 soles y ser miembro o no escuchar el concierto.

(II) Pagar 100 soles o ser miembro y no escuchar el concierto.

(III) No escuchar el concierto o pagar 100 soles y ser miembro.

Rpta: I

(11°) Si la proposición: $(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa

hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

(I) $(\sim p \Rightarrow t) \Rightarrow [\sim q \Rightarrow r]$

(II) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$

(III) $\sim [(\sim p) \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$

Rpta: (I) F (II) F (III) V

(12°) Dada las proposiciones p y q se establece: $p \square q \equiv p \wedge (\sim q)$

¿Cuál de las siguientes es equivalente a? $p \Rightarrow \sim q$

(I) $\sim (p \square q)$

(II) $(\sim p) \square q$

(III) $\sim [p \square (\sim q)]$

(V) $p \square (\sim q)$

Rpta. III

(13°) Como están relacionadas las siguientes proposiciones?

r: $-[\sim q \Rightarrow \sim p] \wedge [q \Rightarrow \sim (p \Rightarrow r)]$

s: $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$

t: $\sim [(q \vee \sim p) \vee (q \wedge (r \vee \sim p))]$

Rpta: r , s y t son equivalentes

(14°) ¿Cuál de las siguientes son equivalentes lógicas?

a) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

b) $\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \Leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$

c) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

Rpta: a y b son equivalentes

(15°) Hallar el valor de verdad de la proposición.

$$\left(\sqrt[4]{9} > \sqrt{3} \wedge 1 > 0\right) \Rightarrow \left[\sqrt{3} \geq \sqrt[4]{9} \vee \sqrt[4]{9}^{\,-1} < \sqrt{2}^{\,-1} \Leftrightarrow -1 < 0\right]$$

Rpta: Verdadera.

CAPITULO 2

EL ALGEBRA

LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2.1. EL ALGEBRA DE VARIABLE REAL

Definición.- "El Algebra de variable real es un sistema no vacío dotado de una estructura matemática en la cual se definen las operaciones de adición y multiplicación sujetas a las leyes de conmutatividad, asociatividad, distributividad y de orden".

2.2. AXIOMAS DEL ALGEBRA DE VARIABLE REAL.- A continuación establecemos los once axiomas que permitirán obtener las reglas y algoritmos utilizados en el Algebra y obtenidos a partir del sistema de los números reales.

2.2.1 ***Definición.-*** EL sistema de los números reales es un conjunto $\mathbb{R}$, dos operaciones diferentes adición y multiplicación y una relación de orden, denotado por " $<$ " que se lee "menor que", los cuales satisfacen los siguientes axiomas:

	NOMBRE	ENUNCIADO
A1	Propiedad de Clausura, Estabilidad o de Cerradura de la **Adición**.	$\forall\ a\ ;\ b \in \mathbb{R}\ ;\ a + b \in \mathbb{R}$ **"La suma de 2 números reales es otro número real".**
A2	Ley Conmutativa de la **Adición**.	$\forall\ a\ ;\ b \in \mathbb{R}\ ;\ a + b = b + a$ **"El orden de los sumandos no altera la suma total".**
A3	Ley Asociativa de la **Adición**.	$\forall\ a\ ;\ b$ y $c \in \mathbb{R}$ $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
A4	Existencia del **Elemento Neutro Aditivo.**	$\forall\ a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = a$ **"El cero es el elemento neutro aditivo"**
A5	Existencia de **Elemento Opuesto** o Invertiva	$\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\exists$ es un solo elemento " $-a$ " ; tal que: $a + (-a) = 0$ "El elemento $-a$ es el opuesto de a". ***Definición.-*** Si a y b son opuestos $a + b = 0$

M1	**Propiedad de Clausura, Estabilidad o de Cerradura de la Multiplicación.**	$\forall$ a ; b $\in$ IR ; ab $\in$ IR **"La multiplicación de 2 números reales es otro número real".**
M2	**Ley Conmutativa de la Multiplicación.**	$\forall$ a ; b $\in$ IR ; ab = ba **"El orden de los factores no altera el producto total".**
M3	**Ley Asociativa de la Multiplicación.**	$\forall$ a ; b y c $\in$ IR abc = (ab) c = a (bc)
M4	**Existencia del Elemento Neutro Multiplicativo.**	Si: $\forall$ a $\in$ IR a (1) = a **"La unidad es el elemento neutro multiplicativo".**
M5	**Existencia del Elemento Recíproco.**	$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists\ 1/a$ $/\ a \times \frac{1}{a} = 1$ El cero carece de elemento recíproco. **Definición.-** Si a y b son recíprocos ab = 1
D	**Ley Distributiva del Producto respecto a la Adición.**	Si: $\forall$ a ; b y c $\in$ IR a (b + c) = ab + ac y (b + c) a = ba + ca

2.3. TEOREMAS Y COROLARIOS DE LA VARIABLE REAL.

2.3.1. TEOREMA N # 1	$\forall$ a $\in$ IR: a (0) = 0 = (0) . a "La multiplicación de un número real por cero, es igual a cero".
Obsérvese que las demostraciones las realizamos remitiéndonos a los alcances de los axiomas mencionados. Sin embargo, aceptemos los siguientes que son susceptibles a la demostración correspondiente.	**Demostración:** a (0) = a . 0 + 0 — Por A_4 (El cero es el elemento neutro aditivo). = a . 0 + (a - a) — Por A_5 (a y -a son opuestos; a + (- a) = 0). = $\underbrace{a . 0 + a}$ - a — Por A_3 (Asociando sumandos). = $\underbrace{a (0 + 1)}$ - a — Por D (Inverso del axioma de distribución). = a (1) - a — Por A_4 (El cero es el elemento neutro aditivo). = a - a — Por M_4 (La unidad es el elemento neutro multiplicativo). = 0 — Por A5 (La suma de dos elementos opuestos es cero). $\therefore$ $\boxed{a (0) = 0}$ **Lqqd.**

2.3.2 TEOREMA # 2:	$\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1)a$ **"El opuesto de "a" es equivalente a la multiplicación de "a" por - 1".**
2.3.3 TEOREMA # 3:	$\forall a ; b \in \mathbb{R}$: $(-a)(-b) = ab$ **"El producto de los opuestos de a y b es igual que el producto de a y b".**
2.3.4. COROLARIO # 1:	$\forall a ; b \in \mathbb{R}$: $a(-b) = a(-1)b = (-1)ab = -ab$ **"La multiplicación de a por el opuesto de b es igual que la multiplicación del opuesto de a por b".**
2.3.5. TEOREMA # 4:	$\forall a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$ **"El opuesto del opuesto de un elemento real es el mismo elemento real".**
2.3.6. TEOREMA # 5:	$\forall a ; b$ y $c \in \mathbb{R}$: $(-a)(-b)(-c) = -abc$ **"La multiplicación de los opuestos de a, b y c es igual que el opuesto del producto abc".**
2.3.7. DEFINICION # 1:	$\forall a ; b \in \mathbb{R}$: $a - b = a + (-b)$ **"La diferencia de a y b es igual que la suma de a y el opuesto de b".**
2.3.8. DEFINICION # 2:	$\forall a ; b \in \mathbb{R} ; b \neq 0$ $\frac{a}{b} = ab^{-1}$
2.3.9. TEOREMA # 6:	$-0 = 0$ "El opuesto de cero es cero".
2.3.10. TEOREMA # 7:	$\forall a ; b \in \mathbb{R}$: $-a - b = -(a + b)$ "La suma de los opuestos de a y b es igual que el opuesto de "a + b" ".
2.3.11. TEOREMA # 8: (Ley de Cancelación de la Adición)	Si: $a + b = a + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow b = c$
2.3.12. TEOREMA # 9: (Ley de Cancelación de los Factores)	Si: $ab = ac \quad ; \quad a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow b = c$
2.3.13. TEOREMA # 10:	Si: $a - (b - c)$ $a - (b - c) = a - b + c$
2.3.14. TEOREMA # 11:	$1^{-1} = 1$ El recíproco de la unidad es la unidad.

2.3.15. TEOREMA # 12:	Si: $ab = 0$ $\Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$
2.3.16. TEOREMA # 13:	Si: $ab \neq 0$ $\Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$
2.3.17. TEOREMA # 14:	Si: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$
2.3.18. TEOREMA # 15:	Sea: $ax + b = 0$; $a, b, x \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ $\Rightarrow x = -b/a$ (UNICA)
2.3.19. TEOREMA # 16:	Sea: $ax = b$; $a, b, x \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ $\Leftrightarrow \exists\, x /\, x = b/a$
2.3.20. EL OPERADOR "OPUESTO DE X"	Si: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow Op(x) = -x$, Que se lee como el "opuesto" de x. **Ejemplo:** $Op(4) = -4$, $Op(-1/2) = 1/2$
2.3.21. EL OPERADOR "RECIPROCO DE X"	Si: $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\Rightarrow Rec(x) = \frac{1}{x}$, Que se lee el recíproco de x **Ejemplo:** $Rec(3) = \frac{1}{3}$, $Rec\left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{-2/7}$

2.4. LA IGUALDAD (=)

Definición.- "Es la relación entre los números reales que poseen el mismo valor y el mismo signo".

Ejemplo: Si: $a = b$

$\Rightarrow$ a y b poseen el mismo valor y tienen el mismo signo.

$\Rightarrow$ se están usando dos símbolos distintos para representar un único elemento.

$\Rightarrow$ "a" es el mismo elemento que "b"

2.5. AXIOMAS Y TEOREMAS DE LA IGUALDAD.- Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; los siguientes axiomas rigen formalmente el uso de la relación igualdad.

2.5.1. Axiomas de la Igualdad

	AXIOMA	DESCRIPCION
I_1	AXIOMA DE REFLEXIVIDAD	$a = a$ "Todo elemento real es igual a si mismo".
I_2	AXIOMA DE SIMETRIA	Si: $a = b$ $\Rightarrow b = a$

I_3	**AXIOMA DE TRANSITIVIDAD**	Si: $a = b$ y $b = c$ $\Rightarrow a = c$
I_4	**AXIOMA DE SUSTITUCION**	Si: $a = b$ y $a + c = d$ $\Rightarrow b + c = d$ Si: $a = b$ y $ac = d$ $\Rightarrow bc = d$

2.5.2. Teoremas de la Igualdad

TEOREMA # 1 **(Propiedad de la Adición de la Igualdad)**	Si: $a = b$ $\Rightarrow a + c = b + c$; $a , b , c \in \mathbb{R}$
TEOREMA # 2 **(Propiedad de la Multiplicación de la Igualdad)**	Si: $a = b$ $\Rightarrow ac = bc$; $a , b , c \in \mathbb{R}$
TEOREMA # 3 **(Reciprocidad de la Igualdad)**	Si: $a = b$ $\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$; $a , b \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$
TEOREMA # 4	Si: $a + b = 0$ $\Rightarrow a = - b$ y $b = - a$
TEOREMA # 5	Si: $ab = 1$ $\Rightarrow a = \frac{1}{b}$ y $b = \frac{1}{a}$; $a , b \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$
TEOREMA # 6	Si: $a = c$ y $a + b = c + d$ $\Rightarrow b = d$
TEOREMA # 7	Si: $a = c$ y $ab = cd$ $\Rightarrow b = d$; $a \neq 0$

2.6. TERMINO ALGEBRAICO (MONOMIO)

Definición.- Es la expresión en la cual los elementos están relacionados principalmente mediante el producto y también por las operaciones o algoritmos de la DIVISION, POTENCIACION y RADICACION.

Ejemplo: xy Es un monomio

Ejemplo: x^4 Es un monomio

Ejemplo: $\frac{xy}{abc}$ Es un monomio no entero

Ejemplo: $(a + b) (a - b)$ Es un monomio

Ejemplo: $P(x ; b) = \sqrt{x}\left(\frac{x}{b}-1\right)$ Es un monomio irracional

2.6.1. Partes de un término algebraico

Se distingue:

Coeficiente	: Es el número o parámetro que multiplica a la parte variable.
Parte Variable	: Letras que asocia la expresión algebraica.
CVA	: Conjunto de Valores Admisibles o usualmente **Dominio.**

Ejemplo:

$$\underset{\text{Coeficiente}}{12}\,\underbrace{x^4 y}_{\text{Parte Variable}} \quad , \underbrace{x \in \mathbb{R} \wedge y \in [\,4\,,\,95 >}_{\text{Dominio}}$$

Ejemplo:

$$\underset{\text{Coeficiente}}{-\frac{33}{49}} \cdot \underbrace{\frac{x}{y}}_{\text{Parte Variable}} \quad , \underbrace{x > y \wedge x \in < -10 \;\; -3 >}_{\text{Dominio}}$$

Ampliando.- Un monomio se representa estrictamente en la forma siguiente:

$$F(x\,,y) = \frac{85x^4\sqrt{y}}{9(y-1)(x-8)}; \;\{\, x \in \mathbb{R} - \{\,8\,\}\,;\, y \in \mathbb{R} - \{\,1\,\}\,\}$$

$\Rightarrow$ a) Coeficiente: $\dfrac{85}{9}$

b) Parte Variable: $\dfrac{x^4\sqrt{y}}{(y-1)(x-8)}$

c) C.V.A.: $\{\, x \in \mathbb{R} - \{\,8\,\}\,;\, y \in \mathbb{R}^{+} - \{\,1\,\}\,\}$

2.6.2. Términos o Monomios semejantes.-

Definición.- Aquellos que poseen partes variables idénticas, también:

Las expresiones algebraicas que se diferencian únicamente en los coeficientes.

Ejemplo: ab^4c ; $-89ab^4c$; $\dfrac{131}{4}ab^4c$ son monomios semejantes.

2.6.3. Propiedad aditiva de los términos semejantes

Si dos o más términos son semejantes estos pueden sumarse algebraicamente atendiendo a sus coeficientes.

Ejemplo: $\sqrt{ab} + 2000\sqrt{ab} + 339\sqrt{ab}$

$\Rightarrow$ Sumando coeficientes: 1 + 2 000 + 339

$$\therefore \boxed{\sqrt{ab} + 2000\sqrt{ab} + 339\sqrt{ab} = 2340\sqrt{ab}}$$

Ejemplo Explicativo:

Si x, y ∈ IR - { 0 } ; efectuar:

$$K = 7\,\text{Rec}\left(\frac{9x^{-4}}{y}\right) + 33\,\text{Rec}\left(\frac{9x^{-4}}{y}\right) + 76\,\text{Rec}\left(\frac{9x^{-4}}{y}\right)$$

Solución:

(1°) Se distinguen términos semejantes, por lo que bastará sumar algebraicamente los coeficientes.

$$\Rightarrow K = (7 + 33 + 76)\,\text{Rec}\left(\frac{9x^{-4}}{y}\right)$$

$$\Rightarrow K = 180\,\text{Rec}\left(\frac{9x^{-4}}{y}\right)$$

(2°) Por definición de reciprocidad:

$$\Rightarrow K = 180\left(\frac{y}{9x^{-4}}\right)$$

$$\therefore \boxed{K = 20x^4y}$$

Ejemplo explicativo:

Sumar: $S = \underbrace{\sqrt{x\sqrt{x}} + 16\sqrt{x\sqrt{x}} + 81\sqrt{x\sqrt{x}} + 256\sqrt{x\sqrt{x}} \ldots + n\sqrt{x\sqrt{x}}}_{\text{n términos}}$

Considere que: $x = \dfrac{30\sqrt[3]{30}}{n^{4/3}(n+1)^{4/3}(2n+1)^{4/3}}$

Recuerde:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 = \frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}\ ,\ k \in Z^+$$

Solución:

(1°) **Por existir términos semejantes, se puede disponer:**

$$S = \underbrace{(1+16+81+256+\ldots)}_{\text{n términos}}\sqrt{x\sqrt{x}} \Rightarrow S = \underbrace{\left(1+2^4+3^4+4^4+\ldots+n^4\right)}_{\substack{\text{suma de las primeras}\\ \text{cuartas potencias de}\\ \text{los \#s naturales.}}}\sqrt{x\sqrt{x}}$$

(2°) **De acuerdo a la observación establecida:**

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \cdot x^{3/4} \quad \text{.............................} (\text{I})$$

(3°) **Sustituyendo la condición establecida para x en (I)**

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \cdot \frac{30^{3/4} \cdot \sqrt[3]{30}^{-3/4}}{\left[n^{4/3}(n+1)^{4/3}(2n+1)^{4/3}\right]^{3/4}}$$

(4°) $$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \cdot \frac{30^{3/4+1/4}}{n^{4/3\times 3/4}(n+1)^{4/3\times 3/4}(2n+1)^{4/3\times 3/4}}$$

(5°) Simplificando:

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \times \frac{30}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore \boxed{S = 3n^2 + 3n - 1}$$

2.6.4. Simbología para la asociación de términos

Los Paréntesis	: ( )
Los Corchetes	: [ ]
Las Llaves	: { }
Barra o Vínculo	: ___

Ejemplo: sea: a + 2 (b + c)

Interpretación:

Empezamos de la parte interna:

El paréntesis asocia a la suma de b y c para proseguir con la multiplicación por 2 y finalmente adicionar a.

Ejemplo: Sea: - a + 7 [3 (b + x) + y]

Interpretación:

Empezamos de la parte más interna del algoritmo en estudio:

El paréntesis asocia la suma de b y x para luego triplicar dicha suma, a continuación se adiciona y para posteriormente multiplicarlo por 7 y adicionar finalmente el opuesto de a.

Orden de Prioridad.-

Usualmente para establecer los algoritmos con la variable real y siendo necesario el escalonamiento de signos de asociación.

Se da prioridad a las partes más internas al paréntesis y a continuación los corchetes para cerrar externamente con las llaves:

Ejemplo: $m\,(a+b)+p$; paréntesis

Ejemplo: $y\,[\,x^2\,(a+b)+q\,]+a^3$; paréntesis y corchetes

Ejemplo: $x^9\,\{\,z^4\,[\,x^2\,(a+b)+b\,]+b^3\,\}+z^5$

Paréntesis: 1ª Prioridad

Corchetes: 2ª Prioridad

Llaves: 3ª Prioridad

2.7. LA EXPRESION ALGEBRAICA (E.A.)

Definición.- "Es toda asociación finita de variables, parámetros y constantes numéricas, sometidas a un número limitado de veces a las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación; asociadas con todas o alguna de ellas, a condición, que una variable nunca se ubique como exponente de una potenciación o como Indice de una radicación".

2.7.1. Clasificación de la Expresión Algebraica

A.- Por la racionalidad o naturaleza.

B.- Por el número de términos.

A.- Por la Racionalidad o Naturaleza.-

Expresión Algebraica (E.A.)

- **I.- E.A. Racional**
  No presentan radicales afectando a variable alguna.
  - **ENTERA**
    Las variables presentan exponentes naturales. ***Ej:*** x^2y
  - **FRACCIONARIA**
    Las variables presentan exponentes enteros negativos o existe denominador variable.
    Ej: $\dfrac{x^3}{y}$
- **II.- E.A. Irracional**
  Presentan radicales o equivalentes afectando a parte variable.
  Ej: $\sqrt[3]{x}$; $1/\sqrt{x}$

Ampliando el cuadro anterior:

EXP. MATEMATICA	EXPRESION ALGEBRAICA (E.A.)	I.- E.A. RACIONAL	ENTERAS / FRACCIONARIAS
		II.- E.A. IRRACIONAL	
	EXPRESIONES NO ALGEBRAICAS O TRASCENDENTES	I.- Exp. Exponencial	: 3^x
		II.- Exp. Logarítmica	: $\log(1/x)$
		III.- Exp. Trigonométrica	: $\operatorname{cotg}(x-1)$
		IV.- Exp. Trig. Circular	: $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$
		V.- Exp. Vectorial	: $(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}$
		VI.- Exp. Hiperbólica	: Senhx
		VII.- Exp. Integral	: $\int\frac{dx}{x}$

B.- POR EL NUMERO DE TERMINOS:

MONOMIO.. .... 1 TERMINO
BINOMIO .... 2 TERMINOS
TRINOMIO.................... 3 TERMINOS
....
POLINOMIO .... n TERMINOS

Comentarios:

(1) Las expresiones que no comprenden al concepto de expresión algebraica conforman el conjunto de expresiones no algebraicas o trascendentes.

(2) Todas las **constantes numéricas** $\neq 0$, son consideradas como EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES ENTERAS de grado igual a cero.

(3) El conjunto de las expresiones algebraicas y las no algebraicas conforman el universo de la expresión matemática.

(4) Exclusivamente la expresión algebraica posee el concepto de grado o grado algebraico.

(5) Una expresión algebraica es diferente a una función algebraica por dos razones esenciales (a) por ser definiciones absolutamente distintas (b) la variable de una función expresa el dominio de definición de la misma mientras que la variable en una expresión algebraica no tiene mayor importancia que los valores permisibles por adoptarse.

2.8. EL GRADO ALGEBRAICO.-

Definición.- Es el exponente ($\in \mathbb{Q}$) de toda base variable real.

Propiedad: "Toda constante numérica $\neq 0$ es de grado cero". ***Ej:*** 11^5 es de grado cero

Ejemplo: x^3	Es una exp. algebraica racional entera de tercer grado.
Ejemplo: $xy + y^{-1}$	Es una exp. algebraica racional fraccionaria de segundo grado.
Ejemplo: $x^5 + y^{-1} + \sqrt{x}$	Es una exp. algebraica irracional de quinto grado.
Ejemplo: $5^{12} + \frac{1}{3} + \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)}$	Es una expresión algebraica racional entera de grado cero.
Ejemplo: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \infty$	No es una expresión algebraica, pues tiene infinitos términos, carece de grado.

2.8.1. El grado de las Operaciones Algebraicas.- Se obtiene de acuerdo al cuadro siguiente:

OPERACION	REGLA	EJEMPLOS
I.- PRODUCTO	G_P = Suma de los grados de los factores.	Sea: $x^3y^5z^{10}$ $\Rightarrow G = 3 + 5 + 10 = 18$
II.- DIVISION	G_D = Diferencia del grado del numerador menos el grado del denominador	Sea: $(x^4 y^{16}) / (a^3b^8)$ $\Rightarrow G = 20 - 11 = 9$
III.-POTENCIACION	G_{Pot} = Producto del grado de la base por el exponente de la potencia.	Sea: $(a^3b^4x)^5$ $\Rightarrow G = (3 + 4 + 1) \times 5 = 40$
IV.-RADICACION	G_R = División del grado del subradical entre el índice del radical.	Sea: $\sqrt{ab^2cx^5y^3}$ $\Rightarrow G = \frac{1+2+1+5+3}{2} = 6$
V.- SUMA	G_S = De seleccionar el mayor de los grados de cada sumando.	Sea: $x^5 + y^9$ $\Rightarrow G = 9$ (El mayor)
VI.-DIFERENCIA	G_D = De seleccionar el mayor de los grados de cada sumando	Sea: $x^{1/3} - y^{1/5}$ $\Rightarrow G = 1/3$ (El mayor)

2.8.2. Clasificación del Grado de las Expresiones Algebraicas de mas de una variable.

A1.	Grado Absoluto de un Monomio (G)	Es el grado del monomio.	***Ejemplo:*** Sea: $-38x^5y^6z^{12}$ $\Rightarrow G = 5+6+12 = 23$
A2	Grado Relativo del Monomio (G_R)	Es el grado en relación a una letra específica del monomio.	$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow G_x = 5\\ \Rightarrow G_y = 6\\ \Rightarrow G_z = 12\end{array}\right\}$ Grados Relativos
B1	Grado Absoluto de un Polinomio (G)	Es el grado del polinomio.	***Ejemplo:*** $x^4 + x^3y^2 + xy^7$ $\Rightarrow G = 8$ El grado Absoluto
B2	Grado **Relativo de un Polinomio** (G_r)	Es el grado en relación a una determinada variable al ignorar las otras.	$\Rightarrow G_x = 4 \leftarrow$ El grado respecto a x $\Rightarrow G_y = 7 \leftarrow$ El grado respecto a y

Ejemplo: $\sqrt{x}$	Es una exp. algebraica irracional de grado 1 / 2.
Ejemplo: $\dfrac{x^{14}+y^3}{x^2-y^5x}$	Es una exp. algebraica racional de: $G = 14 - 6 = 8$ $G_x = 14 - 2 = 12$ $G_y = 3 - 5 = -2$
Ejemplo: 2^{x+1}	No es una expresión algebraica; precisando se trata de una expresión trascendente exponencial. Grado = ϕ ;
Ejemplo: $\text{Sen}^3(x^2+x+10)$	Es una exp. trascendente trigonométrica Grado ϕ ;
Ejemplo: x^x	Es una exp. trascendente exponencial Grado = ϕ
Ejemplo: Sen 15°	Es una constante numérica, por lo que será una expresión algebraica racional entera.
Ejemplo: $\text{Log}\,{}^{31}\!\sqrt{1\,992}^{\,\text{tg}\,28}$	Es una constante numérica, por lo que será una expresión algebraica racional entera ; Grado = 0
Ejemplo: $\log(\sqrt{x}-3)$	Es una expresión trascendente logarítmica por lo que $G = \phi$
Ejemplo: $(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z}$	Es una expresión trascendente vectorial por lo que $G = \phi$

2.8.3. Propiedad de los Grados (G ; Gr)

I.- En los Monomios: $\boxed{\Sigma G_r = G \;\; ; G ; \Sigma Gr \in \mathbb{Q}}$

"La suma de los grados relativos es igual al grado absoluto".

II.-En los Polinomios: $\boxed{\Sigma G_r \gtrless G}$

"∄ relación única entre los grados".

2.9. CONJUNTO DE VARIABLES DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA

Definición.- Si en una expresión algebraica intervienen "n" letras variables, el conjunto de variables se escribe como elementos ordenados en la forma siguiente:

$$CV = \{ (a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n) \}$$

Dicha ordenación es independiente de la frecuencia con la que se repita una letra. En la composición de dicho conjunto el orden en que siguen las letras puede ser cualquiera pero fijo en adelante.

Ejemplo: Sea: $x^4 + y + \dfrac{a^3}{x-y} \Rightarrow$ El conjunto de variables será: $CV = \{ (x ; y ; a) \}$;

Si: $x = -4 \; ; \; y = 6 \; ; \; a = 100$

$CV = \{ (-4 ; 6 ; 100) \}$

2.10. CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA.

Definición.- "Al conjunto de variables de una expresión algebraica le corresponde otro conjunto de elementos ordenados, el cual se llamará admisible, siempre que tenga sentido la expresión numérica ($\in \mathbb{R}$) que se obtenga de la expresión algebraica dada."

Ejemplo: Sea: $\dfrac{y}{\sqrt{x-9}}$; El conjunto de valores admisibles se escribe así:

$CVA = \{ (x ; y) / x \in \langle 9 , \infty \rangle \; ; \; y \in \mathbb{R} \}$

Ejemplo: Sea: $x + \dfrac{y}{z}$; El conjunto de valores admisibles será:

$\Rightarrow CVA = \{ (x , y , z) / x , y , z \in \mathbb{R} \; ; \; z \neq 0 \}$

Ejemplo: Sea: $\sqrt{x} + \sqrt{1-b}$; El conjunto de valores admisibles

$\Rightarrow CVA = \{ (x ; b) / x > 0 , 1 - b > 0 \}$

Ejemplo: Sea xy^3z ; El conjunto de valores admisibles será:

$CVA = \{ (x , y , z) / x , y , z \in \mathbb{R} \}$

2.11. EQUIVALENCIA DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición.- Dos expresiones algebraicas serán equivalentes, si para cualquier elemento del conjunto de valores admisibles son iguales los valores correspondientes.

Ejemplo: $A = \dfrac{a^2+b^2+2ab}{ab}$; $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$; $B = \dfrac{(a+b)^2}{ab}$

Son equivalentes pues admiten los mismos valores para el

$CVA = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R} ; a \neq b ; a \neq 0, b \neq 0\}$

Ejemplo: $ab = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$. Es una equivalencia.

Comentarios:

(1) Las expresiones algebraicas generan ecuaciones algebraicas; las variables asumen la condición de incógnitas y el CVA asume la condición del Dominio de la Ecuación.

(2) Las expresiones trascendentes, generan ecuaciones no algebraicas, o ecuaciones trascendentes. La variable asume la condición de incógnita y el CVA asume la condición de Dominio de la Ecuación.

(3) La ecuación algebraica se resuelve mediante fórmulas o algorítmos algebraicos, mientras que la ecuación no algebraica se resuelve por selección o aproximación.

2.12. IDENTIDAD DE DOS TERMINOS ALGEBRAICOS

Definición.- Dos Monomios o términos algebraicos serán idénticos si verifican el axioma de **reflexión de la igualdad.**

Ejemplo: $x = x$ son idénticos o reflexivos

Ejemplo: $9x^7 = 9x^7$ son idénticos o reflexivos

Consecuencias:

Dos expresiones idénticas verifican las condiciones siguientes:

(i) Los coeficientes y exponentes correspondientes de la identidad son iguales.

Ejemplo: $18x^6y^3 = 18x^6y^3$

$\Rightarrow \quad 18x^6y^3 = 18x^6y^3$

Ejemplo: Sea $mx^5y^pz^{12} = -19x^ny^7z^q$

$\Rightarrow \quad mx^5y^pz^{12} = -19x^ny^7z^q$

$m = -19$; $n = 5$; $p = 7$; $q = 12$

(ii) Las identidades verifican las condiciones de las equivalencias algebraicas.

Ejemplo: A partir de la equivalencia:

$(a+b)^m = a^2+b^2+2ab$

$\Rightarrow$ si $a = b = 1$

$\Rightarrow (1+1)^m = 1+1+2 = 4$

$\Rightarrow 2^m = 2^2$

$\Rightarrow m = 2$

$\therefore \boxed{(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab}$

2.12.1 Ejemplo Explicativo:

Si las expresiones algebraicas: $E = a^4b^{9-m}c^{3-5n}$ y $F = a^{1-p}b^{7+m}c^{16-4n}$

Admiten igual valor, toda vez que se le asigne los valores del CVA correspondiente.

Calcular: "m" , "n" , "p"

Recuerde:

Dos expresiones serán **idénticas** si ambas admiten los mismos valores del conjunto de valores admisibles, por lo que podremos igualar los términos correspondientes.

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado, E y F son idénticos.

(2°) De igualar: $\Rightarrow a^4b^{9-m}c^{3-5n} \equiv a^{1-p}b^{7+m}c^{6-4n}$

$\Rightarrow 4 = 1 - p \qquad \therefore p = -3$

$\Rightarrow 9 - m = 7 + m \qquad \therefore m = 1$

$\Rightarrow 3 - 5n = 16 - 4n \qquad \therefore n = -13$

2.13. EL VALOR ABSOLUTO

Definición.- El valor absoluto de un número real "x" denotado por el símbolo $|x|$ se define mediante la regla siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \text{ ; (x positivo)} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ ; (x nulo)} \\ -x \text{ si } x < 0 \text{ ; (x negativo)} \end{cases} \quad \text{ó} \quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \text{ ; (x positivo)} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ ; (x nulo)} \\ Op(x) \text{ si } x < 0 \text{ ; (x negativo)} \end{cases}$$

En forma práctica: El valor absoluto es el operador que transforma en positivo todo número real negativo y mantiene inalterable a todo número real positivo.

Ejemplo: $|4.5| = 4.5$

Ejemplo: $|-9.30| = 9.30$

Ejemplo: $|-x| = -x$ si $-x > 0$

Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Propiedades del Valor Absoluto:

(1)	$\lvert xyz \rvert = \lvert x \rvert \lvert y \rvert \lvert z \rvert$	V.A. de una Multiplicación.
(2)	$\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \lvert x \rvert / \lvert y \rvert,\ y \neq 0$	V.A. de una División.
(3)	$\sqrt[2m]{x^{2m}} = \lvert x \rvert = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$	Raíz de indice par de un número positivo.
(4)	$\lvert x \rvert = \lvert -x \rvert$	El V.A. de elementos reales opuestos son iguales.
(5)	Si: $\lvert x \rvert = \lvert m \rvert \Rightarrow x = \pm m$	
(6)	Si: $\lvert x \rvert = p;\ p > 0 \Rightarrow x = \pm p$	
(7)	$\lvert x \rvert > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$	
(8)	$\lvert x^2 \rvert = \lvert x \rvert^2 = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$	

2.14 EL MAXIMO ENTERO $[\![x]\!]$

Definición.- El máximo entero de un número real "x" denotado por el símbolo $[\![x]\!]$ se define mediante la regla siguiente:

Sea $[\![x]\!] = k / k \in Z \Rightarrow k \leq x < k + 1$

En forma práctica: El máximo entero es el operador que declara el mayor entero contenido en un número real.

Ejemplo: $[\![4.5]\!] = 4$, pues $4 \leq 4.5 < 5$

Ejemplo: $[\![-4.50]\!] = -5$, pues $-5 \leq -4.50 < -4$

Ejemplo: $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, pues $1 \leq \sqrt{2} < 2$

Ejemplo: $[\![-\sqrt{2}]\!] = -2$, pues $-2 \leq -\sqrt{2} < -1$

Ejemplo: $[\![-6.30]\!].[\![0.001]\!] = (-7)(-1) = 7$

Ejemplo: Hallar "x", si: $[\![2x - 17]\!] = 9$

Solución: Aplicando la definición

$\Rightarrow 9 \leq 2x - 17 < 10 \Rightarrow 26 \leq 2x < 27$

$\therefore 13 \leq x < 13.50$, es el conjunto solución

2.15 Ejercicios y Problemas Explicativos

2.15.1 Ejercicio Explicativo:

Si: $P(x) = \frac{3a + 11}{5a + 2} + x^{\frac{(a+15)(2a+3)}{(a+1)(3a+2)}}$; $x \in \mathbb{R}$

Es de 8° grado y de término independiente igual a 2; determinar el grado de:

$$Q_{(x,y,z)} = (x^a)^a (y^{a+2})^{a+2} z$$

Recuerde:

El término independiente es aquel que carece de variable o el de grado igual a cero.

Solución:

(1) El término independiente de $P_{(x)}$ es: $\dfrac{3a+11}{5a+2}$

$\Rightarrow \dfrac{3a+11}{5a+2} = 2 \Rightarrow 3a + 11 = 10a + 4 \Rightarrow 7 = 7a$

$\Rightarrow a = 1$; este valor garantiza que el término independiente sea 2; así mismo deberá permitir que $P_{(x)}$ sea de 8° grado.

$\Rightarrow P_{(x)} = 2 + x^{\frac{16\times 5}{2\times 5}}$

(2) $\Rightarrow P_{(x)} = 2 + x^8$; por lo que aceptamos $a = 1$

$\Rightarrow$ Calculamos el grado de Q, con **a** = 1

$\Rightarrow Q_{(x,y,z)} = (x^1)^1 (y^3)^3 z \Rightarrow G = 1 + 9 + 1$

$\therefore \boxed{G = 11}$

2.15.2 **Ejercicio Explicativo:**

El grado de la expresión es 40

$$x^{30}y^{49}\,\frac{b^{5x-y}\sqrt[20]{a^{30y}}}{\sqrt[16]{c^{72x}}};a,b,c \in \mathbb{R}$$

Hallar: $x + y$.

Comentario:

El enunciado nos obliga a diferenciar las variables de los parámetros, al no tener una notación apropiada de la expresión.

Solución:

(1) De acuerdo al enunciado: a, b, c Variables

x, y Parámetros

$\Rightarrow G = 40$

(2) De acuerdo a la definición de grado:

$\Rightarrow 5x - y + \dfrac{30y}{20} - \dfrac{72}{16}x = 40$

$\Rightarrow 5x - y + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{9}{2}x = 40$; multiplicando por 2

$\Rightarrow 10x - 2y + 3y - 9x = 80,$

$\therefore \boxed{x + y = 80}$

2.15.3 **Ejercicio explicativo:**

Hallar los grados que admite P (x), sabiendo que ésta es una expresión algebraica, siendo:

$$P(x) = \left[n^x + \sqrt[n+5]{x^{n+9}} \right]^{n^2+10}$$

$x \in \mathbb{Z}$; "n" es un parámetro.

Recuerde:

Una expresión algebraica puede ser racional o irracional.

Solución: Para que $P_{(x)}$ sea una expresión algebraica será necesario que " n^x " se cancele del modo siguiente; en caso contrario sería trascendente.

(1°) **Si n = 1** : $P(x) = \left(1+\sqrt[6]{X^{10}} \right)^{11}$ .... (1)

$\Rightarrow$ Se obtiene una **exp. alg. irracional.**

$\Rightarrow G = \dfrac{10}{6} \times 11 = \dfrac{55}{3}$

(2°) **Si n = 0 , x > 0** ; $P(x) = \left(0+\sqrt[5]{x^9} \right)^{10}$ .....(2)

$\Rightarrow$ Se obtiene una **exp. alg. racional entera.**

$\Rightarrow G = \dfrac{9}{5} \times 10 = 18$

(3°) **Si n = - 1** : $P(x) = \left(\text{cte} + \sqrt[4]{x^8} \right)^{10} = \left(\text{cte} + x^2 \right)^{20}$

$\Rightarrow$ Se obtiene una **exp. alg. racional entera.**

$\Rightarrow G = \dfrac{8}{4} \times 10 = 20$

$\therefore$ Grados que admite $P_{(x)}$: $\dfrac{55}{3}$ ó 18 ó 20

2.15.4 **Ejercicio explicativo:**

Simplificar la siguiente expresión algebraica:

$$M(x) = (a+c+3b)\,\text{sen}\,x + (2c-a+b)\log x + (b^2-a-c)\,x^x + abcx$$

$x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$

Comentario:

Este caso permite acondicionar la expresión a las condiciones del enunciado.

Solución:

(1°) Para que la expresión M (x) sea algebraica será necesario que los coeficientes de los términos trascendentes sean iguales a cero.

$$\Rightarrow M(x)=\underbrace{(a+c+3b)}_{=0}\operatorname{sen}x+\underbrace{(2c-a+b)}_{=0}\log x+\underbrace{(b^2-a-c)}_{=0}x^x+abcx$$

Ordenando las condiciones:

$$\begin{cases} a+c+3b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -a+b+2c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -a+b^2-c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(2°) Reduciendo el sistema

de (1) + (2) : $4b+3c=0$ .... (4)

de (1) + (3) : $b^2+3b=0$ .... (5)

de (5) : $b(b+3)=0 \;\therefore\; b=0\;;\; b=-3 \qquad \therefore \boxed{b=-3}$

$\Rightarrow$ En (4) : $4(-3)+3c=0\;;\;-4+c=0 \qquad \therefore \boxed{c=4}$

$\Rightarrow$ En (1) : $a+4+3(-3)=0\;;\;a+4+9=0 \qquad \therefore \boxed{a=5}$

(3°) Sustituyendo sobre la expresión M (x)

$$\Rightarrow M(x)=\underbrace{0\operatorname{sen}x}_{0}+\underbrace{0\log x}_{0}+\underbrace{0x^x}_{0}+(5)(-3)(4)x$$

$$\therefore \boxed{M(x)=-60x}$$

Ejercicio Explicativo:

Determinar " a " de modo que la expresión algebraica siguiente, sea irracional y de grado 2/3, siendo:

$$M(x)=1+\sqrt[a-3]{x^{a-4}}+\sqrt[a-2]{x^{a-3}} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Recuerde:

Una expresión es irracional si sobre él actúa un radical que afecte a una letra variable.

Solución:

La expresión M (x) será: $M(x)=1+x^{\frac{a-4}{a-3}}+x\,x^{\frac{a-3}{a-2}}$

1ª Posibilidad: $\dfrac{a-4}{a-3}=\dfrac{2}{3}$

Esta igualdad no garantiza que M(x) sea de grado 2/3 para ello será necesario verificar:

$\Rightarrow 3a-12=2a-6\;;\; \boxed{a=6}$

$\Rightarrow M(x)=1+x^{2/3}+x^{3/4}\;;\; \boxed{\text{Grado} \neq 2/3}$

2ª Posibilidad: $\dfrac{a-3}{a-2}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow 3a-9=2a-4\;;\; a=5$

Verificando:

$\Rightarrow M(x) = 1 + x^{1/2} + x^{2/3}$; Grado $= \dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\boxed{a = 5}$ Es el valor que garantiza a M (x) ser de grado 2 / 3

Ejercicio explicativo:

Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$E(a,b) = \frac{b-8}{\sqrt{a+5}} \quad ; \; a, b \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

Este ejemplo permite aplicar el concepto del conjunto de valores admisibles y el tratamiento de los datos correspondientes.

Solución:

(1) Los valores admisibles se obtienen luego de hacer el estudio siguiente:

$\Rightarrow \dfrac{b-8}{\sqrt{a+5}}$ $\begin{array}{l} \rightarrow b - 8 \in \mathbb{R} \text{ (numerador)} \\ \rightarrow a + 5 > 0 \text{ ("denominador")} \end{array}$

$\Rightarrow -\infty < b - 8 < \infty$

(2) Luego de sumar 8 a todos los términos de la desigualdad.

$\Rightarrow -\infty < b < \infty$, Del numerador

(3) $\Rightarrow a + 5 > 0$; Del denominador

$\Rightarrow a > -5$

$\Rightarrow CVA = \{ (a, b) \ / \ -\infty < b < \infty \ ; \ a > -5 \}$

$\Rightarrow CVA = \{ (a, b) \ / \ b \in \langle -\infty, \infty \rangle \ ; \ a \in \langle -5 ; \infty \rangle \}$

$\therefore$ $\boxed{CVA = \{ (a, b) \ / \ a \in \langle -5 ; \infty \rangle \ ; \ b \in \mathbb{R} \}}$

Ejercicio explicativo:

El grado absoluto de la expresión: $E(x,y) = \dfrac{\sqrt[m^{\sqrt{m}}+5]{x^{m^m}}}{y^{\sqrt{m}}}$ es 6

Hallar el grado relativo a "y".

Recuerde:

El grado de una división es la diferencia de grados del numerador y denominador.

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla del grado para la división:

$G = G_{numerador} - G_{denominador}$ .... (1)

$G_y = -\sqrt{m}$ .... (2)

De (1) :

$$G = \frac{m^m}{m^{\sqrt{m}+5}} - \sqrt{m} = 6 \quad \text{..} \quad (3)$$

(2°) Resolviendo (3) :

$\Rightarrow \dfrac{m^m}{m^{\sqrt{m}+5}} = \sqrt{m} + 6$, es una ecuación trascendente; buscamos la simetría.

$\Rightarrow m^m = \left(\sqrt{m} + 6\right)m^{\sqrt{m}+5}$, multiplicando por m.

$\Rightarrow m \cdot m^m = \left(\sqrt{m} + 6\right)m^{\sqrt{m}+6}$, se obtiene la simetría.

(3°) $\Rightarrow m = \sqrt{m} + 6$; pues: $m \times m^m = \left(\sqrt{m} + 6\right)m^{\sqrt{m}+6}$

$\Rightarrow \sqrt{m}^2 - \sqrt{m} + 6 = 0$, factorizando

$\Rightarrow \left(\sqrt{m}-3\right)\left(\sqrt{m}+2\right) = 0$; $\sqrt{m} = 3$; $\sqrt{m} = -2$ (absurdo)

$\Rightarrow \sqrt{m} = 3$

Sustituyendo en (2) : $\boxed{G_y = -3}$

Ejercicio explicativo:

La expresión:

$$F(x) = \left(\frac{a}{3} - 5\right)x^x + \left(\frac{ab}{2} - 1\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{ax}{3} - 1\right) + \left(\frac{b}{4} - 3\right)\log x$$

Deberá ser trascendente circular. Calcular "a" y "b"; señale asimismo la expresión condensada.

Recuerde:

Una expresión trascendente circular o expresión inversa trigonométrica es aquella de la forma arc Senx, arc Cos x, arc Tgx.

Solución:

(1°) Si F (x) debe de ser trascendente circular, deberá retener al término en "arc Tg"; por lo que escribiremos:

$$\Rightarrow F(x) = \underbrace{\left(\frac{a}{3} - 5\right)}_{=0}x^x + \left(\frac{ab}{2} - 1\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{ax}{3} - 1\right) + \underbrace{\left(\frac{b}{4} - 3\right)}_{=0}\log x$$

(2°) Podemos tener las siguientes igualdades que conforman el sistema necesario.

$\Rightarrow \dfrac{a}{3} - 5 = 0 \qquad \therefore\ a = 15$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} - 3 = 0 \qquad \therefore\ b = 12$$

(3°) Sustituyendo lo encontrado para a y b

$$\Rightarrow F(x) = 0x^{x} + \left(\frac{15 \times 12}{2} - 1\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{15}{3}x - 1\right) + 0\log x$$

$$\therefore\ \boxed{F(x) = 89 \text{ arc Tg } (5x - 1)}$$

Ejercicio explicativo:

La expresión: $E(x) = (a + b)^{x} + \sqrt[a+b+3]{x^{a+b+11}}$; $x \in \mathbb{R}$

Es racional entera.

Determinar el grado correspondiente.

Recuerde:

Que una expresión algebraica racional entera se caracteriza por carecer de radical que afecte a letra variable.

Solución: La condición expuesta se logra:

(1°) **Si: a + b = 1**

$$\Rightarrow E(x) = 1^{x} + \sqrt[1+3]{x^{1+11}} \quad \Rightarrow E(x) = 1 + \sqrt[4]{x^{12}}$$

$$\Rightarrow E(x) = 1 + x^{3} \qquad \therefore\ \boxed{\text{GRADO} = 3^{\circ}}$$

(2°) **Si: a + b = 0**

$\Rightarrow E(x) = 0^{x} + \sqrt[0+3]{x^{0+11}} \Rightarrow E(x) = \sqrt[3]{x^{11}}$ **es una irracional;** no cumple la condición.

(3°) **Si: a + b = -1**

$$\Rightarrow E(x) = (-1)^{x} + \sqrt[-1+3]{x^{-1+11}} \Rightarrow E(x) = (-1)^{x} + \sqrt[2]{x^{10}}$$

$\Rightarrow E(x) = (-1)^{x} + x^{5}$ No es una expresión algebraica por la presencia de $(-1)^{x}$. No cumple la condición.

$$\therefore\ \boxed{\text{Grado} = 3^{\circ}\ ;\ E = 1 + x^{3}}$$

Ejercicio explicativo:

Hallar los grados relativos de: $\left(x^{a^{25}} y^{b^{9}}\right)^{2}$

sabiendo que los grados relativos de "x" e "y".

en: $\left(x^{5^{5}\sqrt{a^{a^{30}}}}\ y^{3^{3}\sqrt{b^{b^{12}}}}\right)^{6}$ son 30 y 18 respectivamente.

Recuerde:

Que el grado relativo es el grado de la expresión algebraica en relación a una variable.

Solución:

(1°) **Datos:** $Gx = 30$ .... (1)

$Gy = 18$ .... (2)

(2°) **De acuerdo a la diferencia de grado relativo.**

$\Rightarrow$ De (1) : $Gx = 6\sqrt[5^5]{a^{a^{30}}} = 30$

potenciando a exponente 5^5

$\Rightarrow a^{a^{30}} = 5^{5^5}$; por tener una ecuación no algebraica **tratamos de obtener simetría.**

$\Rightarrow \left(a^{30}\right)^{a^{30}} = 5^{5^5 \times 30}$; luego de elevar a exponente 30.

$\Rightarrow \left(a^{30}\right)^{a^{30}} = 5^{5^5 \times 5 \times 6} = \left(5^6\right)^{5^6}$; $\exists$ simetria

$\Rightarrow a^{30} = 5^6$; $a = \sqrt[30]{5^6}$ $\therefore$ $\boxed{a = \sqrt[5]{5}}$

(3°) **Nuevamente pon la definición de grado relativo.**

$\Rightarrow$ de (2) : $Gy = 6\sqrt[3^3]{b^{b^{12}}} = 18$; efectuando el mismo procedimiento anterior.

$\Rightarrow \sqrt[3^3]{b^{b^{12}}} = 3$; $b^{b^{12}} = 3^{3^3}$; $\Rightarrow \left(b^{12}\right)^{b^{12}} = 3^{3^3 \times 12} = \left(3^4\right)^{3^4}$

$\Rightarrow b^{12} = 3^4$; $b = \sqrt[12]{3^4}$ $\therefore$ $\boxed{b = \sqrt[3]{3}}$

(4°) **Sustituyendo sobre la expresión los valores hallados:**

$\Rightarrow \left(x^{\sqrt[5]{5}^{25}} \cdot y^{\sqrt[3]{3}^{9}}\right)^2$;

$\therefore$ $\boxed{g_x = 6\,250}$; $\boxed{g_y = 54}$

2.15.11 Ejercicio explicativo

Si: $\dfrac{a-4}{3} + 7$ y $\dfrac{b-7}{5} - \dfrac{b-1}{2}$

Son elementos neutros aditivos

Calcular a y b

Recuerde:

El elemento neutro aditivo de los números reales es el cero.

Solución:

(1°) **Por definición de elemento neutro aditivo, deberá ocurrir que:**

$\dfrac{a-4}{3} + 7 = 0$ ....(I)

$$\frac{b-7}{5}-\frac{b-1}{2}=0 \text{ .... (II)}$$

(2°) de (I) :

$$\frac{a-4}{3}=-7 \Rightarrow a-4=-21$$

$$\therefore \boxed{a=-17}$$

(3°) de (II) :

$$\frac{2(b-7)-5(b-1)}{10}=0$$

$$\Rightarrow 2b-14-5b+5=0 \Rightarrow -3b-9=0$$

$$\therefore \boxed{b=-3}$$

2.15.12 **Ejercicio Explicativo:**

Para que valor de "x" , "a" y "b" serán opuestos.

Siendo:

$a=2^{x/2}$; $b=2^{7-x/2}-2^{8-x/2}$

Recuerde:

Si m y n son opuestos $\Rightarrow m+n=0$

Solución.-

(1°) **Por ser opuestos:**

$$a=2^{x/2} \text{ .... (I)}$$

$$b=2^{7-x/2}-2^{8-x/2} \text{ .... (II)}$$

$$\Rightarrow a+b=0 \text{ .... (III)}$$

(2°) De (I) y (II) sustituidos en (III)

$$\Rightarrow 2^{x/2}+2^{7-x/2}-2^{8-x/2}=0 \text{ .... (IV)}$$

(3°) **Resolviendo esta última: (IV)**

$$\Rightarrow 2^{x/2}+128(2^{-x/2})-256(2^{-x/2})=0$$

$$\Rightarrow 2^{x/2}=128(2^{-x/2}) \text{ , } 2^{x/2}=\frac{128}{2^{x/2}}$$

$$\Rightarrow 2^{x}=2^{7}$$

$\therefore \boxed{x=7}$ Es el valor que permite ser opuestos a los elementos "a" y "b"

2.15.13 Ejercicio Explicativo:

Si P/3 y 3Q son opuestos

Siendo: $P = \dfrac{3x+4}{2} + 7 \qquad Q = \dfrac{2x-1}{4} + 3$

Calcular "x"

Recuerde:

Si m y n son opuestos, $\Rightarrow m + n = 0$

Solución.-

(1°) $\dfrac{P}{3} + 3Q = 0$ .... (I)

(2°) **Sustituyendo los datos sobre (I)**

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{3x+4}{2}+7\right) + 3\left(\frac{2x-1}{4}+3\right) = 0$$

(3°) **Resolviendo la ecuación obtenida:**

$$\Rightarrow \frac{3x+4}{6} + \frac{7}{3} + \frac{6x-3}{4} + 9 = 0$$

$\Rightarrow$ Multiplicando por 12

$\Rightarrow 6x + 8 + 28 + 18x - 9 + 108 = 0$

(4°) **Observamos la presencia de una ecuación de primer grado**

$$\Rightarrow 24x + 135 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{135}{24}$$

$\therefore \boxed{x = -\dfrac{45}{8}}$ Es el valor de "x" que garantiza que P/3 y 3Q sean opuestos.

2.15.14 Ejercicio Explicativo:

Si: $\dfrac{21M}{10}$ y $\dfrac{3N}{7}$ son elementos recíprocos, calcular **x**, siendo:

$$M = \frac{2x-7}{3} \quad , \quad N = \frac{12}{3x-1}$$

Recuerde:

Si a y b son recíprocas $\Rightarrow ab = 1$; $a \neq 0$, $b \neq 0$

Solución:

(1°) **Por definición de reciprocidad:**

$$\Rightarrow \left(\frac{21M}{10}\right)\left(\frac{3N}{7}\right) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

(2°) **Sustituyendo los correspondientes a M y N en (I)**

$$\Rightarrow \frac{9MN}{10} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{10}\left(\frac{2x-7}{3}\right)\left(\frac{12}{3x-1}\right) = 1 \ldots\ldots (\text{II})$$

(3°) **Resolviendo (II)**

$$\Rightarrow \frac{18}{5}\left(\frac{2x-7}{3x-1}\right) = 1$$

$$36x - 126 = 15x - 5$$

$$21x = 121 \ ;$$

$$\therefore \boxed{x = 5\frac{16}{21}}$$

2.15.15 **Ejercicio Explicativo:**

Siendo: $\sqrt{3}\,a = \dfrac{2^{x-1}+1}{\sqrt{3}}$ y $5b + 23 = 2^{x-1}$

Calcular el valor de "x" de modo que "a" y "b" sean opuestos

Recuerde:

Si a y b son opuestos $\Rightarrow a + b = 0, \ a, b \in \mathbb{R}$

Solución.-

(1°) **De los datos:**

$$\Rightarrow a = \frac{2^{x-1}+1}{3} \quad , \quad b = \frac{2^{x-1}-23}{5}$$

(2°) **Deberá ocurrir que: $a + b = 0$**

$$\Rightarrow \frac{2^{x-1}+1}{3} + \frac{2^{x-1}-23}{5} = 0$$

(3°) **Resolviendo la ecuación obtenida**

$$\Rightarrow \frac{5\left(2^{x-1}\right)+5+3\left(2^{x-1}\right)-69}{15}=0$$

$$\Rightarrow 8\left(2^{x-1}\right)-64=0 \Rightarrow 2^{x+2}=64$$

$$\Rightarrow 2^{x+2}=2^{6}\ ,\ x+2=6$$

$$\therefore \boxed{x=4}$$

2.15.16 **Ejercicio Explicativo**

Hallar x sabiendo que:

$$\operatorname{Op}\left[\operatorname{Op}\left(\frac{x+5}{2}\right)+\operatorname{Rec}\left(\frac{4}{x+9}\right)\right]=\operatorname{VA}(x-12)$$

Recuerde:

a) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Op}(x) = -x$; "Opuesto de x"

Si $x \in \mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow \operatorname{Rec}(x)=\frac{1}{x}$; "Recíproco de x"

b) Si: $|x| = \operatorname{VA}(x)$, "Valor Absoluto de x"

$\Rightarrow |x|^2 = \operatorname{VA}^2(x) = x^2$

Solución.-

(1°) **Al ordenar las sentencias proporcionadas**

$$\Rightarrow \operatorname{Rec}\left(\frac{4}{x+9}\right)=\frac{x+9}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Op}\left(\frac{x+5}{2}\right)=-\frac{x+5}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Op}\left[\frac{x+9}{4}-\frac{x+5}{2}\right]=\operatorname{Op}\left[\frac{x+9-2x-10}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{Op}\left[\frac{-x-1}{4}\right]=-\frac{-x-1}{4}=\frac{x+1}{4} \ldots\ldots\ldots (\text{III})$$

(2°) **de (III) nuestra ecuación será:**

$$\frac{x+1}{4}=\operatorname{VA}(x-12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{IV})$$

(3°) **de $(\text{IV})^2$ se tendrá:**

$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2=(x-12)^2$, transformando a diferencia de cuadrados y $\frac{x+1}{4}>0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{4}+x-12\right)\left(\frac{x+1}{4}-x+12\right) = 0 \; ; \; \frac{x+1}{4} > 0, \; x+1 > 0, \; x > -1$$

$$\Rightarrow (5x-47)(49-3x) = 0 \; ; x > -1 \Rightarrow 5x-47 = 0 \; , \; 49-3x = 0 \; ; x > -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{47}{5} \; ; \; x = \frac{49}{3} \quad y \quad x > 1$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{ \frac{49}{3} ; \frac{47}{5} \right\}}$$

2.15.17 Ejercicio Explicativo

Hallar el valor de "x" de manera que "4K" y "1/3 Q" sean recíprocos sabiendo que:

$$3K+1 = \frac{2x+13}{5} \quad y \quad \frac{Q}{2} = \left(\frac{3x-5}{2}-1\right)^{-1}$$

Recuerde:

Que si a y b son elementos recíprocos, $\Rightarrow ab = 1 \; , \; a \neq 0$

(Existencia de elemento recíproco en el conjunto de los números reales).

Solución.-

(1°) Por condición:

$$(4K)\left(\frac{1}{3}Q\right) = 1 \Rightarrow KQ = \frac{3}{4} \; \dots\dots\dots\dots (I)$$

(2°) De los datos:

$$3K+1 = \frac{2x+13}{5} \Rightarrow 3K = \frac{2x+13}{5} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{3}\left(\frac{2x+13}{5}-1\right)} \; \dots\dots\dots\dots (II)$$

$$\frac{Q}{2} = \left(\frac{3x-5-2}{2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = 2\left(\frac{2}{3x-7}\right)} \; \dots\dots\dots\dots (III)$$

(3°) Sustituyendo (II) y (III) en (I)

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{2x+8}{5}\right)\left(\frac{4}{3x-7}\right) = \frac{3}{4} \; \dots\dots\dots\dots (IV)$$

Resolviendo (IV)

$$\Rightarrow \quad \frac{x+4}{3x-7} = \frac{45}{32}$$

$$\Rightarrow 32x + 128 = 135x - 315$$

$$\Rightarrow \quad 443 = 103x$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{443}{103}}$$ Es el valor que permite a 4K y 1/3 Q ser recíprocos.

2.15.18 Ejercicio Explicativo:

Hallar el valor de "x" para el cual los elementos "a" y "b" son opuestos

Sabiendo que:

$$\text{Rec}\,(a^{80}) = 32^{-8x}$$

$$\text{Op}\,(-b) = -2^{\frac{800-50x}{100}} + 2^{\frac{70-5x}{10}}$$

Recuerde:

Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Op}\,(a) = -a$ Definición del operador **opuesto de**

Si $b \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \text{Rec}\,(b) = \frac{1}{b}$ Definición del operador **recíproco de**

Solución:

(1°) **Por definición:**

$a + b = 0$ .... (I)

(2°) **De los datos:**

$$\text{Rec}\,(a^{80}) = 32^{-8x} \Rightarrow \frac{1}{a^{80}} = 32^{-8x}$$

$\Rightarrow \quad a^{-80} = 32^{-8x} \Rightarrow \quad a = 32^{x/10}$ .... (II)

(3°) **Además:**

$$\text{Op}\,(-b) = -2^{\frac{800-50x}{100}} + 2^{\frac{70-5x}{10}}$$

$\Rightarrow \quad b = -2^{\frac{800}{100}-\frac{50x}{100}} + 2^{\frac{70}{10}-\frac{5x}{10}}$ .... (III)

(4°) **Sustituyendo (II) y (III) en (I):**

$$\Rightarrow 32^{\frac{x}{10}} - 2^{8-\frac{1}{2}x} + 2^{7-\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = -2^{7-\frac{1}{2}x} + 2^{8-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = -128\left(2^{-\frac{1}{2}x}\right) + 256\left(2^{-\frac{1}{2}x}\right) \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 128\left(2^{-\frac{1}{2}x}\right) = 2^{7-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = 7 - \frac{1}{2}x, \qquad \therefore \boxed{x = 7}$$

2.15.19 **Ejercicio Explicativo:**

Si $x < 0$, calcular:

$$E = VA(Op(Rec(VA(Op(x))))) ; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

$$VA(x) = \text{Valor absoluto de } x$$
$$\text{ó } VA(x) = |x|$$

Solución:

(1°) Si $x < 0$

$\Rightarrow Op(x) = -x$; $-x > 0 \Rightarrow VA(-x) = -x$ pues $-x > 0$

$\Rightarrow Rec(-x) = -\dfrac{1}{x}$, $-\dfrac{1}{x} > 0$

(2°) **Hasta el momento, la expresión proporcionada será:**

$\Rightarrow E = VA(Op(Rec(VA(Op(x))))) = VA(Op(-1/x))$

$\Rightarrow Op\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x} < 0$

$\Rightarrow VA\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x}$ pues $\dfrac{1}{x} < 0$

$$\therefore \boxed{E = -\frac{1}{x}}$$

2.15.20 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar en términos de "a"

$$E = |a| + |b| + |c| + |-2a| + |-3b|$$

Sabiendo que:

$$b > 0 \text{ y } 2a = -5b = -\frac{c}{4} \text{ , } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

a) En relación al valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ es positivo} \\ Op(x) \text{ si } x \text{ es negativo} \end{cases}$$

b) En relación a la igualdad

$a = b$ (poseen igual signo a y b)

$a = -m$ (poseen signos distintos a y m)

Solución:

(1°) A partir de la igualdad:

$$2a = -5b = -\frac{c}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

podemos establecer que:

i) $2a = -5b$, **a y b son de signos opuestos**

ii) $\Rightarrow$ al ser $b > 0$, $a < 0$ .... (II)

iii) $-5b = -\dfrac{c}{4}$; **b y c son del mismo signo**

iv) $\Rightarrow$ al ser $b > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow a < 0$, $b > 0$ y $c > 0$

(2°) Respecto a la expresión E y mediante la definición de valor absoluto.

$\Rightarrow E = -a + b + c - 2a + 3b$

$\Rightarrow E = -3a + 4b + c$ .... (III)

(3°) Sustituyendo: $c = -8a$; $b = -2/5\,a$ en (III):

$$\Rightarrow E = -3a + 4\left(-\frac{2}{5}a\right) + (-8a) \Rightarrow E = -3a - \frac{8a}{5} - 8a$$

$$\therefore \boxed{E = -\frac{63a}{5}}$$

2.15.21 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar. $K = |2x| + |-x| + |x-2| + |x+10|$

Sabiendo que: $2 < -x < 10$

Recuerde:

a) El símbolo "x" representa un número real positivo o negativo, igual que "- x"

b) El símbolo "| x |" representa sí una cantidad positiva al igual que "| - x |"

Solución.-

(1°) **Para definir cada sumando es necesario utilizar la condición establecida:**

$2 < -x < 10 \Rightarrow -x$ **es positivo**

$\Rightarrow x$ **es negativo**

$\Rightarrow |-x| = -x$ .... (I)

$\Rightarrow |2x| = -2x$ .... (II)

(2°) **De la misma condición:**

$2 < -x < 10$

$\Rightarrow -10 < x < -2$ .... (III)

$\Rightarrow -12 < x-2 < -4$; $(x-2)$ **es negativo**

$\Rightarrow |x-2| = -(x-2)$

(3°) De (III):

$-10 < x < -2$

$\Rightarrow 0 < x+10 < 8$; $x+10$ **es positivo**

$\Rightarrow |x+10| = x+10$ .... (IV)

(4°) Sustituyendo (I), (II), (III) y (IV) en K:

$\Rightarrow K = -2x - x - (x-2) + x + 10 \Rightarrow K = -2x - x - x + 2 + x + 10$

$\therefore \boxed{K = -3x + 12}$

2.15.22 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$VA(3^x + 3^{x-2} + 3^{x-5}) + Op(3^{x-1}) = 606 + Op\ Rec(3^{4-x}) + Rec\ Op(3^{3-x})$

Recuerde:

Que:	V.A (x) es el valor absoluto de "x"	, $x \in \mathbb{R}$
	Op (x) es el opuesto de "x"	; $x \in \mathbb{R}$
	Rec (x) es el recíproco de "x"	; $x \in \mathbb{R}$

Solución.-

(1°) **Al ordenar:**

$\Rightarrow$ VA $(3^x + 3^{x-2} + 3^{x-5}) = 3^x + 3^{x-2} + 3^{x-5}$ pues $3^x + 3^{x-2} + 3^{x-5} > 0$

$\Rightarrow$ Op $(3^{x-1}) = - 3^{x-1}$

$$\Rightarrow \text{Op Rec} (3^{4-x}) = \text{Op}\left(\frac{1}{3^{4-x}} \right) = -\frac{1}{3^{4-x}} = -3^{x-4}$$

$$\Rightarrow \text{Rec Op} (3^{3-x}) = \text{Rec} (- 3^{3-x}) = -\frac{1}{3^{3-x}} = -3^{x-3}$$

(2°) **Al sustituir los equivalentes, la igualdad será:**

$$\underbrace{3^x + 3^{x-2} + 3^{x-5}}\underbrace{-3^{x-1}} = 606 \underbrace{-3^{x-4}} - 3^{x-3}$$

(3°) **Transponiendo y ordenando:**

$\Rightarrow 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + 3^{x-5} = 606$

$$\Rightarrow 3^x - \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} + \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} + \frac{3^x}{3^5} = 606$$

$$\Rightarrow 3^x \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} \right) = 606$$

$$\Rightarrow 3^x \left(\frac{243 - 81 + 27 + 9 + 3 + 1}{3^5} \right) = 606$$

$$\Rightarrow 3^x \left(\frac{202}{243} \right) = 606 \Rightarrow 3^x \left(\frac{1}{243} \right) = 3$$

$\Rightarrow 3^x = 3^6$, $x = 6$

$\therefore \boxed{S = \{ 6 \}}$

2.15.23 **Ejercicio Explicativo:**

Determinar el grado de la expresión siguiente:

$$\frac{(x^m + y^5)^n}{(y^n + x^9)^m}$$

Sabiendo que: $m + 2 > n - 3 > 7$; $m , n \in \mathbb{N}$

Recuerde:

El grado de una fracción algebraica es la diferencia del grado del numerador menos el grado del denominador:

Solución.-

(1°) **De la condición:**

$m + 2 > 7 \Rightarrow m > 5$ .... (I)

$n - 3 > 7 \Rightarrow n > 10$ .... (II)

(2°) **El grado de la expresión será:**

G = G°Numerador - G°Denominador .... (III)

(3°) Por ser $m > 5$, el grado del numerador será: "mn" .... (IV)

(4°) Por ser $n > 10$, el grado del denominador será: "nm" .... (V)

(5°) De (III) , (IV) y (V)

$G = mn - mn = 0$

$\therefore \boxed{G = 0}$

2.15.24 **Ejercicio Explicativo:**

Obtener el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$Op (24x - 1) + Op (6x + 1) + Op (10x + 5) = - 65$$

Recuerde:

Si $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Op (x) = - x$

De acuerdo al axioma de existencia del elemento opuesto.

Solución.-

(1°) **De acuerdo a la definición de opuesto de un número real.**

$\Rightarrow Op (24x - 1) = - (24x - 1) = - 24x + 1$

$Op (6x + 1) = - (6x + 1) = - 6x - 1$

$Op (10x + 5) = - (10x + 5) = - 10x - 5$

(2°) **La igualdad original será**

$\Rightarrow - 24x + 1 - 6x - 1 - 10x - 5 = - 65$

(3°) **Resolviendo esta última se tendrá la expresión:**

$- 40x - 5 = - 65 \Rightarrow - 40x = - 60 \Rightarrow x = 3 / 2$

$\therefore \boxed{S = \{ 3 / 2 \}}$ Es el conjunto solución.

2.15.25 **Ejercicio Explicativo:**

Hallar el conjunto solución de la ecuación siguiente:

$$30\,\mathrm{Rec}\left(\frac{10}{x+1}\right)+4\,\mathrm{Rec}\left(\frac{4}{5(x+3)}\right)+(x+5)\,\mathrm{Rec}\left(\frac{1}{7}\right)=68$$

Recuerde:

Si $x\in \mathbb{R}-\{0\}$

$$\Rightarrow \mathrm{Recip}(x)=\frac{1}{x}$$

De acuerdo al axioma de existencia del elemento recíproco de un número real.

Solución.-

(1°) **De acuerdo a la definición del elemento recíproco**

$$30\,\mathrm{Rec}\left(\frac{10}{x+1}\right)=30\left(\frac{x+1}{10}\right)=3(x+1) \qquad ;\ x\neq -1$$

$$4\,\mathrm{Rec}\left(\frac{4}{5(x+3)}\right)=4\left[\frac{5(x+3)}{4}\right]=5(x+3) \qquad ;\ x\neq -3$$

$$(x+5)\,\mathrm{Rec}\left(\frac{1}{7}\right)=7(x+5)=7(x+5)$$

(2°) **La ecuación propuesta será equivalente a:**

$$\Rightarrow 3(x+1)+5(x+3)+7(x+5)=68$$

$$\Rightarrow 3x+3+5x+15+7x+35=68$$

$$\Rightarrow 15x+53=68 \ \Rightarrow\ 15x=15 \ \Rightarrow\ x=1$$

(3°) **El conjunto solución correspondiente será**

$$\therefore \boxed{S=\{1\}}$$

2.15.26 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar

$$k_{(x)}=\mathrm{Op}(x)+\mathrm{Rec}(x)+\mathrm{VA}(x)+[\![x]\!]$$

sabiendo que $x\in \mathbb{Z}$

Recuerde:

i) $Op(x) = -x$ si $x \in \mathbb{R}$ "Opuesto de x"

ii) $Rec(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ "Recíproco de x"

iii) $VA(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

iv) $[\![x]\!] = x$ si $x \in \mathbb{Z}$

Solución.-

(1°) Si $x \geq 0$

$Op(x) = -x$

$Rec(x) = \dfrac{1}{x}$

$VA(x) = x$

$[\![x]\!] = x$

$\Rightarrow k(x) = -x + \dfrac{1}{x} + x + x$ $\quad\therefore\quad \boxed{k(x) = \dfrac{x^2+1}{x}}$

(2°) Si $x = 0$

$Op(0) = 0$

$Rec(0) = \dfrac{1}{0} \in \phi$ (vacio)

$VA(0) = 0$

$[0] = 0$

$\Rightarrow k(0) = 0 + \dfrac{1}{0} + 0 + 0$ $\quad\therefore\quad \boxed{k(x) \in \phi}$

(3°) Si $x < 0$

$Op(x) = -x$

$Rec(x) = \dfrac{1}{x}$

$VA(x) = -x$

$[x] = x$

$\Rightarrow k(x) = -x + \dfrac{1}{x} - x + x$ $\quad\therefore\quad \boxed{k(x) = \dfrac{-x^2+1}{x}}$

2.15.27 **Ejemplo Explicativo**

Si: $Rec(A) = \dfrac{4x-1}{3}$; $Op(B) = \dfrac{7x+1}{9}$

y $Op(A) + Rec(B) = Op\left(\dfrac{17}{8} + \dfrac{3}{4x-1}\right)$. Hallar el valor de "x"

Recuerde:

Si $x \in IR - \{0\} \Rightarrow Rec(x) = \dfrac{1}{x}$

Si: $x \in IR \Rightarrow Op(x) = -x$

Solución:

(1°) **Por las definiciones establecidas**

$$\Rightarrow A = \frac{3}{4x-1}, \; Op(A) = -\frac{3}{4x-1} \text{ .... (I)}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{7x+1}{9}; \; Rec(B) = -\frac{9}{7x+1} \text{ .... (II)}$$

(2°) **Sustituyendo (I) y (II) sobre la condición dada:**

$$-\frac{3}{4x-1} - \frac{9}{7x+1} = -\frac{17}{8} - \frac{3}{4x-1}$$

(3°) **Resolviendo esta última ecuación:**

$$\Rightarrow -\frac{9}{7x+1} = -\frac{17}{8} \Rightarrow 72 = 119x + 17 \Rightarrow 55 = 119x$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{55}{119}}$$

2.16 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

(1°) Si: $x > 0$; $x \in Z$

Clasificar la expresión equivalente de F (x) :

$$F(x) = Op(x^3) \cdot x^2 \, Rec(-x) \cdot VA(x^4) \cdot [\![-x^{-5}]\!]$$

Rpta: $F(x) = -x^8$, Exp. algebraica racional entera

(2°) Hallar el grado de la expresión siguiente

$$P(x, b) = ((x^4 + y^9)^2 b^7)^{11} y^{16} + y^{35}$$

Rpta. 165

(3°) Si $x \in Z^-$ (enteros negativos)

Simplificar e indicar el exponente de x

$E(x) = x \, Op(x^3) \cdot Rec(-x^5) [\![x^{-3}]\!]$

Rpta. cero

(4°) Si: $A = 3 \quad x^6 y^{q-8} z^{[\![r]\!]}$

$$B = 4x^{m-9}y^{2q-1}z^{8-[\![r]\!]}$$
$$C = -5x^{1-n}y^{3q+6}z^{12-2[\![r]\!]}$$
$$D = -9x^{4-p}y^{4q+13}z^{3[\![r]\!]-8}$$

Son semejantes, obtener m, n, p, q y r

Rpta: $m = 15$, $n = -5$, $p = -2$, $q = -7$, $r \in [4{,}5\rangle$

(5°) Si: $m = 9$

Obtener el grado absoluto de la expresión algebraica siguiente:

$$G(x,y) = \frac{\sqrt[m^{\sqrt{m}+15}]{x^{m^m}}}{y^{\sqrt{m}}}$$

Rpta: 3^{-19}

(6°) Calcular el valor de "n", de modo que el grado de la siguiente expresión:

$$F(x,y,z) = \sqrt[a]{x}\,\sqrt[a+n]{y}\,\sqrt[a+2n]{z}$$

Sea igual a cero

Rpta: $n = -\frac{a}{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$, $a > 0$

(7°) Resolver la ecuación siguiente:

$$\text{Rec}[(x+2)(x-1)] + \text{Rec}[(x+2)(x+1)] = \text{Rec}[x^2-4] + \text{Rec}[x^2-1]$$

Rpta: $S = \{5/4\}$

(8°) Simplificar en términos de "c":

$$E = |2a| - |3b| + |c| + |-20a| - |-9b| + |-9c|$$

Si $a < 0$ y $a + b = 2a + 5b = 3c$

Rpta: $E = -76c$

(9°) ¿Cuál es el valor de "m", que permite a:

$$M = 60p\left(\frac{m}{4}\right) - 3\,\text{Rec}\left(\frac{6}{m}\right) + \text{VA}(m) - 7$$

ser el elemento neutro multiplicativo?

Rpta. $m = -8/3$

(10°) Si: $\text{Rec}(A) = \dfrac{4\,\text{Op}\,x - 3}{3}$

$\text{Op}(B) = \dfrac{\text{Rec}(1/x) - 1}{2}$

y Rec [A + B] = Op $[\![-\pi]\!]$, hallar x ; $[\![x]\!]$ = máximo entero

Rpta: $x = 21/10$

(11°) Si: $VA(x+1) = Op(2x-5) + 4x$

Hallar el valor de x

Rpta: $x = -2$

(12°) Si los grados de las expresiones:

$$A(x) = \sqrt[(m+1)^2-4]{x^m} \cdot \sqrt[(m+2)^2-1]{x^m}$$

$$B(x) = \sqrt[m^2-9]{x^m} \cdot \sqrt[m^2-1]{x^m}$$

Son iguales.

¿Cuál es el valor de "m"? ; $m \neq 0$
¿Cuál es el grado de A?

Rpta. $m = 5/3$; $G = \dfrac{75}{112}$

(13°) Hallar el valor de "m" de modo que el grado de la expresión sea 125.

$$F(x,y) = \sqrt[12\sqrt{5}\left(5^{-|m|}+5^{-12}\right)^{\frac{1}{24}}]{\left(y^{11}x\right)^{\left(5^{|m|}+5^{12}\right)^{\frac{1}{24}}}}$$

Rpta: $m = 72 \vee m = -72$

(14°) Si: $F(x,y) = (x^{a-1}y^b + x^a y^{b-1})(x^{b+1}y^{a+3} + x^{a+b-1})$

Es de grado 15 y los grados relativos son iguales .

Calcular: a y b

Rpta: $a = 4$, $b = 2$

(15°) Si el grado de la expresión:

$$H(x,y) = \sqrt[9^{-|m|}]{x^{3^{|m|}}}\ \sqrt[3^{-|m|-1}]{y^{9^{|-m|}}}$$

Es 36, hallar el valor de m

Rpta: $m = 2/3 \vee m = -2/3$

(16°) Si el grado de la expresión:

$$B(x,y,z) = \sqrt[3]{\left(\left(\left((xyz)^{\sqrt[|m|]{2}}\right)^{\sqrt[|m|]{4}}\right)^{\sqrt[|m|]{16}}\right)^{\sqrt[|m|]{32}}}$$

Es 128, hallar el valor de m

Rpta. $m = \dfrac{12}{7}$, $m = -\dfrac{12}{7}$

(17°) La siguiente expresión irracional

$$K(x, y, z) = \sqrt[3^{2n+2}+3^{4n}]{(xyz)^{3^{n+3}}}$$ es de grado 1/10

Hallar el valor de "n"

Rpta. $n = 2$

(18°) Si los grados de:

$$E(x) = \sqrt[2^{3^{8a}}]{x}\ ;\ F(y) = \sqrt[2^{5^{32b}}]{y}\ ;\ G(z) = \sqrt[2^{7^{128c}}]{z}$$

Son "a", "b" y "c" respectivamente

Hallar el grado de:

$$G(x, y, z) = \sqrt[a]{xy}\,\sqrt[b]{yz}\,\sqrt[c]{xz}$$

Rpta. $G = 236$

(19°) A partir

$P(a, b, c) = a^2 + b^4 + c^6 + a^8 + b^{10} + c^{12} + a^{14} + b^{16} + c^{18}$ ..... que posee $9n + 7$ términos, $n \in \mathbb{N}$

Obtener: a) El grado relativo de cada variable

b) El grado absoluto

Rpta:
$G = 18n + 14$
$Ga = 18n + 14$
$Gb = 18n + 10$
$Gc = 18n + 12$

(20°) Si el grado de la expresión:

$$M(a) = \sqrt[\mathrm{Rec}\frac{1}{3}]{\dfrac{a^{\mathrm{Op}\,n-2}\sqrt[7]{a^{3\,\mathrm{Op}\,n}}}{\sqrt[\mathrm{Rec}\frac{1}{4}]{a^{\mathrm{Op}\,n+1}}}}$$ es 2; calcular "n"

Rpta: $n = -7$

(21) Simplificar: $K = \underbrace{\sqrt[5]{\frac{n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}}} + 3\sqrt{\frac{n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}}} + 5\sqrt{\frac{n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}}} + \ldots\ldots}_{\text{m téminos}}$

Sabiendo que: $n = m^3\sqrt[17]{m^9}$

Rpta: $K = \sqrt{n}$

(22) Simplificar:

$$K = \frac{\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2}\right) + 3\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2}\right) + 6\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2}\right) + 10\left(\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^2}\right) \ldots \text{n term.}}{\left(\dfrac{4}{x^{-3}+x^{-5}}\right)^{-1} + 6\left(\dfrac{4}{x^{-3}+x^{-5}}\right)^{-1} + 12\left(\dfrac{4}{x^{-3}+x^{-5}}\right)^{-1} + 20\left(\dfrac{4}{x^{-3}+x^{-5}}\right)^{-1} + \ldots \text{n term.}}$$

Rpta: $K = 2x^2$

(23°) Realizando el análisis a la expresión algebraica: $P(x, y) = x\,y^q$

Se obtiene los siguientes datos:

a) Es irracional

b) Si al grado relativo a x se disminuye en 1 / 2 la expresión "P" será fraccionaria; y si aumenta en 1 / 2, "P" será racional entera.

¿Cuál es el grado relativo a "y"?

Rpta: $Gy = -3/2$

(24°) Simplificar:

$$K = \frac{\dfrac{y}{x^{-2}+y^{-2}} + \dfrac{9y}{x^{-2}+y^{-2}} + \dfrac{17y}{x^{-2}+y^{-2}} + \ldots \text{n términos}}{\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} + 8\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} + 15\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} + \ldots \text{n téminos}}$$

Rpta. $\dfrac{2(4n-3)}{7n-5}$

(25°) Si la expresión $\sqrt[m+n]{x^{m-n}\,y\sqrt[m-n]{x^{m+n}\,y^{(m-n)^2}}}$

posee grados relativos iguales, además de grado absoluto igual a 60. Calcular "m" y "n".

Rpta: $m = \dfrac{1}{29}$, $n = 0$

(26°) Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$F(x) = \frac{\sqrt[8]{1-2x}}{4x-1}$$

Rpta: CVA = $\{ x / \ x \leq 1/2 \ , \ x \neq 1/4 \}$

(27°) Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$G(x) = \frac{\sqrt[50]{x}}{(-x+5)(x-12)}$$

Rpta. CVA = k $\{ x / \ x > 0 \ , \ x \neq 5 \ , x \neq 12 \}$

(28°) Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$H(x) = -x^2 + 9$$

Rpta: CVA = $\{ x / \ x \in \mathbb{R} \}$

(29°) Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$G(x,y) = \sqrt{\frac{yx - y^2}{y}}$$

Rpta: CVA = $\{ (x, y) / x - y \geq 0 \ ; \ y \neq 0 \}$

(30°) Hallar el conjunto de valores admisibles de la expresión:

$$Q(a,b,c) = \frac{\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[4]{a+c} + \sqrt[6]{b+c}}{a+b+c}$$

Rpta: CVA = $\{ (a, b, c) / a + c \geq 0 \ ; \ b + c \geq 0 \ , \ a + b + c \neq 0 \}$

CAPITULO 3

TEORIA DE EXPONENTES Y DE LA POTENCIACION

3.1 En base a las operaciones de multiplicación y adición del sistema de los números reales y los axiomas de estabilidad, conmutatividad y asociatividad correspondientes se tienen a disposición las siguientes teoremas, relaciones y simbología que describen el algoritmo de la potenciación.

3.1.1. ***Definición:*** La potenciación es el algoritmo expresado por "b^m". Tal que:

$$\text{Sea: } b^m = p \left\{ \begin{array}{ll} \swarrow & \text{exponente} \\ b^m \leftarrow & \text{base del exponente} \\ p \leftarrow & \text{potencia} \\ b^m \leftarrow & \text{potenciación} \end{array} \right. \quad p \text{ potencia}\,;\ \forall b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}$$

3.1.2 **Teorema # 1**

$\Rightarrow b = b^1 \ ; \ b \in \mathbb{R}$

3.1.3 **Teorema # 2 (Multiplicación de Potenciaciones de bases iguales)**

$\Rightarrow b^m b^n b^p \equiv b^{m+n+p} \ ; \forall\, b \in \mathbb{R}$

3.1.4 **Teorema # 3 (Producto de "n" factores repetidos e iguales a "b")**

$$\Rightarrow \underbrace{b\,.\,b\,.\,b\,...\,b}_{\text{"n" factores}} \equiv b^n \ ; \forall\, n \ \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.5 **Teorema # 4 (Suma de "n" términos repetidos e iguales a "b")**

$$\Rightarrow \underbrace{b + b + b\,...+ b}_{\text{"n" Sumandos}} \equiv bn = nb \ ; \forall\, n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.6 **Teorema # 5**

$$\Rightarrow \underbrace{b^m\,.\,b^m\,.\,b^m\,.\,...\,b^m}_{\text{"n" factores}} \equiv (\,b^m\,)^n = b^{mn} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.7 **Teorema # 6**

$$\Rightarrow \underbrace{b^m + b^m + b^m + \dots + b^m}_{\text{"n" sumandos}} \equiv b^m \, . \, n = n\, b^m, \text{"n" es el coeficiente } \forall\, n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.8 **Teorema # 7**

$$\Rightarrow b^{\overbrace{m+m+m+\dots+m}_{\text{"n" factores}}} \equiv b^{mn} \equiv b^{nm} \,;\ \forall\, n \in \mathbb{N} \wedge b \wedge \mathbb{R}$$

3.1.9 **Teorema # 8**

$$b^{m^{\overbrace{x\,.\,x\,.\,x\dots x}_{\text{"n" factores}}}} \equiv b^{m^{x^n}},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.10 **Teorema # 9 (Potenciación de Potenciación)**

$$\left(\left(b^m \right)^p \right)^q \equiv b^{m\ p\cdot q},\ \forall\, m\,,\, p\,,\, q \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.11 **Teorema # 10 (Potenciación Reiterada)**

$$\Bigg(\dots \Big(\left(b^m \right)^{\overbrace{m \Big)^{m} \dots \Bigg)^{m}}^{\text{"k" exponentes}}} \equiv b^{m^k},\ \forall\, k \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.12 **Teorema # 11**

$$\Rightarrow \left(\left(b^{m^x} \right)^{n^y} \right)^{p^z} \equiv b^{m^x . n^y . p^z}\ ;\ \forall\, b \in \mathbb{R}$$

3.1.13 **Teorema # 12**

$$\Rightarrow \left(\left(b^{m^x} \right)^{m^y} \right)^{m^z} \equiv b^{m^{x+y+z}}\ \forall\, b \in \mathbb{R}$$

3.1.14 **Teorema # 13**

$$\Rightarrow \left(\dots \left(\left(b^{m^n} \right)^{\overbrace{m^n} \right)^{m^n} \dots \right)^{m^n}}^{\text{"k" exponentes}} = b^{\left[m^n \right]^k} = b^{m^{nk}}\ \forall\, k \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R}$$

3.1.15 **Teorema # 14**

$$\Rightarrow \left(b^{m^{n^p}} \right)^x \equiv b^{m^{n^p} . x} = b^{x . m^{n^p}} = \left(b^x \right)^{m^{n^p}}\ ;\ \forall\, b \in \mathbb{R}$$

3.1.16 **Teorema # 15**

$$\Rightarrow \left(b^{m^{n^p}} \right)^m \equiv b^{m^{n^p} \cdot m} \equiv b^{m^{n^p + 1}} \quad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

3.1.17 **Teorema # 16**

$\Rightarrow (a \cdot b \cdot c)^m = a^m\, b^m\, c^m$; propiedad distributiva de la potenciación respecto al producto de las bases

$(a + b + c)^m \neq a^m + b^m + c^m$

3.1.18 **Teorema # 17**

$\Rightarrow (a^x\, b^y\, c^z)^n \equiv a^{nx}\, b^{ny}\, c^{nz}$; $\forall\, x, y, z, n \in \mathbb{R}$

3.1.19 **Teorema # 18**

$$\Rightarrow \left(a^{n^p}\, b^{n^q} \right)^n = a^{n^{p+1}}\, b^{n^{q+1}} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

3.1.20 **Teorema # 19**

$$\Rightarrow \left(b \left(c \left(x \right)^m \right)^n \right)^p = b^p \cdot c^{np} \cdot x^{mnp} \; ; \; \forall\, m, n, p \in \mathbb{R}$$

3.1.21 **Teorema # 20**

$$\Rightarrow \left(x \left(x \left(x \right)^m \right)^n \right)^p = x^p \cdot x^{mn} \cdot x^{mnp} \; ; \; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$x^{p + mn + mnp} \wedge m, n, p \in \mathbb{R}$$

3.1.22 **Teorema # 21**

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\ldots x \left(x \left(x (x)^m \right)^m \right)^m \ldots \right)^m}_{\text{k paréntesis}} = x^{\left(\frac{m^k - 1}{m - 1} \right) m} \; ; \; \forall\, k \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N} - \{1\}$$

3.1.23 **Teorema # 22 (Potenciación de Exponente Negativo)**

$$\Rightarrow b^{-1} = \frac{1}{b} \; ; \; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.24 **Teorema # 23 (Potenciación de Exponente Cero)**

$$\Rightarrow b^0 = 1 \; ; \; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0, \infty\}$$

3.1.25 **Teorema # 24**

$$\Rightarrow b^{-n} = \frac{1}{b^n} \; ; \; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; n \in \mathbb{R}$$

3.1.26 **Teorema # 25**

$$\Rightarrow \frac{1}{b^{n}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{n} \; ; \; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.27 **Teorema # 26 (Potenciación de base fraccionaria)**

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}} \; ; \; \frac{a^{m}}{b^{m}} = \frac{b^{-m}}{a^{-m}} \; ; \; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

3.1.28 **Teorema # 27**

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{n} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge x \in \mathbb{R}$$

3.1.29 **Teorema # 28**

$$\Rightarrow \frac{a}{\left(\dfrac{b}{\left(\dfrac{c}{\left(\dfrac{x}{\left(\dfrac{y}{z}\right)}\right)}\right)}\right)} = a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1} \cdot x \cdot y^{-1} \cdot z \; ; \; \forall\, b, c, d, x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.30 **Teorema # 29**

$$\Rightarrow \left(a^{b^{c^{d}}}\right)^{-1} = a^{b^{c^{d}}} \; ; \; \forall\, a^{b^{c^{d}}} \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge b, c, d \in \mathbb{R}$$

3.1.31 **Teorema # 30 (Potenciación de Exponente Fraccionario)**

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{n}} = x^{n^{-1}} \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.32 **Teorema # 31**

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; a = \sqrt[1]{a}$$

3.1.33 **Teorema # 32**

$$\Rightarrow x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}} \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.34 **Teorema # 33**

$$\Rightarrow x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^{m}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{m} \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.35 **Teorema # 34**

$$\Rightarrow x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m} \; ; \; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.36 **Teorema # 35**

$$\Rightarrow \sqrt[n^k]{x} = x^{\frac{1}{n^k}} \; ; \forall\, n^k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.37 **Teorema # 36**

$$\Rightarrow \sqrt[n^k]{x} = x^{n^{-k}} \; ; \forall\, n^k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.38 **Teorema # 37**

$$\Rightarrow \sqrt[a^{m^{n^p}}]{x} = x^{a^{-m^{n^p}}} \; ; \forall\, a^{m^{n^p}} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.39 **Teorema # 38**

$$\Rightarrow a^{b^c} = \sqrt[b^{-c}]{a} \; ; \forall\, b^c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.40 **Teorema # 39**

$$\Rightarrow a^{b^{c^x}} = \sqrt[\sqrt[\sqrt[x^{-1}]{c^{-1}}]{b^{-1}}]{a} \; ; \forall\, a \in \mathbb{R}$$

3.1.41 **Teorema # 40**

$$\Rightarrow \sqrt[\sqrt[\sqrt[m]{n}]{p}]{q} = q^{\left(\frac{1}{p}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)}}} \; ; \sqrt[\sqrt[m]{n}]{p} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.42 **Teorema # 41**

$$\Rightarrow \sqrt[\sqrt[\sqrt[x]{c}]{b}]{a} = a^{\left(\frac{1}{b}\right)^{\left(\frac{1}{c}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}}} = a^{b^{-c^{-x^{-1}}}} \; ;$$

3.1.43 **Teorema # 42**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \; ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.44 **Teorema # 43 (Radicación de una Multiplicación)**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c} \; ; \forall\, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.45 **Teorema # 44**

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}} \; ; \frac{1}{a^{1/m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/m} \; ; \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.46 **Teorema # 45 (Radicación de una Fracción Algebraica)**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \; ; \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.47 **Teorema # 46**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{a^r\, b^q\, c^r} = \sqrt[m]{a^p}\,\sqrt[m]{b^q}\,\sqrt[m]{c^r} \;;\; \forall\, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.48 **Teorema # 47 (Raiz enésima de la unidad)**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1} = 1 \;;\; 1 = \sqrt{1} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[4]{1} = \sqrt[5]{1} = \sqrt[7]{1} \ldots ,\; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.49 **Teorema # 48 (Radicación de una radicación)**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \;;\; \forall\, m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.50 **Teorema # 49 (Radicación de una fracción compuesta)**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{\left(\dfrac{b}{\left(\dfrac{c}{x}\right)}\right)}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\dfrac{\sqrt[m]{b}}{\dfrac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{x}}}} \;;\; \forall\, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.51 **Teorema # 50 (Raiz Cuadrada Reiterada)**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}}}_{\text{"m" radicales}} \equiv \sqrt[2^m]{a} \;:\; \forall\, m \in \mathbb{N}$$

3.1.52 **Teorema # 51**

$$\Rightarrow \sqrt[a^m]{\sqrt[a^n]{\sqrt[a^p]{x}}} = \sqrt[a^{m+n+p}]{x} \;;\; \forall\, a^{m+n+p} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.53 **Teorema # 52**

$$\Rightarrow \sqrt[\sqrt[n]{a}]{\sqrt[\sqrt[n]{b}]{\sqrt[\sqrt[n]{c}]{x}}} \equiv \sqrt[\sqrt[n]{abc}]{x} \;;\; \forall\, \sqrt[n]{abc} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.54 **Teorema # 53**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{a}{\sqrt[n]{\dfrac{b}{\sqrt[p]{c}}}}} \equiv \frac{\sqrt[m]{a}}{\dfrac{\sqrt[mn]{b}}{\sqrt[mnp]{c}}} \;;\; \sqrt[m]{\frac{a}{\sqrt[n]{\dfrac{b}{\sqrt[p]{c}}}}} \equiv \left[\frac{a}{\left[\dfrac{b}{[\,c\,]^{\frac{1}{p}}}\right]^{\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{m}} \;;\; \forall\, m, n, p \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.55 **Teorema # 54**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{\frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt[p]{a}}{b}}}{c}} = \frac{\frac{\sqrt[mnp]{a}}{\sqrt[mn]{b}}}{\sqrt[m]{c}} : \sqrt[m]{\frac{\sqrt[n]{\frac{\sqrt[p]{a}}{b}}}{c}} = \left[\frac{\left[\frac{[a]^{\frac{1}{p}}}{b}\right]^{\frac{1}{n}}}{c}\right]^{\frac{1}{m}} \; ; \forall\, m, n, p \in IR - \{0\}$$

3.1.56 **Teorema # 55**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \; ; \; b = \sqrt{b^2} = \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[4]{b^4} = \ldots \; ; \forall\, n \in IR - \{0 ; \infty\}, a > 0, b > 0$$

3.1.57 **Teorema # 56**

$$\Rightarrow (a + b + c)^m \not\equiv a^m + b^m + c^m \; ; \; \sqrt[n]{x + y + z} \not\equiv \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{z}$$

3.1.58 **Teorema # 57**

$$\Rightarrow \sqrt[m]{a \sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{a^n b} \; ; \forall\, m, n \in IR - \{0\}$$

3.1.59 **Teorema # 58 (Introducción de un factor al interior de un radical)**

$$\Rightarrow a \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a^m c} \; ; \forall\, m \in IR - \{0\} \; ; \; a > 0$$

3.1.60 **Teorema # 59 (Introducción de un factor fraccionario al interior de un radical)**

$$\Rightarrow \frac{1}{b} \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{\frac{c}{b^m}} \; ; \forall\, b \in IR - \{0\}$$

3.1.61 **Teorema # 60 (Caso de "n" radicales reiterados en multiplicación)**

$$\underbrace{\sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \sqrt[m]{a \ldots}}}}_{\text{"n" radicales}} = \sqrt[m^n]{a^{\frac{m^n - 1}{m - 1}}} \; ; \forall\, m \in IR - \{1\}$$

3.1.62 **Teorema # 61 (Caso de "n"radicales reiterados en división)**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \div \sqrt[m]{a \ldots}}}}_{\text{"n" radicales}} = \sqrt[m^n]{a^{\frac{m^n - 1}{m + 1}}} \quad \text{Si n par ; } \forall\, m \in IR - \{-1\}$$

$$= \sqrt[m^n]{a^{\frac{m^n + 1}{m + 1}}} \quad \text{Si n impar}$$

3.1.63 **Teorema # 62 (Caso de ∞ radicales reiterados en suma)**

$$\Rightarrow \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a \ldots \infty}}} = \frac{\sqrt{4a + 1} + 1}{2} \; ; \forall\, a \in IR^{+} - \{0\}$$

3.1.64 **Teorema # 63 (Caso de ∞ radicales reiterados en diferencias)**

$$\Rightarrow \sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2} \; ; \forall a \in \mathbb{R}^{+} - \{0\}$$

3.1.65 **Teorema # 64 (Caso de ∞ radicales de elementos de factores consecutivos)**

$$\Rightarrow \sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)\ldots\infty}}} = x+1 \; ; \forall x(x+1) \in \mathbb{R}^{+} - \{0\}$$

3.1.66 **Teorema # 65 (Caso de ∞ radicales de elementos de factores consecutivos)**

$$\Rightarrow \sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)\ldots\infty}}} = x \; ; \forall x(x+1) \in \mathbb{R}^{+} - \{0\}$$

3.1.67 **Teorema # 66 (Caso de ∞ radicales reiterados en la multiplicación)**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\infty}}} = \sqrt[n-1]{x} \; ; \forall n \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \; ; \; x > 0$$

3.1.68 **Teorema # 67 (Caso de ∞ radicales reiterados en la división)**

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x\ldots\infty}}} = \sqrt[n+1]{x} \; ; \forall n \in \mathbb{R} - \{0; -1\} \; ; \; x > 0$$

3.1.69 **Teorema # 68 (Caso de potencia en Cadena ∞)**

$$\Rightarrow \sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}} = x \; ; \text{ si } 0 < x \leq e \; ; \; e = 2.71828$$

3.1.70 **Teorema # 69**

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{\infty}}} = x \; ; \text{ si } 0 < x \leq e \; ; \; e = 2.71828$$

3.1.71 **Teorema # 70**

$$\Rightarrow \left(x^{x^{-1}}\right)^{\left(x^{x^{-1}}\right)^{\left(x^{x^{-1}}\right)^{\infty}}} = x \; ; \text{ si } 0 < x \leq e \; ; \; e = 2.71828$$

3.1.72 **Teorema # 71**

$$\left[x\left[x\left[x\ldots\infty\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n-1}} \; ; \forall n \in \mathbb{R} - \{0; 1\} : x > 0$$

3.1.73 **Teorema # 72**

$$\left[x \div \left[x \div \left[x \div \dots \infty \right]^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n+1}} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{ 0 ; -1 \} ; x > 0$$

3.1.74 **Teorema # 73 (Caso de ∞ radicales reiterados en la división)**

$$\sqrt[n]{\dfrac{x}{\sqrt[n]{\dfrac{x}{\sqrt[n]{\dfrac{x}{\begin{array}{c}\vdots\\ \infty\end{array}}}}}}} = \sqrt[n+1]{x} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{ 0 , -1 \} \; ; \; x > 0$$

3.1.75 **Teorema # 74**

$$\left[\dfrac{x}{\left[\dfrac{x}{\left[\dfrac{x}{\begin{array}{c}\vdots\\ \infty\end{array}} \right]^{\frac{1}{n}}} \right]^{\frac{1}{n}}} \right]^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n+1}} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{ 0, -1 \} \; ; \; x > 0$$

3.2 SUMA DE LOS ELEMENTOS DE UNA SUCESION DE NUMEROS NATURALES.

3.2.1 **Suma de n elementos neutros multiplicativos**

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ términos}} = n \quad ; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.2.2 **Suma de n primeros números naturales**

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.2.3 **Suma de los cuadrados de los n primeros números naturales**

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.2.4 **Suma de los cubos de los n primeros números naturales**

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad ; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.2.5 **Suma de las cuartas potencias de los "n" primeros números naturales**

$$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\;;\;\forall\, n\in \mathbb{N}$$

3.2.6 **Suma de las quintas potencias de los "n" primeros números naturales**

$$1^5+2^5+3^5\dots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\;;\;\forall\, n\in \mathbb{N}$$

3.2.7 **Suma de los productos binarios de los "n" primeros números naturales.**

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\dots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\;;\;\forall\, n\in \mathbb{N}$$

3.2.8 **Suma de los "n" primeros impares de los números naturales**

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2\;;\forall\, n\in \mathbb{N}$$

3.2.9 **Suma de los "n" primeros pares de los números naturales**

$$2+4+6+8+\dots+(2n)=n(n+1)\;;\forall\, n\in \mathbb{N}$$

3.2.10 **Suma de los "n" primeros múltiplos de 3 de los números naturales**

$$3+6+9+12+\dots+3(n)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

3.2.11 **Polinomio Geométrico o Serie Geométrica de "n" términos de signos positivos**

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}\;;\forall\, x\in \mathbb{R}-\{1\}$$

3.2.12 **Polinomio Geométrico o Serie Geométrica de "n" términos de signos alternativos**

$$1-x+x^2-x^3+\dots\pm x^{n-1}=\frac{x^n\pm 1}{x+1}\quad \begin{array}{l}(+)\text{ si "n" par };\ \forall\, x\in \mathbb{R}-\{-1\}\\ (-)\text{ si "n" impar };\ \forall\, n\in \mathbb{N}\end{array}$$

3.2.13 **Serie Geométrica de "n" términos de coeficientes crecientes en orden natural**

$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\;;\quad\forall\ x\in \mathbb{R}-\{1\}$$

3.2.14 **Serie Geométrica de ∞ términos**

$$1+x+x^2+x^3+\dots\infty=\frac{1}{1-x}\;;\;0\le |x|<1\quad(\text{Condición de convergencia})$$

3.2.15 **Serie de Geometría de coeficientes crecientes naturales de ∞ términos**

$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots\infty=\frac{1}{(1-x)^2}\;;\;0\le |x|<1\quad(\text{Condición de convergencia})$$

3.2.16 Regla de signos para la multiplicación, división y potenciación.

Multiplicación: $(+)(+)=+$ $(+)(-)=-$ $(-)(-)=+$	**Potenciación:** $(+)^{\#\,\text{par}\,(\pm)} = +$ $(-)^{\#\,\text{par}\,(\pm)} = +$ $(+)^{\#\,\text{impar}\,(\pm)} = +$ $(-)^{\#\,\text{impar}\,(\pm)} = -$
División: $\dfrac{(+)}{(+)}=+$ $\dfrac{(+)}{(-)}=-$ $\dfrac{(-)}{(-)}=+$	**Radicación:** $\sqrt[\text{par}]{+} = +$ $\sqrt[\text{par}]{-} = \phi$ (vacío en IR) $\sqrt[\text{impar}]{+} = +$ $\sqrt[\text{impar}]{-} = -$

3.3 EJERCICIOS RESUELTOS

3.3.1 Ejercicio explicativo:

Simplificar: $$K = \frac{5^{-3m} \cdot 75^m \cdot 45^p}{\left(\frac{1}{15}\right)^m \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^p \cdot \left(\frac{75}{39}\right)^0} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{m+p}$$

Recuerde:

En el Algebra de Monomios:

i) $(ab)^m = a^m b^m \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

ii) $b^0 = 1 \quad \forall\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

iii) $b^m b^n = b^{m+n} \quad \forall\, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

Solución:

(1°) **Las potenciaciones proporcionadas pueden ser ordenadas para tener facilidad de gestión operativa:**

$\Rightarrow 75^m = (5^2 \times 3)^m = 5^{2m} \cdot 3^m$

$\Rightarrow 45^p = (3^2 \times 5)^p = 3^{2p} \cdot 5^p$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{15}\right)^m = \left(5^{-1} \times 3^{-1}\right)^m = 5^{-m} \cdot 3^{-m}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^p = \left(5 \times 3^{-1}\right)^p = 5^p \cdot 3^{-p}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{75}{39}\right)^0 = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{m+p} = \left(3^{-2}\right)^{m+p} = 3^{-2m-2p}$$

(2°) Restituyendo en la expresión original:

$$\Rightarrow k = \frac{5^{-3m} \cdot 5^{2m} \cdot 3^{m} \cdot 3^{2p} \cdot 5^{p}}{5^{-m} \cdot 3^{-m} \cdot 5^{p} \cdot 3^{-p} \cdot 1} \cdot 3^{-2m-2p}$$

$\Rightarrow$ Asociando las potencias de igual base:

$$\Rightarrow k = \left(\frac{5^{-3m} \cdot 5^{2m} \cdot \cancel{5^{p}}}{5^{-m} \cdot \cancel{5^{p}}} \right) \cdot \left(\frac{3^{m} \cdot 3^{2p} \cdot 3^{-2m-2p}}{3^{-m} \cdot 3^{-p}} \right)$$

$\Rightarrow$ Atendiendo a los divisiones de la misma base:

$$\Rightarrow k = \left(\frac{\cancel{5^{-m}}}{\cancel{5^{-m}}} \right) \left(\frac{\cancel{3^{-m}}}{\cancel{3^{-m}}^{-p}} \right)$$

$\therefore \boxed{k = 3^{p}}$

3.3.2 Ejemplo explicativo:

Simplificar:

$$A = -\left(-\frac{1}{3} \right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{(-1)^{-33}}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{(-1)^{(-35)}}} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^{(-1)^{-39}}}$$

Recuerde:

$a^{b^{m}}$ y $\left(a^{b} \right)^{m}$ son algoritmos que expresan sentencias diferentes.

Solución:

(1°) Examinando los exponentes de cada potenciación:

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3} \right)^{(-1)^{-33}} = \left(-\frac{1}{3} \right)^{-1} = -3 \ ; \text{ pues } (-1)^{\text{impar}(\pm)} = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4} \right)^{(-1)^{-35}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} = 4 \ ; \text{ pues } (-1)^{-35} = -1 \ ; \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} = 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5} \right)^{(-1)^{-39}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{-1} = 5 \ ; \text{ pues } (-1)^{-39} = -1 \ ; \left(\frac{1}{5} \right)^{-1} = 5$$

(2°) Restituyendo "A" ; los sumandos potenciaciones serán:

$$\Rightarrow A = -\left(-\frac{1}{3} \right)^{-3} - \left(\frac{1}{4} \right)^{-4} - \left(-\frac{1}{5} \right)^{-5}$$

$$\Rightarrow A = -(-3)^{3} - (4)^{4} - (-5)^{5}$$

$$\Rightarrow A = -(-27) - (256) - (-3\,125)$$

$$\Rightarrow A = 27 - 256 + 3\,125 \Rightarrow A = 3\,152 - 256$$

$\therefore \boxed{A = 2\,896}$

3.3.3 Ejemplo explicativo:

Si: $\quad A = \left(5^{\left(3^{\left(7^{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{-1} \quad ; \quad B = \left(5^{3-\left(3^{\left(7^{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{-1}$

Calcular: $E = A \times B$

Recuerde:

Mediante este ejemplo observamos la utilización de las propiedades de las potencias reiteradas y el producto de bases iguales.

Solución:

(1°) Simplificando los datos consignados:

$\Rightarrow$ En relación a la sentencia "A"

$$\Rightarrow A = \left(5^{\left(3^{\left(7^{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{-1} \quad ; \text{ pues } \left(7^{9}\right)^{-1} = 7^{-9}$$

$$\Rightarrow A = \left(5^{\left(3^{7^{-9}}\right)^{-1}}\right)^{-1} \quad ; \text{ pues } \left(3^{7^{-9}}\right)^{-1} = 3^{-7^{-9}} \quad \Rightarrow A = \left(5^{3^{-7^{-9}}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow A = 5^{-3^{-7^{-9}}} \quad \text{.........................} \ (\text{I})$$

(2°) En relación a la sentencia "B"

$$\Rightarrow B = \left(5^{3-\left(3^{\left(7^{9}\right)^{-1}}\right)^{-1}}\right)^{-1} \quad ; \text{ pues } \left(7^{9}\right)^{-1} = 7^{-9}$$

$$\Rightarrow B = \left(5^{3-3^{-7^{-9}}}\right)^{-1} \quad \text{...............} \ (\text{II})$$

(3°) De (I) y (II) obtenemos E:

$$\Rightarrow E = 5^{-3^{-7^{-9}}} \cdot 5^{-3+3^{-7^{-9}}} \quad ; \text{ sumando los exponentes. } \Rightarrow E = 5^{-3}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{125}}$$

3.3.4 Ejemplo explicativo:

Calcular:

$$E = x.\left(\left(x^2\right)^2\right)^2.\left(\left(x^3\right)^3\right)^3.\left(\left(x^4\right)^4\right)^4 \ldots \text{"n" factores}$$

Tal que:

$$x = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[(n+1)]{\sqrt[n+1]{1024}}}} \quad ; \forall\, n \in \mathbb{R} - \{0 ; -1\}$$

Recuerde:

De acuerdo a lo expuesto:

i) $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, $\forall\, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}$; $\forall\, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in \mathbb{N}$

iii) $\left(b^m\right)^n = b^{mn}$; $\forall\, b \in \mathbb{R}$; $m, n \in Z$

Solución:

(1°) Atendiendo a las potenciaciones en cada factor señalemos:

$$\Rightarrow E = x \cdot \left(\left(x^2\right)^2\right)^2 \cdot \left(\left(x^3\right)^3\right)^3 \cdot \left(\left(x^4\right)^4\right)^4 \ldots \left(\left(x^n\right)^n\right)^n$$

$$\Rightarrow E = x \,.\, x^{2^3} . \, x^{3^3} . \, x^{4^3} \ldots x^{n^3}$$

$\Rightarrow$ Tenemos una multiplicación de bases iguales.

$$\Rightarrow E = x^{1+2^3+3^3+4^3 \ldots + n^3}$$

(2°) Por tener una suma de "n" cubos de los números naturales usamos la fórmula correspondiente para sumar los términos en el exponente.

$$\Rightarrow E = x^{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

(3°) De la condición proporcionada.

$$\Rightarrow x = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{\sqrt[n+1]{1024}}}} \;;$$

$\Rightarrow$ Por ser una raíz de raíz.

$$\Rightarrow x = \sqrt[n^2(n+1)^2]{1024} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

(4°) Reemplazando en (II) en (I) :

$$\Rightarrow E = \left(\sqrt[n^2(n+1)^2]{1024}\right)^{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

(5°) Simplificando:

$$\Rightarrow E = \left(\sqrt[n^2(n+1)^2]{1024} \right)^{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow E = (1024)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow E = \left(2^{10}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \boxed{E = 4\sqrt{2}}$$

3.3.5 Ejemplo explicativo:

Ejecutar la siguiente sentencia:

$$M = \sqrt[a_2]{\frac{x^{a_1}+1}{x^{-a_1}+1}} \cdot \sqrt[a_3]{\frac{x^{a_2}+1}{x^{-a_2}+1}} \cdot \sqrt[a_4]{\frac{x^{a_3}+1}{x^{-a_3}+1}} \ldots \text{n factores}$$

Tal que: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)}$

$$(x \in \mathbb{R}^+ ; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \mathbb{N}_0)$$

Recuerde:

De acuerdo al álgebra de monomios

i) $b^{-n} = 1/b^n \quad \forall b \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; n \in Z$

ii) $\sqrt[m]{b^n} \quad \forall b \in \mathbb{R} \text{ y } m, n \in Z - \{0\}$

Solución:

(1°) Como resultado de examinar los factores de la multiplicación, estos tienen la forma siguiente:

$$\Rightarrow F = \sqrt[a_{k+1}]{\frac{x^{a_k}+1}{x^{-a_k}+1}}$$; atendiendo al exponente negativo.

$$\Rightarrow F = \sqrt[a_{k+1}]{\frac{x^{a_k}+1}{\frac{1}{x^{a_k}}+1}}$$; efectuando lo indicado en las fracciones.

$$\Rightarrow F = \sqrt[a_{k+1}]{\frac{\left(x^{a_k}+1\right)}{\frac{1+x^{a_k}}{x^{a_k}}}}$$; haciendo el producto de extremos y conmutando la suma.

$$\Rightarrow F = \sqrt[a_{k+1}]{\frac{x^{a_k}\cancel{\left(x^{a_k}+1\right)}}{\cancel{\left(x^{a_k}+1\right)}}}$$; simplificando factores repetidos.

$$\Rightarrow F = \sqrt[a_{k+1}]{x^{a_k}} = x^{\frac{a_k}{a_{k+1}}}$$; atendiendo a la radicación.

(2°) La interpretación de este resultado aplicado a "M" será:

$$\Rightarrow M = x^{\frac{a_1}{a_2}} \cdot x^{\frac{a_2}{a_3}} \cdot x^{\frac{a_3}{a_4}} \ldots \text{ n factores; sumando exponentes.}$$

$$\Rightarrow M = x^{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

(3°) Utilizando la condición proporcionada:

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1\times 2} ; \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{2\times 3} ; \frac{a_3}{a_4} = \frac{1}{3\times 4}, \ldots \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} \right) \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

(4°) De sustituir las igualdades de (II) en (I):

$$\Rightarrow M = x^{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}} \ ; \text{ el exponente es notable.}$$

$$\Rightarrow M = x^{\frac{n}{n+1}} \ ; \text{ insistimos que: } \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \boxed{M = \sqrt[n+1]{x^n}}$$

3.3.6 Ejercicio explicativo:

Si: $K_{m+1} = \sqrt[-m^2]{\dfrac{\left(2m^{-2}\right)^{-m} - \left(2m^2\right)^{-m}}{\left[\left(n^{-1}.m^{-m}\right)^{-1} - \left(n^{-1}.m^{m}\right)^{-1}\right]\left[n^{-1}.m^{m} + n^{-1}.m^{-m}\right]}}$

Calcular:

$$E = K_{2m+1}^{2m} + K_{2m}^{2m-1} + K_{2m-1}^{2m-2} + \ldots + K_3^2 + K_2 \ ;$$

$$m \in \mathbb{N} - \{ 0 ; 1 \}$$

Recuerde:

El ejemplo permitirá practicar la idea del exponente negativo; el cambio de una exp. de variables compuesta y establecer le correspondencia entre la radicación con la potenciación.

Solución:

(1°) **Simplificando K_{m+1} ; por partes:**

$\Rightarrow$ numerador del subradical.

$$\Rightarrow \left(2m^{-2}\right)^{-m} - \left(2m^2\right)^{-m}$$

$$\Rightarrow 2^{-m} m^{2m} - 2^{-m} m^{-2m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^m}\left(m^{2m} - m^{-2m}\right) \ ; \text{ luego de extraer } \frac{1}{2^m}$$

(2°) **Denominador del subradical:**

$$\Rightarrow \left[\left(n^{-1} . m^{-m} \right)^{-1} - \left(n^{-1} . m^{m} \right)^{-1} \right]\left[n^{-1} . m^{m} + n^{-1} . m^{-m} \right]$$

$$\Rightarrow \left[n^{+1} . m^{m} - n^{+1} m^{-m} \right] . \left[\frac{m^{m}}{n} + \frac{m^{-m}}{n} \right]$$; luego de atender a los exponentes negativos.

$$\Rightarrow \cancel{n}\left[m^{m} - m^{-m} \right] . \frac{1}{\cancel{n}}\left[m^{m} + m^{-m} \right]$$; es una suma por diferencia.

$\Rightarrow m^{2m} - m^{-2m}$; es el denominador del subradical.

(3°) **La fracción equivalente contenida en el sub-radical será:**

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2^m}\cancel{\left(m^{2m} - m^{-2m} \right)}}{\cancel{\left(m^{2m} - m^{-2m} \right)}} \Rightarrow K_{m+1} = \sqrt[-m^2]{\frac{1}{2^m}} = \sqrt[-m^2]{2^{-m}}$$

$\Rightarrow$ Eliminando el radical

$\Rightarrow K_{m+1} = \sqrt[m]{2} \Rightarrow K^{m}_{m+1} = 2$; K^{m}_{m+1} es independiente de m

(4°) **Sustituyendo en cada sumando de E,** $K^{m}_{m+1} = 2$

$$\Rightarrow E = \underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{(2m)\text{ téminos}} = 2m(2)$$

$\therefore \boxed{E = 4m}$

3.3.7 **Ejemplo explicativo:**

Calcular: $\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots\infty}}}$

Recuerde:

La expresión a calcularse debe de contener el valor aritmético únicamente.

Solución:

(1°) **Definiendo a la expresión numérica propuesta como "x":**

$$x = \sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72\ldots\infty}}} \;;\; x>0 \Rightarrow x = \sqrt{72+x}$$

(2°) **Resolviendo la ecuación:**

$\Rightarrow x^2 = 72 + x \quad ; x>0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 72 = 0 \quad ; x > 0$

$\Rightarrow (x-9)(x+8) = 0 \quad ; x>0 \quad \Rightarrow \quad x = 9 \;;\; x = -8 ; x>0$

(3°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots\infty}}} = 9}$$

(4°) De otro modo, este mismo resultado se logra si se considera el teorema # 62

$$\Rightarrow \sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4(72)+1}+1}{2} = \frac{\sqrt{289}+1}{2} = 9$$

(5°) Este mismo resultado se logra si se considera el teorema # 64 para elementos de factores consecutivos:

$$\therefore \boxed{\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\ 9\times 8}}{72}+\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\ 9\times 8}}{72}+\sqrt{\underset{\substack{\uparrow\\ 9\times 8}}{72}+\ldots\infty}}} = \underset{\uparrow}{9}}$$

Se elige el mayor de los factores

3.3.8 Ejemplo explicativo:

Calcular "y" a partir de los siguientes datos:

$$\frac{k}{y} = \left(\frac{91\sqrt[x]{19}+1}{\sqrt[x]{19}^{\,-1}+91}\right)^{x^5} \cdot \left(\frac{83\sqrt[x^{38}]{38}+1}{\sqrt[-x^{38}]{38}+83}\right)^{-x^{42}}$$

$$k = \frac{\sqrt[3]{x^4\sqrt[3]{x^4\sqrt[3]{x^4\ldots\infty}}}}{\left(\left(\left(2^{-x}\right)^{-x}\right)^{-x}\right)^{-x}} \;;\; x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Recuerde:

i) Si $b^{-m} \Rightarrow b^{-m} = \dfrac{1}{b^m}$; $\forall\ b \in \mathbb{R}-\{0\}$

ii) $\sqrt[m]{b\sqrt[m]{b\sqrt[m]{b\ldots\infty}}} = \sqrt[m-1]{b}$

Solución:

(1°) Por partes y previa ordenación: $\dfrac{y}{k}$

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\frac{\sqrt[x]{19}^{\,-1}+91}{91\sqrt[x]{19}+1}\right)^{x^5} \cdot \left(\frac{\sqrt[-x^{38}]{38}+83}{83\sqrt[x^{38}]{38}+1}\right)^{-x^{42}}$$

$\Rightarrow$ atendiendo a los exponentes negativos.

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt[x]{19}}+91}{91\sqrt[x]{19}+1}\right)^{x^5} \cdot \left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt[x^{38}]{38}}+83}{83\sqrt[x^{38}]{38}+1}\right)^{-x^{42}}$$

$\Rightarrow$ Simplificando:

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\frac{\cancel{91^{x}\sqrt{19}+1}}{\sqrt[x]{19}\left(\cancel{91^{x}\sqrt{19}+1}\right)} \right)^{x^5} \cdot \left(\frac{\cancel{83^{x^{38}}\sqrt{38}+1}}{\sqrt[x^{38}]{38}\left(\cancel{83^{x^{38}}\sqrt{38}+1}\right)} \right)^{-x^{42}}$$

(2°) Se tiene una nueva etapa de sentencias:

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\frac{1}{\sqrt[x]{19}}\right)^{x^5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[x^{38}]{38}}\right)^{-x^{42}} \Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\left(\frac{1}{19}\right)^{\frac{1}{x}}\right)^{x^5} \cdot \left(\left(\frac{1}{38}\right)^{\frac{1}{x^{38}}}\right)^{-x^{42}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = \left(\frac{1}{19}\right)^{x^4} \cdot \left(\frac{1}{38}\right)^{-x^4} = \left(\frac{1}{19}\right)^{x^4} \cdot 38^{x^4} = \left(\frac{38}{19}\right)^{x^4}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{k} = 2^{x^4} \; ; \boxed{y = 2^{x^4}.k} \text{ .... } (1)$$

(3°) En relación al otro dato consignado:

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt[3]{x^4\sqrt[3]{x^4\sqrt[3]{x^4 \ldots \infty}}}}{\left(\left(\left(2^{-x}\right)^{-x}\right)^{-x}\right)^{-x}} \; ; \; x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(4°) Luego de aplicar el teorema # 66 en el "numerador"

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt[3-1]{x^4}}{2^{x^4}} = \frac{\sqrt{x^4}}{2^{x^4}} = \frac{x^2}{2^{x^4}} \text{ .... } (2)$$

(5°) de (2) en (1) : $y = \cancel{2^{x^4}} \cdot \dfrac{x^2}{\cancel{2^{x^4}}}$

$\therefore \boxed{y = x^2}$

3.3.9 Ejemplo explicativo:

Si: $5^{x^x} + 4^{x^x} = 41 \; ; \; x^x \in \mathbb{N}$

Simplificar: $W = \left[\sqrt[x^x-1]{x^5} + \sqrt[x^x-1]{x} \right]^{x^x}$

Recuerde:

Las ecuaciones trascendentes se resuelven por selección o aproximaciones.

Solución:

(1°) De la ecuación propuesta:

$\Rightarrow 5^{x^x} + 4^{x^x} = 41$; Por no ser algebraica seleccionamos por pruebas el valor que cumpla.

$\Rightarrow$ Elegimos: $x^x = 2 \Rightarrow 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow 25 + 16 = 41 = 41$; CUMPLE!

$\Rightarrow$ Asumimos que: $x^x = 2$, UNICO VALOR .... (α)

(2°) **Considerando la expresión W y su ordenación:**

$$\Rightarrow W = \left[\sqrt[\frac{x^x}{x}]{x^5} + \sqrt[\frac{x^x}{x}]{x} \right]^{x^x}$$

$\Rightarrow$ Se logra el equivalente, apropiado para sustituir "x^x"

$$\Rightarrow W = \left[\sqrt[x^x]{(x^x)^5} + \sqrt[x^x]{x^x} \right]^{x^x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

(3°) **Al reemplazar $x^x = 2$**

$$\Rightarrow W = \left[\sqrt[2]{(2)^5} + \sqrt[2]{2} \right]^2$$

(4°) **Desarrollando el binomio**

$$\Rightarrow W = \left(\sqrt[2]{2^5} \right)^2 + 2\left(\sqrt[2]{2^5} \right)\left(\sqrt[2]{2} \right) + \left(\sqrt[2]{2} \right)^2 \; ; \text{ Al desarrollar}$$

$$\Rightarrow W = 2^5 + 2(2^3) + 2 \Rightarrow W = 32 + 16 + 2$$

$$\therefore \boxed{W = 50}$$

3.3.10 **Ejercicio explicativo:**

Efectuar: $$H = \sqrt{ \sqrt[\sqrt[11]{11}]{121^{\sqrt[11]{121}}} \; \sqrt[\sqrt[11]{11}]{ \sqrt[1+\sqrt[11]{11}]{121^{\sqrt[11]{121}}} } }$$

Comentario:

Este caso nos permite observar las ventajas que ofrece un cambio de constante a parámetro; para posteriormente realizar las operaciones con radicales señaladas.

Solución:

(1) **Un examen a la expresión propuesta nos permite decidir el cambio siguiente:**

$$\Rightarrow \sqrt[1+\sqrt[11]{11}]{121^{\sqrt[11]{121}}} = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Rightarrow x^{1+\sqrt[11]{11}} = 121^{\sqrt[11]{121}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(2) **Luego del cambio (1)**

$$\Rightarrow H = \sqrt[\sqrt[11]{11}]{x \sqrt[\sqrt[11]{11}]{x}}$$

luego de eliminar radicales.

$$\Rightarrow H = \sqrt[\sqrt[11]{11}\cdot\sqrt[11]{11}]{x^{1+\sqrt[11]{11}}}$$

$$\Rightarrow H = \sqrt[\sqrt[11]{121}]{\left\{ x^{1+\sqrt[11]{11}} \right\}} \; ; \text{ el subradical es la igualdad (2)}$$

$$\Rightarrow H = \sqrt[\cancel{\sqrt[11]{121}}]{121^{\cancel{\sqrt[11]{121}}}}$$; simplificando:

$\therefore$ $\boxed{H = 121}$

3.3.11 Ejemplo explicativo:

Efectuar: $$P = \left(\sqrt[2^n]{2}\ \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{\text{"n" radicales}} \right)^n \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-n}}\ ;\ n \in \mathbb{R}$$

Comentario:

Este caso nos permite visualizar la solución por el método inductivo que ofrece ser una buena alternativa como se podrá notar luego del procedimiento usual.

Solución: (Procedimiento usual).

(1°) **Atendiendo a la raíz de raíz reiterada.**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{\text{"n" radicales}} = \sqrt[2^n]{2}$$; 2^n es el producto de los "n" índices.

(2°) **Sustituyendo sobre "P", el equivalente obtenido:**

$$\Rightarrow P = \left(\sqrt[2^n]{2} \cdot \sqrt[2^n]{2} \right)^n \cdot \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-n}} \Rightarrow P = \left(\sqrt[2^n]{2^2} \right)^n \cdot \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-n}}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt[2^n]{2^{2n}}\ \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-n}}$$; notar que: $\sqrt[2^n]{2^{2n}} = \sqrt[\frac{2^n}{2}]{2^n} = \sqrt[2^{n-1}]{2^n}$

$$\Rightarrow P = \sqrt[2^{n-1}]{2^n}\ \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}-n}}$$; Producto de radicales homogéneos.

$$\Rightarrow P = \sqrt[2^{n-1}]{2^{n+2^{n-1}-n}}$$; La suma de exponentes es reductible.

$$\Rightarrow P = \sqrt[2^{n-1}]{2^{2^{n-1}}}$$; Eliminando el radical.

Luego de simplificar: $\therefore$ $\boxed{P = 2}$

(3°) ***Solución:*** (2^a Alternativa, Por Inducción)

Inducciendo:

Si: n = 1, $\Rightarrow P_1 = \sqrt[2^1]{2}\left(\sqrt{2}\right)\sqrt[2^0]{2^{2^0-1}}$; luego de reemplazar

$\Rightarrow P_1 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt[1]{2^0} = \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 2 \Rightarrow \boxed{P_1 = 2}$

Si: n = 2, $\Rightarrow P_2 = \left(\sqrt[4]{2}\ \underbrace{\sqrt{\sqrt{2}}}_{n=2} \right)^2 \sqrt[2^1]{2^{2-2}}$; luego de reemplazar

$$\Rightarrow P_2 = \left(\sqrt[4]{2}\,\sqrt[4]{2}\right)^2 \times \sqrt[2]{2^0} \Rightarrow P_2 = \left(\sqrt[4]{2^2}\right)^2 \times 1 = \sqrt[4]{2^4}$$

Efectuando y simplificando $\Rightarrow \boxed{P_2 = 2}$

Si: n = 3, $\Rightarrow P_3 = \left(\sqrt[8]{2}\,\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}_{3}\right)^3 \sqrt[4]{2^1}$

$$\Rightarrow P_3 = \left(\sqrt[8]{2}\,\sqrt[8]{2}\right)^{3^3} \sqrt[4]{2} = \left(\sqrt[8]{2}\right)^3 \sqrt[4]{2}$$

$$\Rightarrow P_3 = \sqrt[4]{2^3}\,\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^{3+1}} \Rightarrow P_3 = \sqrt[4]{2^4}$$

luego de simplificar $\Rightarrow \boxed{P_3 = 2}$

(4°) Los casos particulares nos permiten concluir lo siguiente:

$\therefore$ **Si: n = n,** $\Rightarrow \boxed{P_n = 2}$

3.3.12 Ejemplo explicativo:

Si: $\sqrt[n+3]{x} = \left(2^{n+2}\right)^{n+5}$; $\sqrt[n+7]{y^{-1}} = \sqrt[n^{-1}]{2^{n+3}}$; $\sqrt[2n+7]{z} = 2^{-5}$

Calcular: x y z ; n ∈ IN.

Recuerde:

La definición de radicación.

si : $\sqrt[m]{x} = b \Rightarrow x = b^m$

Solución:

(1°) **Despejando x, y, z de cada caso:**

$$\Rightarrow \left(\sqrt[n+3]{x}\right)^{n+3} = \left(\left(2^{n+2}\right)^{n+5}\right)^{n+3}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 2^{(n+2)(n+5)(n+3)}}$ .... (I)

$$\Rightarrow \left(\sqrt[n+7]{y^{-1}}\right)^{-(n+7)} = \left(\sqrt[n^{-1}]{2^{n+3}}\right)^{-(n+7)}$$

$\Rightarrow \boxed{y = 2^{-\frac{(n+3)(n+7)}{n^{-1}}}}$ .... (II)

$$\Rightarrow \left(\sqrt[2n+7]{z}\right)^{2n+7} = \left(2^{-5}\right)^{2n+7}$$

$\Rightarrow \boxed{z = 2^{-5(2n+7)}}$ .... (III)

$\Rightarrow$ de (I) × (II) × (III):

$$\Rightarrow x\,y\,z = 2^{(n+2)(n+5)(n+3)} \times 2^{-(n+3)(n+7)n} \times 2^{-5(2n+7)}$$

(2°) Ejecutando las sentencias:

$$\Rightarrow xyz = 2^{n^3+10n^2+31n+30} \times 2^{-(n^3+10n^2+21n)} \times 2^{-5(2n+7)}$$

$$\Rightarrow xyz = 2^{\cancel{n^3+10n^2+31n+30-n^3-10n^2-21n-10n-35}} \Rightarrow xyz = 2^{-5}$$

$$\therefore \boxed{xyz = 1/32}$$

3.3.13 **Ejercicio explicativo:**

Si: $a_m = \sqrt[\sqrt{m+1}-\sqrt{m}]{\dfrac{\sqrt{m}^{2\sqrt{m+1}} + \sqrt{m}^{m+\sqrt{m+1}}}{\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} + \sqrt{m}^{m+\sqrt{m}}}}$; $m \in \mathbb{N}-\{0\}$

Calcular: $E = a_2\, a_4\, a_8\, a_{16} \ldots .$ 16 factores

Comentario:

Considerando que "a_m" es el término generatriz o general, debemos simplificarlo previamente.

Solución:

(1°) **Simplificando a_m, para ello atendemos el subradical.**

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{m}^{2\sqrt{m+1}} + \sqrt{m}^{m+\sqrt{m+1}}}{\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} + \sqrt{m}^{m+\sqrt{m}}}$$; en esta factorizamos: $\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}}\left(\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}} + \sqrt{m}^{m}\right)}{\sqrt{m}^{\sqrt{m}}\left(\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}} + \sqrt{m}^{m}\right)}$$; esta es simplificable.

Por ser una división de potenciaciones de igual base.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}}}{\sqrt{m}^{\sqrt{m}}} = \sqrt{m}^{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}$$

(2°) **Simplificando y sustituyendo sobre a_m**

$$\Rightarrow a_m = \sqrt[\sqrt{m+1}-\sqrt{m}]{\sqrt{m}^{\sqrt{m+1}-\sqrt{m}}} \Rightarrow a_m = \sqrt{m}$$; es el equivalente de a_m.

(3°) **Se podrá tener lo siguiente:**

$$\Rightarrow E = \sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{8}\sqrt{16}\sqrt{32} \ldots 16 \text{ factores}$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}^{2}\sqrt{2}^{3}\sqrt{2}^{4}\sqrt{2}^{5} \ldots \sqrt{2}^{16}}_{16 \text{ factores}}$$; podemos sumar exponentes.

$$\Rightarrow E = \sqrt{2}^{1+2+3+\ldots+16} \Rightarrow E = \sqrt{2}^{\frac{16\times 17}{2}} = 2^{\frac{\overset{4}{\cancel{16}}\times 17}{\cancel{4}}} \quad \therefore \boxed{E = 2^{68}}$$

3.3.14 **Ejercicio explicativo:**

Resolver: $$5^{4^{7^{9^{11^3}}}} = (2x+1)^{(3x-2)^{(5x-3)^{(8x-7)^{(7x-3)^3}}}}$$

Recuerde:

La ecuación propuesta es no algebraica, por lo que la solución es mediante simetría.

Solución:

(1°) **Para que exista simetría, deberá verificarse en forma simultánea:**

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 &=& 2x+1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4 &=& 3x-2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 7 &=& 5x-3 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ 9 &=& 8x-7 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 11 &=& 7x-3 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{array}\right\} \text{ pues: } 5^{4^{7^{9^{11^3}}}} = (2x+1)^{(3x-2)^{(5x-3)^{(8x-7)^{(7x-3)^3}}}}$$

(2°) **Resolviendo cada ecuación obtenida.**

De (1) , (2) , (3) , (4) y (5) : $x = 2$

que verifica: $5^{4^{7^{9^{11^3}}}} = 5^{4^{7^{9^{11^3}}}}$

$\therefore \boxed{S = \{2\}}$

3.3.15 **Ejercicio explicativo:**

Resolver: $$\left[x^{x^2+x}\right]^{x^{x^2+x}} = \left[x^{30}\right]^{x^{30}} \quad x \in Z$$

Comentario:

Se trata de una ecuación no algebraica y la solución de la misma requiere de establecer simetría.

Solución:

(1°) **La ecuación ofrece una simetría evidente.**

$\Rightarrow x^{x^2+x} = x^{30}$; igualando términos correspondientes.

$\Rightarrow x^2 + x = 30$; igualando exponentes.

(2°) $\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$; una ecuación algebraica.

$\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$; $x = 5$; $x = -6$

$$\begin{array}{cc} x & -5 \\ x & +6 \end{array} \qquad \therefore \boxed{S = \{5; -6\}}$$

(3°) La verificación se realiza conforme se explica a continuación

Si: $x = 5 \quad \Rightarrow \left[5^{5^2+5} \right]^{5^{5^2+5}} = \left[5^{30} \right]^{5^{30}}$

$\Rightarrow \left(5^{30} \right)^{5^{30}} = \left(5^{30} \right)^{5^{30}}$

Si: $x = -6 \quad \Rightarrow \left[(-6)^{36-6} \right]^{(-6)^{36-6}} = \left[(-6)^{30} \right]^{(-6)^{30}}$

$\Rightarrow \left(6^{30} \right)^{6^{30}} = \left(6^{30} \right)^{6^{30}}$

3.2.16 **Ejemplo explicativo:**

Resolver: $11^{-3^{1331x}} = x \ ; \ x \in Q$

Comentario:

(i) La ecuación propuesta no es una ecuación algebraica por lo que la solución se establecerá mediante simetría o selección.

(ii) Si: $b^m = p \Rightarrow b = p^{\frac{1}{m}}$; Si: $b^{m^n} = p \Rightarrow b = p^{\frac{1}{m^n}}$

Solución:

(1°) En la ecuación: $11^{-3^{1331x}} = x$

Hacemos: $x = 11^{-m}$ .... (I)

(2°) **Sustituyendo (I) sobre la ecuación:**

$\Rightarrow 11^{-3^{1331 \times 11^{-m}}} = 11^{-m}$; igualando bases.

$\Rightarrow -3^{1331 \times 11^{-m}} = -m$; podemos simplificar los signos negativos.

$\Rightarrow 3^{1331 \times 11^{-m}} = m$;

(3°) **Transponiendo 11^{-m} al 2° lado de la ecuación:**

$\Rightarrow 3^{1331} = m^{11^m}$; transponiendo 11^{-m}.

$\Rightarrow 3^{11^3} = m^{11^m}$; logramos simetría pues $1331 = 11^3 \Rightarrow m = 3$

(4°) **Para obtener "x", sustituimos m sobre (I)**

$\Rightarrow x = 11^{-3} = \dfrac{1}{1331}$

$$\therefore \boxed{S = \left\{ \frac{1}{1331} \right\}}$$

3.3.17 **Ejemplo explicativo:**

Resolver: $x^{x^{110}} = 10^{10^{10}}$; $x \in \mathbb{R}$

Recuerde:

(i) Las ecuaciones no algebraicas se resuelven mediante simetría o selección de raíces.

(ii) $\left(x^m\right)^n = \left(x^n\right)^m$, $x \in \mathbb{R}$ es la potenciación de una potenciación.

***Solución*:**

(1°) Se trata de una ecuación no algebraica

$\Rightarrow$ para seleccionar la raíz de la misma, buscamos la **simetría,** elevando a exponente 110 ambos miembros.

$\Rightarrow \left(x^{110}\right)^{x^{110}} = 10^{10^{10} \times 110}$; pues $\left(x^{x^{110}}\right)^{110} = \left(x^{110}\right)^{x^{110}}$

(2°) **Ordenando en el 2° miembro.**

$\Rightarrow 10^{10^{10} \times 11 \times 10} = \left(10^{11}\right)^{10^{10} \times 10} = \left(10^{11}\right)^{10^{11}} \Rightarrow \left(x^{110}\right)^{x^{110}} = \left(10^{11}\right)^{10^{11}}$;

(3°) **De igualar términos correspondientes:**

$\Rightarrow x^{110} = 10^{11} \Rightarrow x = \sqrt[110]{10^{11}}$; despejando x $\Rightarrow x = \sqrt[10]{10}$

(4°) **Verificando la ecuación:**

$\Rightarrow \sqrt[10]{10}^{\sqrt[10]{10}^{110}} = \sqrt[10]{10}^{10^{11}} \Rightarrow \sqrt[\cancel{10}]{10}^{\cancel{10}^{11}} = 10^{10^{10}}$

$\therefore \boxed{S = \left\{\sqrt[10]{10}\right\}}$

3.3.18 **Ejemplo explicativo:**

Resolver: $\sqrt[3]{x^{\sqrt[4]{x}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \mathbb{R}^+$

Comentario:

La ecuación proporcionada, no es **algebraica por** lo que será necesario utilizar el criterio de la simetría.

***Solución*:**

(1°) **Buscando la simetría:**

$\Rightarrow$ Al cubo: $\left(\sqrt[3]{x^{\sqrt[4]{x}}}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \Rightarrow x^{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{8}$

(2°) **Extrayendo raíz cuarta a los términos de la igualdad:**

$$\sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{\frac{2\sqrt{2}}{8}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{2}{16}}}$$

(3°) **Tenemos simetría en el primer miembro; ordenando la simetría en el 2° miembro.**

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[8]{\frac{1}{8}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \text{; } \exists \text{ simetría}$$

(4°) **Igualando los términos correspondientes:**

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{8}\text{, } x = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{8^4} = \frac{1}{4\,096}$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\frac{1}{4\,096}\right\}}$$

3.3.19 Ejemplo explicativo:

Resolver: $x^{x^{1/4}} = \frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{Q}^+$

Comentario:

(I) La simetría es el criterio que se utiliza para resolver ecuaciones no algebraicas: Cuyas raíces son racionales.

(II) Si $x^x = m^m \Rightarrow x = m$

Solución:

(1°) **Buscando simetría.**

$$\Rightarrow x^{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{2}\text{ ;} \qquad \Rightarrow \sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

(2°) Ordenando el 2° miembro a fin de obtener simetría.

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\text{ ;} \qquad \Rightarrow \sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}\text{ ;}$$

(3°) Se obtuvo la **simetría** en ambos miembros:

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x}^{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = \frac{1}{16}\text{ ; de igualar correspondientemente.}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{16}\right)^4$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\frac{1}{4096}\right\}}$$

3.3.20 **Ejercicio explicativo:**

Resolver: $$\sqrt[5]{x^{\sqrt[8]{x}}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{1/5} \quad x \in \mathbb{Q}^+$$

Comentario:

Las ecuaciones no algebraicas pueden ser resueltas mediante aproximaciones,en casos en los cuales las raíces son racionales, se resuelven mediante el criterio de simetría.

Solución:

(1°) **Buscando la simetría:**

$$\Rightarrow x^{\sqrt[8]{x}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}\times 5} = \left(\frac{1}{16}\right) \text{ ; de potenciar a exponente 5.}$$

$$\Rightarrow \text{ de extraer raíz octava } \Rightarrow \sqrt[8]{x^{\sqrt[8]{x}}} = \sqrt[8]{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{8}}$$

(2°) **Se logra la simetría en ambos miembros:**

$$\Rightarrow \sqrt[8]{x}^{\sqrt[8]{x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$; de extraer la raíz cuadrada se obtiene **doble simetría.**

$$\Rightarrow \sqrt[8]{x} = \frac{1}{4} \vee \sqrt[8]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \vee x = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\frac{1}{256} ; \frac{1}{65\,536}\right\}}$$

3.3.21 **Ejercicio explicativo:**

Resolver: $$x^{x^{49}} = 7^{7^6}$$

Comentario:

Las ecuaciones no algebraicas en las cuales se aplica el criterio de simetría, por lo general cumplen si poseen raíces reales racionales.

Solución:

(1°) **En búsqueda de la simetría; de acuerdo a las propiedades de las potenciaciones.**

$$\Rightarrow x^{x^{49}} = 7^{7^6}$$

(2°) **Elevando a exponente 49**

$$\Rightarrow \left(x^{49}\right)^{x^{49}} = \left(7^{7^6}\right)^{49}$$

(3°) **Atendiendo al 2° miembro:**

$\Rightarrow \left(x^{49}\right)^{x^{49}} = \left(7^{7}\right)^{7^{7}}$; ∃ Simetría! pues $\left(7^{7^{6}}\right)^{7\times 7} = \left(7^{7}\right)^{7^{7}}$

(4°) **Igualando los correspondientes se logra:**

$\Rightarrow x^{49} = 7^{7} \Rightarrow x = \sqrt[49]{7^{7}}$; $x = \sqrt[7]{7}$

(3°) **Verificando el conjunto solución se logra:**

$\Rightarrow \sqrt[7]{7}^{\sqrt[7]{7}^{49}} = \sqrt[7]{7}^{7^{7}} = 7^{\left(\frac{7^{7}}{7}\right)} = 7^{7^{6}}$, la cual permite aceptar a "S".

$\therefore \boxed{S = \left\{\sqrt[7]{7}\right\}}$

3.3.22 Ejemplo explicativo:

Resolver: $(x-1)^{(x-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Comentario:

Este ejercicio permite recordar que las ecuaciones pueden tener varias soluciones, las cuales deben ser consideradas en el conjunto solución.

Solución:

(1°) Se trata de una ecuación trascendente:

$\Rightarrow (x-1)^{(x-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ....(I); también

$\Rightarrow (x-1)^{(x-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ ....(II); Notar que $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ tienen el mismo valor y signo

(2°) $\Rightarrow$ de (1): $x - 1 = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $x = \frac{3}{2}$; porque ∃ simetría

$\Rightarrow$ de (2): $x - 1 = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $x = \frac{5}{4}$; porque ∃ simetría

$\Rightarrow$ Escribiendo el conjunto solución:

$\therefore S = \left\{\frac{3}{2} ; \frac{5}{4}\right\}$

Comentario:

Los valores $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$ han sido aceptados como elementos del conjunto solución; en efecto:

Si: $x = \frac{3}{2}$: $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{\left(\frac{3}{2}-1\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\quad\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Si: $x = \frac{5}{4}$: $\left(\frac{5}{4}-1\right)^{\frac{5}{4}-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.3.23 Ejercicio explicativo:

Resolver: $\quad 2x-1 = \left(x^2-4\right)x^{x^2-2x-3} \quad x \in Z$

Comentario:

El criterio de simetría permite resolver algunas ecuaciones no algebraicas que poseen raíces racionales.

Solución:

(1°) **Buscando la simetría por tratarse de una ecuación no algebraica y exponencial.**

$\Rightarrow (2x-1) = \left(x^2-4\right)x^{x^2-3}\ x^{-2x}$; pues: $x^{-2x} = \frac{1}{x^{2x}}$

$\Rightarrow (2x-1)x^{2x} = \left(x^2-4\right)x^{x^2-3}$; multiplicando por x^{-1}

(2°) $(2x-1)x^{2x-1} = \left(x^2-4\right)x^{x^2-4}$; $\exists$ simetría

$\Rightarrow 2x-1 = x^2-4$; pues: $(2x-1)x^{2x-1} = \left(x^2-4\right)x^{x^2-4}$

(3°) **Resolviendo la ecuación lograda:**

$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$; $x = -1$

(4°) **Verificando podemos tener:**

Si: x = 3: $\quad (2(3)-1) = (9-4)3^{9-6-3}$

$\therefore 5 = 5$

Si: x = -1: $\quad (-3) = (1-4)(-1)^{1+2-3}$

$\therefore -3 = -3$

$\therefore \boxed{S = \{3\ ;\ -1\}}$

3.3.24 Ejemplo explicativo:

Sean: $\quad a^{-11^{11^{-a}}} = 11$; $b^{-\sqrt[55]{55}^{\sqrt[55]{55}^{-b}}} = \sqrt[55]{55}$

Calcular: $\quad E = 11\sqrt[a]{a^2} + \sqrt[-b]{b^{55}}$

Comentario:

Las ecuaciones no algebraicas cuyas raíces sean racionales enteras pueden ser resueltas mediante el criterio de simetría o de selección.

Solución:

(1°) Podemos ordenar buscando la simetría en cada caso:

(2°) **De la primera:**

$$\Rightarrow\ a = 11^{-11^{-11^{-a}}}\ ;\ \text{pues: } x^m = y \Rightarrow x = y^{m^{-1}}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{\sqrt[a]{a}^{a}}} = \left(\frac{1}{11}\right)^{\left(\frac{1}{11}\right)^{\left(\frac{1}{11}\right)^{a}}}\ ;\ \text{se logró obtener la simetría}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[a]{a} = \frac{1}{11}\quad \therefore\ \sqrt[a]{a^2} = \left(\frac{1}{11}\right)^2 = \frac{1}{121}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

(3°) **De la segunda:**

$$\Rightarrow\ b = \sqrt[55]{55}^{-\sqrt[55]{55}^{-\sqrt[55]{55}^{-b}}}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}^{\sqrt[b]{b}^{b}}} = \left(\frac{1}{\sqrt[55]{55}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[55]{55}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt[55]{55}}\right)^{b}}}\ ;\ \text{se logró la simetría}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt[b]{b} = \frac{1}{\sqrt[55]{55}}\quad \therefore\ \sqrt[b]{b^{55}} = \left(\frac{1}{\sqrt[55]{55}}\right)^{55} = \frac{1}{55}\ \ldots\ (2)$$

$$\Rightarrow\ \text{De } (1) \text{ y } (2)\text{: } E = \frac{\cancel{11}}{\cancel{121}} + \frac{1}{55} = \frac{5+1}{55}$$

$$\therefore\ \boxed{E = \frac{6}{55}}$$

3.3.25 **Ejemplo explicativo:**

Resolver: $x^{x-x^2+13} = x^2 - 12\ ;\ x \in \mathbb{Z}$

Comentario:

El caso muestra una ecuación no algebraica exponencial por lo que será necesario establecer la simetría correspondiente.

Solución:

(1°) **Buscando la simetría:**

$$\Rightarrow\ x^x \,.\, x^{-x^2+13} = x^2 - 12$$

$\Rightarrow$ Transponiendo x^{x^2-13} al 1° miembro $\Rightarrow$ $x^x . = \left(x^2 - 12\right) x^{x^2-13}$

(2°) Multiplicando por x:

$\Rightarrow$ $x^{x+1} . = \left(x^2 - 12\right) x^{x^2-12}$ $\Rightarrow$ $x . x^x . = \left(x^2 - 12\right) x^{x^2-12}$; $\exists$ **simetría**

(3°) Igualando los correspondientes:

$\Rightarrow$ $x . x^x . = \left(x^2 - 12\right) x^{x^2-12}$

$\Rightarrow$ $x = x^2 - 12$; $x^2 - x - 12 = 0$

$\Rightarrow$ $(x-4)(x+3) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 4$; $x = -3$

(4°) Verificando: Si: $x = 4$ $\qquad 4^{4-16+13} = 16 - 12$

$4 = 4$

Si: $x = -3$ $\qquad (-3)^{-3-9+13} = 9 - 12$

$-3 = -3$

$\therefore$ $\boxed{S = \{4 ; -3\}}$

3.3.26 Ejemplo explicativo:

Resolver: $\qquad 5x = \left(5\sqrt{x} + 1\right)^{x^{5\sqrt{x}+1-5x}}$; $x \in \mathbb{R}$

Comentario:

Las ecuaciones no algebraicas elementales se pueden resolver mediante simetría o selección; en caso contrario existen métodos diversos para obtener la solución irracional.

Solución:

(1°) **Buscando la simetría:**

$$\left(5\sqrt{x} + 1\right)^{x^{5\sqrt{x}+1} . x^{-5x}} = 5x$$

$\Rightarrow$ ordenando el exponente x^{-5x} en el 2° miembro

$\Rightarrow$ $\left(5\sqrt{x} + 1\right)^{x^{5\sqrt{x}+1}} = (5x)^{x^{5x}}$; $\exists$ simetria

(2°) **Podemos igualar correspondientemente:**

$\Rightarrow$ $5\sqrt{x} + 1 = 5x$

$\Rightarrow$ se tiene una ecuación de 2° grado.

$\Rightarrow$ $5x - 5\sqrt{x} - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2}$; condición $x > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \;;\; \sqrt{x_2} = \underbrace{\frac{5-3\sqrt{5}}{2}}_{\text{negativo}} ; \;\Rightarrow x_1 = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)^2 ;$$

$\Rightarrow$ Por lo que el conjunto solución será:

$$\therefore \boxed{S = \left\{ \frac{35}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{5} \right\}}$$

3.3.27 **Ejemplo explicativo:**

Resolver en x: $x^{x-\sqrt{x}-m^2-m+1} = \sqrt{x} + m^2 + m \;;\; m \in \mathbb{R}^+$

Comentario:

El criterio de simetría permite resolver las ecuaciones no algebraicas que poseen raíces racionales.

Solución:

(1°) **Buscando simetría; para lo cual ordenamos:**

$$\Rightarrow x^{x+1} . x^{-(\sqrt{x}+m^2+m)} = \sqrt{x} + m^2 + m ; \;\Rightarrow x^{x+1} . = \left(\sqrt{x} + m^2 + m\right) x^{\sqrt{x}+m^2+m} ;$$

$$\Rightarrow x . x^x . = \left(\sqrt{x} + m^2 + m\right) x^{\sqrt{x}+m^2+m} ;$$

(2°) Se obtuvo la simetría que puede expresarse como:

$$\Rightarrow x . x^x . = \left(\sqrt{x} + m^2 + m\right) x^{\sqrt{x}+m^2+m} ;$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{x} + m^2 + m \;\Rightarrow x - \sqrt{x} - m^2 - m = 0$$

(3°) Resolviendo por factorización:

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} + m\right)\left(\sqrt{x} - m - 1\right) = 0 \;\Rightarrow \sqrt{x} = -m \vee \sqrt{x} = m+1 \Rightarrow x = (m+1)^2$$

$$\therefore \boxed{S = \{ (m+1)^2 \}}$$

3.3.28 **Ejercicio Explicativo:**

Si: $x = \sqrt[x]{n}$

Simplificar: $k = \left(\dfrac{x^{x^{x^{x+1}+1}+1}}{nx} \right)^{(n^n-1)^{-1}}$

Recuerde:

i) La definición de radicación si: $\sqrt[m]{a} = b \Rightarrow a = b^m$, $a, b \in \mathbb{R}$

ii) Si $b^m b^n = b^{m+n} \Rightarrow b^{b+1} = b^b b$

Solución:

(1°) **De la condición:** $x^x = n$ .... (I)

(2°) **Expresando "k" en términos de x^x**

$$\Rightarrow x^{x+1} + 1 = (x^x)\,x + 1$$

$$\Rightarrow x^{x^{x+1}+1}+1 = x^{(x^x)x+1}+1 = \left(x^x\right)^{(x^x)}.x+1$$

$$\Rightarrow x^{x^{x^{x+1}+1}+1} = x^{(x^x)^{x^x}x}.x = \left(x^x\right)^{(x^x)^{(x^x)}}.x \text{ .... (II)}$$

(3°) **Sustituyendo (I) en (II) se obtiene:**

$$\Rightarrow k = \left(\frac{n^{n^n}.x}{nx}\right)^{(n^n-1)^{-1}} = \left(\frac{n^{n^n}}{n}\right)^{(n^n-1)^{-1}}$$

Luego de realizar la división y atendiendo a la potenciación:

$$\Rightarrow k = \left(n^{n^n-1}\right)^{(n^n-1)^{-1}}$$

$$\therefore \boxed{k = n}$$

3.3.29 **Ejercicio Explicativo:**

Efectuar:

$$J = \left[\left(\mathrm{Rec}\left(\frac{2}{3}\right)\right)^{\mathrm{Op}(2)} - \left(\mathrm{Op}\left(\frac{2}{3}\right)\right)^{\mathrm{Op}(3)} + \mathrm{Op}(\mathrm{Rec}\,6) - (\mathrm{Op}\,6)^{\mathrm{Op}(3)}\right]^{\mathrm{Rec}\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

Recuerde:

De acuerdo a los axiomas de los números reales se tienen lo siguiente:

$\mathrm{Op}(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Rec}(x) = \dfrac{1}{x}$; si $x \neq 0$

Solución:

(1°) **En relación a los opuestos y recíprocos.**

$$\Rightarrow J = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{6}\right) - (-6)^{-3}\right]^{-\frac{2}{3}}$$

(2°) **De acuerdo a la característica de cada exponente las potenciaciones permiten lograr.**

$$\Rightarrow J = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{1}{6} + \frac{1}{216}\right]^{-\frac{2}{3}}$$

(3°) **Sumando las fracciones heterogéneas**

$$\Rightarrow J = \left[\frac{96 + 64 - 36 + 1}{216}\right]^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow J = \left[\frac{125}{216}\right]^{-\frac{2}{3}} = \left[\frac{5^3}{6^3}\right]^{-\frac{2}{3}} = \left[\frac{5}{6}\right]^{-2}$$

$$\therefore \boxed{J = \frac{36}{25}}$$

3.3.30 Ejercicio Explicativo:

Calcular x si: $\sqrt[\sqrt{\frac{1}{[\![x]\!]-1}}]{\sqrt[2\sqrt{2}]{2}} = \sqrt[20\sqrt{2}]{1024^3}$

Recuerde:

$[\![x]\!]$ es la simbología del **máximo entero**

Si: $[\![x]\!] = k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k \leq x < k + 1$

Solución:

(1°) **De eliminar los radicales se tendrá sucesivamente:**

$$\Rightarrow \sqrt[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{[\![x]\!]-1}}]{2} = 1024^{\frac{3}{20\sqrt{2}}} \Rightarrow 2^{\frac{\sqrt{[\![x]\!]-1}}{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{30}{20\sqrt{2}}}$$

(2°) **Igualando las bases**

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{[\![x]\!]-1}}{2\sqrt{2}} = \frac{30}{20\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{[\![x]\!]-1} = 3$$

$\Rightarrow$ Elevando al cuadrado

$\Rightarrow [\![x]\!] - 1 = 9 \ , \ [\![x]\!] = 10$

(3°) **Por definición de máximo entero:**

$\Rightarrow 10 \leq x < 11$ $\qquad \therefore \boxed{x \in [10, 11\rangle}$

3.3.31 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar: $$x = \sqrt[2^{1994}]{\sqrt[2^{1993}]{\sqrt[2^{1992}]{2^{2^{5982}}}}}$$

Recuerde:

Si: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; Radicación de radicación.

Solución:

(1°) **Reduciendo a un solo radical:**

$$\Rightarrow \sqrt[2^{1994}\cdot 2^{1993}\cdot 2^{1992}]{2^{2^{5982}}} \quad \Rightarrow \sqrt[2^{1994+1993+1992}]{2^{2^{5982}}} \quad \Rightarrow \sqrt[2^{5979}]{2^{2^{5982}}}$$

(2°) **Eliminando el radical:**

$$\Rightarrow 2^{2^{5982} \div 2^{5979}} \qquad \therefore\ 2^{2^3} = 2^8 = \boxed{256}$$

3.3.32 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar: $$E = 2 \times \sqrt[11]{4}\ \sqrt[121]{8}\ \sqrt[1331]{16} \ldots \infty$$

Recuerde:

La serie geométrica de coeficientes crecientes naturalmente

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \infty = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{Si: } 0 < |x| < 1$$

Solución:

(1°) **Al ordenar la multiplicación:**

$$\Rightarrow E = 2 \times 2^{2\left(\frac{1}{11}\right)} \times 2^{3\left(\frac{1}{11}\right)^2} \times 2^{4\left(\frac{1}{11}\right)^3} \ldots \infty$$

$$\Rightarrow E = 2^{1+2\left(\frac{1}{11}\right)+3\left(\frac{1}{11}\right)^2+4\left(\frac{1}{11}\right)^3 \ldots \infty}$$

(2°) **El exponente es notable y es análogo al caso del recordatorio:**

$$\Rightarrow E = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots\ldots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{si } 0 < |x| < 1$$

$$\Rightarrow 1 + 2\left(\frac{1}{11}\right) + 3\left(\frac{1}{11}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{11}\right)^3 \ldots \infty = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{11}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{10}{11}\right)^2} = \frac{121}{100}$$

$$\Rightarrow E = 2^{\frac{121}{100}}$$

$$\therefore \boxed{E = 2\sqrt[100]{2^{121}}}$$

3.3.33 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar: $k = \sqrt[5]{4}\ \sqrt[25]{4}\ \sqrt[125]{4}\ \sqrt[625]{4} \ldots \infty$

Recuerde:

La serie geométrica infinita:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \infty = \frac{1}{1-x} \quad \text{si: } 0 < |x| < 1$$

Solución:

(1°) **Eliminando los radicales**

$$k = 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{1}{25}} \cdot 4^{\frac{1}{125}} \cdot 4^{\frac{1}{625}} \ldots \infty$$

Sumando los exponentes

$$k = 4^{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\frac{1}{625}\ldots\infty} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

(2°) **El exponente resultante es una serie geométrica infinita que puede expresar como:**

$$\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} \ldots \infty\right) \Rightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\frac{4}{5}}\right) = \frac{1}{4}$$

(3°) **En (I) el exponente resultante será:** $k = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$

$$\therefore \boxed{K = \sqrt{2}}$$

3.3.34 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar: $E = \left(\left(x^2\right)^2\right)^3 \left(\left(x^4\right)^3\right)^4 \left(\left(x^6\right)^4\right)^5 \ldots$ n factores

Sabiendo que: $x = \sqrt[n(n+1)(n+2)(n+3)]{16^3}$

Recuerde:

Es notable la suma de números naturales de la serie siguiente:

$$1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) **Al ordenar la multiplicación:**

$$E = x^{2\times2\times3} \cdot x^{4\times3\times4} \cdot x^{6\times4\times5} \ldots \text{ n factores}$$

$$\Rightarrow E = x^{2\times2\times3 + 4\times3\times4 + 6\times4\times5 \ldots + (2n)(n+1)(n+2)}$$

(2°) **Al estudiar el exponente:**

$$2[1\times2\times3 + 2\times3\times4 + 3\times4\times5 + \ldots + n(n+1)(n+2)]$$

$$2\left[\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$$

(3°) **El exponente de E será:**

$$\Rightarrow E = x^{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}}$$

(4°) **Sustituyendo x por el equivalente proporcionado**

$$\Rightarrow E = \left(\sqrt[\cancel{n(n+1)(n+2)(n+3)}]{16^3}\right)^{\frac{\cancel{n(n+1)(n+2)(n+3)}}{2}} \qquad \Rightarrow E = 16^{\frac{3}{2}} = 2^{4\times\frac{3}{2}} = 2^6$$

$$\therefore \boxed{E = 64}$$

3.3.35 **Ejercicio Explicativo:**

Efectuar: $k = (a^x)^x (a^{2x})^{2x} (a^{3x})^{3x} (a^{4x})^{4x} \ldots$ n factores

Sabiendo además que: $a = \sqrt[x^2]{\sqrt[2n+1]{\sqrt[n+1]{\sqrt[n]{729}}}}$

Recuerde:

Es notable la suma:

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) **Ordenando la multiplicación**

$$\Rightarrow k = a^{x^2} \cdot a^{4x^2} \cdot a^{9x^2} \cdot a^{16x^2} \ldots a^{n^2x^2} \qquad \Rightarrow k = a^{x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 16x^2 + \ldots + n^2x^2}$$

(2°) **El estudio del exponente, permite tener lo siguiente:**

$$x^2(1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2) = x^2\underbrace{\left(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2\right)}_{\text{suma de los n primeros cuadrados de los numeros naturales}}$$

$$x^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3°) **El exponente de "a" será**

$$\Rightarrow k = a^{\frac{x^2 n(n+1)(2n+1)}{6}} \text{ ; sustituyendo "a" por el equivalente}$$

$$\Rightarrow k = \left(\sqrt[x^2 n(n+1)(2n+1)]{729} \right)^{\frac{x^2 n(n+1)(2n+1)}{6}} \Rightarrow k = 729^{\frac{1}{6}}$$

$\Rightarrow$ **luego de simplificar** $\therefore \boxed{k = 3}$

3.3.36 Ejercicio Explicativo:

Calcular: $$E = Op\left\{ \frac{\sqrt{9-\sqrt{9-\sqrt{9\ldots\infty}}}}{4+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30\ldots\infty}}}} \right\}$$

Recuerde:

Sea: $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots\infty}}}$

$$\Rightarrow \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots\infty}}} = x \Rightarrow \sqrt{a+x} = x \text{ ; } x^2 = a+x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}}$$

Solución:

(1°) **Haciendo los estudios por separado:**

$$\sqrt{9-\sqrt{9-\sqrt{9\ldots\infty}}} = x \text{ ; } x > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{9-x} = x \Rightarrow 9-x = x^2$$

$$\Rightarrow x^2+x-9 = 0 \text{ ; } x = \frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-9)}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{37}}{2} \quad \therefore x = \sqrt{9-\sqrt{9-\sqrt{9\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{37}-1}{2}$$

(2°) **En forma directa: con a = 30, mediante la regla obtenida**

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4(30)+1}+1}{2} = \frac{\sqrt{121}+1}{2} = \frac{11+1}{2}$$

$$\therefore \sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30\ldots\infty}}} = 6$$

(3°) **La expresión E será:**

$$E = Op\left\{\frac{\sqrt{37}-1}{4+6}\right\} = -\frac{\sqrt{37}-1}{10}$$

$$\therefore\ E = \frac{1}{10}\left(1-\sqrt{37}\right)$$

3.2.37 Ejercicio Explicativo:

Calcular: $$k = \left[\frac{\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60\ldots\infty}}}}{\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}\ldots\infty}}}}\right]$$

Recuerde:

Sea: $\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a\ldots\infty}}} = x \quad \Rightarrow \sqrt[n]{a+x} = x$

$\Rightarrow x^n = a + x$ La raíz principal de esta ecuación será el equivalente de la expresión irracional.

Solución:

(1°) **En relación al "numerador"** $\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60\ldots\infty}}} = x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{60+x} = x \quad \Rightarrow 60 + x = x^3$; por ser una ecuación de 3er grado seleccionemos la raíz.

$\Rightarrow$ Si $x = 4 : 60 + 4 = 4^3 \quad \Rightarrow x = 4$ cumple

$\therefore\ \sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60+\sqrt[3]{60\ldots\infty}}} = 4$ .... (I)

(2°) **En relación al denominador:**

$$\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}\ldots\infty}}} = \frac{1}{4}\ \text{(el menor de los factores)}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+1\right)$$

(3°) La expresión k será:

$$k = \left[\!\left[\frac{4}{\frac{1}{4}} \right]\!\right] = [\![16]\!], \text{ el máximo entero de 16}$$

$$\therefore \boxed{k = 16}$$

3.3.38 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar: $$k = \text{Rec}\left\{ \frac{\sqrt{240+\sqrt{240+\sqrt{240\ldots\infty}}}}{\sqrt{210-\sqrt{210-\sqrt{210\ldots}}}} \right\}$$

Recuerde:

i) $$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2} \; ; \; a > 0$$

$$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a\ldots\infty}}} = \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2} \; ; \; a > 0$$

ii) Si a es el producto de dos números consecutivos o cuya diferencia sea la unidad.

$$\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)\ldots\infty}}} = x+1 \text{ (el mayor factor)}$$

$$\sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)\ldots\infty}}} = x \text{ (el menor factor)}$$

Solución:

(1°) **Estudiando cada expresión:**

$$\sqrt{\underset{\underset{15\times 16}{\uparrow}}{240}+\sqrt{\underset{\underset{15\times 16}{\uparrow}}{240}+\sqrt{\underset{\underset{15\times 16}{\uparrow}}{240}\ldots\infty}}} = 16 \text{ (El mayor factor de los consecutivos)}$$

$$\sqrt{\underset{\underset{14\times 15}{\uparrow}}{210}-\sqrt{\underset{\underset{14\times 15}{\uparrow}}{210}-\sqrt{\underset{\underset{14\times 15}{\uparrow}}{210}\ldots\infty}}} = 14 \text{ (El menor de los factores consecutivos)}$$

(2°) **La expresión k será**

$$\Rightarrow k = \text{Rec}\left(\frac{16}{14}\right) \; ; \; k = \frac{14}{16}$$

$$\therefore \boxed{k = \frac{7}{8}}$$

3.3.39 Ejemplo Explicativo:

Simplificar: $$E = \text{Rec}\left\{ \frac{\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\ldots\infty}}}}{\sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32 \div \ldots\infty}}}} \right\}$$

Recuerde:

i) $\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\infty}}} = \sqrt[n-1]{x}$ Caso de la multiplicación.

ii) $\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x\ldots\infty}}} = \sqrt[n+1]{x}$ Caso de la división.

Solución:

(1°) De acuerdo con las sentencias proporcionados

$$\Rightarrow \sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\ldots\infty}}} = \sqrt[7-1]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$\therefore \sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\ldots\infty}}} = 3$$

(2°) Respecto al "denominador"

$$\Rightarrow \sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32\ldots\infty}}} = \sqrt[4+1]{32} = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\therefore \sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32 \div \sqrt[4]{32\ldots\infty}}} = 2$$

(3°) La expresión E será obtenido luego de realizar la sustitución.

$$\Rightarrow E = \text{Rec}\left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{2}{3}}$$

Comentario:

Otro método de cálculo sería:

$$\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\ldots\infty}}} = x$$

mediante una ecuación auxiliar:

$\Rightarrow \sqrt[7]{729\,x} = x \quad \Rightarrow 729\,x = x^7 \;;\; x > 0$

$\Rightarrow 729 = x^6 \;;\; x = \sqrt[6]{729} \;;\; x = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\sqrt[7]{729\ldots\infty}}} = 3}$$

3.3.40 **Ejemplo Explicativo:**

Si:
$$x = \left[\sqrt[m^{\mathrm{op}\sqrt[3]{m}}]{m^{\sqrt[m]{3}}} \right]^{\sqrt[3m]{m^{2m}.\mathrm{Rec}(27)}}$$

Simplificar:
$$k = \sqrt[\frac{m^2}{x}]{\dfrac{m^3 \div x^2}{\sqrt[\frac{m^3}{x^2}]{\dfrac{m^4 \div x^3}{\sqrt[\frac{m^4}{x^3}]{\begin{array}{c} m^5 \div x^4 \\ \vdots \\ \infty \end{array}}}}}}$$

Recuerde:

$$\sqrt[n]{\dfrac{x}{\sqrt[n]{\dfrac{x}{\sqrt[n]{\begin{array}{c} x \\ \vdots \\ \infty \end{array}}}}}} = \sqrt[n+1]{x}$$ División reiterada infinitas veces ; $x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) **A partir de la condición y eliminando el radical en la base y el exponente:**

$$x = \left[m^{\frac{\sqrt[m]{3}\,\sqrt[3]{m}}{m}} \right]^{\frac{\sqrt[3m]{m^{2m}}}{\sqrt[3m]{27}}}$$

$$\Rightarrow x = m^{\frac{\cancel{\sqrt[m]{3}}\,\sqrt[3]{m}}{m} \times \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\cancel{\sqrt[m]{3}}}} = m^{\frac{\sqrt[3]{m^3}}{m}} = m^{\frac{m}{m}} \qquad \Rightarrow \boxed{x = m}$$

(2°) **La expresión k será luego de sustituir "x"sobre "K:**

$$\Rightarrow k = \sqrt[m]{\dfrac{m}{\sqrt[m]{\dfrac{m}{\sqrt[m]{\begin{array}{c} m \\ \vdots \\ \infty \end{array}}}}}}$$; de acuerdo con la regla. $\therefore \boxed{k = \sqrt[m+1]{m}}$

3.4 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS:

(1°) Calcular:
$$K = \dfrac{\mathrm{Rec}\left(\dfrac{1}{12}\right)^{\mathrm{Rec}\left(\frac{1}{6}\right)} . \mathrm{Rec}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\mathrm{Op}(5)}}{\mathrm{VA}(18)^{-\mathrm{Op}(3)} . (\mathrm{Op}(-24))^{-\mathrm{Op}(-4)}}$$

Rpta: $k = 12$

(2°) Calcular: $y = \left[(\mathrm{Rec}(3))^{\mathrm{Op}(2)} + (\mathrm{Rec}(2))^{\mathrm{Op}(3)} + \left(2^{3^{\mathrm{Rec}(2)}}\right)^{\sqrt{3}} \right]^{\mathrm{Rec}(2)}$

Rpta: $y = 5$

(3°) Simplificar: $E = \mathrm{Rec}\left\{ \dfrac{5^{\mathrm{Op}(-n-2)} - 5\,\mathrm{Rec}(5^{-n})}{5^{\mathrm{Op}(1-n)}} \right\}$

Rpta: $E = 100^{-1}$

(4°) Resolver: $3^{\mathrm{VA}(2x-11)} = \dfrac{3^x}{243}$

Nota: VA (x) = Valor Absoluto de **x**.

Rpta: $s = \{ 6 ; 16/3 \}$

(5°) Efectuar: $M = \left(\mathrm{Op}\left(\mathrm{Rec}\left(-\dfrac{5}{2} \right) \right) \right)^{\mathrm{Rec}(3)} (\mathrm{Rec}(5))^{\mathrm{Rec}\left(\frac{3}{2}\right)} (\mathrm{Rec}(8))^{\mathrm{Rec}(9)}$

Rpta: $M = 1/5$

(6°) Simplificar: $V = \sqrt[1+3^{\mathrm{Op}(b-a)}]{\sqrt{x}}\ \sqrt[1+3^{\mathrm{Op}(a-b)}]{\sqrt{x}}$

Rpta: $V = \sqrt{x}$

(7°) Obtener x a partir de la igualdad: $\sqrt[\sqrt{12x}]{\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{2}}} = \sqrt[2\sqrt{2}]{2^{\mathrm{Op}(-3)}}$

Rpta: $x = \dfrac{1}{108}$

(8°) Simplificar: $E = \left(9^{(\mathrm{Op}\,8)^{\mathrm{Op}(3)}} \right)^{(\mathrm{Op}\,2)^{\mathrm{Op}(-8)}}$

Rpta: $E = 3$

(9°) Calcular "x" si: $\sqrt[\sqrt{9x}]{\sqrt[10]{\sqrt[\sqrt{2}]{32}}} = \sqrt[10\sqrt{2}]{1024\sqrt{1024}}$

Rpta: $\dfrac{1}{81}$

(10°) Simplificar IN si:

$$\operatorname{Rec}(\mathbb{N}) = \sqrt[x-y]{\frac{x^{x+1}\,y^{2y} + x^{2x}\,y^{y+1}}{x^{x+y}\,y^{x+1} + x^{y+1}\,y^{x+y}}} \quad ; \; x \neq y$$

Rpta: $N = \dfrac{y}{x}$

(11°) Si:

$$\frac{m+n}{m} + \frac{m+n}{n} = 1$$

Simplificar:

$$E = \left(\frac{\sqrt[m+n]{a}}{\sqrt[m]{a}} \right)^{n} + \left(\frac{\sqrt[m+n]{a}}{\sqrt[n]{a}} \right)^{m}$$

Rpta: $E = 2a$

(12°) Simplificar:

$$U = \left(\sqrt[10n-6]{\sqrt[5n+1]{4}\;\sqrt[5n-1]{2^{-1}}} \right)^{\frac{25n^2-1}{\operatorname{Rec}(8)}}$$

Rpta: $U = 16$

(13°) Simplificar:

$$k = \sqrt{\frac{ab\sqrt{a}}{\sqrt{a\sqrt{b}}\;\sqrt{b\sqrt{a}}}\;\sqrt{\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}}}}$$

Rpta: $k = \sqrt{a}$

(14°) Simplificar:

$$x = \left(\sqrt[\sqrt[3]{9}+1]{\sqrt[\sqrt[3]{3}-1]{5}\;\sqrt[\sqrt[3]{3}+1]{25}} \right)^{\operatorname{Op}(-3)}$$

Rpta: $x = 125$

(15°) Simplificar:

$$H = \sqrt[\sqrt{3}-\sqrt{2}]{\frac{\sqrt[\sqrt{3}+1]{121\;\sqrt[\sqrt{3}+1]{121}}}{\sqrt[\sqrt{2}+1]{11\;\sqrt[\sqrt{2}-1]{11}}}}$$

Rpta: $H = 11$

(16°) Simplificar:

$$y = \frac{\left(\sqrt[-\sqrt{3}]{\sqrt[\sqrt[\sqrt[3]{3}+1]{3}]{3}} \right)^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}}}{\sqrt[-\sqrt{3}^{\sqrt{3}}]{\sqrt[\sqrt[\sqrt{3}+1]{\frac{1}{3}}]{3^{\sqrt{3}}}}}$$

Rpta: $y = 1$

(17°) Simplificar: $$E = \sqrt[2^{m^2}]{\sqrt[2^{m^2-1}]{\sqrt[2^{m^2-2}]{2^{2^{3m^2}}}}}$$

Rpta: $E = 256$

(18°) Simplificar: $$y = (100)(100^2)^x\left((100^3)^x\right)^x\left(\left((100^4)^x\right)^x\right)^x \ldots \infty$$

Sabiendo que: $0 < |x| < 1$

Rpta: $y = \sqrt[(1-x)^2]{100}$

(19°) Simplificar: $$E = 2 \,.\, 4^x \,.\, 8^{x^2} \,.\, 16^{x^3} \,.\, 32^{x^4} \ldots \infty \; ; \text{ si } x = \frac{1}{7}$$

Rpta: $E = 2\sqrt[36]{128}$

(20°) Simplificar: $$E = \left(\sqrt[a\,\mathrm{Rec}(\sqrt[3]{a})]{a^{\mathrm{Op}(-\sqrt[a]{3})}}\right)^{\sqrt[3a]{\mathrm{Rec}\left(\frac{27}{a^{2a}}\right)}}$$

Rpta: $E = a$

(21°) Si:

$$E = \underbrace{\left(x\,\mathrm{Rec}\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt[\frac{1}{2}]{\mathrm{Rec}\left(\frac{\sqrt[16]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)} + \left(x\,\mathrm{Rec}\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt[\frac{1}{2}]{\mathrm{Rec}\left(\frac{\sqrt[16]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)} \ldots}_{n+1 \text{ téminos}}$$

$$F = \underbrace{\sqrt[\frac{1}{4}]{\mathrm{Rec}\left(\frac{\sqrt[32]{x}}{\sqrt[8]{x}}\right)} + \sqrt[\frac{1}{4}]{\mathrm{Rec}\left(\frac{\sqrt[32]{x}}{\sqrt[8]{x}}\right)} + \sqrt[\frac{1}{4}]{\mathrm{Rec}\left(\frac{\sqrt[32]{x}}{\sqrt[8]{x}}\right)} + \ldots}_{n \text{ téminos}}$$

Calcular: $E \,.\, \mathrm{Rec}(F)$

Rpta: $\dfrac{n+1}{n}$

(22°) Calcular: $$E = \sqrt[3]{15 + 4\sqrt[3]{15 + 4\sqrt[3]{15 \ldots \infty}}}$$

Rpta: $E = 3$

CAPITULO 4

LA REGLA POLINOMIAL

4.1. EL POLINOMIO.- (REGLA POLINOMIAL)

Definición.- Es la expresión algebraica que se compone de uno o más términos, no semejantes los cuales se relacionan mediante la suma algebraica.

Ejemplo: $P(x,y) = xy + \frac{1}{y} + \sqrt{x}$ Es un polinomio irracional de 2 variables.

Ejemplo: $F(x,y) = -x^2 + \frac{3}{xy} + \frac{x}{x-y^2}$ Es un polinomio racional fraccionario, de 2 variables de 2° grado.

Ejemplo: $G(x,y) = x^4y^5 + x^3 + y^2 + y$ Es un polinomio racional entero de 2 variables de 9° grado.

Ejemplo: $Q(x,y) = \frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{20}$ Es un polinomio racional entero de una variable de 5° grado.

4.1.1 *Notación Polinomial*

Toda expresión algebraica de una variable o regla polinomial se le representa mediante:

F (x) o Notación Funcional F (x), es la imagen de x

F (x): Indica que "x" es la única variable de la expresión; también indica que "x" es la variable independiente; x es generalmente un elemento de IR

La limitación que se le asigne a "x" implica definir el dominio de la función F(x) si ese fuera el caso.

Ejemplo: $F(x) = -x^3 + 3x - 11 \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}$

Ejemplo: $P(x) = x^2 + x + 300 \; ; \; x \in \langle 2 ; 7 \rangle$

4.1.2 Valor Numérico de la Regla Polinomial de una Variable.

Es el valor que admite la regla polinomial $P(x)$ cuando "x" toma un valor real, la evaluación se realiza mediante:

a) Sustitución directa o

b) La regla o algoritmo de Paolo Ruffini:

Ejemplo Explicativo:

Si: $P(x) = 12x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3$

Calcular el valor numérico del $P(x)$ si $x = -5$

Solución:

a) **Mediante sustitución directa:**

$\Rightarrow P(-5) = 12(-5)^4 - 2(-5)^3 + 5(-5)^2 - (-5) + 3$

$\Rightarrow P(-5) = 12(625) - 2(-125) + 5(25) + 5 + 3$

$\Rightarrow P(-5) = 7\,500 + 250 + 125 + 5 + 3$

$\therefore \boxed{P(-5) = 7\,883}$

b) **Mediante la regla o algoritmo de Ruffini**

b.1) Se ordenan los coeficientes de la regla polinomial:

$$12 \quad -2 \quad 5 \quad -1 \quad 3$$

b.2) Se disponen los elementos para la evaluación

$$\begin{array}{r|rrrr|l} & 12 & -2 & 5 & -1 & 3 \\ x = -5 & & & & & \\ \hline & & & & & \leftarrow P(-5) \end{array}$$

b.3) Se realiza el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 12 & -2 & 5 & -1 & 3 \\ x = -5 & & -60 & 310 & -1\,575 & 7\,880 \\ \hline & 12 & -62 & 315 & -1\,576 & 7\,883 \leftarrow P(-5) \end{array}$$

$\therefore \boxed{P(-5) = 7\,883}$

Comentario:

Usualmente el algoritmo de Ruffini se utiliza para obtener los ceros de una regla polinomial.

Ejemplo Explicativo:

Sea $P(x) = 5x^4 + 7x^3 - 34x^2 - 56x - 48$

Calcular: $P(2\sqrt{2})$

Solución:

(1°) Mediante el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 5 & 7 & -34 & -56 & 48 \\ x = 2\sqrt{2} & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad P(2\sqrt{2})$$

(2°) Ejecutando:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 5 & 7 & -34 & -56 & -48 \\ x = 2 & \downarrow & 10\sqrt{2} & 40 + 14\sqrt{2} & 56 + 12\sqrt{2} & 48 \\ \hline & 5 & 7 + 10\sqrt{2} & 6 + 14\sqrt{2} & 12\sqrt{2} & 0 \end{array} \quad P(2\sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ $\boxed{P(2\sqrt{2}) = 0 \;;\; 2\sqrt{2} \text{ es un cero de } P(x)}$

4.1.3 Propiedad de la Notación Polinomial F (x)

Si $F(x)$ es un polinomio o representa a una Regla Polinomial.

$\Rightarrow$ Puede evaluarse $F(x)$ para valores particulares de x

$\Rightarrow$ Puede **asignarse a "x"** otras variables simples por lo que:

$$F(x) = F(y) = F(z) = F(w) \;\ldots, \text{etc.}$$

$\Rightarrow$ Puede **asignarse a "x"** otras expresiones algebraicas

Ejemplo: $x \to 2x \Rightarrow F(2x)$

$$x \to \frac{1+x}{\sqrt{x}} \Rightarrow F\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$x \Rightarrow -F(x) \Rightarrow F(-F(x))$$

$$x \Rightarrow F(-F(x)) \Rightarrow F\left[F(-F(x))\right]$$

Ejemplo: Si $P(x) = 3x + 11$

$$\Rightarrow \quad P(-x) = 3(-x) + 11 = -3x + 11$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{10}{x}\right) = 3\left(\frac{10}{x}\right) + 11 = \frac{30}{x} + 11$$

4.2. ESTUDIO DE LAS REGLAS POLINOMIALES DE UNA VARIABLE:

4.2.1 La regla de correspondencia de la función polinomial P (x)

Definición.- Una expresión de la forma:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x + a_n \;;\; x \in \mathbb{R}$$

donde "n" es un entero positivo, $a_0 \neq 0$ y $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son los coeficientes **reales o complejos**, es denominado la regla polinomial de grado **"n"** y **"n + 1" términos.**

Ejemplo: $P_1(x) = a_0x + a_1 \;;\; x \in \mathbb{R},\; a_0 \neq 0$ es la regla polinomial de 1er. grado o **lineal**.

Ejemplo: $P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \;;\; x \in \mathbb{R} \;;\; a_0 \neq 0$ es la regla polinomial de 2° grado o **cuadrática**.

Ejemplo: $P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \;;\; x \in \mathbb{R} \;;\; a_0 \neq 0$ es la regla polinomial de 3° grado o **cúbica**.

Ejemplo: $P_4(x) = 9x^4 + 3x - 7$; es la regla polinomial incompleta de 4° grado.

Comentarios:

(1) La **función polinómica** implica dos conjuntos y una regla de correspondencia polinomial.

(2) Un polinomio, es la expresión algebraica que define a la función polinómica o decimos sencillamente que el polinomio o la **regla de correspondencia**, es una componente de la función polinomial.

(3) La regla polinómica tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ y la regla de correspondencia es el polinomio $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_n$

Ejemplo: Sea: $f : x \to y = \{ (x, y) / x \in \mathbb{R} \;,\; y = x^2 + 2x + 35 \}$

Se lee: "La función de x en y, es el conjunto de pares ordenados (x , y) tales que la primera componente o dominio pertenece a $\mathbb{R}$ y la regla de correspondencia es $x^2 + 2x + 35$.

4.2.2 Propiedades de la Regla de Correspondencia Polinomial Entera.

Sea P (x) la regla de correspondencia de la función polinomial se deducen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
& P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \\
\Rightarrow\; & P(0) = 0 + 0 + 0 + \ldots + a_n \\
\Rightarrow\; & P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
\Rightarrow\; & P(-1) = a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + a_2(-1)^{n-2} + \ldots + a_n
\end{aligned}$$

$\therefore$ P (0) = Término independiente de P (x).

P (1) = Σ de coeficientes de la función polinomial P (x)

P (- 1) = Σ de las diferencias de los coeficientes de los términos de grado par e impar.

Ejemplo:

Sea $P(x) = 10x^7 + x^6 + 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 16x^2 + x + 3$

$\Rightarrow P(0) = 3$; Es el término independiente.

$\Rightarrow P(1) = 10 + 1 + 2 + 4 + 1 + 16 + 1 + 3 = 38$; Es la Σ de coeficientes.

$\Rightarrow P(-1) = 10(-1)^7 + (-1)^6 + 2(-1)^5 + 4(-1)^4 + (-1)^3 + 16(-1)^2 + (-1) + 3$

$$\Rightarrow P(-1) = \underbrace{1 + 4 + 16 + 3}_{\text{coef. de grado par}} - \underbrace{10 + 2 + 1 + 1}_{\text{coef. de grado impar}}$$

$P(-1) = 10$;Dif. de la Σ de coeficientes de términos de grado par e impar.

4.2.2.1 La Regla Polinomial "Mónica"

Definición.- Sea $F(x)$ una regla polinomial, si el término principal posee de coeficiente la unidad; se le denomina Polinomio o Regla Polinomial Mónica.

Ejemplo: $P(x) = x^3 + 9x^2 + 3x + 7$ es un polinomio mónico.

4.2.2.2 Propiedad de las Reglas Polinomiales

Toda regla polinomial puede escribirse como una regla polinomial MONICA.

Ejemplo: $F(x) = 33x^4 + 71x^3 + 5x^2 + 11x + 9$

$$F(x) = 33\left(x^4 + \frac{71}{33}x^3 + \frac{5}{33}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{3}{11}\right)$$

4.2.3 El Cero de una Regla Polinomial

Definición. Sea $P(x)$ la regla polinomial

Si $P(m) = 0$; $m \in \mathbb{R}$ o $m \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ m es un "cero" de la regla polinomial

Ejemplo: $x = 5$ es un cero de $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x - 5$

pues: $P(5) = 625 - 625 + 25 - 20 - 5 = 0$

4.2.4 Teorema del Número de Ceros de la Regla Polinomial

Si $F(x)$ es una regla polinomial de grado $n \geq 1$, entonces $F(x)$ tiene exactamente "n" ceros, los cuales pueden $\in \mathbb{R}$ o $\in \mathbb{C}$

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 - 37x - 84$; posee exactamente 3 ceros: $\{7, -4$ y $-3\}$

4.2.4.1 Corolario

Una regla polinomial de grado "n" y de coeficientes reales o complejos (no nulos todos a la vez) no puede anularse para mas de n valores diferentes a la vez.

4.2.5 **Teorema del Factor**

Sea $F(x)$ una regla polinomial

Si: $F(m) = 0$

$\Rightarrow (x - m)$ es un factor de $F(x)$; o $(x - m)$ está contenido en $F(x)$

$\Rightarrow F(x) = (x - m)\ Q(x)$

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 - 7x + 6$ como $F(1) = 1 - 1 - 7 + 6 = 0$

$\Rightarrow F(x) = (x - 1)\ Q(x)$; $Q(x)$ se determinará por división.

4.2.5.1 **Recíproca del Teorema del Factor:**

Si $(x - a)$ es un factor de $F(x)$

$\Rightarrow x = a$ es un cero de $F(x)$ ó $F(a) = 0$

Ejemplo: Si $F(x) = (x - 3)(x + 8x + 9)$

$\Rightarrow x - 3$ es un factor

$\Rightarrow x = 3$ es un cero de $F(x)$

4.2.5.2 **La Regla Polinomial Degradada**

Definición.- Sea $F(x)$ La regla polinomial y "m" un cero, de modo que:

$F(x) = (x - m)\ P(x)$; $F(x)$ de grado ≥ 1

$\Rightarrow P(x)$ es una regla polinomial degradada de $F(x)$

Ejemplo: Sea: $F(x) = x^3 - 24x^2 + 191x - 504$

Si: $F(7) = 0$

$\Rightarrow F(x) = (x - 7)(x^2 - 17x + 72)$

$\Rightarrow x^2 - 17x + 72$ es la regla polinomial degrada de $F(x)$ (es también el cociente de dividir entre $x - 7$).

4.2.5.3 **Teorema** Sea $F(x)$ una regla polinomial de grado impar y de coeficientes reales

$\Rightarrow \exists$ necesariamente por lo menos un cero real

Ejemplo: Sea: $F(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 6$

Por ser de grado impar y tener coeficientes reales, un cero de $F(x)$ es obligatoriamente real (racional o irracional).

4.2.6 **Teorema:** Sea $F(x)$ la regla polinomial

Si $F(m) = k$; "m" no es un cero de $F(x)$

$\Rightarrow F(x) = (x - m)\ Q(x) + k$

Ejemplo: Sea $F(x) = 7x^3 + 2x^2 + 9x + 3$; $F(1) = 21$

$\Rightarrow F(x) = (x - 1)\ Q(x) + 21$

4.2.7 **Teorema:** Sea $F(x)$ la regla polinomial no nula

Si $F(m) = F(n) = F(p) = 0$; m, n, p son ceros de $F(x)$

$\Rightarrow F(x) = (x-m)(x-n)(x-p)Q(x)$

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $F(1) = F(3) = 0$

$\Rightarrow F(x) = (x-1)(x-3)Q(x)$

4.2.8 **Teorema:** Sea $F(x)$ la regla polinomial

Si $F(m) = f(n) = F(p) = k$; $k \neq 0$

$\Rightarrow F(x) = (x-m)(x-n)(x-p)Q(x) + k$

Ejemplo: Sea: $F(x) = x^3 - 5x^2 - x + 7$; $F(1) = F(5) = 2$

$\Rightarrow F(x) = (x-1)(x-5)Q(x) + 2$

4.2.9 **Teorema de Multiplicidad del Cero de una Regla Polinomial**

Si "m" es un cero de orden de multiplicidad k, de $F(x)$

$\Rightarrow F(x) = (x-m)^k Q(x)$

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tiene un cero $(x-1)$ cuya orden de multiplicidad es 3

$\Rightarrow F(x) = (x-1)^3 Q(x)$

4.2.10 **Teorema (Ceros y Coeficientes de la Regla Polinomial Mónica)**

Sea la regla polinomial mónica:

$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ de conjunto de los n ceros:

$$\{c_1, c_2, c_3, \dots c_n\}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum c_1 &&= -a_1 \\
&\Rightarrow \sum c_1c_2 &&= +a_2 \\
&\Rightarrow \sum c_1c_2c_3 &&= -a_3 \\
&\Rightarrow \sum c_1c_2c_3c_4 &&= +a_4 \\
&\Rightarrow \sum c_1c_2c_3\dots c_n &&= \pm a_n
\end{aligned}$$

Donde: $\sum c_1$: Es la suma de los ceros

$\sum c_1c_2$: Es la suma de las combinaciones binarias de los ceros

$\sum c_1c_2c_3$: Es la suma de las combinaciones ternarias de los ceros

4.2.11 **Definición de Regla Polinomial Par**

$F(x)$ es una regla polinomial par si:

$F(x) = F(-x)$

$\Rightarrow F(x)$ es una Regla Polinomial Par

Ejemplo: Sea $F(x) = x^4 + 6x^2 + 1$ y $F(-x) = (-x)^4 + 6(-x)^2 + 1$

$\Rightarrow F(x)$ es par pues: $F(x) = F(-x)$; todos sus términos son de grado par

4.2.12 Definición de Regla Polinomial Impar:

$F(x)$ es una regla polinomial.si:

$F(x) = -F(-x)$

$\Rightarrow$ $F(x)$ es una regla polimonial impar

Ejemplo: Sea $F(x) = x^5 + x^3 - x$; $F(-x) = -x^5 - x^3 + x$

$\Rightarrow F(x) = -F(-x)$

$\therefore$ $F(x)$ es función impar

4.2.13 Valor Numerico de una Regla Polinomial

Sea $F(x)$ una regla polinomial

$\Rightarrow F(a)$ es el valor numérico de $F(x)$ si $x = a$; dicho valor se obtiene de realizar el algoritmo de la regla de correspondencia o mediante la regla de Ruffini.

Ejemplo Explicativo:

Sea $F(x) = 7x^4 - 3x^3 + x^2 + 11$

Calcular: $F(5)$

Solución:

(1°) $\Rightarrow F(5) = 7 \times 5^4 - 3 \times 5^3 + 5^2 + 11$, Por sustitución

$= 4\,375 - 375 + 25 + 11$

$\therefore \boxed{F(5) = 4\,036}$

$\Rightarrow$ Por la Regla de Ruffini

para completar la ausencia del término de 1er grado.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 7 & -3 & 1 & 0 & 11 \\ x = 5 & & 35 & 160 & 805 & 4\,025 \\ \hline & 7 & 32 & 161 & 805 & 4\,036 = F(5) \end{array}$$

$\therefore \boxed{F(5) = 4\,036}$

Es importante poder utilizar ambas metodologías; aclarando que la regla de Ruffini se practica sobre reglas polinomiales ordenadas y completas.

4.2.14 Teorema de Briott y Ruffini

Sea $F(x)$ la Regla Polinomial, tal que $F(x) \equiv F(x + \beta)$

$\Rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \equiv c_0 + c_1 (x + \beta) + c_2 (x + \beta)^2 + \ldots + c_n (x + \beta)^n$

donde los coeficientes $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ se determinan mediante el algoritmo de Briott.

Ejemplo Explicativo:

Expresar el polinomio

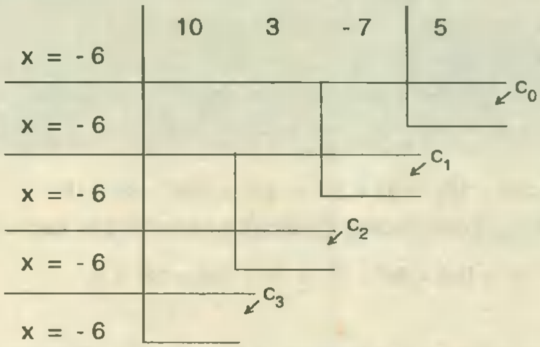
$F(x) = 10x^3 + 3x^2 - 7x + 5$, equivalentemente en función de $(x + 6)$.

Solución:

(1°) Planteamos la equivalencia:

$$F(x) = 5 - 7x + 3x^2 + 10x^3 \equiv c_0 + c_1(x+6) + c_2(x+6)^2 + c_3(x+6)^3$$

(2°) Obtenemos los elementos c_0 , c_1 , c_2 y c_3 a partir del algoritmo de Briott, mediante la siguiente disposición.



(3°) Realizando el algoritmo de Briott, el cual es análogo al de Ruffini realizado en varios escalones:

	10	3	- 7	5	
x = - 6		- 60	342	- 2 010	
	10	- 57	335	- 2 005	c_0
x = - 6		- 60	702		
	10	- 117	1 037		c_1
x = - 6		- 60			
	10	- 177			c_2
x = - 6					
	10				c_3

(4°) Sustituyendo los coeficientes c_0 , c_1 , c_2 , c_3 en la equivalencia planteada para $F(x)$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = 5 - 7x + 3x^2 + 10x^3 \equiv -2\,005 + 1\,037(x+6) - 177(x+6)^2 + 10(x+6)^3}$$

En efecto $F(0) = 5 - 0 + 0 + 0 = -2\,005 + 1\,037(6) - 177(6)^2 + 10(6)^3$

$F(0) = 5 \qquad = -2\,005 + 6\,222 - 6\,372 + 2\,160$

$F(0) = 5 \qquad = 5$

En efecto $F(1) = 5 - 7 + 3 + 10 = -2\,005 + 1\,037(7) - 177(7)^2 + 10(7)^3$

$F(1) = 11 \qquad = -2\,005 + 7\,259 - 8\,673 + 3\,430$

$F(1) = 11 \qquad = 11$

4.2.15 Reglas Polinomiales Idénticas

Definición: Sea $P(x) \equiv F(x)$ Reglas Polinomiales Idénticas ; $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Grado P = Grado de F

$\Rightarrow$ Términos correspondientes iguales

$\Rightarrow$ $a_0 = a_0$ (términos independientes iguales)

$\Rightarrow$ $a_n = b_n$ (coeficientes de los términos de grados,iguales)

$\Rightarrow$ $P(a) = F(a)$; $P(b) = F(b)$; $P(c) = F(c)$, ... ∞

Ejemplo: Sea: $8x^3 + 15x^2 - 3x + 10 \equiv 8x^3 + 15x^2 - 3x + 10$
son reglas polinomiales idénticas y se verifica el axioma de reflexión.

Ejemplo: Sea: $ax^4 + 9x^3 + 2x^n + m = 6x^4 + bx^3 + px^5 + 7$

$$\Rightarrow ax^4 + 9x^3 + 2x^n + m = 6x^4 + bx^3 + px^5 + 7$$

$$\Rightarrow a = 6 \;,\; b = 9 \;,\; p = 2 \;,\; n = 5 \;,\; m = 7$$

4.2.15.1 Condición Suficiente de Identidad

Para que $F(x)$ y $G(x)$ sean idénticos será condición suficiente que la diferencia de ambos sea un polinomio idénticamente nulo.

4.2.15.2 Número de Variables de las Identidades

Las identidades nulas y no nulas pueden tener una o un número finito de variables.

Ejemplo: $x + 1 \equiv x + 1$

Ejemplo: $0x^4 + 0y^5 + 0xyz + 0x^8 \equiv 0$

Ejemplo: $2x^8 + 7y^9 + 3zy^3w \equiv 2x^8 + 7y^9 + 3zy^3 w$

4.2.15.1 La Identidad Nula o Regla Polinomial Idénticamente Nula

Definición.- Sea: $P(x) \equiv F(x)$; $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $P(x) - F(x) \equiv 0$

$\Rightarrow$ $G(x) = P(x) - F(x) \equiv 0$; Es un polinomio nulo, identidad nula o polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo: Sea: $9x^2 + 7x + 13 = 9x^2 + 7x + 13$

$\Rightarrow \underbrace{9x^2 - 9x^2} + \underbrace{7x - 7x} + \underbrace{13 - 13} = 0$

$\Rightarrow F(x) = 0x^2 + 0x + 0$; Es una regla polinomial idénticamente nula.

4.2.15.2 **Principio de la Identidad Nula**

Sea $G(x)$ de grado "n"
Si el número de ceros es mayor a "n"
$\Rightarrow G(x)$ es idénticamente nulo.

4.2.15.3 **Coeficientes de la Identidad Nula**

Sea $G(x)$ Idénticamente nulo,
$\Rightarrow$ Los coeficientes de c/u de los términos serán iguales a cero.

Ejemplo: $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + q$; idénticamente nulo

$a = b = c = d = e = q = 0$; $x \in \mathbb{R}$

4.2.15.4 **Grado de una Identidad Nula**

El grado está definido como lo es usualmente para un polinomio no nulo.

Ejemplo: Sea $F(x) = 0x + 0$

Es una regla polinomial nula de 1er grado

Ejemplo: Sea $F(x) = 0x^2 + 0x + 0$

Es una regla polinomial nula de 2° grado

Ejemplo: Sea $F(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Es una regla polinomial nula de 3er grado.

Comentario:

Es importante recordar que el cero carece de grado, lo cual no debe redundar en una aparente contradicción con el grado del polinomio idénticamente nulo.

4.2.16 **Teorema:** Sea la Regla Polinomial $F(x)$ de grado $n > 1$ este puede ser expresado como el producto de n factores lineales.

Ejemplo: $F(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ se puede expresar como:

$F(x) = (x+1)(x+2)(x+5)$

4.2.17 **Teorema:** Si $x = p/q$ es el cero de la Regla Polinomial

$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$; $a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in Z$

$\Rightarrow p$ es un factor de a_n $\quad\Rightarrow q$ es un factor de a_0

4.2.18 **Teorema:** Sea $F(x)$ una Regla Polinomial de grado $n \geq 2$, de coeficientes $\in \mathbb{Q}$

Si $F(a+\sqrt{b}) = 0$; $a+\sqrt{b}$ un irracional cuadrático

$\Rightarrow F(a-\sqrt{b}) = 0$; $a-\sqrt{b}$ es un irracional conjugado

Corrientemente:

Si un cero de $F(x)$ es $a+\sqrt{b} \Rightarrow a-\sqrt{b}$ es otro cero de $F(x)$

4.2.19 **Teorema:** Sea $F(x)$ una Regla Polinomial de grado $n \geq 2$, de coeficientes $\in \mathbb{Q}$

Si: $F(a+bi) = 0$; ($a+bi$ es un nº complejo)

$\Rightarrow F(a-bi) = 0$; ($a-bi$ es el complejo conjugado)

Corrientemente:

Si un cero de $F(x)$ es $a+bi \Rightarrow a-bi$ es otro cero de $F(x)$

4.2.20 **Teorema:** Regla Polinomial Geométrica

Sea: $F(x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}$ una Regla P. Geométrica

$$\Rightarrow \quad F(x) = 1+x+x^2+x^3\ldots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1} \;;\; x \in \mathbb{R}-\{1\},\; n \in \mathbb{N}$$

4.2.21 **Teorema:** Regla Polinomial Geométrica Alternada

Sea: $F(x) = 1-x+x^2-x^3\ldots+x^{n-1}$; $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

$$\Rightarrow \quad F(x) = 1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{n-1} = \frac{x^n+1}{x+1},\; n \in \mathbb{N} \text{ impares}$$

4.2.22 **Teorema:** Sea la Regla Polinomial Recíproca:

Sea: $F(x) = ax^{2n} \pm a_1x^{2n-1} \pm a_2x^{2n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x + a_0$

$$\Rightarrow F(x) = x^n\left\{a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) \pm a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) \pm \ldots \pm a_k\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + a_{k+1}\right\}$$

4.2.23 **Corolario:** **Regla Polinomial Recíproca de Grado Par.**

Sea: $F(x) = a_0x^n \pm a_1x^{n-1} \pm a_2x^{n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x + a_0$

$$\Rightarrow C = \left\{\overline{\pm m \;;\; \pm\frac{1}{m}} \;;\; \overline{\pm p \;;\; \pm\frac{1}{p}} \;;\; \ldots \;;\; \overline{\pm r \;;\; \pm\frac{1}{r}}\right\}$$

Se lee: "Que el conjunto de los ceros de $F(x)$, serán recíprocos entre sí"

4.2.24 **Corolario:** **Regla Polinomial Recíproca de Grado Impar**

Sea: $F(x) = a_0x^n \pm a_1x^{n-1} \pm a_2x^{n-2} \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x + a_0$

$$\Rightarrow C = \left\{+1 \text{ ó } -1 \;;\; \pm m \;.\; \pm\frac{1}{m} \;;\; \pm p \;;\; \pm\frac{1}{p} \;\ldots\;,\; \pm\frac{1}{r}\right\}$$

Se lee: "Que el conjunto de ceros recíprocos involucra a 1 ó -1 obligatoriamente"

4.3. ESTUDIO DE LAS REGLAS POLINOMIALES DE DOS O MAS VARIABLES

4.3.1 **Notación.-** Toda expresión algebraica de dos o más variables se les designa como:

$F(x, y)$ si F contiene 2 variables

$F(a, b, c)$ si F contiene 3 variables

4.3.1.1 **Propiedades de la Notación Funcional**

La de asignar valores u otras expresiones a la variable.

Ejemplo: Sea: $P(a, b, c)$; La expresión algebraica posee 3 variables independientes, estas son "a", "b" y "c"; el orden fue establecido desde un principio, por lo que se tendrá:

$\Rightarrow P(a, b, c) = P(a, c, b)$, no es estrictamente necesaria

$\Rightarrow P(-1, 2, 5)$ implica la asignación de valores a las variables:

$a = -1;\ b = 2,\ c = 5$

$\Rightarrow P\left(\frac{x}{4}; \frac{3}{\sqrt{y}}; \frac{2c}{39}\right)$, implica haber asignado a las variables:

$$a \rightarrow \frac{x}{4} \quad ; \quad b \rightarrow \frac{3}{\sqrt{y}} \quad ; \quad c \rightarrow \frac{2c}{39}$$

4.3.1.2 **Valor Numérico del Polinomio de una o más Variables**

Es el resultado de la asignación de valores particulares a las variables componentes.

Ejemplo: Sea $P(b, a, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (a+c)^4$

Si $a = 1;\ b = 3;\ c = 4$

$$\Rightarrow P(3;1;4) = (3+1)^4 + (3+4)^4 + (1+4)^4$$
$$= 4^4 + 7^4 + 5^4$$
$$= 256 + 2\,401 + 625$$

$$\therefore \boxed{P(3;1;4) = 3\,282}$$

4.3.2 **Regla Polinomial Homogénea.-**

Definición.- Aquellos que poseen más de una variable y sus términos poseen grados iguales no siendo semejantes y denominándose a dicho grado como el grado de homogeneidad.

Ejemplo: Sea $P(x, y) = x^{20} + x^7 y^{13} + xy^{19}$;

todos sus términos son de grado homogéneo igual a 20.

4.3.2.1 **Propiedad.-** Si en un polinomio homogéneo asignamos a las variables un factor paramétrico "k" común; el polinomio resultará multiplicado por el símbolo "k" a exponente igual que el grado de homogeneidad.

Ejemplo: Sea $P(x, y) = x^5 + x^3 y^2 + y^5 \Rightarrow P(kx, ky) = k^5 x^5 + k^5 x^3 y^2 + k^5 y^5$

$\therefore \; P(kx, ky) = k^5 P(x, y)$

4.3.2.2 **Propiedad.-** Al ordenar un Polinomio homogéneo de 2 variables en forma ascendente en relación a una de las variables, de inmediato aparecerá ordenado descendentemente respecto a la otra variable.

4.3.2.3 **Regla Polinomial Homogénea Geométrica de 2 Variables**

Sea: $F(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 + \ldots + x^2 y^{n-3} + x y^{n-2} + y^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad F(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 + \ldots + x^2 y^{n-3} + x y^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y}$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} - \{x = y\}$; $n \in \mathbb{N}$

4.3.2.4 **Regla Polinomial Homogénea Geométrica de Signos Alternados**

Sea: $F(x, y) = x^{n-1} - x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 \ldots x^2 y^{n-3} - x y^{n-2} + y^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad F(x, y) = x^{n-1} - x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 \ldots x^2 y^{n-3} - x y^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n + y^n}{x + y}$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R} - \{x + y = 0\}$; $n \in \mathbb{N}$ impares

4.3.2.5 **Regla Polinomial Homogénea Recíproca**

Sea $F(x, y) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} y + a_2 x^{2n-2} y^2 + \ldots + a_2 x^2 y^{2n-2} + a_1 x y^{2n-1} + a_0 y^{2n}$

Si posee coeficientes equidistantes iguales se le denomina regla polinomial homogénea.

4.3.2.6 **Propiedad**

El producto de polinomios homogéneos es también homogéneo.

La adición de polinomios homogéneos no es necesariamente homogéneo.

4.3.4 **Polinomio Cíclico**

Definición.- Es todo polinomio homogéneo en el cual la permutación de dos de sus variables, resulta en cualquiera de las posibilidades siguientes:

1.- El polinomio no se altera $\Rightarrow P(a, b) = P(b, a) \Rightarrow$ **P (a , b) es cíclico**

2.- El polinomio cambia de signo $\Rightarrow P(a, b) = -P(b, a) \Rightarrow$ **P (a , b) es cíclico**

3.- El polinomio cambia parcialmente $\Rightarrow P(a, b)$ no es cíclico.

4.3.4.1 ***Propiedad***

Todo polinomio cíclico es la composición de factores también cíclicos.

Ejemplo: Sea: $P(a, b) = a^3 + b^3 + a^2 b$, **es cíclico pues si** $a \rightleftarrows b$

$\Rightarrow \quad P(b, a) = b^3 + a^3 + b^2 a + ba^2$

$\Rightarrow \quad P(a, b) = P(b, a)$

Ejemplo: $P(a,b,c) = ab(a^3 - b^3) + ac(c^3 - a^3) + bc(b^3 - c^3)$ **es cíclico pues**

$P(b,a,c) = ba(b^3 - a^3) + bc(c^3 - b^3) + ac(a^3 - c^3)$

$P(b,a,c) = -ab(a^3 - b^3) - bc(b^3 - c^3) - ac(c^3 - a^3)$

$P(a,b,c) = -P(b,a,c)$; el polinomio cambia íntegramente de signo

Ejemplo: $F(x,y) = x^3 + y^3 + xy(x^2 - y^2)$ **no es cíclico pues**

$F(y,x) = y^3 + x^3 + yx(y^2 - x^2)$

$F(y,x) = x^3 + y^3 - xy(x^2 - y^2)$, **cambia parcialmente**

$\therefore$ **$F(x,y)$ no es un polinomio cíclico.**

Ejemplo: Los polinomios cíclicos: $a^2 + b^2 + c^2$ y $a + b + c$ al ser multiplicados originan:

$F(a,b) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$

que resulta también ser cíclico.

4.4.1 Ejemplo Explicativo

Sea la Regla Polinomial: $F(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x - 3$

Hallar todos los ceros de $F(x)$

Recuerde:

i) "El cero de una regla polinomial es el valor constante que permite anular dicha regla"

ii) Un método para obtener los ceros de una regla polinomial es factorizar e igualar a cero los factores correspondientes.

Solución:

(1°) Ubicamos el término independiente del polinomio: $-3/2$

$\Rightarrow$ Los posibles ceros serán: $\left\{ \pm 1 \ ; \ \pm\frac{3}{2} \ ; \ \pm\frac{1}{2} \ ; \ \pm 3 \right\}$

(2°) Mediante la regla de Ruffini probamos y obtenemos:

	2	-7	1	7	-3
x = 1	↓	2	-5	-4	3
	2	-5	-4	3	0

Se anula P (x)

$\therefore$ $x = 1$ Es un cero de $F(x)$

(3°) Aplicamos las pruebas sobre el polinomio degradado anterior y obtenemos:

	2	-5	-4	3
x = 1/2	↓	1	-2	-3
	2	-4	-6	0

Se anula P (x)

$\Rightarrow F(x) = (x-1)(x-1/2)(2x^2-4x-6)$; $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

$$\therefore \boxed{F(x) = (x-1)(2x-1)(x-3)(x+1)}$$

(4°) Igualando a cero cada factor

$$x - 1 = 0 \;;\; x = 1 \;\vee\; 2x - 1 = 0 \;;\; x = 1/2$$

$$\vee\; x - 3 = 0 \;;\; x = 3 \;\vee\; x + 1 = 0 \;;\; x = -1$$

$$\therefore \boxed{C = \{1, 1/2, 3, -1\}}$$

4.4.2 Ejercicio Explicativo:

Expresar: $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 3$

en función del binomio $(x - 5)$ de modo que se mantenga equivalente a $P(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Recuerde:

Si $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 3$

$\Rightarrow P(x-5) = (x-5)^4 + (x-5)^3 - 5(x-5)^2 + (x-5) - 3$

$\Rightarrow P(x) \not\equiv P(x-5)$

$\Rightarrow P(x) \equiv F(x-5)$ mediante los coeficientes de Briott.

Solución:

(1°) Aplicando el teorema de Briott-Ruffini podremos tener:

$\Rightarrow P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 3$

$\Rightarrow P(x) = A + B(x-5) + C(x-5)^2 + D(x-5)^3 + E(x-5)^4$ .... (1)

$\Rightarrow 1, 1, -5, 1, -3$; coeficiente de $P(x)$

(2°) Mediante el algoritmo de Briott - Ruffini

	1	1	-5	1	-3	
x = 5	↓	5	30	125	630	
	1	6	25	126	627	= A
x = 5	↓	5	55	400		
	1	11	80	526	= B	
x = 5	↓	5	80			
	1	16	160	= C		
x = 5	↓	5				
	1	21	= D			
x = 5	↓					
	1	= E				

(3°) Sustituyendo A, B, C, D, E sobre la equivalencia.

$$\Rightarrow P(x) = \overset{A}{627} + \overset{B}{526}(x-5) + \overset{C}{160}(x-5)^2 + \overset{D}{21}(x-5)^3 + \overset{E}{}(x-5)^4$$

$$\therefore \boxed{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 3 \equiv 627 + 526(x-5) + 160(x-5)^2 + 21(x-5)^3 + (x-5)^4 \,;}$$

4.4.3 **Ejercicio Explicativo:**

A partir de la identidad en x:

$$A(x-1) + B(x+2) = 5x+1 \;\; ; \;\; x \in \mathbb{R}$$

Calcular: "A" y "B".

Comentario:

En las identidades los coeficientes correspondientes de ambos miembros son iguales.

***Solución*:**

1er Método:

(1°) En la **equivalencia** propuesta:

"x" : variable

"A", "B" : parámetros

(2°) Ordenando:

$\Rightarrow Ax - A + Bx + 2B = 5x + 1$

$\Rightarrow (A+B)x + (-A+2B) = 5x+1$, se dispone de una **Identidad**

(3°) **Igualando coeficientes:**

$$\begin{cases} A + B = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -A + 2B = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(4°) **Resolviendo el sistema:**

$\Rightarrow$ De (1) + (2) : $3B = 6$ $\quad\therefore \boxed{B=2}$

$\Rightarrow$ De (1) : $A + 2 = 5$ $\quad\therefore \boxed{A=3}$

2do Método: (Asignando valores arbitrarios)

(1°) Si: $x = -2$: $A(-2-1) + B(0) = 5(-2) + 1$

(pues $x \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ $-3A = -10 + 1$ $\quad\therefore \boxed{A=3}$

(2°) Si: $x = 1$: $A(0) + B(3) = 5 + 1$

$3B = 6$ $\quad\therefore \boxed{B=2}$

4.4.4 Ejercicio Explicativo:

El Polinomio: $P(x) = ax^d + bx^c + cx^b + ex^{a-9}$; $x \in \mathbb{R}$

Es completo y ordenado decrecientemente respecto a los exponentes de "x".

Calcular: $a + b + c + d + e$.

Sabiendo que: $P(0) = 900$.

Comentario:

Un polinomio completo es aquella regla de grado "n" que posee "n + 1" términos distintos.

Recíprocamente: Un polinomio completo de n términos es de grado "n - 1".

Solución:

(1°) $P(x)$ posee 4 términos

$\Rightarrow P(x)$ será de 3er. grado, por ser completo.

$$\Rightarrow P(x) = \underbrace{ax^d}_{3°} + \underbrace{bx^c}_{2°} + \underbrace{cx^b}_{1°} + \underbrace{ex^{a-9}}_{0°}$$

(2°) Podemos desprender lo siguiente:

$\Rightarrow d = 3$; $c = 2$; $b = 1$; $a - 9 = 2$; $a = 11$

$\Rightarrow P(0) = 0 + 0 + 0 + e \Rightarrow P(0) = e = 900$

$\therefore \boxed{a + b + c + d + e = 917}$

4.4.5 Ejercicio Explicativo

Si: $A(A-3)x^2 + B(B-3)x + C(C-4) \equiv 10x^2 + 18x + 5$; $x \in \mathbb{R}$

Calcular "A" , "B" y "C".

Recuerde:

En las identidades, los coeficientes de los términos correspondientes son iguales.

Solución:

(1°) Por ser una **equivalencia.**

Donde: "x" es una variable

"A" , "B" son los parámetros

$$\Rightarrow \underbrace{A(A-3)x^2} + \underbrace{B(B-3)x} + \underbrace{C(C-4)} \equiv 10x^2 + 18x + 5$$

$\Rightarrow A(A-3) = 10$; $A^2 - 3A - 10 = 0$ .... (1)

$B(B-3) = 18$; $B^2 - 3B - 18 = 0$ .... (2)

$C(C-4) = 5$; $C^2 - 4C - 5 = 0$ .... (3)

(2°) **Resolviendo las Ecuaciones**

Factorizando las ecuaciones obtenidas:

$\Rightarrow$ Al factorizar (1) : $(A-5)(A+2) = 0$

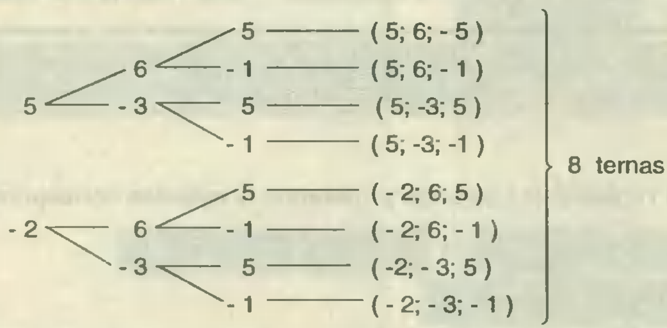
Al factorizar (2) : $(B-6)(B+3) = 0$

Al factorizar (3) : $(C-5)(C+1) = 0$

$\Rightarrow A = 5$ ó -2 ; $B = 6$ ó -3 ; $C = 5$ ó -1

Comentario:

Para que la identidad se verifique, las ternas (A , B , C) ordenadas las podemos obtener del árbol siguiente:



4.4.6 **Ejercicio Explicativo**

Si: $P(x) = (ax + b)(x^n + 1)$; $x \in \mathbb{R}$

Calcular "n", sabiendo que:

$P(2) + 130 = b + 4 = a$; $P(x)$ es mónico

Recuerde:

Un polinomio $P(x)$ es mónico si el coeficiente del término principal es la unidad.

Solución:

(1°) **Si $P(x)$ es mónico:**

$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow P(2) = (2a + b)(2^n + 1)$; como $a = 1$

$\Rightarrow P(2) = (2 + b)(2^n + 1)$ .... (1)

$\Rightarrow P(2) + 130 = b + 4 = a$ .... (2)

$\Rightarrow$ De (1) en (2) y $a = 1$ en (2)

(2°) **Resolviendo las condiciones dadas:**

$\Rightarrow (2 + b)(2^n + 1) + 130 = b + 4 = 1$ .... (3)

$\Rightarrow$ De (3) : $b + 4 = 1$; $\therefore$ $b = -3$

$\Rightarrow$ De (3) : $(2-3)(2^n+1) + 130 = 1$

$\Rightarrow$ $-(2^n + 1) = -129$ ..... (4)

$\Rightarrow$ De (4): $2^n = 128 = 2^7$

$\therefore \boxed{n = 7}$

4.4.7 Ejercicio Explicativo

Si: $P(x)$ es de 2° grado, racional y entero;

$P(5) = 18$; $P(0) = 3$; $P(-2) = 11$

Hallar $P(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

Recuerde:

El teorema de Lagrange permite obtener un polinomio entero de grado "n", siempre que disponga de "n + 1" datos independientes.

Solución:

(1°) **Aplicando el Teorema de Lagrange y utilizando la notación correspondiente.**

$\Rightarrow$ $a_0 = 5, P(5) = 18 = b_0$ $\Rightarrow$ $a_1 = 0$, $P(0) = 3 = b_1$

$\Rightarrow$ $a_2 = -2$; $P(-2) = 11 = b_2$

(2°) **El teorema de Lagrange adaptado al caso de un polinomio de 2° grado será:**

$$\Rightarrow P(x) = b_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + b_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + b_2 \frac{(x-a_1)(-a_0)}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)}$$

$$\Rightarrow P(x) = 18\frac{(x-0)(x+2)}{(5-0)(5+2)} + 3\frac{(x+5)(x+2)}{(0-5)(0+2)} + 11\frac{(x-0)(x-5)}{(-2-0)(-2-5)}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{18}{35}x(x+2) - \frac{3}{10}(x-5)(x+2) + \frac{11}{14}(x)(x-5)$$

(3°) **Ordenando mediante asociación:**

$$\Rightarrow P(x) = x^2\left(\frac{18}{35}+\frac{11}{14}-\frac{3}{10}\right) + x\left(\frac{36}{35}-\frac{55}{14}+\frac{9}{10}\right) + \frac{30}{10}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2\left(\frac{36+55-21}{70}\right) + x\left(\frac{72-275+63}{70}\right) + 3$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2\left(\frac{70}{70}\right) + x\left(\frac{-140}{70}\right) + 30$$

$\therefore \boxed{P(x) = x^2 - 2x + 3}$

Comentario:

El resultado obtenido verifica las condiciones:

$P(5) = 5^2 - (2)(5) + 3 = 25 - 10 + 3 = 18$

$P(0) = 0^2 - 2(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

$P(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

4.4.8 Ejercicio Explicativo:

Calcular N, si:

$$(a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 + (-a+b-c)^3 + (-a-b+c)^3 \equiv N\,abc$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Recuerde:

La equivalencia **se verifica**, para todo sistema de valores $\in \mathbb{R}$ que se le asigne a sus variables.

Solución:

(1°) **En la equivalencia:**

Variables : "a", "b" y "c" ; $\in \mathbb{R}$

Parámetro : "N"

(2°) **Valores a las variables:** $a = b = c = 1$

$\Rightarrow (1+1+1)^3 + (1-1-1)^3 + (-1+1-1)^3 + (-1-1+1)^3 = N(1)(1)(1)$

$\Rightarrow 27 - 1 - 1 - 1 = N$

$\therefore \boxed{N = 24}$

(3°) **Comentario:**

De asignarse otros valores.

Como: $a = 7$; $b = 11$; $c = 5$; deberá verificarse el mismo valor del parámetro N.

$\Rightarrow (7+11+5)^3 + (7-11-5)^3 + (-7+11-5)^3 + (-7-11+5)^3 = N(7)(11)(5)$

$\Rightarrow 23^3 + (-9)^3 + (-1)^3 + (-13)^3 = N(7)(11)(5)$

$\Rightarrow 12\,167 - 729 - 1 - 2\,197 = N(7)(11)(5)$

$\Rightarrow 9\,240 = N(7)(11)(5)$

$\therefore \boxed{N = 24}$

4.4.9 Ejercicio Explicativo:

Sea la equivalencia en "x":

$$x^3 + x + 1 \equiv A + B(x-1) + C(x-1)(x+2) + D(x-1)(x+2)(x-5)$$

$x \in \mathbb{R}$; calcular A, B, C y D.

Recuerde:

Para determinar los parámetros en una equivalencia:
- Igualar los coeficientes de los términos correspondientes.
- Asignar valores a la variable.

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo a los datos proporcionados $x \in \mathbb{R}$ (x es una variable).**
"A", "B", "C" y "D" son parámetros.

(2°) **Asignando valores a "x" y sustituyendo en la equivalencia:**

$\Rightarrow$ Si: $x = 1$: $3 = A + 0 + 0 + 0$ $\quad\therefore\ A = 3$

$\Rightarrow$ Si: $x = -2$: $-9 = 3 + B(-3)$ $\quad\therefore\ B = 4$

$\Rightarrow$ Si: $x = 5$: $131 = A + B(4) + C(4)(7)$

$\Rightarrow$ $131 = 3 + 16 + 28C$ $\quad\therefore\ C = 4$

$\Rightarrow$ Si: $x = 0$: $1 = A + B(-1) + C(-1)(2) + D(-1)(2)(-5)$

$\Rightarrow$ $1 = 3 - 4 - 8 + D(10)$ $\quad\therefore\ D = 1$

(3°) Se ordenan los resultados obtenidos:

$\therefore\ A = 3 ; B = 4 ; C = 4 ; D = 1$

(4°) **_Comentarios:_**

Los valores obtenidos pueden ser verificados como podemos comprobar a continuación:

$$\begin{aligned} x^3 + x + 1 &= 3 + 4(x-1) + 4(x-1)(x+2) + (x-1)(x+2)(x-5) \\ &= 3 + 4(x-1) + 4(x^2 + x - 2) + (x^3 - 4x^2 - 7x + 10) \\ &= 3 + 4x - 4 + \cancel{4x^2} + 4x - 8 + x^3 - \cancel{4x^2} - 7x + 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{x^3 + x + 1 = x^3 + x + 1} \quad \text{Lqqd}$$

4.4.10 Ejercicio Explicativo:

Calcular: $E = F(a) + F(b) + F(c)$

Sabiendo que:

$F(x) = 20x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$ y
"a" , "b" y "c" son los ceros del polinomio: $P(x) = x^3 - 3x + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

Recuerde:

El cero de un polinomio es la constante numérica o paramétrica que anula a un polinomio $P(x)$.

Solución:

(1°) **Por ser "a", "b" y "c" los ceros de P (x) mónico.**

$\Rightarrow P(a) = P(b) = P(c) = 0$

$\Rightarrow P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ Según Teorema

$\Rightarrow P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 3x + 1$

$\Rightarrow$ Se obtiene una identidad.

$\Rightarrow x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = x^3 + 0x^2 - 3x + 1$

(2°) **Identificando coeficientes**

$$\Rightarrow \begin{cases} -(a+b+c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ ab+ac+bc = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -abc = 1 \;;\; abc = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(3°) **Para calcular E, tendremos que utilizar los ceros proporcionados**

$$F(a) = 20a^3 + 1 \;;\; F(b) = 20b^3 + 1 \;;\; F(c) = 20c^3 + 1$$

$\Rightarrow$ Sumando: $E = 20(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \ldots\ldots\ldots (4)$

$\Rightarrow$ De (1): $a + b + c = 0$

$\Rightarrow$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(-1) = -3 \ldots\ldots (5)$

$\Rightarrow$ De (5) en (4): $E = 20(-3) + 3 = -60 + 3$

$\therefore \boxed{E = -57}$

4.4.11 Ejercicio Explicativo:

Calcular: $E = \dfrac{a^2}{P(a)} + \dfrac{b^2}{P(b)} + \dfrac{c^2}{P(c)}$

Sabiendo que:

$$P(x) = x(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c)x + x(x-a)(x-b) + (x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) De la condición:

$\Rightarrow P(x) = x(x-b)(x-c) + x(x-a)(x-c) + x(x-a)(x-b) + (x-a)(x-b)(x-c)(x+d) \ldots\ldots (1)$

$\Rightarrow$ En (1) obtendremos:

$\Rightarrow P(a) = a(a-b)(a-c) + 0 + 0 + 0 = a(a-b)(a-c)$

$\Rightarrow P(b) = 0 + b(b-a)(b-c) + 0 + 0 = -b(a-b)(b-c)$

$\Rightarrow P(c) = 0 + 0 + c(c-a)(c-b) + 0 = c(a-c)(b-c)$

$\Rightarrow$ Calculamos E:

$$\Rightarrow E = \frac{a^2}{a(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{-b(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{c(a-c)(b-c)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

$\Rightarrow$ Al dar común denominador y distribuir en el numerador:

$$\Rightarrow E = \frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \quad \Rightarrow E = \frac{\cancel{ab}-\cancel{ac}-\cancel{ab}+\cancel{bc}+\cancel{ac}-\cancel{bc}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$\therefore \boxed{E = 0}$

4.4.12 **Ejercicio Explicativo**

Sabiendo que:

$P(x) = 10x^3 - 80x + 333 \; ; x \in \mathbb{R}$ y $P(a) = P(b) = P(c) = 33$

Calcular: $E = P(ab + ac + bc)$

Recuerde:

El Teorema siguiente:

Si $P(x)$ una Regla polinomial / $P(m) = P(n) = P(q) = P(r) = k$

$\Rightarrow P(x) = (x-m)(x-n)(x-q)(x-r)Q(x) + k$

Solución:

(1°) **En razón a tener** $P(a) = P(b) = P(c) = 33$ y $P(x)$ no mónico.

$\Rightarrow P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c) + 33$ .... (1)

$\Rightarrow P(x) = k(x-a)(x-b)(x-c) + 33 \equiv 10x^3 - 80x + 333$ .... (2)

$\Rightarrow$ Se deduce que $k = 10$

(2°) **Sustituyendo el valor hallado $k = 10$ en la equivalencia (2):**

$\Rightarrow 10[x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc] + 33 \equiv 10x^3 - 80x + 333$

$\Rightarrow 10x^3 - 10(a+b+c)x^2 + 10(ab+ac+bc)x + (33 - 10abc) \equiv 10x^3 - 80x + 333$. (3)

$\Rightarrow 10x^3 - 10(a+b+c)x^2 + 10(ab+ac+bc)x + (33 - 10abc) \equiv 10x^3 + 0x^2 - 80x + 333$

$\Rightarrow 10(ab+ac+bc) = -80 \; ; ab + ac + bc = -8$ .... (4)

(3°) **Si sustituimos la última igualdad deducida:**

$\Rightarrow$ de (4): $E = P(ab+ac+bc) = P(-8)$ y mediante $P(x) = 10x^3 - 80x + 33$

$\Rightarrow \quad E = 10(-8)^3 - 80(-8) + 333 \quad \Rightarrow E = -5120 + 640 + 333$

$\therefore \boxed{E = -4\,147}$

4.4.13 **Ejemplo Explicativo:**

Si: $P(x) = x^3 - 4x^2 - 15x + 48 \; ; x \in \mathbb{R}$ y $P(a) = P(-b) = P(2c) = 0$

Calcular: $P[abc + (ab - 2ac + 2bc - 3)]$

Recuerde:

El teorema siguiente:

Si $F(m) = F(n) = F(p) = 0 \Rightarrow F(x) = (x-m)(x-n)(x-p)$

Solución:

(1°) **De acuerdo al enunciado:**

$P(x) = (x-a)(x+b)(x-2c)$, $P(x)$ es mónico

$\Rightarrow (x-a)(x+b)(x-2c) \equiv x^3 - 4x^2 - 15x + 48$

$\Rightarrow x^3 + (-a+b-2c)x^2 + (-ab+2ac-2bc)x + 2abc = x^3 - 4x^2 - 15x + 48$

$\Rightarrow \quad -a+b-2c = -4$ .... (1)

$-ab+2ac-2bc = -15$ .... (2)

$2abc = 48$ .... (3)

(2°) **Resolviendo el sistema obtenido:**

$\Rightarrow$ De (3): $\quad abc = 24$ .... (4)

De (2): $\quad ab - 2ac + 2bc = 15$

$ab - 2ac + 2bc - 3 = 12$ .... (5)

(3°) De (4) / (5): $\dfrac{abc}{ab - 20ac + 2bc - 3} = 2$

$\Rightarrow P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 - 15 \times 2 + 48$

$\therefore \boxed{P(2) = 10}$

4.4.14 **Ejercicio Explicativo**

Un polinomio mónico $P(x)$ de 3er grado, adopta el mismo valor numérico para $x = -1$; $x = -2$ y $x = -3$; si la suma de los coeficientes de $P(x)$ es 105. Determinar dicho polinomio.

Recuerde:

La suma de coeficientes de $P(x)$ entero es $P(1)$.

Solución:

(1°) **Sea "m" el valor común.**

$\Rightarrow$ Del enunciado:

$P(-1) = P(-2) = P(-3) = m$ .... (1)

$P(1) = 105$ .... (2)

(2°) **Según Teorema:**

$\Rightarrow$ De (1): $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) + m$ .... (3)

$\Rightarrow$ De (2): $P(1) = (2)(3)(4) + m = 105$ .... (4)

$\Rightarrow$ De (4): $m = 81$

$\Rightarrow$ En (3): $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3) + 81$

$\Rightarrow$ Efectuando: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 + 81$

$\therefore \boxed{P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 87}$

4.4.15 Ejemplo Explicativo:

La fisura de las uniones metálicas en el brazo de una grúa metálica se mide mediante el modelo matemático:

$$P(a) = a^6 + 2\sqrt{3}\,a^5 - a^4 + 2\sqrt{3}\,a^3 - 2\sqrt{5}\,a + 2\sqrt{15} + 8\ ;$$

"a" en micras; $a \in \langle 0 ; 1 \rangle$

$P(a)$ en micras.

Calcular la fisura cuando: $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ micras

Solución:

(1°) Debido a que $P(a)$ tiene las características de un polinomio entero, podemos calcular $P\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$ mediante la regla de Ruffini:

	1	$2\sqrt{3}$	-1	$2\sqrt{3}$	0	$-2\sqrt{5}$	$2\sqrt{15}+8$
$a = \sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\downarrow$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{15}+6$
	1	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	1	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	2	$-2\sqrt{3}$	14

$\Rightarrow P\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 14$

$\therefore$ **La fisura será de 14 micras**

4.4.16 Ejercicio Explicativo:

Si: $P(x)$ es de 1er grado y tiene la propiedad:

$$P(P(x)) = 4x + 21\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

Calcular: $P(x)$.

Comentario:

En una identidad se pueden igualar los coeficientes de los términos correspondientes.

Solución:

(1°) Sea: $P(x) = ax + b$ de 1er grado .... (1)

Debemos de obtener "a" y "b", siendo x una variable.

$\Rightarrow$ De (1): $\quad P(P(x)) = aP(x) + b$ .... (2)

$\Rightarrow$ De (1) en (2): $P(P(x)) = a(ax+b) + b$

$\Rightarrow$ De la condición: $a^2x + ab + b = 4x + 1$

$\Rightarrow$ Por ser una identidad: $\begin{cases} a^2 = 4 \text{ .... } (\alpha) \\ ab + b = 1 \text{ .... } (\beta) \end{cases}$

(2°) $\Rightarrow$ Resolviendo el sistema: de (α): $a = \pm 2$

$\Rightarrow$ Si: $a = 2 \;:\; 2b + b = 1 \qquad \therefore\; b = 1/3 \;;\; (2;1/3)$

$\Rightarrow$ Si: $a = -2 \;:\; -2b + b = 1 \qquad \therefore\; b = -1 \;;\; (-2;-1)$

$\Rightarrow$ De las soluciones obtenidas sustituidas en (1):

$$\therefore \boxed{P(x) = 2x + \frac{1}{3} \;\vee\; P(x) = -2x - 1}$$

Comentario:

El sistema (α) , (β) planteado, garantiza las dos soluciones halladas, verificando:

Si: $P(x) = 2x + \frac{1}{3}$; $P(P(x)) = 2\left(2x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = 4x + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 4x + 1$

Si: $P(x) = -2x - 1$; $P(P(x)) = -2(-2x-1) - 1 = 4x + 2 - 1 = 4x + 1$

4.4.17 **Ejercicio Explicativo:**

Si: $P(x)$ es de 2° grado y verifica la propiedad siguiente:

$$P(x) + P(x+1) + P(x+2) + P(x-2) = 4x^2 + 6x + 4 \;;\; x \in \mathbb{R}.$$

Hallar $P(x)$

***Solución*:**

(1°) Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ .... (1)

$\Rightarrow P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$ .... (2)

$\Rightarrow P(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$ .... (3)

$\Rightarrow P(x-2) = a(x-2)^2 + b(x-2) + c$ .... (4)

$\Rightarrow$ Ordenando cada expresión:

$\Rightarrow$ De (1) : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow$ De (2) : $P(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$

$\Rightarrow$ De (3) : $P(x+2) = ax^2 + (4a+b)x + (4a + 2b + c)$

$\Rightarrow$ De (4) : $P(x-2) = ax^2 + (-4a+b)x + (4a - 2b + c)$

(2°) $\Rightarrow$ Sumando y de acuerdo a la condición de Identidad:

$4ax^2 + (2a + 4b)x + 9a + b + 3c = 4x^2 + 6x + 4$ .... (5)

$\Rightarrow$ De (5) : $\begin{cases} 4a = 4 \text{ .... } (\alpha) \\ 2a + 4b = 6 \text{ .... } (\beta) \\ 9a + b + 3c = 4 \text{ .... } (\gamma) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Resolviendo el sistema:

De (α) : $a = 1$

De (β) : $2 + 4b = 6$ $\quad\therefore\ b = 1$

De (γ) : $9 + 1 + 3c = 4$ $\quad\therefore\ c = -2$

$\Rightarrow$ Sustituyendo los valores calculados: $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ en (1)

$\therefore$ $\boxed{P(x) = x^2 + x - 2}$

4.4.18 **Ejercicio Explicativo**

Si: $P(x) = [\![x]\!]^3 + 12[\![x]\!]^2 - 30[\![x]\!] + 7$

Calcular: $E = P\left(\dfrac{P(\pi)}{P\left(-\dfrac{1}{4}\right)}\right)$

Recuerde:

El máximo entero. $[\![x]\!] = k$, si $k \leq x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow [\![4.33]\!] = 4$; $[\![-0.99]\!] = -1$ $\Rightarrow [\![1/9]\!] = 0$

Solución:

De acuerdo a la definición de Máximo Entero

(1°) Cálculo de $P(\pi)$: $\quad P(\pi) = [\![\pi]\!]^3 + 12[\![\pi]\!]^2 - 30[\![\pi]\!] + 7$

$\Rightarrow P(\pi) = (3)^3 + 12(3)^2 - 30(3) + 7 \Rightarrow P(\pi) = 27 + 108 - 90 + 7$

$\therefore$ $\boxed{P(\pi) = 52}$

(2°) Cálculo de $P(-1/4)$

$\Rightarrow P(-1/4) = [\![-1/4]\!]^3 + 12[\![-1/4]\!] - 30[\![-1/4]\!] + 7$

$\Rightarrow P(-1/4) = (-1)^3 + 12(-1)^2 - 30(-1) + 7$

$\Rightarrow P(-1/4) = -1 + 12 + 30 + 7$

$\therefore$ $\boxed{P(-1/4) = 48}$

(3°) Cálculo de $P\left(\dfrac{52}{48}\right)$

$$\Rightarrow P\left(\frac{52}{48}\right) = \left[\!\!\left[\frac{52}{48}\right]\!\!\right]^3 + 12\left[\!\!\left[\frac{52}{48}\right]\!\!\right]^2 - 30\left[\!\!\left[\frac{52}{48}\right]\!\!\right] + 7$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{52}{48}\right) = (1)^3 + 12(1)^2 - 30(1) + 7 = 1 + 12 - 30 + 7$$

$$\therefore \boxed{P\left(\frac{52}{48}\right) = -10}$$

4.4.19 Ejercicio Explicativo:

Si las reglas polinomiales:

$R(x) = A(x+3)(x+4) + B(x+4) + C(x+3)^2$

$S(x) = 2x^D + 16x + 29$

Son equivalentes, calcular: A , B , C y D

Recuerde:

Si dos reglas polinomiales son idénticas:

i) Los grados son iguales

ii) Los coeficientes correspondientes son los iguales (reflexividad)

iii) Se verifican para todo valor de la variable

Solución

(1°) De la condición: $R(x) \equiv S(x)$

$\Rightarrow A(x+3)(x+4) + B(x+4) + C(x+3)^2 \equiv 2x^D + 16x + 29$

$\Rightarrow$ Ordenando:

$\Rightarrow A(x^2 + 7x + 12) + B(x+4) + C(x^2 + 6x + 9) \equiv 2x^D + 16x + 29$

$\Rightarrow (A + C)x^2 + (7A + B + 6C)x + (12A + 4B + 9C) = 2x^D + 16x + 29$

(2°) De acuerdo a la igualdad de coeficientes:

$$A + C = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$
$$7A + B + 6C = 16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$
$$12A + 4B + 9C = 29 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$$
$$D = 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

(3°) Resolviendo el sistema: $A = 5$, $B = -1$, $C = -3$, $D = 2$

4.4.20 Ejercicio Explicativo:

Determinar el valor correspondiente a m, n y p, de modo que la siguiente regla polinomial:

$$P(x) = -(8+3m)x^3 - \left(\frac{4m}{3} - 7\right)x^2 + \left(\frac{p}{2} - 5\right)x^5 + \left(1 - \frac{n}{7}\right)x + 15x^4 + 10$$

sea una recíproca

Recuerde:

Un polinomio recíproco ordenado de grado impar se caracteriza por tener sus coeficientes equidistantes iguales.

Solución:

(1°) Al ordenar:

$$P(x) = \left(\frac{p}{2} - 5\right)x^5 + 15x^4 - (8 + 3m)x^3 - \left(\frac{4m}{3} - 7\right)x^2 + \left(1 - \frac{n}{7}\right)x + 10$$

Para ser una regla recíproca deberá ocurrir que:

$$\frac{p}{2} - 5 = 10 \qquad \Rightarrow p = 30$$

$$1 - \frac{n}{7} = 15 \qquad \Rightarrow n = -98$$

$$-\left(\frac{4m}{3} - 7\right) = -(8 + 3m) \qquad \Rightarrow m = -9$$

(2°) Si deseamos verificar, sustituimos los valores hallados.

$$\Rightarrow P(x) = \left(\frac{30}{2} - 5\right)x^5 + 15x^4 - (8 - 27)x^3 - (-12 - 7)x^2 + (1 + 14)x + 10$$

$$\Rightarrow P(x) = 10x^5 + 15x^4 + 19x^3 + 19x^2 + 15x + 10$$

que se observa es una recíproca

$\therefore$ $\boxed{m = -9 \; , \; n = -98 \; , \; p = 30}$

4.4.21 Ejercicio Explicativo

Calcular: a, b, c y m

De modo que: $P(x) = \left(\frac{7a}{11} - 13\right)x^{b-5} + (a + c - 38)\,x^{2m-15} + \frac{a+b}{m+c}$

Sea: Completa, mónica y ordenada decrecientemente respecto a los exponentes de x; la suma de los ceros es -23.

Recuerde:

i) Una regla polinomial es mónica si el coeficiente principal es la unidad.

ii) En toda regla polinomial mónica de grado "n" la suma de los ceros es el opuesto del coeficiente de x^{n-1}.

Solución:

(1°) Por ser mónica: $\frac{7a}{11} - 13 = 1 \Rightarrow a = 22$

(2°) Por ser de 2° grado: $b - 5 = 2 \Rightarrow b = 7$

(3°) Por tener suma de ceros igual a. - 23 (el coeficiente del término de 1° grado es el opuesto de la suma de los ceros)

$$\Rightarrow -(a + c - 38) = -23 \Rightarrow c = 39$$

(4°) Si tiene un término de 1er grado:

$$2m - 15 = 1 \Rightarrow m = 8$$

$\therefore \boxed{a = 22 \; , \; b = 7 \; , \; c = 39 \; , \; m = 8}$

(5°) ***Verificación:***

Al sustituir los valores obtenidos : a = 22, b = 7, c = 39, m = 8

$$\Rightarrow P(x) = \left(\frac{7(22)}{11} - 13 \right) x^{7-2} + (22 + 39 - 38) x^{16-15} + \frac{29}{47}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2 + 23x + \frac{29}{47}$$

P (x) es mónico y ordenado, suma de ceros igual a - 23

$\therefore \boxed{a = 22 \; , \; b = 7 \; , \; c = 39 \; , \; m = 8}$

4.4.22 Ejercicio Explicativo

En la equivalencia:

$$-3x^4 + x + 7 \equiv A(x-2)^4 + B(x-2)^3 + C(x-2)^2 + D(x-2) + E$$

Determinar A , B , C , D y E

Recuerde:

El Teorema de Briott - Ruffini

Solución:

(1°) **El 2° miembro adopta la forma asociada con el algoritmo de Briott.**

(2°) **Realizando la ordenación correspondiente.**

	-3	0	0	1	7	
x = 2	↓	-6	-12	-24	-46	E
	-3	-6	-12	-23	-39	
x = 2	↓	-6	-24	-72	D	
	-3	-12	-36	-95		
x = 2	↓	-6	-36	C		
	-3	-18	-72			
x = 2	↓	-6	B			
	-3	-24				
x = 2	↓	A				
	-3					

$\therefore$ $\boxed{A = -3\ ,\ B = -24\ ,\ C = -72\ ,\ D = -95\ ,\ E = -39}$

4.4.23 Ejercicio Explicativo

Si: $P(x) = x^2 + 7x + 1$

Calcular: $P(A) + P(B)$

Sabiendo que: $A = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-4}$; $B = \left(\sqrt{2}-1\right)^{-4}$

Recuerde:

El teorema siguiente:

Si $F\left(a+\sqrt{b}\right) = p + q\sqrt{b} \Rightarrow F\left(a-\sqrt{b}\right) = p - q\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow$ $F(x)$ es una regla polinomial de coeficientes reales racionales y $a+\sqrt{b}$ es un # irracional.

Solución:

(1°) A partir de los datos:

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^4$$, que luego de racionalizar

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\underbrace{\sqrt{2}^2-1}_{1}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}-1\right)^4$$

$$\Rightarrow A = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)^2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)^2 \quad \therefore\ A = 17-12\sqrt{2}$$

(2°) Obtenemos P (A)

$$\Rightarrow P(A) = \left(17-12\sqrt{2}\right)^2 + 12\left(17-12\sqrt{2}\right)+1$$

$$\Rightarrow P(A) = 577-408\sqrt{2}+204-144\sqrt{2}+1$$

$$\Rightarrow P(A) = 782-552\sqrt{2} \Rightarrow P(B) = 782+552\sqrt{2}$$

(3°) De acuerdo a lo solicitado:

$$\Rightarrow y = \underbrace{782-552\sqrt{2}}_{P(A)} + \underbrace{782+552\sqrt{2}}_{P(B)} \quad \therefore\ \boxed{y = 1\,564}$$

4.4.24 Ejemplo Explicativo

Conociendo la siguiente regla polinomial:

$F(x) = 5x+7$, $F[A(x)+2B(x)] = 15x+3$ y
$F[A(x)-2B(x)] = -9$

Determinar: A (x) y B (x)

Recuerde:

La regla polinomial establece las sentencias necesarias a realizarse con ella.

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla establecida

$\Rightarrow F[A(x)+2B(x)] = 5[A(x)+2B(x)]+7 = 15x+3$ .... (I)
$\Rightarrow F[A(x)-2B(x)] = 5[A(x)-2B(x)]+7 = -9$ .... (II)

(2°) De las igualdades I y II

$$\begin{cases} 5A(x)+10B(x) = 15x-4 & \text{.......... (III)} \\ 5A(x)-10B(x) = -16 & \text{.......... (IV)} \end{cases}$$

(3°) Resolviendo el sistema compuesto por (III) y (IV)

$\Rightarrow$ $10\,A(x) = 15x - 20$ (de sumar III y IV)

$\therefore \boxed{A(x) = \frac{3}{2}x - 2}$

$\Rightarrow$ $20\,B(x) = 15x + 12$ (de restar III y IV)

$\therefore \boxed{B(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{5}}$

4.4.25 **Ejercicio Explicativo**

En la regla polinomial de 2 variables

$$P(a,b) = a^{3^m-1} + b^{m^3} + 93\left(a^m b^2\right)^m \quad , \ m \in \mathbb{N}$$

Los grados relativos son iguales.

Hallar el grado absoluto

Recuerde:

El grado relativo de una expresión algebraica es el grado en relación a una determinada variable en específico.

Solución:

(1°) De la expresión podemos tener como referencia:

$Ga_1 = 3^m - 1$; $Gb_1 = m^3$

$Ga_2 = m^2$; $Gb_2 = 2m$

(2°) Podemos tener las posibilidades siguientes:

$\Rightarrow Ga_1 = Gb_1$; $3^m - 1 = m^3$ $\Rightarrow m_1 = 2$

$\Rightarrow Ga_2 = Gb_2$; $m^2 = 2m$ $\Rightarrow m_2 = 0$, $m_1 = 2$

$\Rightarrow Ga_1 = Gb_2$; $3^{-1} - 1 = 2m$ $\Rightarrow m_3 = 1$, $m_2 = 0$

$\Rightarrow Ga_2 = gb_1$; $m^2 = m^3$ $\Rightarrow m_3 = 1$, $m_2 = 0$

(3°) Verificando:

Si: $m_1 = 2 \Rightarrow P(a,b) = a^8 + b^8 + 93\,a^4b^4$ (Cumple)

Si: $m_2 = 0 \Rightarrow P(a,b) = 1 + 1 + 93(1)$ (No cumple)

Si: $m_3 = 1 \Rightarrow P(a,b) = 1 + b + 93\,ab^2$ (Cumple)

$\therefore \boxed{G = 8 \text{ ó } G = 3}$

4.4.26 **Ejemplo Explicativo:**

Si: $P(x) = x^2 + x + 1$

$K(x) = x^2 - x - 1$ y $2P(x) - 7K(x) \equiv ax^2 + (b+c)x + b - a$

Calcular a , b y c

Recuerde:

En toda identidad los coeficientes correspondientes son iguales.

Solución:

(1°) De acuerdo a las dos primeras reglas polinomiales y la 3ra igualdad.

$\Rightarrow 2(x^2 + x + 1) - 7(x^2 - x - 1) \equiv ax^2 + (b+c)x + b - a$

$\Rightarrow -5x^2 + 9x + 9 \equiv ax^2 + (b+c)x + b - a$

(2°) Esta identidad permite:

$-5 = a$ .... (I)

$9 = b + c$ .... (II)

$9 = b - a$ .... (III)

(3°) Resolviendo el sistema

$\therefore$ $\boxed{a = -5 \;,\; b = 4 \;,\; c = 5}$

4.5 ESTUDIO DE LOS POLINOMIOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

(1) Hallar el valor de "r" para que la suma de los ceros de la regla polinomial:

$$P(x) = 2rx^2 - (12r + 1)x + 12 \quad ; \text{ sea } 7$$

Rpta: $r = 1/2$

(2) Si los ceros de la regla polinomial son α y β y la suma del recíproco de α y el de β es $10/7$, hallar el valor de $|\alpha - \beta|$

Siendo la regla polinomial

$$P(x) = (m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3$$

Rpta: $|\alpha - \beta| = \dfrac{4}{3}$

(3) Hallar los demás ceros del polinomio $P(x)$ si $x = 2 - i$, es uno de ellos:

Siendo: $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$

Rpta: $2 + i \,,\; 1 \,,\; -1$

(4) Hallar los ceros del siguiente polinomio recíproco:

$$P(x) = 6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6$$

Rpta: $\left\{ 3 , -\frac{1}{3} , 2 , -\frac{1}{2} \right\}$

(5) Hallar "m" en la regla: $P\left(x\right) = \dfrac{\left(9+m\right)x+b}{x+1}$

Si $P(p(x))$ es una expresión lineal en "x"

Rpta: - 10

(6) Hallar $P(1)$ si $P(y^2) = (y^a + b)(y^b + a)$

Siendo: $P(y)$ un polinomio completo y además a y $b \neq 0$ y $b \neq a$

Rpta: $P(1) = 15$

(7) Sabiendo que $P(x) = mx$ y $P(x-b) = b(x+1) - m(x-1)$

Siendo: $m \neq 0$; hallar $[m + b]$

Rpta: - 5

(8) Si el polinomio: $P(x, y) = 2x^{2k-5}y^{4r} + 3x^{2k-4r}y^3 + x^4y^9$

es homogéneo ; hallar r y k

Rpta: 1 y 7

(9) Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio, si se sabe que es completo y ordenado en forma decreciente respecto a los exponentes de x

$$P\left(x\right) = ax^{n^2} + 6x^{n+a} + cx^{n+b} + nx^{c-2} + a$$

Rpta: 13

(10) Si $P\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 4x^2 - 2x - 5$

Hallar: $\left[\dfrac{P\left(3/2\right)}{3}\right]^2$

Rpta: 25

(11) Si: $$P(x) = x^2 - x + 1$$

Hallar: $$E = [P(x+1) - P(x-1) - 4x]^2$$

Rpta: $E = 4$

(12) Hallar: "m / n", si el polinomio

$$P = x^m y^n (2x^{2m+1} + 7y^{54n+1})^7$$

es homogéneo

Rpta: $\dfrac{m}{n} = 27$

(13) Encontrar el valor de $x - y$ si el binomio es homogéneo y de grado 10.

$$P(a,b,c) = a^3\left[b^x c^{x+1}\right]^{1/2} - c^4\sqrt{a^y b^3}$$

Rpta. $x - y = -5/2$

(14) Hallar "m + n + p" si el polinomio $P(x)$ además de tener 3 ceros como máximo está ordenado en forma descendente respecto a sus exponentes y carece de término cuadrático.

$$P(x) = x^{m-10} + 3x^{m-n+5} + 2x^{p-n+6}$$

Rpta: 41

(15) Calcular la suma de los ceros del siguiente polinomio mónico

$$P(x) = (a-8)x^3 + 2^a\sqrt{a}\,x^2 + 12x + 33a$$

Rpta: - 1 536

(16) Hallar una regla polinomial cuyos ceros sean una unidad mayor con respecto a los ceros de:

$$P(x) = x^3 + 7x + 6$$

Rpta: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 10x - 2$

(17) Hallar una regla polinomial, cuyos ceros sean el doble de los correspondientes a la regla:

$$F(x) = 16x^3 + 24x + 1$$

Rpta: $P(x) = 2x^3 + 12x + 1$

(18) Hallar una regla polinomial cuyos ceros sean de la forma $\left(\dfrac{r}{2} - 1\right)$, siendo "r" la forma de los ceros de la regla:

$$F(x) = -x^3 + 9x + 1$$

Rpta: $G(x) = -8x^3 - 12x^2 + 12x + 9$

(19) Hallar una regla polinomial cuyos ceros sean los recíprocos de los correspondientes a la siguiente regla:

$$F(x) = 6x^3 + 7x^2 - 4$$

Rpta: $G(x) = -4x^3 + 7x + 6$

(20) Calcular a y b si:

$$a(x-3) + b(x-2) \equiv 23x + 51$$

Rpta: $a = 97$. $b = 120$

(21) Hallar una regla polinomial cuyos ceros sean el triple de los opuestos de los correspondientes a la regla:

$$F(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + 1$$

Rpta: $x^4 - 15x^3 - 9x^2 + 81$

(22) Si: $F(x) = \left(\frac{a}{3} - 5\right)x^2 + \left(\frac{b}{4} - 3\right)x + \left(\frac{c}{2} - 7\right)$

posee más de 2 ceros.

Hallar el valor de a, b y c

Rpta: $a = 15$, $b = 12$ y $c = 14$

(23) Calcular el valor de "m" de manera que la regla siguiente:

$F(x) = (x-7)(x-8)(x-1) + ax^3 + (b-5)x^2 + cx + d$, tenga infinitos ceros

Rpta: $a = -1$, $b = 21$, $c = -71$, $d = 56$

(24) Sea: $F(x) = ax^3 + bx^2 + 100x + c$

Calcular a , b y c , sabiendo que $F(x)$ posee a 10 como cero repetido dos veces y que la suma de todos los ceros es $35/2$

Rpta: $a = 2$, $b = -35$, $c = 500$

CAPITULO 5

LA ADICION Y MULTIPLICACION ALGEBRAICA

5.1 ADICION DE POLINOMIOS EN $\mathbb{R}$

Definición.- Se llama adición de dos polinomios de variable real a la operación o algoritmo que les hace corresponder otro polinomio llamado suma de los mismos.

En el conjunto de los polinomios, la suma es una ley de composición interna que tiene las propiedades conmutativa, asociativa, existen elemento opuesto y neutro así como la relación de orden

Esquemáticamente:

Sean: $A(x)$ y $B(x)$

$\Rightarrow \quad A(x) + B(x) \equiv S(x)$ es la regla de correspondencia ; $x \in \mathbb{R}$

Lectura:

"La suma de $A(x)$ y $B(x)$ es equivalente al polinomio $S(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$".

$\Rightarrow A(1) + B(1) = S(1)$

$\Rightarrow A(0) + B(0) = S(0)$

$\Rightarrow A(-1) + B(-1) = S(-1)$

Regla.- Para sumar dos o más polinomios se escriben los polinomios uno debajo del otro de manera que si existen términos semejantes estos formen columnas para luego sumar sus coeficientes algebraicamente.

Ejemplo: Efectuar:

$$(x^5 + 9x^4 + 7x^3 - 10x^2 + 6x) + (3x^5 + 2x^4 + 9x^3 + x^2 + 6)$$

La suma puede realizarse conforme a la regla:

$$\begin{array}{r} x^5 + 9x^4 + 7x^3 - 10x^2 + 6x + 0 \\ 3x^5 + 2x^4 + 9x^3 + x^2 + 0x + 6 \\ \hline \Rightarrow\ 4x^5 + 11x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 6x + 6 \end{array}$$

5.2. SUSTRACCION DE POLINOMIOS EN IR.

Definición.- Dado dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ se llama diferencia entre A y B al polinomio $D(x)$, tal que sumado con $B(x)$ es idéntico a $A(x)$.

Si: $A(x) - B(x) = D(x)$; $x \in \mathbb{R}$.

Lectura:

La diferencia de $A(x)$ menos $B(x)$ es equivalente a $D(x)$ para todo x que $\in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow A(x) = B(x) + D(x)$

Comentario.-

La diferencia de dos polinomios es **igual a la suma del primero con el opuesto del segundo.**

Si: $A(x) - B(x) \Rightarrow A(x) + \text{Op}\, B(x)$

5.3 MULTIPLICACION DE POLINOMIOS EN IR.

Definición.- Se llama multiplicación de dos polinomios de variable real $A(x)$ y $B(x)$ a la operación que hace corresponder a dicho par de polinomios otro polinomio real $P(x)$ llamado **producto.**

Sean: $A(x)$ y $B(x) \Rightarrow A(x) . B(x) = P(x)$; $x \in \mathbb{R}$

Lectura:

"La multiplicación de $A(x)$ por $B(x)$ es equivalente al polinomio producto $P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ A(1)B(1) &= P(1) \\ A(0)B(0) &= P(0) \\ A(-1)B(-1) &= P(-1) \end{aligned}$$

5.4 PROPIEDADES FORMALES DE LA MULTIPLICACION DE POLINOMIOS.

La multiplicación de polinomios al igual que la suma, tiene las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva respecto a la suma. Además la relación de orden.

Regla de Multiplicación.-

Para multiplicar un polinomio por otro polinomio se utiliza la ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejemplo:

Efectuar la multiplicación siguiente: $(x^2 + 5x + 7)(4x^2 + 3x + 2)$

(1°) ***Solución:*** **Mediante la ley distributiva.**

$$= (x^2 + 5x + 7)(4x^2 + 3x + 2)$$

$$= (x^2 + 5x + 7)(4x^2) + (x^2 + 5x + 7)(3x) + (x^2 + 5x + 7)(2)$$

$$= \underbrace{4x^4 + 20x^3 + 28x^2} + \underbrace{3x^3 + 15x^2 + 21x} + \underbrace{2x^2 + 10x + 14}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$= 4x^4 + 23x^3 + 45x^2 + 31x + 14$$

$$\therefore \boxed{(x^2 + 5x + 7)(4x^2 + 3x + 2) \equiv 4x^4 + 23x^3 + 45x^2 + 31x + 14 \; ; \; x \in \mathbb{R}}$$

(2°) ***Solución:*** **Mediante la regla tradicional.**

$$\begin{array}{r}
x^2 + 5x + 7 \\
4x^2 + 3x + 2 \\
\hline
4x^4 + 20x^3 + 28x^2 \qquad\qquad\qquad\quad \\
3x^3 + 15x^2 + 21x \qquad\quad \\
2x^2 + 10x + 14 \\
\hline
\therefore \; 4x^4 + 23x^3 + 45x^2 + 31x + 14
\end{array}$$

(3°) ***Solución:*** **Mediante la Regla del algoritmo diagonal.**

1er Paso:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 5 & 7 \\
\hline
4 & 4 & 20 & 28 \\
3 & 3 & 15 & 21 \\
2 & 2 & 10 & 14
\end{array} \quad \leftarrow \text{Coeficientes}$$

2do Paso:

$$\begin{array}{cccc}
 & \Sigma & \Sigma & \Sigma \\
4 & 20 & 28 & \Sigma \\
3 & 15 & 21 & \Sigma \\
2 & 10 & 14 &
\end{array}$$

$$\therefore \boxed{4x^4 + 23x^3 + 45x^2 + 31x + 14}$$

5.5 LA NOTACION SUMATORIA Σ (SIGMA)

La letra griega Σ es el símbolo de la suma; dicha simbología puede usarse de dos formas:

- La notación Σ con límites.
- La notación Σ sin límites.

5.6 LA NOTACION Σ CON LIMITES

Definición.- Si "n" es un número natural y $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$; son números reales

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Lectura:

"La sumatoria de los a_i, desde $i = 1$, hasta $i = n$".

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{i=5} \operatorname{sen}(i\alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha) + \operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(4\alpha) + \operatorname{sen}(5\alpha)$$

$$\sum_{k=2}^{k=6} 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$$

$$\sum_{k=1}^{4} (k + \operatorname{tg} 3k) = (1 + \operatorname{tg} 3) + (2 + \operatorname{tg} 6) + (3 + \operatorname{tg} 9) + (4 + \operatorname{tg} 12)$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{9-k} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$$

En Particular:

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i$$

Límite Superior

Término Generatriz

Límite Inferior

Por simplicidad se tendrá la equivalencia siguiente:

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

5.7 PROPIEDADES DE LA SUMATORIA CON LIMITES.

(1°) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$; $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$ posee los mismos términos que $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Pero el orden en que los términos están escritos es el inverso.

(2°) Si "c" es una constante y $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c\, a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

"c" puede extraerse como factor común.

(3°) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Propiedad distributiva de la sumatoria respecto a la suma.

(4°) $\sum_{i=1}^{n} (1) = n$; $\sum_{i=1}^{n} (c) = c \sum_{i=1}^{n} 1$

Sumatoria de una constante.

(5°) $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

(6°) $$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1} \right) = a_n - a_0 \quad \text{Propiedad Telescópica}$$

(7°) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \ ; \ m<n \quad \text{Propiedad Disociativa de la Sumatoria}$$

5.8 LA NOTACION Σ SIN LIMITES.

Sea Σa, ésta representa la suma de todos los términos cuyo modelo o tipo es "a" y limitado por el número de variables.

Ejemplo: Si la función posee cuatro letras.

$\Rightarrow \Sigma a^4 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ (El desarrollo es de acuerdo al modelo a^4)

$\Rightarrow \Sigma\, ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ (El desarrollo es de acuerdo al modelo "ab")

$\Rightarrow \Sigma a^{bc} = a^{bc} + a^{bd} + a^{cd} + b^{ac} + b^{ad} + b^{cd} + c^{ab} + c^{ad} + c^{bd} + d^{ab} + d^{ac} + d^{bc}$

Ejemplo:

$\Sigma a = a + b + c + d + e$; función de 5 letras.

$\Sigma a^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$; función de 5 letras.

$\Sigma ab = ab + ac + bc$; función de 3 letras.

$\Sigma ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd$; función de 4 letras.

$\Sigma \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y}$; función de 3 letras.

$\Sigma a^{10}b^3 = a^{10}b^3 + a^{10}c^3 + b^{10}a^3 + b^{10}c^3 + c^{10}a^3 + c^{10}b^3$; función de 3 letras.

$\Sigma a(b+c)^3 = a(b+c)^3 + b(c+a)^3 + c(b+a)^3$

Ejemplo: Desarrollar $(a+b+c+d)^2$

$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$\Rightarrow \boxed{(a+b+c+d)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab}$

Ejemplo:

$(a+b+c+d)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc$

Donde: $\Sigma a^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$

$\Sigma a^2b = a^2b + a^2c + a^2d + b^2a + b^2c + b^2d + c^2a + c^2b + c^2d + d^2a + d^2b + d^2c$

$\Sigma abc = abc + abd + bcd + acd$

Consecuencias:

(1°) $\Sigma\, 0 = 0$ .... La suma de "n" ceros es cero

(2°) $\Sigma\, 1 = n$ .... La suma de "n" unos es "n"

(3°) $\Sigma\, k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ .... La suma de los n primeros números naturales

(4°) $\Sigma\, k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ ... La suma de los n primeros cuadrados de los números naturales.

(5°) $\Sigma\, k^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ .... La suma de los n primeros cubos de los números naturales.

(6°) $\Sigma\, k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$; $k \in \mathbb{N}$

(7°) $\Sigma\, k^5 = \dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$; $k \in \mathbb{N}$

(8°) $\Sigma \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{n}{n+1}$; $k \in \mathbb{N}$

(9°) $\Sigma\, k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$; $k \in \mathbb{N}$

(10°) $\Sigma\, k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$; $k \in \mathbb{N}$

(11°) $\Sigma\, b^k = b\left(\dfrac{b^n-1}{b-1}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

(12°) $\Sigma\, 2^k = 2^{n+1} - 2$

(13°) $\Sigma \dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

(14°) $\Sigma \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

(15°) $\Sigma \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

(16°) $\Sigma\left(a+\left(k-1\right)r\right)=\frac{n}{2}\left(2a+\left(n-1\right)r\right)$

5.9. LA NOTACION PRODUCTORIA: $\prod a_i$

La letra griega $\prod$ es el símbolo de la multiplicación sucesiva.

Definición.- Si "n" es un número natural y $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, son números reales

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{i=n} a_i = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$$

Lectura:

"La multiplicación de los a_i desde $i = 1$, hasta $i = n$".

Ejemplo:

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{i=10} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_6 \cdot x_9 \cdot x_{10}$$

$$\prod_{i=1}^{8} 3^i = 3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5 \times 3^6 \times 3^7 \times 3^8$$

$$\prod_{k=1}^{7} tg\,(2k) = tg\,(2)\,.\,tg\,(4)\,.\,tg\,(6)\,.\,tg\,(8)\,.\,tg\,(10)\,.\,tg\,(12)\,.\,tg\,(14)$$

$$\prod_{i=1}^{i=6}\left(x^{2i}+1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^6+1\right)\left(x^6+1\right)\left(x^{10}+1\right)\left(x^{12}+1\right)$$

$$\prod_{i=1}^{i=10} i = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$$

5.10. PROPIEDADES DE LA PRODUCTORIA

(1°) $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$; $n \in \mathbb{N}$

$\prod_{i=1}^{n} a_{n-i+1}$ Posee los mismos términos que $\prod_{i=1}^{n} a_i$

pero el orden en que los términos están escritos es el inverso.

(2°). Si "c" es una constante y $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} c\,a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i \ ; \qquad \prod_{i=1}^{n}\left(1\right)=1$$

(3°) $\prod_{i=1}^{n}\left(a_i\, b_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$; **Propiedad distributiva respecto al producto.**

(4°) $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}$; **Propiedad distributiva respecto a la división.**

(5°) $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i$; $m < n$; $m , n \in \mathbb{N}$, **Propiedad Disociativa**

(6°) $\prod_{i=1}^{n} i = n!$; $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times n = n!$; $n \in \mathbb{N}$

5.11. LOS PRODUCTOS O EQUIVALENCIAS NOTABLES

Son todas aquellas multiplicaciones y potenciaciones cuyos productos son de mucha frecuencia por lo que estos se han clasificado para una mejor utilización.

Es recomendable memorizarlos en forma tal que pueda reconocer el producto a partir de los factores así como los factores a partir del producto.

5.11.1. GRUPO I : Equivalencias Fundamentales; a, x, y, z, $\in$ IR

1. $a (x + y + z) \equiv ax + ay + az$

   Axioma de la distribución de la multiplicación respecto a la suma.

2. $(a + b) (a + b) \equiv (a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

   $(a - b) (a - b) \equiv (a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

   Cuadrado de un Binomio

3. $(a + b) (a - b) \equiv a^2 - b^2$

   Diferencia de Cuadrados

4. $(ax + b) (mx + n) \equiv (am) x^2 + (an + bm) x + bn$

   $(x + y) (a + b) \equiv ax + bx + ay + by$

   Producto de dos Binomios

5. $(x + a) (x^2 - ax + a^2) \equiv x^3 + a^3$

   $(x - a) (x^2 + ax + a^2) \equiv x^3 - a^3$

   Suma y Diferencia de Cubos

6. $(x - 1) (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \equiv x^5 - 1$

   $(a - b) (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \equiv a^5 - b^5$

   $(x + 1) (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) \equiv x^5 + 1$

   $(a + b) (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \equiv a^5 + b^5$

   La Suma y Diferencia de quintas potencias

7. $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...b^{n-1}) \equiv a^n-b^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

La Diferencia de Enésimas Potencias

$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-2}3b^2-...+b^{n-1} \equiv a^n+b^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ impar

La Suma y Diferencia de Enésimas Potencias

8. $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

$(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$

Las equivalencias de Legendre

9. $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(Cubo de una Suma y de una Diferencia)

Disposición Práctica

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

10. $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a-b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

$(a+b+c...)^2 \equiv \sum a^2+2\sum ab$

Cuadrado de un Polinomio

11. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$

$(a+b+c+...)^3 \equiv \Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc$

Cubo de un Polinomio

Disposiciones Prácticas

$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

$(a+b+c)^3 \equiv -2(a^3+b^3+c^3)+3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+6abc$

$(a+b+c)^3 \equiv (a+b-c)^3+(a-b+c)^3+(-a+b+c)^3+24abc$

$(a+b+c)^3+(-a-b+c)^3+(-a+b-c)^3+(a-b-c)^3 = 24abc$

12. $(a+b)^4 \equiv a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b+c)^4 = \sum a^4+4\sum a^3b+6\sum a^2b^2+12\sum a^2bc$

Cuarta Potencia de Binomios y Trinomios

13. $\underline{(x+a)(x+b)(x+c)...(x+k)} \equiv x^n+(\Sigma a)x^{n-1}+(\Sigma ab)x^{n-2}+(\Sigma abc)x^{n-3}+...+\Sigma(abc...k)$

$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

$(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$

Producto de Binomios de Término Común "x", Reglas de Stevin

14. $(ax+by)^2+(ay-bx)^2 \equiv (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \equiv (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$(mx+ny+cz+dw)^2+(my-nx)^2+(mz-cx)^2+(mw-dx)^2+(nz-cy)^2+(nw-dy)^2+(cw-dz)^2$

$\equiv (m^2+n^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$

Equivalencias de Lagrange

Remarcando:

Los símbolos o variables en cada equivalencia representan cualquier valor real o expresión algebraica.

5.11.2 GRUPO II : Equivalencias Complementarias (a, b, c, d, x $\in$ IR)

15. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$

16. $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

17. $\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] = a^3+b^3+c^3-3abc$

18. $(a+b)(a+c)(b+c) = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc = \Sigma a^2b+2abc$

$(a+b+c)(ab+ac+bc) = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc = \Sigma a^2b+3abc$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+a^3+b^3+c^3 = \Sigma a^2b+\Sigma a^3$

19. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = -\Sigma a^4+\Sigma a^2c^2$

20. $[a^2+b^2+(a+b)^2]^2 = 2[a^4+b^4+(a+b)^4]$

21. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4+a^2b^2+b^4$

22. $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ \ldots\ \text{n factores} = \left(a^{2^n}-b^{2^n}\right) \div (a-b)\ ;\ a \neq b$

23. $(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)\ldots\text{n factores} = \left(a^{2^n}+a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}}+b^{2^n}\right) \div (a^2+ab+b^2)$

24. $-(a-b)(b-c)(c-a) \equiv ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a) = \Sigma ab(a-b)$

$-(a-b)(b-c)(c-a) \equiv a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = \Sigma a^2(b-c)$

$-(a-b)(b-c)(c-a) \equiv a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = \Sigma a(b^2-c^2)$

$-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \equiv a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = \Sigma a^3(b-c)$

25. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

26. $(a^n-b^n)^3+(b^n-c^n)^3+(c^n-a^n)^3 = 3(a^n-b^n)(b^n-c^n)(c^n-a^n)\ ;\ n \in$ IN

27. $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=3(x-a)(b-c)(x-b)(c-a)(x-c)(a-b)$

28. $(a+b+c)^4+a^4+b^4+c^4-(a+b)^4-(b+c)^4-(a+c)^4 \equiv 12abc(a+b+c)$

29. $(a+b+c)^5+(a-b-c)^5+(-a-b+c)^5+(-a+b-c)^5 = 80\,abc(a^2+b^2+c^2)$

30. $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5 = 5(a+b)(b+c)(a+c)(\Sigma a^2+\Sigma ab)$

31. $(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a+b)(a^2+b^2+ab)$

32. $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5 = 5(a-b)(b-c)(c-a)(\Sigma a^2-\Sigma ab)$

33. $(a-b)^6+(b-c)^6+(c-a)^6-3(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^3$

34. $(a-b)^7+(b-c)^7+(c-a)^7 = 7(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2$

35. $\Sigma(b+c-a-x)^4(b-c)(a-x) = 16(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)$

36. $(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4 = 18(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)^2$

37. $(a+b+c+d)^4+\Sigma(a+b-c-d)^4-\Sigma(a+b+c-d)^4 = 192\,abcd\,;\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$

38. $$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = a+\sqrt{b}\ ;\ a, b \in \mathbb{R}$$

39. $(a+b+c+d)^2+\Sigma(a+b-c-d)^2 = 4\Sigma a^2,\ a, b, c, \in \mathbb{R}$

40. $x^n+(x+3)^n+(x+5)^n+(x+6)^n+(x+9)^n+(x+10)^n+(x+12)^n+(x+15)^n$
$=(x+1)^n+(x+2)^n+(x+4)^n+(x+7)^n+(x+8)^n+(x+11)^n+(x+13)^n+(x+14)^n$
cuando $n=0, 1, 2, 3$

5.11.3 GRUPO III : EQUIVALENCIAS CONDICIONALES.

Aquellas que se verifican para condiciones particulares de sus variables, los cuales serán proporcionadas o en ciertos casos deducidas de la igualdad propuesta:

41. Si: $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$; $a, b, c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a=b=c$

42. Si: $a^3+b^3+c^3 = 3abc$; $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a=b=c \vee a+b+c=0$

43. Si: $a^{2m}+b^{2n}+c^{2p}+\ldots+x^{2q} = 0$; $a, b, c, \ldots x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a=b=c=\ldots=x=0$

44. Si: $\sqrt[2m]{a}+\sqrt[2n]{b}+\sqrt[2p]{c}+\ldots+\sqrt[2q]{x} = 0$; $a, b, c, \ldots x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a=b=c=\ldots=x=0$

45. **Teorema**

Si: $a + b + c = 0$

Asumiendo: $a^k + b^k + c^k = S_k \ ; k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow S_{k+3} = abc\,S_k + \frac{1}{2} S_2\, S_{k+1}$$

46. ***Corolarios:***

Si: $a + b + c = 0 \ ; \ a, b, c, \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S_0 = 3 \quad \vee \quad a^0 + b^0 + c^0 = 3$

$\Rightarrow S_1 = 0 \quad \vee \quad a + b + c = 0$

$\Rightarrow S_2^2 = 2S_4 \quad \vee \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$

$\Rightarrow S_3 = 3\,abc \quad \vee \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$\Rightarrow 6S_5 = 5S_2S_3 \quad \vee \quad 6(a^5 + b^5 + c^5) = 5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$

$\Rightarrow 6S_7 = 7S_3S_4 \quad \vee \quad 6(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)$

$\Rightarrow 10S_7 = 7S_2S_5 \quad \vee \quad 10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$

$\Rightarrow 25S_7S_3 = 21S_5^2 \quad \vee \quad 25(a^7 + b^7 + c^7)(a^3 + b^3 + c^3) = 21(a^5 + b^5 + c^5)^2$

$\Rightarrow 50S_7^2 = 49\,S_4S_5^2 \quad \vee \quad 50(a^7 + b^7 + c^7)^2 = 49(a^4 + b^4 + c^4)(a^5 + b^5 + c^5)^2$

47. Si: $a + b + c = 0 \ ; \ a, b, c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2) = (b^2 + bc + c^2)^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

$\Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 = -5\,abc\,(ab + ac + bc)$

48. Si: $(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2 = n\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2\right)$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

49. Si: $x + y + z = 0$

$\Rightarrow (ax - by)^n + (ay - bz)^n + (az - bx)^n = (ay - bx)^n + (az - by)^n + (ax - bz)^n$

Cuando $n = 0, 1, 2, 4$

50. Consideremos "2n" números: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \ ; b_1, b_2, ..., b_n$

de modo que: $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_k = S_k$

$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = (a_1 - a_2)S_1 + (a_2 - a_3)S_2 + ... + (a_{n-1} - a_n)S_{n-1} + a_n S_n$

51. Si: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{n}{2} S \ / \ n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (S - a_1)^2 + (S - a_2)^2 + ... + (S - a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2$

52. Si: $\dfrac{a^m + b^m}{2} = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^m$; $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \; a = b \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$ pares

$\Rightarrow \; a = -b \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$ impares

53. Si: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$ / $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{I)} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \vee \\ a = -c \vee \\ b = -c \end{cases} \qquad \text{II)} \Rightarrow \left\{ \dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{c^n} = \dfrac{1}{a^n + b^n + c^n} \right.$$

$n \in \mathbb{N}$ impares

54. Si: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} = 6$ / $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\Rightarrow \; a = b = c$

55. Si: $a + b + c = 0$ / $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge \; a \to b \to c \to a$

$$\Rightarrow \left(\dfrac{b-c}{a} + \dfrac{c-a}{b} + \dfrac{a-b}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b}\right) = 9$$

56. Si:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3p \\ yz + zx + xy &= 3q \\ xyz &= r \qquad / \; x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 1°) $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -27p^3 + 36pq - 8r$

$\vee$ 2°) $(y+z-x)^3 + (z+x-y)^3 + (x+y-z)^3 = 27p^3 - 24r$

57. Si: $x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 2xyz(x+y+z)$ / $x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \; x = y = z$

58. Si: $a + b + c + d = 0$ / $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \; (bc - ad)(ac - bd)(ab - cd) = (abc + abd + acd + bcd)^2$

59. Si: $a + b + c = 0$ / $a, b, c \in \mathbb{R}$

$(b^2c + c^2a + a^2b - 3abc)(bc^2 + ca^2 + ab^2 - 3abc) = (ab + ac + bc)^3 + 27a^2b^2c^2$

60. Si: $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ / $a, b, c \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \; (a+b+c)^{2n+1} = a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$

5.12 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: ADICION Y MULTIPLICACION ALGEBRAICA

5.12.1 Ejercicios Explicativos

Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 10k^2 + 0,1$

$ab + ac + bc = 1 - 20k^2$

Calcular: $y = 40k^2 + \Sigma(11a + 3b)^2$

Recuerde:

La sumatoria sin límites se entiende como la suma de variaciones del modelo y estará de acuerdo al número de variables de la suma propuesta.

Solución:

(1°) De acuerdo a lo solicitado:

$$\sum(11a+3b)^2 = \underbrace{(11a+3b)^2+(11a+3c)^2+(11b+3c)^2+(11c+3a)^2+(11c+3b)^2}_{\text{Por tener 3 variables los datos consignados}}$$

(2°) Ordenando para el desarrollo.

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow (11a+3b)^2 &= 121a^2+9b^2+66ab \\
(11a+3c)^2 &= 121a^2+9c^2+66ac \\
(11b+3a)^2 &= 121b^2+9a^2+66ba \\
(11b+3c)^2 &= 121b^2+9a^2+66ab \\
(11c+3a)^2 &= 121c^2+9c^2+66bc \\
(11c+3b)^2 &= 121c^2+9b^2+66bc
\end{aligned}\right] \text{ sumando}$$

$$\Rightarrow \Sigma(11a+3b)^2 = 260(a^2+b^2+c^2) + 132(ab+ac+bc) \qquad (1)$$

(3°) En (1) reemplazamos los datos del enunciado:

$$\Rightarrow \Sigma(11a+3b)^2 = 260(10k^2+0.1) + 132(1-20k^2)$$

$$\Rightarrow \Sigma(11a+3b)^2 = 2600k^2 + 26 + 132 - 2640k^2$$

$$\Rightarrow \Sigma(11a+3b)^2 = 158 - 40k^2$$

$$\Rightarrow y = 40k^2 + \underbrace{158 - 40k^2}_{\Sigma(11a+3b)^2}$$

$$\therefore \boxed{y = 158}$$

5.12.2 *Ejercicio Explicativo*

Si: $(a+b)^2 = 2(a^2+b^2) + a - b$;

Calcular: $K = (a+b+3)^3 + (-a-b+3)^3 + (a-b-3)^3 - 72ab$; $a, b, \in \mathbb{R}$; $a \neq b$

Recuerde.-

Las equivalencias condicionales requieren de un estudio para deducir las condiciones que la verifican.

Ejemplo: Si: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \Rightarrow a = b = c$

***Solución*:**

(1°) Hacemos un análisis de la condición:

$\Rightarrow$ Efectuando lo indicando:

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + 2b^2 + a - b$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab + a - b = 0$; luego de transformar

$\Rightarrow (a - b)^2 + a - b = 0$; observemos el factor $(a - b)$

$\Rightarrow (a - b)[a - b + 1] = 0$;

$\Rightarrow \underbrace{a - b = 0}$ ó $\underbrace{a - b + 1 = 0}$; $a \neq b$ por condición.

(2°) $\Rightarrow$ Concluimos que la última condición es la aceptable, para el proceso de simplificación.

$\Rightarrow$ La expresión "k" está asociada con la equivalencia notable.

$$(-x+y+z)^3 + (x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 + 24xyz = (x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow k = (\underset{x}{\underset{\uparrow}{a}} + \underset{-y}{\underset{\uparrow}{b}} + \underset{z}{\underset{\uparrow}{3}})^3 + (\underset{-x}{\underset{\uparrow}{-a}} \underset{y}{\underset{\uparrow}{-b}} + \underset{z}{\underset{\uparrow}{3}})^3 + (\underset{x}{\underset{\uparrow}{a}} \underset{y}{\underset{\uparrow}{-b}} \underset{-z}{\underset{\uparrow}{-3}})^3 + 24(\underset{x}{\underset{\uparrow}{a}})(\underset{y}{\underset{\uparrow}{b}})(\underset{z}{\underset{\uparrow}{-3}})$$

$\Rightarrow x = a ; y = -b ; z = 3$

$\Rightarrow k = (a - b + 3)^3$..................... (1)

$\Rightarrow$ Como: $a - b + 1 = 0 ; a - b = -1$

$\Rightarrow k = (-1 + 3)^3$

$\therefore \boxed{k = 8}$

5.12.3 Ejercicio Explicativo

Desarrollar cada una de las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=3}^{10} k^2$ b) $\sum_{k=1}^{9} 1$ c) $\sum_{i=1}^{8} \left(\dfrac{3^i - 1}{10i} \right)$

d) $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k}$ e) $\sum_{k=3}^{8} \left(k^5 + k^3 + k^2 \right)$ f) $\sum_{k=1}^{m} \left(3k^2 - 12k - 31 \right)$

Recuerde:

La sumatoria con límites:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots . + a_n$$

Los subíndices varian ordenadamente desde 1 hasta "n"

Solución:

a) $$\sum_{k=3}^{10} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$$

b) $$\sum_{k=1}^{9} 1 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 9$$

c) $$\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{3^i-1}{10i}\right) = \left(\frac{3^1-1}{10}\right)+\left(\frac{3^2-1}{20}\right)+\left(\frac{3^3-1}{30}\right)+\left(\frac{3^4-1}{40}\right)+\left(\frac{3^5-1}{50}\right)+\left(\frac{3^6-1}{60}\right)$$

d) $$\sum \binom{5}{k}x^{5-k} = \binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4+\binom{5}{2}x^3+\binom{5}{3}x^2+\binom{5}{4}x^1+\binom{5}{5}x^0$$

e) $$\sum_{k=1}^{5}(k^5+k^3+k^2) = (1^5+1^3+1^2)+(2^5+2^3+2^2)+(3^5+3^3+3^2)+(4^5+4^3+4^2)+(5^5+5^3+5^2)$$

f) $$\sum_{k=1}^{m}\left(3k^2-12k-31\right) = \sum_{k=1}^{m}(3k^2)+\sum_{k=1}^{m}(-12k)+\sum_{k=1}^{m}(-31)$$

$$= 3\sum_{k=1}^{m}k^2-12\sum_{k=1}^{m}k-31\sum_{k=1}^{m}1 = \boxed{\frac{m}{2}\left[2m^2-9m-73\right]}$$

5.12.4 Ejercicio Explicativo

Calcular: $$E = \left(x^m+\sqrt[m]{x}^{\,-1}\right)\left(\sqrt[m]{x}+x^{-m}\right)$$

Sabiendo que: $$m+m^{-1} = 0$$

$$x \in \mathbb{R}-\{0\}\,;\, m \in \mathbb{C}-\{0\}$$

Recuerde:

i) La suma de los recíprocos de un número real "x" verifica:

$$x+\frac{1}{x} \geq 2\ ;\ x \in \mathbb{R}^{+}-\{0\}$$

Solución:

(1°) Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$\Rightarrow E = \left(x^m+\sqrt[m]{x}^{\,-1}\right)\sqrt[m]{x}+\left(x^m+\sqrt[m]{x}^{\,-1}\right)x^{-m}$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{x^{m+\frac{1}{m}}+\sqrt[m]{x}^{\,0}}+\underbrace{x^{m-m}+x^{-\frac{1}{m}-m}}$$

$$\Rightarrow E = x^{m+\frac{1}{m}} + x^0 + x^0 + x^{-\left(m+\frac{1}{m}\right)}$$

(2°) $\Rightarrow$ Aplicando la condición: $m + \dfrac{1}{m} = 0$

$$\Rightarrow E = x^0 + x^0 + x^0 + x^0 \quad \Rightarrow E = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\therefore \boxed{E = 4}$$

5.12.5 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $y = \sum\limits_{k=1}^{m}\left(k+1\right)\left(2k+5\right)$

Recuerde:

La sumatoria con límites viene expresado por:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 .... + a_n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n}\left(a_i + b_i + c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Solución:

(1°) Al ordenar y utilizar la regla distributiva:

$$\Rightarrow y = \sum_{k=1}^{m}\left(2k^2 + 7k + 5\right) = \sum_{k=1}^{m} 2k^2 + \sum_{k=1}^{m} 7k + \sum_{k=1}^{m} 5$$

$$\Rightarrow y = 2\sum_{k=1}^{m} k^2 + 7\sum_{k=1}^{m} k + 5\sum_{k=1}^{m} 1 = 2\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + 7\frac{m(m+1)}{2} + 5m$$

(2°) Extrayendo factor "m"

$$\Rightarrow y = m\left[\frac{2(m+1)(2m+1)}{6} + 7\frac{(m+1)}{2} + 5\right]$$

Dando común denominador

$$y = m\left[\frac{2(m+1)(2m+1) + 21(m+1) + 30}{6}\right]$$

$$y = \frac{m}{6}\left[4m^2 + 6m + 2 + 21m + 21 + 30\right] = \frac{m}{6}\left[4m^2 + 27m + 53\right]$$

$$\therefore \boxed{y = \sum_{k=1}^{m}(k+1)(2k+5) = \frac{m}{6}\left(4m^2 + 27m + 53\right)}$$

5.12.6 **Ejercicio Explicativo**

Dadas las igualdades siguientes:

$x^{y+1} - y^{x+1} = 10$ .... (1)

$y^{2x} + x^{2y} = 11$ .... (2)

$xy^x + yx^y = \sqrt{43}$ .... (3)

Calcular: $x^2 + y^2$

$x, y \in \mathbb{R}^+$

Recuerde:

El axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma

$$a(b+c) = ab + ac \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) Hacemos que lo solicitado sea "E".

$\Rightarrow E = x^2 + y^2$ .... (4)

$\Rightarrow$ De (2) $\times$ (4): $11E = (x^2 + y^2)(y^{2x} + x^{2y})$

(2°) De acuerdo a la regla distributiva del producto

$\Rightarrow 11E = x^{2y+2} + y^{2x+2} + x^2y^{2x} + y^2x^{2y}$ .... (5)

$\Rightarrow$ De $(1)^2$: $10^2 = (x^{y+1} - y^{x+1})^2$

$\Rightarrow 100 = x^{2y+2} + y^{2x+2} - 2x^{y+1}y^{x+1}$ .... (6)

(3°) De (5) - (6): $11E - 100 = \underbrace{x^2y^{2x} + y^{2x}x^{2y} + 2x^{y+1}y^{x+1}}_{\text{Trinomio Cuadrado Perfecto}}$

$\Rightarrow 11E - 100 = (xy^x + y^xy^x)^2$ .... (7)

$\Rightarrow$ De (3) en (7): $11E - 100 = \left(\sqrt{43}\right)^2$

$\Rightarrow 11E - 100 = 43 ; \ 11E = 143$

$\Rightarrow E = \dfrac{143}{11} ; \ E = x^2 + y^2 = 13$

$\therefore \boxed{x^2 + y^2 = 13}$

5.12.7 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar: $$y = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2}, \ n \in \mathbb{N}$$

Recuerde:

i) Sea: $a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ es la notación sumatoria.

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Suma de "n" cuadrados naturales iniciales

iii) $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Suma de "n" de #s naturales iniciales

iv) $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n$ Suma de "n" elementos neutros multiplicativos

Solución:

(1°) La expresión y, puede escribirse como:

$$\Rightarrow y = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} \dots\dots\dots (1)$$

$\Rightarrow$ En el numerador de (1):

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

(2°) De acuerdo a las equivalencias correspondientes.

$$\Rightarrow = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$\Rightarrow = \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3}$$

$$\Rightarrow = \frac{n}{3}\left[2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\right]$$

$$\Rightarrow = \frac{n}{3}\left[4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3\right]$$

(3°) Se tendrá:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{n}{3}\left[4n^2-1\right] \dots\dots\dots (2)$$

$\Rightarrow$ De (2) en (1):

$$\Rightarrow y = \frac{\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)}{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{2(2n-1)}{n+1}}$$

5.12.8 **Ejercicio Explicativo**

Calcular la suma: $S = 1 + 2(3) + 3(5) + 4(7) \ldots + n(2n-1)$

Recuerde:

i) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Suma de n cuadrados iniciales

ii) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ Suma de n primeros naturales iniciales.

Solución:

(1°) La suma planteada se puede escribir como:

$$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{n} k(2k-1) \qquad \Rightarrow S = \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - k)$$

$$\Rightarrow S = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$

(2°) De acuerdo a las equivalencias correspondientes

$$\Rightarrow S = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \qquad \Rightarrow S = \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{6}\left[2(2n+1) - 3\right]$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$$

5.12.9 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el grado de la expresión siguiente:

$$E = (x^3 y^9)^{\sum_{k=1}^{7} k^2} (y^{10} z^2)^{\sum_{k=8}^{39} k^2} (x^9 z^3)^{\sum_{k=40}^{n} k^2}$$

Recuerde:

(1) $\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$ Propiedad asociativa

(2) $\sum_{i=1}^{m} i^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ Suma de n cuadrados naturales

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición de grado.

$$\Rightarrow G = 12\sum_{k=1}^{7} k^2 + 12\sum_{k=8}^{39} k^2 + 12\sum_{k=40}^{n} k^2$$

$$\Rightarrow G = 12\left[\sum_{k=1}^{7} k^2 + \sum_{k=8}^{39} k^2 + \sum_{k=40}^{n} k^2\right]$$

(2°) Simplificando mediante asociación:

$$\Rightarrow G = 12\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] \qquad \Rightarrow G = 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \boxed{G = 2n(n+1)(2n+1)}$$

5.12.10 Ejercicio Explicativo

Demostrar la igualdad:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{1\};\ n \in \mathbb{N}.$$

Recuerde:

La serie geométrica.

$$1 + x + x^2 ... + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Solución:

(1°) Denominando "S" al polinomio del primer miembro:

$\Rightarrow$ $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 ... + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$ .... (1)

$\Rightarrow$ Multiplicando por $-x$, obtendremos:

$\Rightarrow$ $-xS = -x - 2x^2 - 3x^3 ... (n-2)x^{n-2} - (n-1)^{n-1} - nx^n$ .... (2)

(2°) Sumando (1) y (2):

$$\Rightarrow (1-x)S = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 ... + x^{n-1}}_{\text{P. Geométrica}} - nx^n$$

(3°) Reconociendo el polinomio geométrico

$$\Rightarrow (1-x)S = \frac{x^n - 1}{x - 1} - nx^n = \frac{x^n - 1 - n(x-1)x^n}{(x-1)};$$ **aislando S**

$$\Rightarrow S = \frac{x^n - 1 - nx^{n+1} + nx^n}{(x-1)(1-x)} \; ; \text{ anotando que: } (x-1)(1-x) = -(x-1)^2$$

$$\Rightarrow S = \frac{(n+1)x^n - 1 - nx^{n+1}}{-(x-1)^2} \; ; \text{ al trasladar el signo (-) del denominador.}$$

$$\therefore \boxed{S = 1 + 2x + 3x^2 \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}}$$

Comentario:

Esta serie se expresa como una serie infinita.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots \infty = \frac{1}{(x-1)^2} \; ; \text{ Si } 0 \leq |x| < 1$$

5.12.11 **Ejercicio Explicativo:**

Si: $A = x^6 + x^3 + 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$B = x^{18} + x^9 + 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$C = x^{54} + x^{27} + 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$D = x^2 + x + 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

Calcular: $E = ABCD(x-1) ; \quad x \in \mathbb{R}$

Recuerde:

El producto notable:

$$(x^m - 1)(x^{2m} + x^m + 1) = (x^m)^3 - 1 = x^{3m} - 1$$

Solución:

(1°) De acuerdo al producto solicitado:

$$E = A \times B \times C \times D (x-1)$$

$$\Rightarrow E = (x^6 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)(x^2 + x + 1)(x-1)$$

(2°) Conmutando la multiplicación:

$$\Rightarrow E = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{x^3-1}(x^6+x^3+1)}_{x^9-1}(x^{18}+x^9+1)}_{x^{27}-1}(x^{54}+x^{27}+1)}_{x^{81}-1}$$

$$\therefore \boxed{E = x^{61} - 1}$$

5.12.12 **Ejercicio Explicativo**

Efectuar la multiplicación siguiente:

$$\left(1+a\sqrt{2}+a^2\right)\left(1-a\sqrt{2}+a^2\right)\left(1-a^4+a^8\right)\left(1-a^{12}+a^{24}\right)-1$$

$$a \in \mathbb{R}.$$

Recuerde:

Recuerde el producto notable:

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$$

$$\vee \quad \left(m+\sqrt{m}\,y+y^2\right)\left(m-\sqrt{m}\,y+y^2\right) = m^2+my^2+y^4$$

Solución:

(1°) Asociando los factores apropiados:

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+a\sqrt{2}+a^2\right)\left(1-a\sqrt{2}+a^2\right)}_{\text{diferencia de cuadrados}}\left(1-a^4+a^8\right)\left(1-a^{12}+a^{24}\right)-1$$

$$\left(1+a^2\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 1+2a^2+a^4-2a^2 = 1+a^4$$

(2°) Asociando otro par de factores:

$$\Rightarrow \underbrace{(1+a^4)(1-a^4+a^8)}_{\text{suma de cubos}}(1-a^{12}+a^{24})-1$$

$$(1+a^{12})$$

(3°) Asociando finalmente:

$$\Rightarrow \underbrace{(1+a^{12})(1-a^{12}+a^{24})}_{\text{suma de cubos}}-1$$

$$1+a^{36}$$

$$\Rightarrow 1+a^{36}-1$$

$$\therefore \boxed{a^{36}}$$

5.12.13 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar: $$E = (1-a)\prod_{k=0}^{m}\left(1+a^{2^k}\right)+a^{2^{m+1}}$$

Recuerde:

La productoria viene definido por la regla.

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \, . \, a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \ldots a_n$$

Solución:

(1°) Desarrollando la productoria $\prod_{k=0}^{m}\left(1+a^{2^k}\right)$

$$=\left(1+a^{2^0}\right)\left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\left(1+a^{2^4}\right)\ldots\left(1+a^{2^m}\right)$$

(2°) Podemos tener $(1-a)\prod_{k=0}^{m}\left(1+a^{2^k}\right)$

$$=(1-a)\left(1+a^1\right)\left(1+a^2\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\left(1+a^{2^4}\right)\ldots\left(1+a^{2^m}\right)$$

(3°) La presencia de $(1-a)$ permite obtener "m + 1" parejas de diferencias de cuadrados.

$$=(1-a)(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^{2^2}\right)\left(1+a^{2^3}\right)\left(1+a^{2^4}\right)\ldots\left(1+a^{2^m}\right)$$

$1-a^2$

$1-a^{2^2}$

$1-a^{2^3}$

$1-a^{2^4}$

$1-a^{2^5}$ ....

$1-a^{2^{m+1}}$

(4°) La expresión a calcular será:

$$E=\underbrace{(1-a)\prod_{k=0}^{m}\left(1+a^{2^k}\right)}_{m+1}+a^{2^{m+1}}=1-\underbrace{a^{2^{m+1}}+a^{2^{m+1}}}_{\text{opuestos}}$$

$\therefore\ \boxed{E=1}$

5.12.14 Ejercicio Explicativo

Sean: $P(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$; $F(x)=\frac{1}{2}\left(a^x-a^{-x}\right)$

Simplificar: $K=\dfrac{P(x+y)}{P(x)F(y)+P(y)F(x)}$

Solución:

(1°) De acuerdo a los datos:

$$P(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(a^{x} - a^{-x}) \ldots\ldots (2)$$

$$\Rightarrow P(y) = \frac{1}{2}(a^{y} + a^{-y}) \ldots\ldots (3)$$

$$\Rightarrow F(y) = \frac{1}{2}(a^{y} + a^{-y}) \ldots\ldots (4)$$

$$\Rightarrow P(x+y) = \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) \ldots\ldots (5)$$

$$\Rightarrow P(x)F(y) = \frac{1}{4}(a^{x+y} - a^{-x-y} - a^{x-y} + a^{-x+y}) \ldots\ldots (6)$$

$$\Rightarrow P(y)F(x) = \frac{1}{4}(a^{x+y} - a^{-x-y} + a^{x-y} - a^{-x+y}) \ldots\ldots (7)$$

(2°) Al sumar (6) y (7)

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{4}(2a^{x+y} - 2a^{-x-y})$$

$\Rightarrow$ La expresión k será:

$$K = \frac{\frac{1}{2}\left(a^{x+y} - a^{-x-y}\right)}{\frac{1}{2}\left(a^{x+y} - a^{-x-y}\right)}$$

$$\therefore \boxed{k = 1}$$

5.12.15 Ejercicio Explicativo

Si: $$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 2\sqrt{10}$$

Calcular: $$K = \left(\frac{1}{x-y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y-z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z-x}\right)^2 + 30$$

Recuerde:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, cuadrado de un trinomio.

Solución:

(1°) Elevando al cuadrado la condición:

$$\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}\right)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} + \frac{2}{(x-y)(y-z)} + \frac{2}{(x-y)(z-x)} + \frac{2}{(y-z)(z-x)} = 40$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+2\left[\frac{\overbrace{z-x+y-z+x-y}^{0}}{(x-y)(y-z)(z-x)}\right]=40$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}=40 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$\Rightarrow$ En la expresión "k":

$\Rightarrow k = 40 + 30$

$\therefore \boxed{k = 70}$

5.12.16 **Ejercicio Explicativo**

Sea la siguiente regla:

$$F(m) = \begin{cases} a^{m-1}+b^{m-1} & \text{si } m \in \mathbb{N} \text{ impares} \\ a^{-m}+b^{-m} & \text{si } m \in \mathbb{N} \text{ pares} \\ ab & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Calcular: $$E = \left(\frac{F(5)}{F(4)}+F(0)\right)\left(\frac{F(7)}{F(6)}-\frac{F(4)}{F(3)}+1\right)$$

Recuerde:

Son notables las siguientes multiplicaciónes:

$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$ ó

$(x^m+y^m)(^{2m}-x^m y^m+y^{2m}) = x^{3m}+y^{3m}$

PRODUCTOS NOTABLES

Solución:

(1°) $F(5) = a^4+b^4$ y $F(4) = a^{-4}+b^{-4}$

$$\Rightarrow \frac{F(5)}{F(4)}=\frac{a^4+b^4}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}}==\frac{(a^4+b^4)}{a^4+b^4}=a^4b^4 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

(2°) $F(7) = a^6+b^6$ y $F(6) = a^{-6}+b^{-6}$

$$\Rightarrow \frac{F(7)}{F(6)}=\frac{a^6+b^6}{a^{-6}+b^{-6}}=\frac{a^6+b^6}{\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}}=\frac{a^6b^6(a^6+b^6)}{a^6+b^6}=a^6b^6 \;\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

(3°) $F(4) = a^3 + b^3$ y $F(3) = a^{-3} + b^{-3}$

$$\Rightarrow \frac{F(4)}{F(3)} = \frac{a^3 + b^3}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} = \frac{a^3b^3\left(a^3 + b^3\right)}{a^3 + b^3} = a^3b^3 \text{ .... (III)}$$

(4°) Sustituyendo (I), (II) y (III) sobre E:

$\Rightarrow E = (a^4b^4 + ab)(a^6b^6 \; a^3b^3 + 1)$

$\Rightarrow E = ab(a^3b^3 + 1)(a^6b^6 - a^3b^3 + 1)$

$\therefore \boxed{E = ab(a^9b^9 + 1)}$

5.12.17 Ejercicio Explicativo

Si se verifica que:

$a^2 = (b + 1)(a - b)$ .... (M)
$c^2 = (d + 1)(c - d)$ .... (N)

Calcular: $K = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}$

Recuerde:

El axioma de la distribución de la multiplicación respecto a la suma:

$$x(b + c) = xb + xc \quad \forall\, x, b, c \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) De la condición (M)

$a^2 = (b + 1)(a - b)$ y la ley de distribución

$\Rightarrow a^2 = ab - b^2 + a - b$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a - b$,

$\Rightarrow \boxed{a^3 + b^3 = a^2 - b^2 \, ;}$ luego de multiplicar por **(a + b)**

(2°) De la condición (N)

$\Rightarrow c^2 = cd - d^2 + c - d$

$\Rightarrow c^2 - cd + d^2 = c - d$

$\Rightarrow \boxed{c^3 + d^3 = c^2 - d^2,}$ luego de multiplicar por (c + d)

(3°) Sumando las deducciones obtenidas:

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ .... (I)

(4°) Sustituyendo (I) sobre la expresión (E)

$$\Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{b^2 + d^2 - a^2 - c^2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{-\left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)}$$

$\therefore \boxed{E = -1}$

5.12.18 **Ejercicio Explicativo**

Si: $a^4 + b^4 + c^4 = 400$; $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 40$

Calcular: $k = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$

Recuerde:

La siguiente equivalencia es notable:

$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z) \equiv -x^4 - y^4 - z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$

Solución:

(1°) En base a la equivalencia:

$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2c^2c^2 - 2b^2c^2 = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a-b-c)$

$\Rightarrow$ Sustituyendo las condiciones dadas

$\Rightarrow 400 - 2(40) = -(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$

(2°) Al identificar: $400 - 80 = -E$

$\therefore \boxed{E = -320}$

5.12.19 **Ejercicio Explicativo**

Si: $A = \left(\frac{x+y}{xy}\right)(z^2 - x^2 - y^2)$

$B = \left(\frac{y+z}{yz}\right)(x^2 - y^2 - z^2)$

$C = \left(\frac{x+z}{xz}\right)(y^2 - x^2 - z^2)$

$x + y + z = 33$

Calcular: $E = A + B + C$

Recuerde:

El axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma:

$m(x+y) = mx + my$

Solución:

(1°) Efectuando de acuerdo al axioma de distribución:

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(z^2 - x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow A = \frac{z^2}{x} - x - \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - \frac{x^2}{y} - y \quad \text{...(I)}$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x^2 - y^2 - z^2)$$

$$\Rightarrow B = \frac{x^2}{y} - y - \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} - z \quad \text{...(II)}$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(y^2 - x^2 - z^2)$$

$$C = \frac{y^2}{x} - x - \frac{z^2}{x} + \frac{y^2}{z} - \frac{x^2}{z} - z \quad \text{...(III)}$$

(2°) De sumar (I) + (II) + (III)

$$\Rightarrow A + B + C = -2x - 2y - 2z$$

$$= -2(x + y + z) \quad \text{...(IV)}$$

(3°) Sustituyendo la última condición sobre IV

$$\Rightarrow A + B + C = -2(33)$$

$$\therefore \boxed{A + B + C = -66}$$

5.12.20 Ejercicio Explicativo

Si: $$\frac{a^2 - bc}{a} + \frac{b^2 - ac}{b} + \frac{c^2 - ab}{c} = 0$$

Calcular: $$K = \frac{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{a^6 + b^6 + c^6}$$

Recuerde:

La equivalencia condicional

Si: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Rightarrow x = y = z$

Ejercicio:

Si: $a^6 + b^{10} + c^{14} = a^3b^5 + a^3c^7 + b^5c^7 \Rightarrow a^3 = b^5 = c^7$

Solución:

(1°) A partir de la condición; $a \neq 0\ ,\ b \neq 0\ ,\ c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a}-\frac{bc}{a}+\frac{b^2}{b}-\frac{ac}{b}+\frac{c^2}{c}-\frac{ab}{c}=0$$

$$\Rightarrow a+b+c = \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$$

$$\Rightarrow a^2bc + ab^2c + abc^2 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$$

$$\Rightarrow (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 = (ab)(ac) + (ab)(bc) + (ac)(bc)$$

(2°) De acuerdo a la condición obtenida

$$\Rightarrow ab = ac\ ,\ ab = bc\ ,\ ac = bc$$

$$\Rightarrow b = c \quad ,\ a = c \quad ,\ a = b \qquad \therefore \boxed{a = b = c}$$

(3°) La expresión "k" resulta

$$\Rightarrow k = \frac{\left(a^2+a^2\right)\left(a^2+a^2\right)\left(a^2+a^2+a^2\right)}{a^6+a^6+a^6}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\left(2a^2\right)\left(2a^2\right)\left(3a^2\right)}{3a^6} = \frac{12a^6}{3a^6}$$

$$\therefore \boxed{k = 4}$$

5.12.21 Ejercicio Explicativo

Si: $$\frac{a^5+32b^5}{2} = \left(\frac{a+2b}{2}\right)^5$$

y $$\frac{8b^3+1331c^3}{2} = \left(\frac{2b+11c}{2}\right)^3$$

$ab < 0$ y $bc < 0$

Calcular: $$k = \frac{(a+c)\left(b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3\right)}{\left(a^2+b^2\right)^3}$$

Recuerde:

Si: $$\frac{x^m+y^m}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

$\Rightarrow x = y$ si $m \in$ IN impar

$\Rightarrow x = y$ si $m \in$ IN pares

Solución:

(1°) De las condiciones:

$$\frac{a^5+(2b)^5}{2}=\left(\frac{a+2b}{2}\right)^5 \qquad \Rightarrow a=\pm 2b \quad ; \; ab<0$$

$$\frac{(2b)^3+(11c)^3}{2}=\left(\frac{2b+11c}{2}\right)^3 \Rightarrow 2b=\pm 11c \; ; \; bc<0$$

$\Rightarrow a = -2b = 11c$ .... (I)

(2°) Sustituyendo sobre la expresión "k"

$$c=\frac{1}{11}a \; ; \; b=-\frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow k=\frac{\left(a+\frac{1}{11}a\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{121}a^2\right)\left(a^3-\frac{1}{8}a^3\right)}{\left(a^2+\frac{1}{4}a^2\right)^3}$$

Ejecutando las sentencias

$$\Rightarrow k=\frac{a^6\left(\frac{12}{11}\right)\left(\frac{125}{484}\right)\left(\frac{7}{8}\right)}{a^6\,\frac{125}{64}}=\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{12}}\times 125\times \overset{1}{\cancel{7}}\times \overset{8}{\cancel{64}}}{11\times \underset{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{121}}}{\cancel{484}}\times 8\times 125}$$

$$\therefore \boxed{k=\frac{168}{1331}}$$

5.12.22 **Ejercicio Explicativo**

Si: $$t=\frac{\left(\sqrt{51}+1\right)^{1995}-2^{1995}}{\left(\sqrt{51}+1\right)^{1995}+2^{1995}}$$

Calcular: $$E=\sqrt[1995]{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2}-\sqrt[1995]{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}$$

Recuerde:

Propiedad de las razones iguales

Si: $$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q} \quad ; \; n\neq 0,\; q\neq 0$$

Solución:

(1°) A partir de la condición:

$$\Rightarrow \frac{t+1}{t-1} = \frac{\left(\sqrt{51}+1\right)^{1995} - 2^{1995} + \left(\sqrt{51}+1\right)^{1995} + 2^{1995}}{\left(\sqrt{51}+1\right)^{1995} - 2^{1995} - \left(\sqrt{51}+1\right)^{1995} - 2^{1995}}$$

$$\Rightarrow \frac{t+1}{t-1} = \frac{2\left(\sqrt{51}+1\right)^{1995}}{-2\left(2^{1995}\right)} \Rightarrow \frac{t+1}{1-t} = \left(\frac{\sqrt{51}+1}{2}\right)^{1995}$$

$$\Rightarrow \sqrt[1995]{\frac{1+t}{1-t}} = \frac{\sqrt{51}+1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

(2°) Sustituyendo (I) sobre E

$$\Rightarrow E = \left(\frac{\sqrt{51}+1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{51}+1}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{51+2\sqrt{51}+1-2\sqrt{51}-1}{4} = \frac{50}{4}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{25}{2}}$$

5.12.23 **Ejercicio Explicativo**

Si: $a + b + c = 2p$

Calcular: $k = \dfrac{a+b+c}{(a-p)^3 + (b-p)^3 + (c-p)^3 - 3abc}$

Recuerde:

Las equivalencias notables siguientes:

(i) $(x+y+z)^3 + (x-y-z)^3 + (-x+y-z)^3 + (-x-y+z)^3 = 24xyz$

(ii) $n^3(a+x+y)^3 = (na+nx+ny)^3$ ó

$m(b+c+d)^3 = \left(\sqrt[3]{m}\,b + \sqrt[3]{m}\,c + \sqrt[3]{m}\,d\right)^3$

Solución:

(1°) Realizamos un estudio al denominador "d", multiplicando por 8

$\Rightarrow d = (a-p)^3 + (b-p)^3 + (c-p)^3 - 3abc$

$\Rightarrow 8d = (2a-2p)^3 + (2b-2p)^3 + (2c-2p)^3 - 24abc$

(2°) Sustituyendo la condición: $a + b + c = 2p$

$\Rightarrow 8d = (2a - a - b - c)^3 + (2b - a - b - c)^3 + (2c - a - b - c)^3 - 24abc$

$\Rightarrow 8d = (a - b - c)^3 + (-a + b - c)^3 + (-a - b + c)^3 - 24abc$

(3°) El 2° miembro de la igualdad es notable

$\Rightarrow 8d = -(a + b + c)^3 = -(2p)^3 = -8p^3$

$\Rightarrow d = -p^3$ es el denominador .... (I)

(4°) Sustituyendo (I) y la condición sobre k

$$\Rightarrow k = \frac{2p}{-p^3}$$

$$\therefore \boxed{k = -\frac{2}{p^2}}$$

5.12.24 Ejercicio Explicativo

Si se verifica que:

$$a + b - c = 0 \;\; ; \;\; abc = -2 \;\; ; \;\; a^6 + b^6 + c^6 = 20$$

Calcular: $$V = \frac{a^3b^3 - a^3c^3 - b^3c^3}{a^3 + b^3 - c^3}$$

Recuerde:

Las equivalencias condicionales siguientes:

i) Si $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

ii) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

Solución:

(1°) De la primera condición:

$a + b - c = 0 \;\; a^3 + b^3 - c^3 = -3abc$ .... (I)

(2°) Obtenemos el cuadrado de la última igualdad:

$(a^3 + b^3 - c^3)^2 = (-3abc)^2$

$\Rightarrow a^6 + b^6 + c^6 + 2(a^3b^3 - b^3c^3 - a^3c^3) = 9(abc)^2$ .... (II)

(3°) Sustituyendo las condiciones adicionales proporcionadas

$$\Rightarrow \underbrace{a^6 + b^6 + c^6}_{20} + 2(a^3b^3 - b^3c^3 - a^3c^3) = 9(\underbrace{abc}_{-2})^2$$

$\Rightarrow 2(a^3b^3 - b^3c^3 - a^3c^3) = 36 - 20$

$\Rightarrow a^3b^3 - b^3c^3 - a^3c^3 = 8$ .... (III)

(4°) Sustituyendo (III) y (I) sobre "V"

$$\Rightarrow V = \frac{8}{-3abc} = \frac{8}{-3(-2)}$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{4}{3}}$$

5.12.25 **Ejemplo Explicativo**

Si: $x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 = 30$

$xy + xz + yz = 3$

$xyz = 4$

Calcular: $k = xyz^{-1} + xzy^{-1} + yzx^{-1}$

Recuerde:

La equivalencia notable

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-b) = a^3+b^3+c^3-3abc$

Solución:

(1°) La expresión por calcularse k:

$$\Rightarrow k = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}{xyz} \text{ .... (I)}$$

(2°) Los datos consignados, están relacionados por la equivalencia:

$$\Rightarrow \underbrace{(xy+xz+yz)}_{3}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2) = \underbrace{\underbrace{x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3}_{30} - \underbrace{3x^2y^2z^2}_{3\times 4^2}}_{30-3(4)^2}$$

$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - (x^2yz + xy^2z + xyz^2) = -6 \text{ .... (II)}$$

(3°) De la segunda condición al cuadrado:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 9 \text{ .... (III)}$$

(4°) Del sistema (II) y (III)

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = 5$$

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + y^2z^2 = -1 \text{ .... (IV)}$$

(5°) Sustituyendo (IV) sobre (I) y la equivalencia respectiva

$$\Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{4}}$$

5.13 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: LA ADICION Y MULTIPLICACION ALGEBRAICA

(1) Si:

$$ab + ac + bc = 19$$
$$a + b + c = 7$$
$$abc = 10$$

Calcular:

$$k = (a+b+c)^5 + (a-b-c)^5 + (-a-b+c)^5 + (-a+b-c)^5$$

Rpta: 8 800

(2) Si se verifica que:

$$27a^2b^{-1}c^{-1} + b^2a^{-1}c^{-1} + c^2a^{-1}b^{-1} = 9$$

Calcular: $$E = \frac{(3a+b)(3a+c)(b+c)}{abc}$$

Rpta: 24 ó - 3

(3) Si: $$25a^2 + 25b^2 + 49c^2 = 25ab + 35ac + 35bc$$

Calcular: $$G = \frac{a^2+b^2+49c^2}{ab+ac+bc}$$

Rpta: $\frac{189}{17}$

(4) Si:

$$a^4 + b^4 + c^4 = 46$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 36$$

Calcular:

$$H = (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)$$

Rpta: 26

(5) Simplificar: $$B = \sqrt[6x^2+12]{\frac{\left(\left(2^{x+1}\right)^{x+2}\right)^{x+3}\left(\left(2^{x+2}\right)^{x+3}\right)^{x+4}}{\left(\left(2^{x-1}\right)^{x-2}\right)^{x-3}\left(\left(2^{x-2}\right)^{x-3}\right)^{x-4}}}$$

Rpta: 32

(6) Simplificar:
$$\sqrt[4x^2+4x]{\frac{\left(3^{x^2+x+1}\right)^{x^2+x+2}\left(3^{x^2+x+2}\right)^{x^2+x+3}}{\left(3^{x^2+x-1}\right)^{x^2+x-2}\left(3^{x^2+x-2}\right)^{x^2+x-3}}}$$

Rpta: 81

(7) Si:
$$k_m = \sqrt{x^{2!}\sqrt[3]{x^{3!}\sqrt[4]{x^{4!}\ldots\sqrt[m]{x^{m!}}}}}$$

Calcular:
$$E = \left(\prod_{k=2}^{m} k_m\right)^2$$

Rpta: $x^{m(m-1)}$

(8) Si:
$$a^4 + b^4 = 14 \;;\; a + b = \sqrt{6}$$

Calcular:
$$k = a^2 + b^2 + (a+b)^2$$

Rpta: $k = 10$

(9) Si:
$$a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) = 17$$
$$abc = 11$$

Calcular:
$$G = (a+b)(a+c)(b+c)$$

Rpta: 39

(10) Si:
$$(x+y)(x+z)(y+z) = 33$$
$$x+y+z = 10$$

Calcular:
$$E = x^3 + y^3 + z^3$$

Rpta: $E = 901$

(11) Si:
$$m = 2a + 2b + 2c$$

Calcular:
$$E = \frac{m^2 - (m-a)^2 - (m-b)^2 - (m-c)^2}{m^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Rpta: $E = -1$

(12) Simplificar:
$$y = \left(\frac{a^2\sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} + \mathrm{Op}\sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}}\right)^4$$

Rpta: a^2x

(13) Simplificar:

$$E = \frac{(a+b+c)^4 + a^4 + b^4 + c^4 - (a+b)^4 - (a+c)^4 - (b+c)^4}{abc(a+b+c)}$$

Rpta: 12

(14) Si: $x + (xz)^{1/2} = y + (yz)^{1/2}$; $x > y > 0$; $x \neq y$

Calcular: $$H = \left[x(yz)^{-\frac{1}{2}} + y(xz)^{-\frac{1}{2}} + z(xy)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-3}$$

Rpta: $H = \dfrac{1}{27}$

(15) Simplificar:

$$y = (n+3)^3 - 3(n+2)^3 + 3(n+1)^3 - n^3$$

Rpta: $y = 6$

(16) Simplificar:

$$k = (n+4)^4 - 4(n+3)^4 + 6(n+2)^4 - 4(n+1)^4 + n^4$$

Rpta: $k = 24$

(17) Simplificar:

$$E = \left(\frac{m+1}{m-1} + 3\right)^3 - 3\left(\frac{m+1}{m-1} + 2\right)^3 + 3\left(\frac{m+1}{m-1} + 1\right)^3 - \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^3 \; ; \; m \neq 1$$

Rpta: $E = -6$

(18) Sabiendo que: $a + b + c + d = 200$

Calcular: $$y = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{(100-a)^2 + (100-b)^2 + (100-c)^2 + (100-d)^2}$$

Rpta: $y = 1$

(19) Si: $a^2 - bc = \dfrac{1}{6}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$

Simplificar: $$C = \frac{(b+c+a)^2 + (b+c+2a)^2}{(b+c+3a)^2 + (b+c+4a)^2}$$

Rpta: $\dfrac{25}{61}$

(20) Simplificar:

$$\left[\left(\frac{81a^2 - 3b\sqrt{a}}{3\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} + 9a\sqrt[3]{b}\right) \div \left(9a + 3\sqrt[6]{a^3b^2}\right) - \sqrt[3]{b}\right]^2$$

Rpta: $9a$

(21) Simplificar:

$$k = (3a)^{\frac{1}{2}} - \frac{(3a) - (3a)^{-2}}{(3a)^{\frac{1}{2}} - (3a)^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 - (3a)^{-2}}{(3a)^{\frac{1}{2}} + (3a)^{-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{(3a)^{\frac{3}{2}}}$$

Rpta: $k = 0$

(22) Si: $10 = 7a + 11b + 10c$

Calcular: $E = (5 - 7a)^3 + (5 - 11b)^3 + (5 - 10c)^3 - 2310\,abc$

Rpta: 125

(23) Ejecutar:

$$G = (1 + a\sqrt{2} + a^2)(1 - a\sqrt{2} + a^2)(1 - a^4 + a^8)(1 - a^{12} + a^{24}) - 1$$

Rpta: $G = a^{36}$

(24) Ejecutar: $(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^{54} + x^{27} + 1)$

Rpta: $\dfrac{x^{81} - 1}{x - 1}$

(25) Si: $x = \sqrt[5]{36^{\sqrt{6}}}$

Calcular: $E = \dfrac{\sqrt{6}}{7}\left(\sqrt[\sqrt{6}^{-1}]{x} + \sqrt[\sqrt{6}]{x}\right)$

Rpta: $6^{7/10}$

CAPITULO 6

LA DIVISION Y LA DIVISIBILIDAD ALGEBRAICA

6.1. LA DIVISION ALGEBRAICA

Definición.- Se llama división del par de expresiones algebraicas de variable real $A(x)$ y $B(x)$, a la operación o algoritmo que les hace corresponder su cociente, tal que siendo $A(x)$ el dividendo y $B(x)$ el divisor, éste último deberá ser distinto de cero.

Sean $A(x)$ y $B(x)$; $B(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) \text{ ; (Equivalencia de la División Exacta)}$$

6.2. TEOREMA DEL ALGORITMO DE LA DIVISION

Si $P(x)$ es un polinomio de grado "m" y $d(x)$ $(\neq 0)$ es de grado n $(m \geq n)$ entonces existen dos polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, tales que:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(x) = d(x)Q(x) + R(x) \\ \text{(Identidad de la División No Exacta)} \end{array}}$$

Consecuencias

- $P(1) = d(1)Q(1) + R(1)$; suma de coeficientes del dividendo $P(x)$.
- $P(0) = d(0)Q(0) + R(0)$; término independiente del dividendo $P(x)$.
- $P(-1) = d(-1)Q(-1) + R(-1)$; diferencia de coeficientes de los términos de grado par e impar del dividendo $P(x)$.

6.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA DIVISIBILIDAD

Un polinomio $P(x)$ se dice que es divisible por el divisor $d(x)$ si:

$$\boxed{P(x) = d(x)Q(x) \vee R(x) \equiv 0}$$

Lectura:

" P (x) es divisible por d (x) o por Q (x)".

6.4. TEORIA DEL GRADO EN LA DIVISION

6.4.1 División de Polinomios de una Variable.

Si se representa: D° : grado del dividendo.

d° : grado del divisor.

Grado de Cociente: $\Rightarrow Q^\circ = D^\circ - d^\circ$

El grado del cociente Q° es la diferencia de grados del dividendo menos el grado del divisor.

Grado del Residuo: $\Rightarrow R^\circ \leq d^\circ - 1$

El grado del residuo: R° es menor o igual que el grado del divisor disminuido en la unidad.

Ejemplo:

Hallar los grados en cada una de las divisiones siguientes:

$$\frac{x^{10}+x+9}{x^4-2x+7} \qquad \begin{aligned} & D^\circ = 10^\circ \,;\, d^\circ = 4^\circ \\ \Rightarrow\ & Q^\circ = 10^\circ - 4^\circ = 6^\circ \\ \Rightarrow\ & R^\circ \leq 4^\circ - 1 = 3^\circ \\ & Q^\circ > R^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{x^7+17x+1}{x^4+12x-3} \qquad \begin{aligned} & D^\circ = 7 \,;\, d^\circ = 4^\circ \\ \Rightarrow\ & Q^\circ = 7 - 4 = 3^\circ \\ \Rightarrow\ & R^\circ \leq 4^\circ - 1 = 3^\circ \\ & Q^\circ = R^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{5x^8+9x+8}{3x^6-3x^2+11} \qquad \begin{aligned} & D^\circ = 8^\circ \,;\, d^\circ = 6^\circ \\ \Rightarrow\ & Q^\circ = 8^\circ - 6^\circ = 2^\circ \\ \Rightarrow\ & R^\circ \leq 6^\circ - 1 = 5^\circ \\ & Q^\circ < R^\circ \end{aligned}$$

6.5. LAS EQUIVALENCIAS DE LA DIVISION ALGEBRAICA

A partir del esquema:

$$\begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \quad , \; d(x) \neq o$$

Equivalencia de la División No Exacta

$$\Rightarrow D(x) = d(x)\,Q(x) + R(x) \qquad \text{......... (I)}$$

Equivalencia del Cociente Completo o Mixto

$$\Rightarrow \frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)} \qquad \text{......... (II)}$$

6.5.1 *Comentarios:*

(1°) La equivalencia (I) expresa la división exacta si: $R(x) \equiv 0$

$$\Rightarrow D(x) = d(x)Q(x)$$

El cual nos establece que el Dividendo será divisible por $d(x)$ o $Q(x)$.

(2°) De la división no exacta expresada por (I):

$$\Rightarrow D(x) - R(x) = d(x)Q(x)$$

El que nos establece que el resultado de restar el dividendo menos el residuo es divisible entre el divisor o el cociente.

(3°) La equivalencia del cociente mixto es análoga a la fracción mixta de una división aritmética no exacta.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 33 & 7 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} D(x) & d(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{33}{7} = 4 + \frac{5}{7}}_{\text{Fracción Mixta}} \qquad\qquad \Rightarrow \underbrace{\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}}_{\text{Cociente Mixto}}$$

6.6.- DIVISION DE POLINOMIOS HOMOGENEOS COMPLETOS DE DOS VARIABLES.

6.6.1 Grado del Cociente.

Grados Relativos del Cociente.- Es la diferencia de grados relativos respecto a la letra ordenatriz.

Grado Absoluto del Cociente.- Es la diferencia de los grados absolutos del Dividendo y el Divisor.

Grados Relativos del Cociente = Grado Absoluto del Cociente

6.6.2 Grado del Residuo.- Se considera dos grados:

Grado relativo del residuo.- Es un grado menor que el grado relativo del divisor respecto a la variable ordenatriz.

Grado absoluto del residuo.- Es una división inexacta, es igual que el grado absoluto del polinomio dividendo.

Ejemplo:

Hallar los grados de la siguiente división:

$$\frac{x^5 + 6x^4y + x^3y^2 - 7x^2y^3 + xy^4 - 7y^5}{x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^3}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{\textit{Grados Relativos del Cociente}}\\ GQ_x = 5 - 3 = 2^\circ \\ GQy = 5 - 3 = 2^\circ \\ \textbf{\textit{Grado Absoluto del Cociente}}\\ Gx = 5^\circ - 3^\circ = 2^\circ\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{\textit{Grados Relativos del Residuo}}\\ GRx = 3 - 1 = 2^\circ \\ GRy = 3 - 1 = 2^\circ \\ G_{RESIDUO} = G_{DEL\ DIVIDENDO} = 5^\circ\end{array}\right\}$$

6.7. CASOS DE DIVISION ALGEBRAICA.

6.7.1- ***División de Monomios:*** El algoritmo se reduce a dividir los coeficientes considerando los signos y obtener la parte variable según las leyes de los exponentes:

La división de monomios es siempre exacta

Ejemplo: Dividir: $\dfrac{\left(36x^4y^3\right)}{-12x^2y}$

Solución:

Usando el algoritmo de la división de monomios:

$$\frac{36x^4y^3}{-12x^2y} = -3x^2y^2 \ ; \ R \equiv 0$$

Además:

$$Q^\circ = 7^\circ - 3^\circ = 4^\circ$$
$$Q_x = 4 - 2 = 2^\circ \text{ Grado Relativo a x}$$
$$Q_y = 3 - 1 = 2^\circ \text{ Grado Relativo a y}$$

Observación: La expresión: $\dfrac{72x^8y^3}{9}$

No es una división algebraica debido a tener un divisor constante; asimismo los grados de los términos de la división se perturban.

En efecto: $Q^\circ = 11 - 0 = 11$

$R^\circ \leq 0 - 1 = -1$

6.7.2- ***División de un Polinomio por un Monomio***

El algoritmo se reduce a utilizar la regla distributiva de la multiplicación respecto a la suma; de otro modo se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio divisor.

Ejemplo:
Didivir: $\dfrac{24x^5 - 30x^4 + 42x^3 + 18x^2}{-6x^2}$

Solución:

(1°) Por ser la división de polinomio entre un monomio y de acuerdo a la regla:

(2°) $= \dfrac{24x^5}{-6x^2} - \dfrac{30x^4}{-6x^2} + \dfrac{42x^3}{-6x^2} + \dfrac{18x^2}{-6x^2}$

$\therefore \quad Q(x) = -4x^3 + 5x^2 - 7x - 3$;

$R(x)$ º 0

Observación: La división pudo ordenarse como:

$= \dfrac{1}{-6x^2}\left(24x^5 - 30x^4 + 42x^3 + 18x^2\right)$; para luego distribuir el factor $-\dfrac{1}{6x^2}$

$= \dfrac{24x^5}{-6x^2} - \dfrac{30x^4}{-6x^2} + \dfrac{42x^3}{-6x^2} + \dfrac{18x^2}{-6x^2}$

$\therefore \quad Q(x) = -4x^3 + 5x^2 - 7x - 3$

$R(x) \equiv 0$

6.7.3- División de Polinomios entre Polinomios

Para obtener el cociente y residuo se puede utilizar:

- **El algoritmo clásico de la división.**
- **El algoritmo sintético de Guillermo Hörner.**
- **El algoritmo de Paolo Ruffini.**
- **El algoritmo de las equivalencias o de los coeficientes indeterminados.**

6.7.3.1 El Algoritmo Clásico de la División

Para desarrollar el algoritmo, se ordenan los polinomios según **los exponentes decrecientes consecutivos** de la letra ordenatriz.

Luego:

1.- Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor; el cociente así obtenido es el primer término del cociente buscado.

2.- Se multiplica el cociente parcial por el divisor y se resta del dividendo el producto así obtenido. El polinomio que resulta de esta diferencia es el resto parcial que estará ordenado como el dividendo.

3.- Se divide el primer término del resto parcial por el primer término del divisor obteniendo el segundo término del cociente buscado.

4.- Multiplicamos este segundo término del cociente por el divisor y se resta de nuevo dividiendo el producto así obtenido. El polinomio que resulta es el segundo resto parcial.

5.- El algoritmo se repite hasta lograr un residuo nulo, o bien un polinomio de grado inferior al del divisor según la variable ordenatriz.

***Ejemplo*:**	
Dividir:	$(4x^5 + 13x^3 + 1 + 12x^4 - x + 12x^2) \div (2x^2 + 1 - 3x)$

***Solución*:**

(1°) Los grados correspondientes al cociente y residuo serán:

$$Q^\circ = 5 - 2 = 3^\circ$$
$$R^\circ \leq 2 - 1 = 1^\circ$$

(2°) De acuerdo al algoritmo clásico de la división:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
4x^5 & -12x^4 & +13x^3 & +12x^2 & -x & +1 & 2x^2-3x+1 \\ \cline{7-7}
-4x^5 & +6x^4 & -2x^3 & & & & \underbrace{2x^3-3x^2+x+9}_{\text{COCIENTE}} \\ \cline{1-3}
 & -6x^4 & +11x^3 & +12x^2 & & & \\
 & 6x^4 & -9x^3 & +3x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 2x^3 & +15x^2 & -x & & \\
 & & -2x^3 & +3x^2 & -x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 18x^2 & -2x & +1 & \\
 & & & -18x^2 & +27x & -9 & \\ \cline{4-6}
 & & & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{25x-8}_{\text{RESIDUO}}} &
\end{array}
$$

(3°) Resultados:

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 9$$
$$R(x) = 25x - 8$$

***Observaciones*:**

(1°) De la división realizada podemos tener la equivalencia siguiente:

$$\underbrace{4x^5 - 12x^4 + 11x^3 + 12x^2 - x + 1}_{\text{DIVIDENDO}} \equiv \underbrace{(2x^2 - 3x + 1)}_{\text{DIVISOR}} \underbrace{(2x^3 - 3x^2 + x + 9)}_{\text{COCIENTE}} + \underbrace{25x - 8}_{\text{RESIDUO}}$$

(2°) De la división realizada podemos tener el cociente mixto:

$$\frac{\overbrace{4x^5 - 12x^4 + 11x^3 + 12x^2 - x + 1}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{2x^2 - 3x + 1}_{\text{Divisor}}} \equiv \underbrace{2x^3 - 3x^2 + x + 9}_{\text{Cociente o parte entera de la división}} + \frac{\overbrace{25x - 8}^{\text{Residuo}}}{\underbrace{2x^2 - 3x + 1}_{\text{Divisor}}}$$

(3°) El algoritmo clásico permite realizar divisiones de polinomios racionales enteros como caso especiales de división de una constante entre un polinomio.

Ejemplo:	
Dividir:	$1 \div (1 + 2x + x^2)$

Solución:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & & & & 1 + 2x + x^2 \\ \cline{5-5}
-1 & -2x & -x^2 & & 1 - 2x + 3x^2 \ldots \infty \\ \cline{2-3}
 & -2x & -x^2 & & \\
 & 2x & +4x^2 & +2x^3 & \\ \cline{2-4}
 & & 3x^2 & +2x^3 & \\
 & & & \ldots \infty & \forall x \in \mathbb{R} \qquad 0 < |x| < 1
\end{array}
$$

6.7.3.2 El Algoritmo de la División Sintética de Guillermo Horner.

Este algoritmo es una consecuencia del algoritmo clásico de la división algebraica, que tiene la ventaja de considerar únicamente los coeficientes de los términos ordenados y completos de la división.

El algoritmo es como sigue:

(1°) Se escriben los coeficientes del dividendo en una fila, con signo propio. Esta ordenación crea un grupo de columnas para el cociente y el residuo.

(2°) Se escriben los coeficientes del divisor en columna donde el primero de ellos lleva signo propio y los restantes signo contrario.
(Véase el esquema de Horner).

(3°) De acuerdo al grado del divisor y contando a partir de la última columna del dividendo se hace una separación de columnas para el residuo y el cociente; **el número de columnas para el residuo será igual que el grado del divisor.**

(4°) Se dividen los primeros coeficientes del dividendo y divisor respectivamente, siendo este el primer coeficiente del cociente, el cual se inscribe debajo de la primera columna del cociente.

(5°) Se multiplica el primer coeficiente del cociente por los términos que cambiaron de signo en el divisor y los resultados se inscriben en fila a partir de la segunda columna del dividendo; se reducen los coeficientes de la segunda columna dividendo, este resultado entre el primer coeficiente del divisor dicho resultado constituye el segundo coeficiente del cociente.

(6°) Se continúa el algoritmo hasta completar los coeficientes del cociente y haber logrado obtener los coeficientes del residuo.

Ejemplo:	
Dividir:	$(4x^5 - 12x^4 + 13x^3 + 12x^2 - x + 1) \div (2x^2 - 3x + 1)$

Solución:

ESQUEMA

Primer Coeficiente del Divisor (con Signo Propio)

2 espacios = d° = 2

$$
\begin{array}{c|cccc:cc}
2 & 4 & -12 & 13 & 12 & -1 & 1 \\
\left\{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}\right. & & & & & & \\
\hline
 & & & & & &
\end{array}
$$

Coeficientes del Divisor con Signo Contrario

4 Columnas para el cociente

2 Columnas para el residuo; de acuerdo al grado del divisor d° = 2

Grados: D° = 5

d° = 2 ⇒ Q° = 3° , R° ≤ 1

SECUENCIA DEL ALGORITMO DE HORNER

(I)

$$
\begin{array}{c|cccc:cc}
2 & 4 & -12 & 13 & 12 & -1 & 1 \\
3 & (\mathrm{I}) & 6 & -2 & & & \\
-1 & & & & & & \\
\hline
 & 2 & & & & &
\end{array}
$$

Resulta de dividir 4 entre 2, y el coeficiente se multiplica por los elementos de la llave para luego dichos resultados ordenarlos horizontalmente.

(II)

$$
\begin{array}{c|cccc:cc}
2 & 4 & -12 & 13 & 12 & -1 & 1 \\
3 & & 6 & -2 & & & \\
-1 & & (\mathrm{II}) & -9 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & & & &
\end{array}
$$

El elemento -3 resulta de dividir la suma de -12 y 6 entre 2; dicho cociente -3 origina los elementos -9 y 3 luego de la multiplicación análoga realizada al paso anterior.

Sucesivamente se tendrá:

2	4	-12	13	12	-1	1
3		6	-2			
-1			-9	3		
				3	-1	
	2	-3	1			

2	4	-12	13	12	-1	1
3		6	-2			
-1			-9	3		
				3	-1	
					27	-9
	2	-3	1	9	25	-8

Se ha logrado los coeficientes del cociente y el residuo.

De modo que se tendrá:

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 - 3x^2 + x + 9 \\ R(x) &= 25x - 8 \end{aligned}}$$

6.7.3.3 El Algoritmo de las Equivalencias o de los Coeficientes Indeterminados.

Consiste en establecer el modelo matemático o forma del cociente y residuo de acuerdo al grado de los términos proporcionados y plantear la equivalencia correspondiente.

Ejemplo Explicativo:

Dividir: $$\frac{4x^5 - 12x^4 + 11x^3 + 12x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

Solución:

(1°) Grados: $D° = 5°$; $d° = 2$

$\Rightarrow Q° = 3°$; $R° = p$

(2°) Planteamos para el cociente y el residuo:

$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$R(x) = mx + n$

(3°) Establecemos la equivalencia:

$$4x^5 - 12x^4 + 11x^3 + 12x^2 - x + 1 \equiv (2x^2 - 3x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n$$

(4°) Ordenando el 2° miembro, para ello efectuamos la multiplicación por el método diagonal.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\ \hline
2 & 2a & 2b & 2c & 2d \\
-3 & -3a & -3b & -3c & -3d \\
1 & a & b & c & d
\end{array} \quad + mx + n$$

$$= 2ax^5 + (2b - 3a)x^4 + (a - 3b + 2c)x^3 + (b - 3c + 2d)x^2 + (c - 3d)x + d + mx + n$$
$$= 2ax^5 + (2b - 3a)x^4 + (a - 3b + 2c)x^3 + (b - 3c + 2d)x^2 + (c - 3d + m)x + (d + n)$$

(5°) De la igualdad de coeficientes con el dividendo original: $= 4x^5 - 12x^4 + 11x^3 + 12x^2 - x + 1$

$$\begin{aligned}
2a &= 4 \text{ .... } (1)\\
2b - 3a &= -12 \text{ .... } (2)\\
a - 3b + 2c &= 11 \text{ .... } (3)\\
b - 3c + 2d &= 12 \text{ .... } (4)\\
c - 3d + m &= -1 \text{ .... } (5)\\
d + n &= 1 \text{ .... } (6)
\end{aligned}$$

(6°) Resolviendo el sistema:

de (1): $a = 2$
de (2): $b = -3$
de (3): $c = 1$
de (4): $d = 9$
de (5): $m = 25$
de (6): $n = -8$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 9 \\ R(x) = 25x - 8 \end{array}}$$

6.8 EL TEOREMA DEL RESIDUO

6.8.1 **Teorema (del residuo)**

Sea la división: $F(x) \div (x + m) \Rightarrow R = F(\text{Op } m) = F(-m)$

"El residuo de la división de $F(x) \div (x + m)$ es equivalente a evaluar $F(x)$ para un valor de x igual al cero de $x + m$"

Demostración:

(1°) Sea: $F(x) \div (x + m)$ de residuo R (constante)

$$\Rightarrow \boxed{F(x) \equiv (x + m)\,Q(x) + R}$$

(2°) En esta equivalencia R se puede obtener si: $x = -m$

$$\Rightarrow F(-m) = (\overset{0}{\cancel{-m+m}})Q(-m) + R$$

$$\therefore \boxed{R = F(-m) = F(\text{op } m)}$$

Ejemplo Explicativo:

Hallar el residuo de dividir:

$$(x^7 + 3x^5 + x^2 + 1) \div (x + 2)$$

Solución:

(1°) Observar que el divisor $x + 2$ tiene por cero a: $x = -2$

(2°) En la práctica usualmente se iguala a cero el divisor: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Particularmente resulta absurdo este igualación; aceptándolo únicamente por tratarse de una regla.

(3°) Sustituyendo - 2 sobre el dividendo:

$$\Rightarrow F(-2) = (-2)^7 + 3(-2)^5 + (-2)^2 + 1$$
$$F(-2) = -128 - 96 + 4 + 1$$

$$\therefore \boxed{R = F(-2) = -219}$$

(4°) Verificando el residuo obtenido mediante la división sintética de Ruffini:

	1	0	3	0	0	1	0	1
x = - 2		- 2	4	- 14	28	- 56	110	- 220
	1	- 2	7	- 14	28	- 55	110	- 219 ← R

$$\therefore \boxed{R = -219}$$

Que resulta igual que el obtenido mediante teorema correspondiente.

6.8.2 1er Corolario (del Teorema del Residuo)

Sea la división: $F(x) \div (ax + b)$

$$\Rightarrow R = F\left(\text{Op}\frac{b}{a}\right) = F\left(-\frac{b}{a}\right)$$

"El residuo "R" de la división de $F(x) \div (ax + b)$ es equivalente al residuo de la división de $F(x) \div \left(x + \frac{b}{a}\right)$, el mismo que resulta igual a la evaluación de $F(x)$ cuando x adopta el valor opuesto del término independiente $\frac{b}{a}$ o cero de "ax + b".

Ejemplo Explicativo:

Hallar el residuo de dividir

$$(160x^4 - 24x^3 + 6x + 1) \div (2x + 1)$$

Solución:

(1°) De acuerdo al Corolario el divisor equivalente es $2\left(x+\frac{1}{2} \right)$ y el opuesto del término independiente es $x = -\frac{1}{2}$ o simplemente el cero de $2x + 1$.

En forma únicamente práctica, usualmente se realiza la igualación del divisor a cero, con la finalidad de obtener el opuesto del término independiente del divisor.

(2°) Sustituyendo dicho opuesto $\left(x = -\frac{1}{2} \right)$ sobre el dividendo

$$\Rightarrow F\left(-\frac{1}{2} \right) = 160\left(-\frac{1}{2} \right)^4 - 24\left(-\frac{1}{2} \right)^3 + 6\left(-\frac{1}{2} \right) + 1$$

$$\Rightarrow F\left(-\frac{1}{2} \right) = 160\left(\frac{1}{16} \right) - 24\left(-\frac{1}{8} \right) + 6\left(-\frac{1}{2} \right) + 1$$

$$F\left(-\frac{1}{2} \right) = 10 + 3 - 3 + 1$$

$$\therefore \boxed{\text{Residuo} = F\left(-\frac{1}{2} \right) = 11}$$

(3°) **Verificación:** Mediante el Algoritmo de Ruffini:

$2x + 1 = 0$	160	- 24	0	6	1	
$x = - 1/2$	↓	- 80	52	- 26	10	Residuo Solicitado
	160	- 104	52	- 20	11 ←	

$$\therefore \boxed{\text{Residuo} = 11}$$

6.8.3 **2do Corolario:**

Sea la división: $F (x) \div d (x) \Rightarrow R (x) = F (d (x) = 0)$

tal que: $R^\circ (x) \leq F^\circ (x) - 1 \wedge R^\circ(x) < d^\circ(x)$

El residuo de la división algebraica de $F (x) \div d (x)$ es equivalente a obtener la regla polinomial compuesta $R (x) = F (d (x))$ en la que se cumple la condición $d (x) = 0$ (como regla práctica) y que el grado de dicho residuo sea como máximo un grado menor que el del divisor.

Ejemplo Explicativo:

Hallar el residuo de dividir.

$$(6x^3 + 3x^2 + 4x + 21) \div (x^2 + 11x + 12)$$

Solución:

(1°) Identificando:

$$F(x) = 6x^3 + 3x^2 + 4x + 21 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

$$d(x) = x^2 + 11x + 12 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow x^2 = -11x - 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$$

(2°) Poniendo $F(x)$ en términos de x^2 para la sustitución posterior:

$$\Rightarrow F(x) = 6x(x^2) + 3(x^2) + 4x + 21 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

(3°) Sustituyendo (III) sobre (IV)

$$R'(x) = 6x(-11x - 12) + 3(-11x - 12) + 4x + 21$$

$$\Rightarrow R'(x) = -66x^2 - 72x - 33x - 36 + 4x + 21$$

$$R'(x) = -66x^2 - 101x - 15 \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{V})$$

No podemos aceptar que el residuo sea de 2° grado por lo que a partir de (II) podemos seguir degradando:

(4°) de (V): $R'(x) = -66(x^2) - 101x - 35 \ldots\ldots\ldots (\mathrm{VI})$

$$\Rightarrow R'(x) = -66(-11x - 12) - 101x - 15$$

$$\Rightarrow R'(x) = 726x + 792 - 101x - 15$$

$$R'(x) = 625x + 777$$

Es consistente aceptar que el grado solicitado es de 1er grado:

$$\therefore \boxed{R(x) = 625x + 777}$$

(5°) **Verificación:** Realizando la división mediante la regla de Horner:

1	6	3	4	21
- 11				
- 12				

Ejecutando:

1	6	3	4	21
- 11		- 66	- 72	
- 12			693	756
	6	- 63	625	777

$$\therefore \boxed{R(x) = 625x + 777}$$

6.8.4 3er Corolario

F (x) tiene como divisor simple a "x + b" $\Leftrightarrow$ F (- b) = 0

6.8.5 Divisor Simple de una Expresión

Definición.- Es aquella expresión de 1er grado, que se halla contenida en otra una sola vez.

6.8.6 Divisor Compuesto de una Expresión.

Definición.- Es aquella expresión de 1er grado que se halla contenida en otra, varias veces.

Ejemplo Explicativo:

Sea: $F(x) = (x+3)(x+5)(x+7)^4$

$(x+3)$ es un divisor simple de $F(x)$

$(x+5)$ es otro divisor simple de $F(x)$

$(x+7)$ es un divisor múltiple de orden 4 de $F(x)$

6.8.7 Teorema de Mitchell Rolle

$(x+a)^n$ es un divisor múltiple de orden n de $F(x)$, si la derivada de orden "n - 1", se anula para $x = op(a)$ ó $x = -a$ ó el cero de $x + a$.

Ejemplo Explicativo:

El polinomio: $x^4 - 294x^2 - 2\,744x - 7\,203$

contiene a $(x+7)^3$

En efecto sea: $F(x) = x^4 - 294x^2 - 2\,744x - 7\,203$

$\Rightarrow$ El teorema asegura que la derivada de orden 3 - 1 = 2° deberá anularse

$\Rightarrow F'(x) = 4x^3 - 588x - 2\,744$ Es la 1ra derivada

$\Rightarrow F''(x) = 12x^2 - 588$ Es la segunda derivada

Sustituyendo: $x = -7$ (- 7 es el cero de x + 7)

$\Rightarrow F''(-7) = 12(-7)^2 - 588 = 12(49) - 588$

$F''(-7 = 588 - 588$

$\therefore$ $\boxed{F''(-7) = 0}$ Esta última asegura que x + 7 está contenida 3 veces sobre F(x).

Ejemplo Explicativo:

Demostrar que: $F(x) = (x+5)^3$ contiene a $(x+5)^2$

mediante el Teorema de Rolle.

Solución:

(1°) $F(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

(2°) Deberá derivarse hasta la: $2 - 1 = 1$ra derivada

$\Rightarrow F'(x) = 3x^2 + 30x + 75$

(3°) Sustituyendo $x = -5$

$\Rightarrow F'(-5) = 3(-5)^2 + 30(-5) + 75$

$\Rightarrow F'(-5) = 75 - 150 + 75$

$\boxed{F'(-5) = 0}$ Esta última asegura que $(x+5)^2$ es un divisor múltiple de $F(x)$.

6.8.8 Las Divisiones Notables

Definición: Son aquellas divisiones algebraicas en las cuales el cociente y residuo de la división se obtienen sin mediar algoritmo correspondiente.

6.8.8.1 Estudio de la División Notable: $\dfrac{x^m \pm y^p}{x^q \pm y^r}$

a) **Principio de Notabilidad:**

$\dfrac{x^m \pm y^p}{x^q \pm y^r}$ es una división notable o inmediata

Si: $\dfrac{m}{q} = \dfrac{p}{r} = n = \#$ términos del cociente

$m, p, q, r \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$.

b) **En Relación al Cociente:**

b_1) Esencialmente es un polinomio goemétrico de grado: $m - q$

b_2) ***Signos del Cociente:*** Hay dos opciones:

Si el divisor es: $x^q - y^r \quad \Rightarrow \quad \underbrace{+, +, +, +, \ldots +}_{\text{Cociente de signos positivos}}$

Si el divisor es: $x^q + y^r \quad \Rightarrow \quad \underbrace{+, -, +, -, +, \ldots \pm}_{\text{Cociente de signos alternados}}$

b_3) ***El Término General:***

Teorema:

Sea la división notable: $\dfrac{x^m - y^m}{x - y}$

$$\Rightarrow \quad T_k = (x)^{m-k}(y)^{k-1}$$

T_k es el término de posición k del polinomio cociente:

c) **En Relación al Residuo**

Se obtiene mediante el teorema del residuo:

Ejemplo Explicativo:

Dividir: $(x^7 + y^7) \div (x - y)$

Solución:

(1°) Por tratarse de una división notable.

$$\Rightarrow \frac{x^7 + y^7}{x - y} = \left[\begin{array}{c}\text{Cociente de grado 6 y de}\\ \text{términos positivos}\end{array}\right] + \frac{\text{Residuo}}{x - y}$$

(2°) Por ser el divisor la diferencia $(x - y)$, el cociente será:

$$Q = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$$

$\Rightarrow$ Mediante el teorema del residuo: $x = y$

$$R = y^7 + y^7 = 2y^7$$

$$\Rightarrow \frac{x^7 + y^7}{x - y} = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^5 + \frac{2y^7}{x - y} \ ; \ \forall\, x \neq y$$

Cociente Completo de la División

Ejemplo Explicativo:

Dividir: $\dfrac{x^5 - y^5}{x + y}$

Solución:

(1°) Por tratarse de una división notable.

$$\Rightarrow \frac{x^5 - y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 + \frac{-2y^5}{x + y}$$

(2°) El cociente tiene signos alternados debido a disponer de un divisor: $x + y$

(3°) El residuo es $-2y^5$, debido al teorema del residuo: $x = -y$

$\Rightarrow (-y)^5 - y^5 = -y^5 - y^5 = -2y^5$

(4°) Verificando la división, para lo cual realizamos el algoritmo de Ruffini

$\Rightarrow x + y = 0$	1	0	0	0	0	$-y^5$
$\Rightarrow x = -y$	$\downarrow$	$-y$	y^2	$-y^3$	y^4	$-y^5$
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	y^4	$-2y^5$

(5°) Por lo que el cociente de 4° grado será:

$Q = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

$R = -2y^5$

Ejemplo Explicativo:

Dividir: $\dfrac{a^{210} + b^{119}}{a^{30} - b^{17}}$, a , b , $\in$ IR

Solución:

De acuerdo a la regla de las divisiones notables

(1°) Condición de notabilidad: $n_t = \dfrac{210}{30} = \dfrac{119}{17} = 7$

Se entiende que dicho cociente de grado 180 respecto de "a" posee 7 términos

$\Rightarrow \boxed{Q = a^{180} + a^{150}b^{17} + a^{120}b^{34} + a^{90}b^{51} + a^{60}b^{68} + a^{30}b^{85} + b^{102}}$

(2°) Los exponentes varían de 30 en 30 respecto de "a" y de 17 en 17 respecto a "b"

(3°) El residuo se obtiene de acuerdo al teorema correspondiente

$\Rightarrow a^{30} - b^{17} = 0 \;,\; a^{30} = b^{17}$

Sustituyendo en el dividendo

$$\begin{aligned} a^{210} + b^{119} &= (a^{30})^7 + b^{119} \\ &= (b^{17})^7 + b^{119} \\ &= b^{119} + b^{119} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{R = 2b^{119}}$

Ejemplo Explicativo:

Hallar el 5° término del cociente de dividir:

$$\frac{a^{13} + b^{13}}{a - b}$$

Solución:

De acuerdo al término general:

(1°) En n° de términos es: 13

(2°) El lugar del término es: 5

(3°) Las variables son: a y op (- b)

$$\Rightarrow T_5 = a^{13-5}[\,op(-b)\,]^{5-1}$$

$$\therefore\ T_5 = a^8b^4$$

(4°) Podemos verificar dicho resultado al establecer el desarrollo del cociente:

$$\frac{a^{13}+b^{13}}{a-b} = a^{12} + a^{11}b + a^{10}b^2 + a^3b^3 + \underbrace{a^8b^4}_{5^{to}\text{ término}} \ldots$$

Ejemplo Explicativo:

Hallar el vigésimo octavo término del cociente de dividir:

$$\left(a^{4^4} + b^{4^4}\right) \div \left(a^4 + b^4\right)$$

Solución:

(1°) El n^0 de términos es: $n_t = \dfrac{4^4}{4} = 64$

(2°) El lugar del término solicitado: 28

(3°) Variables: a^4 y $op(b^4) = -b^4$

$$\Rightarrow T_{28} = \left(a^4\right)^{64-28}\left(-b^4\right)^{28-1}$$

$$T_{28} = \left(a^4\right)^{36}\left(-b^4\right)^{27}$$

$$\therefore\ \boxed{T_{28} = -a^{144}b^{108}}$$

6.8.8.2 **Estudio de la división notable:**

$$\frac{x^m \pm a}{x^n \pm b}$$

a) Bastará que se cumpla la condición de Notabilidad:

$$\frac{m}{n} = n^{\circ}\text{ términos} \in \mathbb{N}$$

b) El cociente y residuo se determinan mediante las reglas usuales de las divisiones notables.

Ejemplo Explicativo:

Dividir: $\dfrac{x^5+q}{x+z}$

Solución:

(1°) El cociente será de 4° grado y sus coeficientes llevan signos alternados.

(2°) Las variables del cociente serán: x y op (z) = - z

(3°) $\Rightarrow \dfrac{x^5+q}{x+z} = x^4 - x^3z + x^2z^2 - xz^3 + z^4 + \dfrac{q-z^5}{x+z}$

(4°) Obsérvese que el residuo obedece al teorema correspondiente y se obtuvo de acuerdo con:
$x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

Sustituyendo en el dividendo
$\Rightarrow (-z)^5 + q$

$\therefore \boxed{R = q - z^5}$

(5°) Si deseamos verificar los resultados, bastará con utilizar la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \Rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ x=-z & \downarrow & -z & z^2 & -z^3 & z^4 & -z^5 \\ \hline & 1 & -z & z^2 & -z^3 & z^4 & q-z^5 \end{array}$$

$\therefore \boxed{\begin{array}{l} Q = x^4 - x^3z + x^2z^2 - xz^3 + z^4 \\ R = q - z^5 \end{array}}$

6.9 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

6.9.1 Ejercicio Explicativo

A partir del siguiente esquema de Horner:

De variable "x":

$$\begin{array}{c|cccccc} a & a(b+c) & 0 & c & -b & -c & 2b \\ b & & a & b+c & a & & \\ c & & & 2c & b-1 & a/3 & \\ b & & & & 2c & c & 2c \\ \hline & b+c & b-c & c & 7 & 2 & 6 \end{array}$$

Obtener: 1°) El dividendo
2°) El divisor
3°) El cociente

Comentario:

El algoritmo de la división permite realizar los correspondientes algoritmos recíprocos.

Solución:

(1°) Efectuando las operaciones según Horner y de acuerdo a las columnas:

1ª Columna: $\dfrac{a(b+c)}{a} = b + c$ .... (1)

1ª Fila: $(b+c)\,b = a$ .... (2)

$(b+c)\,c = b + c$ .... (3)

$(b+c)\,b = a$ .... (4)

2ª Columna: $\dfrac{a}{a} = 1 = b - c$ .... (5)

2ª Fila: $(b-c)\,b = 2c$ .... (6)

$(b-c)\,c = b - 1$ .... (7)

$(b-c)\,b = \dfrac{a}{3}$ .... (8)

(2°) Realizamos el tratamiento adecuado de los datos obtenidos.

$\Rightarrow$ de (3) : $\cancel{(b+c)}\,c = \cancel{(b+c)}$ $\quad\therefore\ \boxed{c = 1}$; $\quad b + c \neq 0$

$\Rightarrow$ de (5) : $1 = b - c = b - 1$ $\quad\therefore\ \boxed{b = 2}$

$\Rightarrow$ de (4) : $(2+1)\,2 = a$ $\quad\therefore\ \boxed{a = 6}$

(3°) El esquema será:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
6 & 18 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \\
2 & & 6 & 3 & 6 & & \\
1 & & & 2 & 1 & 2 & \\
2 & & & & 2 & 1 & 2 \\
\hline
 & 3 & 1 & 1 & 7 & 2 & 6
\end{array}
$$

(4°) En consecuencia:

$\therefore\ D(x) = 18x^5 + x^3 - 2x^2 - x + 4$

$d(x) = 6x^3 - 2x^2 - x - 2$

$Q(x) = 3x^2 + x + 6$

6.9.2 Ejercicio Explicativo

Hallar “a”, “b”, “c”, “d” y “e” a partir del esquema de Horner siguiente; e > 0.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
b & a & e & -1 & -85 & V & W \\
c & & 7e & e & h & & \\
d & & & 14e & 2e & 6e & \\
e & & & & \overline{cc} & \overline{dd} & \overline{ee} \\
\hline
 & e & 2e & b+c & c & d & e
\end{array}
$$

Solución:

(1°) Efectuando de acuerdo al esquema de división de Horner, tendremos:

1ª Columna : $\dfrac{a}{b} = e$ .... (1)
(1ª división)

1ª fila : $ec = 7e$ .... (2)

$ed = e$ .... (3)

$ee = h$ .... (4)

2ª columna : $\dfrac{8e}{b} = 2e$ .... (5)
(2a división)

2ª fila : $2ec = 14e$ .... (6)

$2ed = 2e$ .... (7)

$2e^2 = 6e$ .... (8)

(2°) Hacemos el tratamiento de los datos:

de (8) : por tener un solo término desconocido: $2e^2 - 6e = 0$

$\Rightarrow 2e(e-3) = 0 \quad \therefore \boxed{e = 3}$, pues $e > 0$

de (2) : $3c = (7)(3) \quad \therefore \boxed{c = 7}$

de (3) : $3d = 3 \quad \therefore \boxed{d = 1}$

de (4) : $h = 3 \times 3 \quad \therefore \boxed{h = 9}$

de (5) : $\dfrac{8 \times 3}{b} = 2 \times 3 \quad \therefore \boxed{b = 4}$

de (1) : $\dfrac{a}{4} = 3 \quad \therefore \boxed{a = 12}$

$$\therefore \boxed{a = 12,\ b = 4;\ c = 7,\ d = 1 \ \text{ y } \ e = 3}$$

6.9.3 Ejercicio Explicativo

Qué condiciones relacionan a "p" y "q" de modo que el polinomio: $x^3 + px + q$ sea divisible por el polinomio: $x^2 + mx - q$; $q \neq 0$

Recuerde:

Si: E (x) es divisible entre F (x)

$$\Rightarrow F(x) = F(x)\,Q(x)\,;\ R(x) \equiv 0$$

El residuo deberá ser idénticamente nulo.

(1°) La división deberá ser exacta:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & p & q \\
 & & -m & q & \\
-m & & & m^2 & -mq \\
q & & & & \\
\hline
 & 1 & -m & 0 & 0
\end{array}$$

(2°) En relación al residuo

$$\begin{cases} p + q + m^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ q + mq = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

de (2) : $q(m-1) = 0$; $m = 1$

$\therefore \boxed{p + q + 1 = 0}$

6.9.4 Ejercicio Explicativo

Hallar el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x-4)$, sabiendo que el término independiente del cociente es -500 y que el residuo de la división de $P(x)$ entre $80x$ tiene por residuo a 1992.

Recuerde:

El teorema del residuo establece que la división: $P(x) \div (x+b)$, tiene por residuo a $P(-b)$

Solución:

(1°) Se necesita obtener $P(4)$, para ello

$\Rightarrow \boxed{R = P(4)}$

$\Rightarrow P(x) = (x-4)\,Q(x) + R$ .... (1)

$\Rightarrow Q(0) = -500$ es el término independiente de $Q(x)$

$\Rightarrow P(0) = 1\,992$ es el residuo de la división de $P(x)$ entre $80x$

(2°) En (1) hacemos: $x = 0$ para usar los otros datos consignados:

$\Rightarrow P(0) = (-4)\,Q(0) + R$; $Q(0)$ es el término independiente.

$\Rightarrow 1\,992 = (-4)(-500) + R$

$\Rightarrow 1\,992 = 2\,000 + R$; como $R = P(4)$

$\therefore \boxed{R = P(4) = -8}$

6.9.5 Ejercicio Explicativo

Hallar el valor de "n" que permita a la división algebraica:

$$\frac{(2x+3)^{4n}(x+5)}{(x+1)(x+2)}$$

Tener un cociente cuyo término independiente sea 1820, sabiendo que el residuo de la misma es $(x+5)$.

Recuerde:

i) En la división algebraica: $F(x) \div (x+b)$

El residuo será: $F(-b)$

ii) Si $F(x)$ es una regla polinomial

$\Rightarrow F(0)$ es el término constante de la regla polinomial $F(x)$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

$$\begin{array}{r|l} (2x+3)^{4n}(x+5) & (x+1)(x+2) \\ \hline x+5 & Q(x) \end{array} \quad \text{..........................} (1)$$

$$\Rightarrow (2x+3)^{4n}(x+5) = (x+1)(x+2)Q(x) + x + 5$$

(2°) Si $x = 0$; $Q(0)$; es el término independiente del cociente

$$\Rightarrow \quad (3)^{4n}(5) = (1)(2)Q(0) + 5 \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad 2Q(0) = 3^{4n} \times (5) - 5 \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad Q(0) = \frac{\left(3^{4n}-1\right)}{2} 5 \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad Q(0) = \left(\frac{3^{4n}-1}{2}\right) 5 = 1\,820 \quad ;$$

(3°) Resolviendo la ecuación obtenida:

$$\Rightarrow \quad \frac{3^{4n}-1}{2} = 364 \ ; \ 3^{4n} - 1 = 728 \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad 3^{4n} = 729 = 3^5 \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad 4n = 5$$

$$\therefore \boxed{n = 5/4}$$

6.9.6 Ejercicio Explicativo

Hallar el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-4)$, sabiendo que el término independiente de dicho cociente es 500 y que la división de $P(x)$ entre "x" tiene por residuo a -1992.

Recuerde:

Si $F(x)$ es la regla polinomial
$\Rightarrow$ $F(0)$ es el término independiente de la misma.

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

Sea R el residuo en cuestión:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-4 \text{ ....} (1) \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

$$Q(0) = 500 \text{ ....} (2)$$
$$P(0) = -1992 \text{ ....} (3)$$

(2°) Relacionando:

$\Rightarrow$ De (1) : $P(x) = (x-4)Q(x) + R$
$\Rightarrow$ $P(0) = (-4)Q(0) + R$ .... (4)
$\Rightarrow$ En (4) : $-1992 = (-4)500 + R$
$\Rightarrow$ $-1992 = -2000 + R$

$$\therefore \boxed{R = 8}$$

6.9.7 Ejercicio Explicativo

Luego de efectuar una división de 2 polinomios en "x", el producto de la suma de los coeficientes del divisor y cociente es 15.

La diferencia de cuadrados de la suma de los coeficientes del dividendo y el resto es 180. ¿Cuánto suman los coeficientes del dividendo y residuo?.

Comentario:

Este caso permite utilizar las propiedades siguientes:

$\Rightarrow$ $P(1)$ = suma de coeficientes de $P(x)$
$\Rightarrow$ $P(0)$ = término independiente de $P(x)$

Solución:

(1°) Asumiendo que:

$D(x)$ = Es el dividendo
$d(x)$ = Es el divisor
$Q(x)$ = Es el cociente
$R(x)$ = Es el residuo

(2°) Relacionando los datos consignados.

$\Rightarrow$ $d(1)\,Q(1) = 15$ .... (1)

$\Rightarrow$ $D^2(1) - R^2(1) = 180$ .... (2)

$\Rightarrow$ $D(x) = d(x)\,Q(x) + R(x)$ .... (3)

$\Rightarrow$ de (3) : $D(1) = d(1) \cdot Q(1) + R(1)$ .... (4)

$\Rightarrow$ $D(1) - R(1) = d(1)\,Q(1) = 15$

$\Rightarrow$ De (2) : $[D(1) + R(1)]\,\underbrace{[D(1) - R(1)]}_{15} = 180$

$\Rightarrow$ $D(1) + R(1) = \dfrac{180}{15}$

$\therefore$ $\boxed{D(1) + R(1) = 12}$

6.9.8 Ejercicio Explicativo

Al dividir: $P(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 12x - 3$
entre un polinomio de 2° grado, se obtuvo por cociente $(x^2 - 100)$ y como residuo $-188x + 197$.

Hallar "A" y "B".

Solución:

(1°) El divisor será de la forma: $x^2 + mx + n$

$\Rightarrow$ Por Horner:

1	1	A	B	12	-3
- m		- m	- n		
- n			0	0	
				- 100m	- 100n
	1	0	100	-188	197

Dato: $x^2 - 100$

(2°) Relacionando los datos consignados

$\Rightarrow$ $A - m = 0$ .... (1)

$\Rightarrow$ $B - n = 100$ .... (2)

$\Rightarrow$ $12 - 100m = -188$ .... (3)

$\Rightarrow$ $-3 - 100n = 197$ .... (4)

(3°) de (3) : $-100m = -200$ $\quad\therefore\ m = 2$

de (4) : $-100n = 200$ $\quad\therefore\ n = -2$

de (1) : $A - 2 = 0$ $\quad\therefore\ A = 2$

de (2) : $B + 2 = 100$ $\quad\therefore\ B = 98$

$\therefore$ $\boxed{A = 2,\ B = 98}$

6.9.9 Ejercicio Explicativo

El polinomio $P(x)$ dividido por separado entre $(x^2 - x + 1)$ y $(x^2 + x + 1)$ origina residuos respectivamente $(-x + 1)$ y $(3x + 5)$.

Hallar el residuo de dividir $P(x)$ entre $x^4 + x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Por ser el divisor de 4° grado $(x^4 + x^2 + 1)$, el residuo podrá ser planteado de 3° grado y de la forma:

$$R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^4 + x^2 + 1)\,Q(x) + \underbrace{ax^3 + bx^2 + cx + d}_{\text{Residuo de la división de } P(x) \text{ entre } x^4 + x^2 + 1} \dots\dots\dots (1)$$

(2°) Como: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$\Rightarrow \text{de } (1): \quad \frac{P(x)}{x^2 - x + 1} = \frac{(x^2 - x + 1)\cancel{(x^2 - x + 1)}\,Q(x)}{\cancel{x^2 - x + 1}} + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 - x + 1};$$

(3°) En esta división es necesario completar en partes entera y residuo; para ello según Horner se realiza la división:

$$\begin{array}{r|cc|cc}
1 & a & b & c & d \\
1 & & a & -a & \\
-1 & & & a+b & -a-b \\
\hline
 & a & a+b & \underbrace{3 \quad\quad 5}_{\text{dato}} &
\end{array}$$

$c + b = 3 \dots\dots\dots (\alpha)$

$d - a - b = 5 \dots\dots (\beta)$

(4°) $$\text{de } (1): \quad \frac{P(x)}{x^2 + x + 1} = \frac{\cancel{(x^2 + x + 1)}(x^2 - x + 1)\,Q(x)}{\cancel{x^2 + x + 1}} + \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{array}{r|cc|cc}
1 & a & b & c & d \\
-1 & & -a & -a & \\
-1 & & & a-b & a-b \\
\hline
 & a & b-a & \underbrace{-1 \quad\quad 1}_{\text{dato}} &
\end{array}$$

$c - b = 1 \dots\dots\dots (\gamma)$

$d + a - b = 1 \dots\dots (\delta)$

(5°) De $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ y (δ):

$a = -2 ; b = 2 ; c = 1 ; d = 5$

$$\therefore \boxed{R(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5}$$

6.9.10 **Ejercicio Explicativo**

La siguiente división: $\dfrac{mx^6 + nx^5 + 1}{(x-1)^2}$; $x \in \mathrm{I\!R} - \{1\}$

Tiene por residuo a $(33x - 45)$.

Hallar el valor de "m" y "n".

Recuerde:

Si una división algebraica es exacta, la división será también exacta cuando la variable se sustituye por el recíproco correspondiente.

Solución:

(1°) La división no exacta puede ser escrita como:

$\Rightarrow$ $mx^6 + nx^5 + 1 = (x - 1)^2 Q(x) + 33x - 45$; x Î IR - { 1 }

(2°) Será exacta si transponemos el residuo

$\Rightarrow$ $mx^6 + nx^5 - 33x + 46 = (x - 1)^2 Q(x)$; R (x) º 0

(3°) Realizando la división pero con los términos permutados.

1	46	-33	0	0	0	n	m
		92	-46				
2			118	-59			
				144	- 72		
-1					170	-85	
						196	-98
	46	59	72	85	98	0	0

$\underbrace{0 \quad 0}_{R \equiv 0}$

$\Rightarrow$ $n + 111 = 0$; $m - 98 = 0$

$\therefore$ $\boxed{m = 98 \; ; \; n = -111}$

6.9.11 **Ejercicio Explicativo**

La siguiente división: $\dfrac{ax^5 + bx^4 + 1}{(x-1)^2}$; $x \in \mathrm{I\!R} - \{1\}$

es exacta. Hallar "a" y "b".

Comentario:

En este caso es conveniente aplicar la propiedad que establece que en toda división exacta, es posible invertir los términos de la división y esta seguirá siendo exacta.

***Solución*:**

(1°) Dividiendo según Horner pero realizando la división con los términos ordenados en forma permutada, es decir:

$$\frac{1+bx^4+ax^5}{1-2x+x^2}$$

(2°) La división seguirá siendo exacta.

1	1	0	0	0	b	a
		2	-1			
2			4	-2		
				6	-3	
- 1					8	-4
	1	2	3	4	0	0

$\underbrace{0 \quad 0}_{\text{Residuo} \equiv 0}$

(3°) De la columna de los residuos

$\Rightarrow b + 5 = 0$

$a - 4 = 0$

$\therefore \boxed{a = 4 ; b = -5}$

6.9.12 Ejercicio Explicativo

La división: $P(x) \div (x^3+5)$ tiene por residuo a (x^2+x+9); la división del cociente anterior $Q(x)$ entre (x^2+5) tiene por residuo $(2x+3)$.

Hallar el residuo de dividir el último cociente mencionado entre $4x - 1$, sabiendo que $P(x)$ es divisible por $-44x + 11$.

***Recuerde*:**

El teorema del residuo establece que a partir de la división:

$$P(x) \div (mx+n) \Rightarrow \text{Residuo} = P(-n/m)$$

***Solución*:**

(1°) Del enunciado, consignamos lo siguiente:

$P(x) = (x^3+5)Q(x) + x^2 + x + 9$ .... (I)

$Q(x) = (x^2+5)q(x) + 2x + 3$ .... (II)

(2°) Se desea hallar: $q(1/4)$, residuo de la división de $q(x)$ entre $(4x - 1)$.

En (II) : $Q\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16}+5\right)q\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{2}$ .... (III)

$$\text{En (I)} \quad : \; P\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{64}+5\right)Q\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+9 = 0 \;\ldots\ldots\ldots (\text{IV})$$

(3°) (IV) **Se iguala a cero por existir divisibilidad, según datos**

$$\Rightarrow \text{De (IV)}: \left(\frac{1}{64}+5\right)Q\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{596}{64}=0 \; ; \; \left(\frac{321}{64}\right)Q\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{596}{64}=0;$$

$$\Rightarrow \quad Q\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{596}{321}$$

$$\Rightarrow \text{En (III)}: \; -\frac{596}{321} = \frac{81}{16}q\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{81}{16}q\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{2}-\frac{596}{321} = -\frac{3\,439}{2\times 321}$$

$$\therefore \boxed{q\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27512}{26649}}$$

6.9.13 Ejercicio Explicativo

Hallar el número de términos de la siguiente división notable:

$$\frac{\left(x^{n^{29-7n}}\right)^{n^2-1} - \left(y^{29-7n}\right)^{n^{n^2-1}}}{\sqrt[27^{-1}]{x^{27}} - \sqrt[81^{-1}]{y^{9}}} \; ; \; x \in \mathbb{R} - \{ x = y \}$$

Recuerde:

El n° de términos de un cociente notable viene dado por:

división de exponentes = # de términos del cociente

Solución:

(1°) **Por la condición de notabilidad.**

$$\Rightarrow \frac{\left(n^2-1\right)n^{29-7n}}{\left(\dfrac{27}{27^{-1}}\right)} = \frac{\left(29-7n\right)n^{n^2-1}}{\left(\dfrac{9}{81^{-1}}\right)} = \#\text{ de términos} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) **Resolviendo la ecuación no algebraica.**

$$\Rightarrow \frac{\left(n^2-1\right)n^{29-7n}}{3^6} = \frac{\left(29-7n\right)n^{n^2-1}}{3^6} = \#\text{ de términos}$$

$$\Rightarrow \left(n^2-1\right)n^{29-7n} = \left(29-7n\right)n^{n^2-1} \; ; \; \exists \text{ simetría}$$

(3°) **Luego de la Simetría:**

$\Rightarrow n^2 - 1 = 29 - 7n$; pues: $(n^2 - 1)\, n^{29-7n} = (29 - 7n)\, n^{n^2-1}$

$\Rightarrow n^2 + 7n - 30 = 0$

$\Rightarrow (n-3)(n+10) = 0$; $n = 3$; $n = -10$

(4°) Obtenemos el n° de términos:

$\Rightarrow$ En (1) : $n = 3$: # de términos $= \dfrac{(3^2 - 1)\, 3^{29-21}}{3^6} = \dfrac{8 \times 3^{\cancel{8}}}{3^{\cancel{6}}} = 72$

$\therefore$ $\boxed{\text{\# de términos} = 72}$

6.9.14 Ejercicio Explicativo

Un polinomio P (x) mónico posee las características siguientes:

Grado	:	$n + 1$
Término Independiente	:	- 3
Residuo de Dividir por $(x^n + 1)$	:	0
Residuo de Dividir por $(x - 2)$	:	-129

Hallar el valor de "n".

***Recuerde*:**

Si P (x) es una regla polinomial

$\Rightarrow$ P (0) es el término independiente

***Solución*:**

(1°) **Ordenando los datos consignados:**

$n = ??$

$P(0) = -3$ .... (1)

$P(2) = -129$ .... (2)

$P(x) = (x^n + 1)(x + b)$ .... (3)

(2°) **"x + b" deberá ser el cociente exacto de la división de $P(x) \div (x^n + 1)$**

$\Rightarrow P(0) = (0 + 1)(b) = -3$; de (1) en (3)

$\Rightarrow$ Se obtiene: $b = -3$

(3°) **Atendiendo a lo obtenido en (3)**

$\Rightarrow P(x) = (x^n + 1)(x - 3)$ .... (4)

$\Rightarrow P(2) = (2^n + 1)(2 - 3) = -129$; de (2) en (3)

$(2^n + 1)(-1) = -129$

(4°) **Resolviendo la ecuación lograda:**

$$\Rightarrow \qquad 2^n + 1 = 129$$

$$\Rightarrow \qquad 2^n = 128 = 2^7$$

$$\therefore \boxed{n = 7}$$

6.9.15 Ejercicio Explicativo

Haciendo uso del Teorema del Residuo. Hallar el correspondiente de la división:

$$\frac{(x+1)^9 + 7(x+2)^4 + 3}{x^2 + 2x + 5} \quad ; \; x \in \mathbb{R} - \{ x^2 + 2x + 5 = 0 \}$$

***Recuerde*:**

El grado del residuo de una división algebraica es como máximo una unidad menor que el grado del divisor.

***Solución*:**

(1°) El residuo por obtenerse deberá ser como máximo de 1° grado; de acuerdo al teorema del residuo.

Del divisor:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x^2 + 2x = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x^2 = -2x - 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(2°) El dividendo P (x) puede ser expresado por la equivalencia:

$$P(x) = \left[(x+1)^2 \right]^4 (x+1) + 7\left[(x+2)^2 \right]^2 + 3$$

$$\Rightarrow P(x) = (\underbrace{x^2 + 2x} + 1)^4 (x+1) + 7(x^2 + 4x + 4)^2 + 3 \ldots\ldots\ldots (4)$$

(3°) De (2) y (3) en (4), mediante el teorema del residuo:

$$\Rightarrow R'(x) = (\underbrace{-5} + 1)^4 (x+1) + 7[\underbrace{-2x-5} + 4x + 4]^2 + 3$$

$\Rightarrow R'(x) = 256(x+1) + 7(2x-1)^2 + 3$; **este residuo es inaceptable por ser de 2° grado.**

(4°) Desarrollando el binomio y las otras sentencias:

$$\Rightarrow R'(x) = 7(4x^2 - 4x + 1) + 256x + 259 \ldots\ldots\ldots (5)$$

$\Rightarrow$ De (3) en (5):

$$\Rightarrow R'(x) = 7[4(\underbrace{-2x-5}) - 4x + 1] + 256x + 259$$

$$= 7[-8x - 20 - 4x + 1] + 256x + 259$$

$$= 7[-12x - 19] + 256x + 259$$

$\therefore \boxed{R'(x) = 172x + 126}$ Es el residuo solicitado

6.9.16 **Ejercicio Explicativo**

Utilizando el Teorema del Residuo. Calcular el correspondiente de la división siguiente:

$$\frac{(x+1)^8+1}{x^4+4x^3+8x+3}$$

Comentario:

Sea la división $P(x) \div D(x)$

$$\Rightarrow R(x) = P[D(x)=0] \text{ tal que}$$
$$\Rightarrow R^{\circ}(x) \leq P^{\circ}(x)-1$$

Solución:

(1°) El residuo deberá ser como máximo de 3° grado.

(2°) Del divisor:

$$x^4+4x^3+8x+3=0$$
$$x^4+4x^3=-8x-3 \quad \dots\dots\dots (2)$$
$$x^4=-4x^3-8x-3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

(3°) Del dividendo $P(x)$:

$$P(x) = \left[(x+1)^4\right]^2+1$$
$$P(x) = \left[x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right]^2+1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(4°) Mediante el teorema del residuo

$\Rightarrow$ De (2) en (4):

$\Rightarrow R'(x) = [\underbrace{-8x-3}+6x^2+4x+1]^2+1$;

$\Rightarrow R'(x) = (6x^2-4x-2)^2+1$; no puede ser residuo al ser de 4° grado

$\Rightarrow R'(x) = 36x^4-48x^3-8x^2+16x+5 \quad \dots\dots\dots (5)$

(5°) Insistiendo con el Teorema del residuo

$\Rightarrow$ De (3) en (5):

$\Rightarrow R'(x) = 36(\underbrace{-4x^3-8x-3})-48x^3-8x^2+16x+5$; es de 3° grado

$\therefore \boxed{R(x) = -192x^3-8x^2-272x-103}$

6.9.17 **Ejercicio Explicativo**

¿Cuál de las siguientes divisiones es exacta?

1) $(2a^5-10a^4+2a^2+1) \div (a+1/2)$
2) $(2a^4+17a^3-68a-32) \div (a+1/2)$
3) $(2a^3+8a^2+14a-8) \div (a-2)$
4) $(3x^3+8x^2+33x-54) \div (x-1)$
5) $(3x^3+8x^2+33x-54) \div (x+1)$

***Recuerde*:**

Teorema del Residuo:

Sea: $F(x) \div (x+b) \Rightarrow R = F(-b)$; Observe que "-b" es el cero del divisor.

***Solución*:**

De acuerdo al Teorema del Residuo:

(1°) $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = -\frac{1}{16} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2} + 1 \qquad \therefore R = \frac{13}{16}$

(2°) $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{8} - \frac{17}{8} + 34 - 32 \qquad \therefore R = 0$ Div. Exacta

(3) $a = 2 \Rightarrow R = 2(8) + 8(4) + 14(2) - 8 \qquad \therefore R = 68$

(4°) $x = 1 \Rightarrow R = 3 + 8 + 33 - 54 \qquad \therefore R = -10$

(5°) $x = -1 \Rightarrow R = -3 + 8 - 33 - 54 \qquad \therefore R = -81$

$\therefore$ Es exacta la 2ª división

6.9.18 Ejercicio Explicativo

De la división notable: $\dfrac{a^{500} + b^{750}}{a^2 + b^3}$

¿Cuántos términos del cociente poseen como grado absoluto un número entero cuadrado perfecto?.

$a, b \in \mathbb{R} - \{ a^2 + b^3 = 0 \}$

Recuerde:

En toda división notable

Si: $\dfrac{a^n - b^n}{a - b} \Rightarrow T_k = a^{n-k}\, b^{k-1}$

Representa el término de lugar "k" del cociente de dicha división.

***Solución*:**

(1°) El término general: $T_k = \pm\left(a^2\right)^{250-k}\left(b^3\right)^{k-1}$; $1 \le k \le 250$

$\Rightarrow$ El grado general: $500 - 2k + 3k - 3 = 497 + k$

(2°) Por condición solicitada: $497 + k = m^2$; $1 \le k \le 250$

$\Rightarrow$ De esta condición: $k = m^2 - 497$; $1 \le k \le 250$

(3°) En la limitación: $1 \leq m^2 - 497 \leq 250$

$\Rightarrow$ Reduciendo: $498 \leq m^2 \leq 747$

$\Rightarrow$ Extrayendo raíz cuadrada: $\sqrt{498} \leq m \leq \sqrt{747}$

(4°) Tendremos una limitación: $22.316 \leq m \leq 27.33$

$\Rightarrow$ Para cada valor de "m" hay un valor de "k" que verifica la condición solicitada.

$\Rightarrow$ m puede asumir desde 23 hasta 27; 5 valores de k.

$\therefore$ **Existen 5 términos cuyos grados son cuadrados perfectos.**

Comentario:

$$m^2 = k + 497 \begin{cases} \text{Si: } m = 23 \Rightarrow T_k = T_{32} \Rightarrow G = 529 \\ m = 24 \Rightarrow T_k = T_{79} \Rightarrow G = 576 \\ m = 25 \Rightarrow T_k = T_{128} \Rightarrow G = 625 \\ m = 26 \Rightarrow T_k = T_{179} \Rightarrow G = 676 \\ m = 27 \Rightarrow T_k = T_{232} \Rightarrow G = 729 \end{cases}$$

6.9.19 Ejercicio Explicativo

Hallar el valor de (mn), sabiendo que el polinomio:

$$P(x) = nx^5 + mx^4 + 16x^3 - 9x^2 + x + 10$$

es divisible por: $(x - 1)(3x + 2)$

Recuerde:

Si $P(x)$ es divisible entre $F(x)$ la división seguirá siendo exacta si el algoritmo se realiza a partir de los términos independientes.

Solución:

(1°) Dividiendo a partir de los términos independientes; por existir divisibilidad.

$$\Rightarrow \frac{10 + x - 9x^2 + 16x^3 + mx^4 + nx^5}{-2 - x + 3x^2}$$

(2°) Ejecutando dicha división mediante la regla de Horner:

$\Rightarrow$

-2	10	1	-9	16	m	n
		-5	15			
1			2	-6		
				-4	12	
-3					-3	9
	-5	2	-4	-3	0	0

(3°) De la columna de los residuos

$\Rightarrow\ m + 9 = 0\ ;\ n + 9 = 0$

$\therefore\ \boxed{m = n = -9}$

6.9.20 Ejercicio Explicativo

Calcular m y n sabiendo que la división siguiente es exacta:

$$\frac{x^7 + mx^3 + nx^2 + 12}{(x-1)^2}$$

Solución:

(1°) Mediante el teorema de Descartes

$F(1) = 1 + m + n + 12 = 0$ .... (I)

(2°) Mediante el teorema de Rolle

$F'(x) = 7x^6 + 3mx^2 + 2nx$

$\Rightarrow\ F'(1) = 7 + 3m + 2n = 0$ .... (II)

(3°) Resolviendo el sistema:

$m + n = 13$ y $3m + n = -7$

$\therefore\ \boxed{m = 19 \text{ y } n = -32}$

Solución:

(1°) Dividiendo mediante Horner:

1	1	0	0	0	m	n	0	12
		2	- 1					
2			4	- 2				
				6	- 3			
- 1					8	-4		
						2m+10	-m-5	
							4m+2n+12	-2m-n-6
	1	2	3	4	(m + 5)	2m+n+6	0	0

(2°) Relacionando los elementos del residuo:

$3m + 2n + 7 = 0$ .... (I)

$-2m - n + 6 = 0$ .... (II)

(3°) Resolviendo el sistema:

de (II) : $m = 19\ ,\ n = -32$

6.9.21 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el cociente mixto de dividir: $\dfrac{x^{12} - y^2}{x^2 + y^9}$

Recuerde:

Sea la división notable: $\dfrac{x^m - b}{x - a}$

$$\Rightarrow \frac{x^m - b}{x - a} = x^{m-1} + x^{m-2}\,a + x^{m-3}\,a^2 + \ldots a^{m-1} + \frac{a^m - b}{x - a}$$

Solución:

(1°) Por ser una división notable:

El cociente mixto será:

$$x^{10} - x^8\,y^9 + x^6\,y^{18} - x^4\,y^{27} + x^2\,y^{36} - y^{45} + \frac{y^{54} - y^2}{x^2 + y^9}$$

(2°) **En el cual:**

- El primer término se obtiene de dividir los primeros términos del dividendo y divisor.
- El polinomio cociente tiene los exponentes de "x" decrecientes de 2 en 2 y los coeficientes son alternados, mientras que los de x varían de 9 en 9.
- En este caso basta que la condición de notabilidad se verifique entre los elementos x del dividendo, y del divisor.
- El residuo se obtiene mediante el teorema correspondiente.

6.9.22 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el cuarto término del cociente de dividir:

$$\frac{x^{42} + x + 9}{x^6 - 2}$$

Recuerde:

(i) Si: $\dfrac{a^n - b}{a - x} \Rightarrow \dfrac{a^n - b}{a - x} = a^{n-1} + a^{n-2}\,x + a^{n-3}\,x^2 + \ldots + x^{n-1} + \dfrac{x^n - b}{a - x}$

(ii) Si: $\dfrac{a^n - b}{a - x} \Rightarrow T_k = a^{n-k}\,x^{k-1}$

Es el término general del cociente

Solución:

(1°) Al ordenar:

$$\frac{x^{42}+x+9}{x^6-2} = \underbrace{\frac{x^{42}}{x^6-2}}_{A} + \frac{x+9}{x^6-2} \quad \text{.......................................}(\text{I})$$

(2°) Observemos que la división "A" es notable.

$$\Rightarrow A = \underbrace{x^{36}}_{1} + x^{30}(2) + x^{24}(2)^2 + x^{18}(2)^3 + x^{12}(2)^4 + x^6(2)^5 + 2^6 + \frac{2^7}{x^6-2}$$

(3°) El cociente solicitado será, luego de sustituir "A" sobre (I):

$$\frac{x^{42}+x+9}{x^6-2} = \underbrace{x^{36}}_{1^{\circ}} + \underbrace{2x^{30}}_{2^{\circ}} + \underbrace{4x^{24}}_{3^{\circ}} + \underbrace{8x^{18}}_{4^{\circ}} + 16x^{12} + 32x^6 + 64 + \frac{137+x}{x^6-2}$$

$$\therefore \boxed{t_4 = 8x^{18}}$$

Observación:

Es posible obtener dicho cociente como:

$$\frac{x^{42}+x+9}{x^6-2} \Rightarrow t_4 = (x^6)^{7-4}(2)^3 = 8x^{18} \quad \text{pues: } \frac{42}{6} = 7 \text{ términos}$$

6.9.23 Ejercicio Explicativo

En el desarrollo del cociente de la división: $\dfrac{x^{245}-y^m}{x^p-y^2}$

$x^q y^{24}$, es el término central.

Calcular: $m+p+q$

Recuerde:

Si: $\dfrac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} \Rightarrow t_k = (x^p)^{n_t-k} \text{ op} (\pm y^q)^{k-1}$

Donde: T_k es el término de lugar k del cociente que se obtenga.

$$1 \leq k \leq \frac{a}{p}$$

Solución:

(1°) Por ser una división notable.

$$\frac{245}{p} = \frac{m}{2} = \text{N° de términos} \text{ ....} (\text{I})$$

El término central único será del lugar : $\dfrac{n+1}{2}$

$$\Rightarrow T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \left(x^p\right)^{n-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(y^2\right)^{\frac{n-1}{2}-1} \text{ ....} (\text{II})$$

(2°) Por condición:

$$t_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = x^{p\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{4}} = x^q y^{24}$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{n-1}{2}\right) = q \text{ ....} (\text{III})$$

$$\frac{n-1}{4} = 24 \text{ ....} (\text{IV})$$

(3°) Resolviendo el sistema:

de (IV) : $n - 1 = 48 \Rightarrow \boxed{n = 49}$

De (I) : $\dfrac{m}{2} = 49 \Rightarrow \boxed{m = 98}$

De (I) : $\dfrac{245}{p} = 49 \Rightarrow \boxed{p = 5}$

De (III) : $q = 5\left(\dfrac{49-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{q = 120}$

$\therefore \boxed{m + p + q = 223}$

6.9.24 Ejercicio Explicativo

Si se divide F (x) entre $x^2 + 3$ y $x^2 + 6$ los residuos correspondientes serán: $2x + 1$ y $3x + 1$ respectivamente.

Hallar el residuo de dividir F (x) entre el producto $(x^2 + 6)(x^2 + 3)$

Solución:

(1°) A partir del esquema y siendo R (x) el residuo de 3er grado

$$\begin{array}{r|l} F(x) & (x^2+6)(x^2+3) \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

$$R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + e$$

$$\Rightarrow F(x) = (x^2+6)(x^2+3)\,Q(x)\,k + ax^3 + bx^2 + cx + e$$

(2°) Obtenemos el residuo de dividir entre $x^2 + 6$

$\Rightarrow F(x^2 + 6 = 0) = a(x^2)x + b(x^2) + cx + e$

$= a(-6)x + b(-6) + cx + e$

$\Rightarrow (-6a + c)x + e - 6b \equiv 3x + 1$

$\Rightarrow -6a + c = 3$ .... (I)

$\Rightarrow e - 6b = 1$ .... (II)

(3°) Obtenemos el residuo de dividir entre $x^2 + 3$

$\Rightarrow F(x^2 + 3 = 0) = a(-3)x + b(-3) + cx + e$

$\Rightarrow (-3a + c)x + e - 3b \equiv 2x + 1$

$\Rightarrow -3a + c = 2$ .... (III)

$e - 3b = 1$ .... (IV)

Resolviendo (I), (II), (III) y (IV)

$a = -1/3$, $b = 0$, $c = 1$, $e = 1$

$\therefore \boxed{R(x) = -1/3\,x^3 + x + 1}$

6.9.25 Ejercicio Explicativo

Determinar el cociente y residuo de dividir.

$-(ax + by + cz)^2 - (ay - bx)^2 - (bz - cy)^2 - (cz - ax)^2$ entre $x^2 + y^2 + z^2$

Solución:

(1°) Observemos la equivalencia de Lagrange en el dividendo.

$\Rightarrow -(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)$

(2°) Por lo que la división será:

$$-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

El cociente y residuo serán:

$\therefore \boxed{\begin{array}{l} Q = -x^2 - y^2 - z^2 \\ R = 0 \end{array}}$

6.10. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: La división y la divisibilidad algebraica

(1°) Hallar el valor de "a", sabiendo que el polinomio $x^3 + 3mx^2 + 3ax + b$, es divisible entre $x^2 + 2mx + a$

Rpta: m^2

(2) Hallar (3m - 2n) si el resto: $16a^4x - a^5$ se obtiene al dividir $7x^5 + 9ax^4 - 6a^2x^3 + ma^4x + na^5$ entre $x^2 + ax - 2a^2$

Rpta: -4

(3) ¿Qué valor debe de tener "k" para que el polinomio $5x^3 - k(x^2 + x - 1)$ tenga como divisor a: $5x^2 + 2x - 4$

Rpta: 8

(4) Indicar el valor "n" para que $4x^4 - 7x^2 + 2nx$ sea divisible entre: $2x^2 - nx + 2$

Rpta: ± 3

(5) Hallar el valor de "Q" si: $Q(x + z + y)^5 + Q(x - y - z)^3 + (y - x + z)^3$ es divisible entre $(x - y + z)$

Rpta: $Q = 1$

(6) Calcular (P / Q), sabiendo que el residuo de la división de:

$$(x^4 - x^3 - 5x^2 + Px + Q) \text{ entre}$$
$$(x^2 - 3x + 4) \text{ es } (-13x + 14)$$

Rpta: $P/Q = 2$

(7) Hallar la suma de los coeficientes del cociente si al efectuar el cociente: de $(2x^3 + mx^2 + 3)$ entre $(2x + 3)$ es -15

Rpta: $S = 3$

(8) Si $x^6 - 2x^2 + ax - 4$ se divide entre $(x + 1)$, el resto que se obtiene es el triple del que resulta al dividirlo entre $(x - 1)$

Rpta: 5/2

(9) Al dividir $P(x) \div (x^2 - 3)$ el cociente resultó $Q(x)$ y el resto $(5x - 2)$ al dividir $Q(x) \div (x + 3)$ el resto dio -2, hallar el resto de $P(x)$ entre $(x^2 - 3)(x + 3)$

Rpta: $(-2x^2 + 5x + 4)$

(10) Hallar el mayor coeficiente de $P(x)$ si al dividir $P(x) = ax^4 + bx^3 + c$ entre $(x^3 + 1)$ y entre $(x^2 + 1)$, se hallaron 2 restos cuyo producto es $(2x - 1)(3x + 4)$

Rpta: (2)

(11) Hallar "b" en función de "k" para que $ax^{k+1} + bx + 1$ sea divisible entre $(x - 1)^2$

Rpta: $\left(-\frac{k+1}{k}\right)$

(12) Determinar "m" y "n" asumiendo que $P(x) = x^n + mx^{n-3} + 1$ es divisible por $(x-1)^2$.

Rpta: $m = -2$
$n = 6$

(13) Calcular $\left[\!\left[\frac{(p \cdot q)}{2} \right]\!\right]$, sabiendo que el polinomio $P(x) = 64x^5 - 49x^3 + px + q$ es divisible por $(8x^2 - x + 1)$

Rpta: 3

(14) Hallar el cociente exacto de $\dfrac{x^4 + a^2}{x^2 + ax + b}$

donde $a > 0$; $b > 0$

Rpta: $(x^2 - 2x + 2)$

(15) Hallar el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x-4)$ sabiendo que el término independiente del cociente es 500 y que la división de $P(x)$ entre x, tiene como residuo $-1\,991$.

Rpta: 9

(16) Si $P(x)$ entre $(x^3 - 1)$ da como residuo $(50x^2 - 61x + 72)$ determinar el residuo de dividir $P(x) \div (x^2 + x + 1)$

Rpta: $(-111x + 22)$

(17) Hallar $(m - n)$ sabiendo que le polinomio $x^n + mx^{n-2} + 1$ es divisible entre $(x-1)^2$

Rpta: $m - n = -6$

(18) Hallar a y b de modo que la división siguiente: $ax^5 + bx^4 + 1 \div (x-1)^2$ tenga por residuo $(19x + 91)$

Rpta: $a = -417$
$b = 526$

(19) Si dividimos $2x^8 - 3x^7 + 2x - 1$ entre $x - 3$; hallar el coeficiente de x^2

Rpta: 243

(20) Determinar el valor de $[a + b]^{1/2}$ si $(x^5 - ax + b)$ es divisible entre $(x^2 - 4)$

Rpta: 4

(21) Encontrar "k" para que la expresión $(x + 2y)^5 - x^5 + my^5$ sea divisible entre $(x + y)$

Rpta: $k = -2$

(22) Calcular a y b de modo que $ax^4 + bx^3 + 1$ tenga por divisor múltiple, de orden 2 a $(x - 1)$

Rpta: $a = 3$, $b = -4$

(23) Cuando se divide $F(x)$ por $(x - 2)(x - 3)$ el residuo fue $7x + 1$. Hallar el residuo de dividir $F(x)$ entre $x - 3$ y $x - 2$ por separado.

Rpta: 22 y 15

(24) Calcular m, n y p de modo que la división del polinomio.

$$F(x) = x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx + p$$

entre: $(x - 1)(x^2 + 3x + 2)$ sea exacta.

Rpta: $m = 1$, $n = -3$, $p = -2$

(25) Si: $p\,x^{1994} + qx^{1993} + 1$ es múltiplo de $(x - 1)^2$

Determinar p y q

Rpta: $p = 1\,993$
$q = -1\,994$

CAPITULO 7

LA FACTORIZACION ALGEBRAICA

LA FACTORIZACION ALGEBRAICA EN $\mathbb{R}$

7.1. ***Definición.-*** La factorización es la transformación equivalente de una expresión algebraica racional entera, en otra tal que ésta se encuentre en función de factores primos entre sí.

La factorización es el algoritmo recíproco al establecido por el axioma de la distribución de la multiplicación respecto a la suma.

7.2. FACTOR PRIMO O POLINOMIO IRREDUCTIBLE

Es aquella expresión algebraica racional entera no constante que posee como único divisor a otra expresión idéntica a la misma.

Postulado.- Toda expresión algebraica de primer grado es prima.

7.3. RESTRICCIONES EN LA FACTORIZACION

La factorización se realiza en el conjunto de las expresiones algebraicas racionales enteras respecto a la variable y respecto a los coeficientes en el conjunto de los números racionales, aunque en este último caso puede existir alguna reconsideración en abandonar el conjunto racional.

coeficientes reales racionales

Ejemplo: Factorizar: $a^2 - 36b^2 \Rightarrow a^2 - 36b^2 = (a + 6b)(a - 6b)$

coeficientes reales irracionales

Ejemplo: Factorizar: $2x^2 - 3y^2 \Rightarrow 2x^2 - 3y^2 = \left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y\right)\left(\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y\right)$

7.4 **DIVISOR.-** Es toda aquella expresión que se halla contenida dentro de otra. El divisor puede o no ser primo.

Ejemplo: xyz $\begin{cases} \textbf{Factores Primos:} & x, y, z \\ \textbf{Divisores:} & x, y, z, xy, xz, yz \end{cases}$

7.5 CONTEO DE FACTORES Y DIVISORES DE UNA EXPRESION RACIONAL ENTERA

Teorema:

Sea: $A^m . B^n . C^p$; con A, B, C primos entre sí:

$\Rightarrow$ $\boxed{\#\text{ Factores Primos} = m + n + p}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\#\text{ Divisores} = (m+1)(n+1)(p+1) - 1}$

Ejemplo:

Obtener el conjunto de los factores primos y divisores de: xy^2z.

Solución:

$\Rightarrow$ F.P. $= \{x, y, z\}$

$\Rightarrow$ Divisores $= \{x, y, z, y^2, xy, xz, yz, xy^2, y^2z, xyz, xy^2z\}$

$\Rightarrow$ # F. Primos $= 1 + 2 + 1 = 4$

$\Rightarrow$ # Divisores $= (1+1)(2+1)(1+1) - 1 = 11$ Divisores

7.6 EL ALGORITMO DE LA FACTORIZACION

La factorización permite restituir los factores del resultado de la ejecución de una multiplicación.

Ejemplo: Al ejecutar: $a(b+c+d)$:

$$\Rightarrow a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

Observemos que la factorización de: $ab + ac + ad$ es viable de inmediato debido a tener el factor común o mcd de los sumandos a simple observación : a

Ejemplo: Al ejecutar: $(x+3)(x+5)(x-8)$

$$\Rightarrow (x+3)(x+5)(x-8) = x^3 - 49x - 120$$

Observemos que la factorización de: $x^3 - 49x - 120$ no es inmediata; no se observan el factor común necesario.

Estos ejemplos nos ilustran los grados de dificultad de la factorización, por lo que es necesario disponer de un conjunto de métodos que permitan la factorización en forma ordenada y sistemática.

7.7 METODOLOGIAS DE FACTORIZACION

A fin de ejecutar el algoritmo contrario al axioma de la distribución de la multiplicación respecto a la suma, se disponen los métodos siguientes aplicables a casos específicos de factorización:

- Factorización del Factor Común.
- Factorización por Asociación.
- Factorización de Expresiones Notables.
- Factorización Mediante las Reglas de Aspas.
- Factorización por Evaluación.
- Factorización de Polinomios Recíprocos.
- Factorización de Polinomios Cíclicos.
- Factorización por Adición y Sustracción.

7.7.1. Factor Común Monomio

Ocurre cuando todos los términos del polinomio tienen un factor común, que en virtud al axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma puede extraerse dicho factor.

Principio: Si: $a(b+c) = ab+ac$
"a" es el factor común ó mcd
$\Rightarrow ab+ac = a(b+c)$

El cual origina la regla siguiente:

Regla.- Para extraer un monomio como factor común de un polinomio, se dividen todos los términos del polinomio por el factor común o mcd de los sumandos, anotando los cocientes entre un signo de colección multiplicado por el factor común".

1.- **Aclaración:** El factor común de un polinomio representa en realidad el mcd de los sumandos.

7.7.1.1 Ejemplo Explicativo

Factorizar: $(a+b)(x+y+z)+(a+b)(x-2y-2z)$

Solución:

(1°) Se puede extraer $(a+b)$ el factor común de acuerdo a la regla, $(a+b)$ es el mcd de los términos

$$\Rightarrow (a+b)[(x+y+z)+(x-2y-2z)]$$

(2°) Descartando los paréntesis contenidos entre los corchetes

$$\Rightarrow (a+b)[x+y+z+x-2y-2z]$$

$\therefore \boxed{(a+b)(2x-y-z)}$

7.7.1.2 Ejemplo Explicativo

Factorizar: $x^{32}y^{29}z^{26}+x^{30}y^{32}z^{28}+x^{34}y^{30}z^{25}$

Solución

(1°) El factor común es el mcd: $x^{30} y^{29} z^{25}$

(2°) Extraemos mediante divisiones el factor común:

$$\boxed{x^{30} y^{29} z^{25} (x^2 z + y^3 z^3 + x^4 y)}$$

2.- ***Aclaración:*** Si se desea verificar una factorización bastará ejecutar la multiplicación correspondiente.

3.- ***Aclaración:*** De acuerdo al axioma de la distribución:

$$-(a+b+c) = -a-b-c$$

Es posible extraer el factor común negativo

$$\Rightarrow -a-b-c = -(a+b+c)$$

7.7.1.3 Ejemplo Explicativo

Factorizar:

$$\left(a^2-b^3\right)^5\left(a^3-b^2\right)^4+\left(b^3-a^2\right)^4\left(a^3-b^2\right)^5+\left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4 a^3$$

Solución:

(1°) Al ordenar correlativamente los símbolos a y b:

$$\left(a^2-b^3\right)^5\left(a^3-b^2\right)^4-\left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^5+\left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4 a^3$$

(2°) El factor común o MCD es: $\left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4$

$$\Rightarrow \left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4\left[\left(a^2-b^3\right)-\left(a^3-b^2\right)+a^3\right]$$

(3°) Descartando los paréntesis del corchete y reduciendo a cero los opuestos.

$$\Rightarrow \left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4\left[a^2-b^3\cancel{-a^3}+b^2\cancel{+a^3}\right]$$

$$\therefore \boxed{\left(a^2-b^3\right)^4\left(a^3-b^2\right)^4\left(a^2-b^3+b^2\right)}$$

7.7.1.4 Ejemplo:

Factorizar: $x^{7n+2} y^{6m+3} z^{8m+2} + x^{7n+3} y^{6m+2} z^{8m+3} + x^{7n+1} y^{6m+4} z^{8m+1}$

Solución:

(1°) El factor común es el mcd: $\Rightarrow x^{7n+1} y^{6m+2} z^{8m+1}$

(2°) Al extraer el factor común monomio mediante división:

$x^{7n+1} y^{6m+2} z^{8m+1} (xyz + x^2 z^2 + y^2)$

4.- ***Aclaración:*** El polinomio y la factorización correspondientes, conforman una equivalencia y por lo tanto sujeta a todas las propiedades.

7.7.1.5 **Ejemplo Explicativo**

En la factorización que se muestra:

$$x\,y^m\,z\left(x+3y^m\,z\right)^{m-10} = x^{m-9}\,y^m\,z+3\,y^{2m}\,z^{13-m}$$

Calcular el valor de "m" ; x, y, z $\in$ IR

Solución:

(1°) Por ser una equivalencia podemos asignar valores a las variables: $x = y = z = 1$

$$\Rightarrow 1\times 1^m\times 1\left(1+3\times 1^m\times 1\right)^{m-10} = 1^{m-9}\times 1^m\times 1+3\times 1^{2m}\times 1^{13-m}$$

$$\Rightarrow \qquad (4)^{m-10} = 1+3$$

$$\Rightarrow \qquad 4^{m-10} = 4^1\ ,\quad m-10 = 1$$

$$\therefore\ \boxed{m = 11}$$

(2°) ***Verificando:*** Para ello sustituimos el valor obtenido:

$$\Rightarrow\ x\,y^{11}\,z\left(x+3y^{11}\,z\right)^1 = x^2\,y^{11}\,z+3y^{22}\,z^2$$

Ejecutando la multiplicación

$$\Rightarrow\ x^2\,y^{11}\,z+3xzy^{22}\,z^2 = x^2\,y^{11}\,z+3y^{22}\,z^2$$

Que expresa una **identidad**

5.- ***Aclaración:*** La factorización concluye cuando los factores obtenidos sean primos entre sí.

7.7.1.6 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $(a^3\,b^4+a^4\,b^3)\,(a^5\,b^6+a^6\,b^5)\,(a^6\,b^8+a^8\,b^6)$

Solución:

(1°) La expresión no muestra factores primos, por lo que de acuerdo a la definición de factorización y el examen de cada factor se tendrá:

$$\underbrace{(a^3b^4+a^4b^3)}_{\text{mcd: } a^3b^3}\,\underbrace{(a^5b^6+a^6b^5)}_{\text{mcd: } a^5b^5}\,\underbrace{(a^6b^8+a^8b^6)}_{\text{mcd. } a^6b^6}$$

(2°) Extrayendo factores:

$$\Rightarrow\ \underbrace{a^3b^3\,(b+a)}\,\underbrace{a^5b^5\,(b+a)^2}\,\underbrace{a^6b^6\,(b^2+a^2)}$$

Al conmutar los factores y sumandos

$$\Rightarrow\ a^3b^3a^5b^5\,a^6b^6\,(a+b)^2\,(a^2+b^2)$$

$$\therefore\ \boxed{a^{14}\,b^{14}\,(a+b)^2\,(a^2+b^2)}$$

7.7.1.7 Ejemplo:

A partir de la factorización establecida siguiente:

$$a^{p}\,b^{m+n}\,c^{n+4}+a^{m+13}\,b^{p+1}\,c^{n+p}+a^{p}\,b^{m-2}\,c^{n+13}=a^{4}\,b^{n-8}\,c^{m+10}\left(a^{m+9}+b^{n+2}+c^{3}\right)^{m-6}$$

Calcular m, n y p

Solución:

(1°) Por ser una equivalencia, asignemos valores:

$\Rightarrow\ a=b=c=1$

$\Rightarrow\ 1+1+1=1(1+1+1)^{m-6};\ 3^{1}=3^{m-6}\ ;\ 1=m-6$

$\Rightarrow\ \boxed{m=7}$

(2°) Sustituyendo el valor hallado:

$$a^{p}\,b^{7+n}\,c^{n+4}+a^{20}\,b^{p+1}\,c^{n+p}+a^{p}\,b^{5}\,c^{n+13}=a^{4}\,b^{n-8}\,c^{17}\left(a^{16}+b^{n+2}+c^{3}\right)^{1}$$

Obsérvese que el mcd contiene al término a^4 el cual fue elegido por ser común y tener el menor exponente.

$\Rightarrow\ \text{mcd}\,(a^{p}, a^{20}, a^{p})=a^{p}=a^{4}\ ;$

$\Rightarrow\ \boxed{p=4}$

(3°) Sustituyendo el valor hallado y ejecutando la multiplicación:

$\Rightarrow\ a^{4}\,b^{7+n}\,c^{n+4}+a^{20}\,b^{5}\,c^{n+4}+a^{4}\,b^{5}\,c^{n+13}=a^{20}\,b^{n-8}\,c^{17}+a^{4}\,b^{2n-6}\,c^{17}+a^{4}\,b^{n-8}\,c^{20}$

(4°) En la identidad lograda, podemos igualar: $a^{20}\,b^{5}\,c^{n+4}=a^{20}\,b^{n-8}\,c^{17}$

$\Rightarrow\ 5=n-8\ ;\ n=13$ ó

$\Rightarrow\ n+4=17\ ;\ n=13$

$\therefore\ \boxed{m=7\ ,\ n=13\ ,\ p=4}$

7.7.2 Factorización por Asociación

Se realiza luego de comprobar la ausencia de factores comunes, los cuales se deberán de construir a partir de los sumandos:

(1°) Se asocian dos términos, creándose de este modo un factor de referencia.

(2°) Se asocian los términos restantes tratando de formar factores iguales al de la referencia.

(3°) El método concluye si se logran el factor común.

(4°) El método no concluye si no se se logra obtener factor común, por lo que se deberán asociar parejas o trinomios diferentes.

7.7.2.1 **Ejemplo Explicativo:**

Factorizar: $a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc$

Solución:

(1°) **Asociando** dos términos en razón a no tener factor común inmediato.

$\Rightarrow \underbrace{a^2 b + a^2 c} + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc$

$\Rightarrow a^2(\underline{\underline{b + c}}) + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc$

(2°) **$(b + c)$ es el factor de referencia y establece que los términos restantes se asocien en función a la misma**

$\Rightarrow a^2 (b + c) + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc$

$\Rightarrow a^2 (b + c) + bc (b + c) + a (b^2 + c^2 + 2bc)$

$\Rightarrow a^2 (b + c) + bc (b + c) + a (b + c)^2$; se obtuvo el factor común

(3°) Al extraer $(b + c)$:

$\Rightarrow (b + c) [a^2 + bc + a (b + c)]$

$\Rightarrow (b + c) [a (a + b) + c (a + b)]$

extrayendo $(a + b)$ y ordenando

$\therefore \boxed{(a + b)(b + c)(c + a)}$

7.7.3. Factorización de Expresiones Notables

Esta metodología se utiliza cuando se reconocen los productos notables como la estructura de la polinómica en estudio, por lo que tendremos en consideración los siguientes productos notables más usuales.

7.7.3.1 **Diferencia de Cuadrados.**

Se denomina así a toda expresión de la forma: $a^2 - b^2$

Equivalencia: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Regla Semántica:

$$\begin{matrix}\text{Diferencia de}\\ \text{dos cuadrados}\end{matrix} = \begin{pmatrix}\text{Suma de las}\\ \text{raíces cuadradas}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Diferencia de las}\\ \text{raíces cuadradas}\end{pmatrix}$$

7.7.3.1.1 **Ejemplo**

Factorizar: $a^2 b^2 - x^4y^4$

Solución:

De acuerdo a la regla Semántica.

(1°) Raíces Cuadradas:

De: $a^2 b^2 \Rightarrow ab$

De: $x^4 y^4 \Rightarrow x^2 y^2$

(2°) La suma de raíces serán: $ab + x^2 y^2$

La diferencia de raíces serán: $ab - x^2 y^2$

$\therefore \boxed{a^2 b^2 - x^4 y^4 = (ab + x^2y^2)(ab - x^2 y^2)}$

7.7.3.1.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $25(9x^2 - 121b^2)a^2 - 36(9x^2 - 121b^2)b^{10}$

Solución:

(1°) Se observa que los términos de la polinómica tienen por mcd a $(9x^2 - 121b^2)$ o corrientemente el factor común.

(2°) Extrayendo el factor señalado

$\Rightarrow (9x^2 - 121b^2)[25a^2 - 36b^{10}]$

En esta última se observan que ambos factores ofrecen diferencias de cuadrados por lo que sus raíces cuadradas: $3x$, $11b$, $5a$ y $6b^5$ permiten:

$\therefore \boxed{(3x + 11b)(3x - 11b)(5a + 6b^5)(5a - 6b^5)}$

COROLARIO DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS:

7.7.3.2 **La Terna Geométrica:**

Se denomina de este modo al trinomio $x^{4m} + y^{4n} + x^{2m} y^{2n}$

En el cual se observan tres términos, de los cuales dos son una suma de potenciaciones de exponente par y el tercer término es la media geométrica entre las potencias mencionadas.

Equivalencia:

$$x^{4m} + y^{4n} + x^{2m} y^{2n} = (x^{2m} + y^{2n} + x^m y^n)(x^{2m} + y^{2n} - x^m y^n)$$

Regla Semántica:

$$\begin{matrix}\text{Terna}\\ \text{Geométrica}\end{matrix} = \left(\begin{matrix}\Sigma \text{ de raices cuadradas}\\ \text{de la terna geométrica}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{Terna geométrica}\\ \text{Conjugada}\end{matrix}\right)$$

Demostración: $x^{4m} + y^{4n} + x^{2m} y^{2n}$;

(1°) Agregando $x^{2m} y^{2n}$

$\Rightarrow \underbrace{x^{4m} + y^{4n} + 2x^{2m} y^{2n}} - x^{2m} y^{2n}$

Se observa un trinomio cuadrado perfecto

$\Rightarrow (x^{2m} + y^{2n})^2 - (x^m y^n)^2$

(2°) Se logra una diferencia de cuadrados que permite :

$\Rightarrow$ $(x^{2m} + y^{2n} + x^m y^n)(x^{2m} + y^{2n} - x^m y^n)$

$$\therefore \boxed{x^{4m} + y^{4n} + x^{2m} y^{2n} = (x^{2m} + y^{2n} + x^m y^n)(x^{2m} + y^{2n} - x^m y^n)}$$

7.7.3.2.1 ***Ejemplo:***

Factorizar: $x^4 + x^2 y^{24} + y^{48}$

Solución:

Se trata de una terna geométrica y se le reconoce por ser $x^2 y^{24}$ la media geométrica entre x^4 e y^{48}

$\Rightarrow$ de acuerdo a la regla semántica:

$$\therefore \boxed{x^4 + x^2 y^{24} + y^{48} = (x^2 + x y^{12} + y^{24})(x^2 - xy^{12} + y^{24})}$$

Es la Σ de las raíces cuadradas

Esta representa la conjugada pues la media geométrica es el opuesto.

7.7.3.2.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^{16} + b^{56} + x^8 b^{28}$

Solución:

(1°) Por ser una terna geométrica y de acuerdo a la regla semántica:

$$\underbrace{(x^8 + b^{28} + x^4 b^{14})}_{A}\underbrace{(x^8 + b^{28} - x^4 b^{14})}_{B}$$

(2°) El producto de ternas geométricas muestra el factor "A" que es también factorizable como una terna geométrica lo cual no ocurre con "B" pues resulta prima.

$\Rightarrow$ $A = x^8 + b^{28} + x^4 b^{14} = (x^4 + b^{14} + x^2 b^7)(x^4 + b^{14} - x^2 b^7)$

$$\therefore \boxed{\underbrace{(x^4 + b^{14} + x^2 b^7)}_{C}\underbrace{(x^4 + b^{14} - x^2 b^7)}_{D}\underbrace{(x^8 + b^{28} - x^4 b^{14})}_{E}}$$

Se observa que siendo "C" una terna geométrica, esta no es factorizable racionalmente; reiterando que las ternas geométricas conjugadas son primas entre sí.

7.7.3.2.3 **Ejemplo:**

Factorizar: $-16a^4 b^4 - 256a^8 - b^8$

Solución:

(1°) Al extraer el signo (-) se observa $-[16a^4 b^4 + 256a^8 + b^8]$ una terna geométrica

$$\Rightarrow -[4a^2b^2 + 16a^4 + b^4][-4a^2b^2 + 16a^4 + b^4]$$

(2°) Factorizando la 1ra de las ternas geométricas.

$$\therefore \boxed{-(2ab + 4a^2 + b^2)(-2ab + 4a^2 + b^2)(-4a^2b^2 + 16a^4 + b^4)}$$

Recuerde que la terna geométrica permite abreviar la factorización si se tiene la seguridad correspondiente, por ejemplo:

$x^4 + 9b^4 + x^2b^2$ **no es** una terna geométrica

7.7.3.3 **Trinomio Cuadrado Perfecto:**

Se denomina así a toda expresión de la forma: $x^{2m} + 2x^m y^n + y^{2n}$

En la cual se observan 3 términos, entre ellos dos son cuadrados perfectos y el tercero es el doble (u opuesto del doble) de la media geométrica de los 2 primeros:

Equivalencia:

$$x^{2m} \pm 2x^m y^n + y^{2n} = (x^m \pm y^n)^2$$

Regla Semántica:

$$\text{Trinomio cuadrado perfecto} = \left(\begin{array}{c}\text{Suma de las raíces cua-}\\ \text{dradas de los términos}\\ \text{cuadrados perfectos}\end{array}\right)^2$$

7.7.3.3.1 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $2a^{24}b^{31} + a^{48} + b^{62}$

Solución:

(1°) Se trata de un trinomio cuadrado perfecto pues $2a^{24}b^{31}$ es la media geométrica entre a^{48} y b^{62} ; $2\sqrt{a^{48}b^{62}} = 2a^{24}b^{31}$

(2°) De acuerdo a la regla semántica las raíces cuadradas serán: a^{24} y b^{31}

$$\Rightarrow \boxed{2a^{24}b^{31} + a^{48} + b^{62} = (a^{24} + b^{31})^2}$$

7.7.3.3.2 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $25a^2 + 36b^2 + 60ab$

Solución:

(1°) Los términos cuadráticos perfectos son $25a^2$ y $36b^2$

$$\Rightarrow MG(25a^2, 36b^2) = \sqrt{(25a^2)(36b^2)}$$

$$= 30ab$$

$\Rightarrow$ 2MG ($25a^2$, $36b^2$) = 60 ab

$\Rightarrow$ $25a^2 + 36b^2 + 60$ ab es un trinomio cuadrado perfecto

(2°) De acuerdo a la regla semántica: 5a y 6b son las raíces:

$\Rightarrow \boxed{25a^2 + 36b^2 + 60ab = (5a + 6b)^2}$

7.7.3.3.3 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $a^2 - b^2 + x^2 - z^2 + 2(ax - bz)$

Solución:

(1°) Al estudiar el polinomio, se puede desprender lo siguiente:

$\Rightarrow a^2 - b^2 + x^2 - z^2 + 2ax - 2bz$; que al asociar:

$$\Rightarrow \underbrace{a^2 + x^2 + 2ax}_{\substack{\text{Trinomio}\\ \text{Cuadrado}\\ \text{Perfecto}}} \underbrace{- b^2 - z^2 - 2bz}_{\substack{\text{Contiene un trinomio}\\ \text{Cuadrado Perfecto}}}$$

$\Rightarrow (a + x)^2 - (b + z)^2$

(2°) Se logra una diferencia de cuadrados y de acuerdo a la regla semántica.

$\Rightarrow [(a + x) + (b + z)][(a + x) - (b + z)]$

Descartando los corchetes, se tendrán los factores primos.

$\therefore \boxed{(a + b + x + z)(a + x - b - z)}$

7.7.3.3.1 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $4a^2x^2 - \left(a^2 + x^2 - y^2\right)^2$

Solución:

(1°) Al realizar la ordenación, se logra: $(2ax)^2 - (a^2 + x^2 - y^2)^2$

(2°) Por ser una diferencia de cuadrados y de acuerdo a la regla semántica.

$$[2ax + (a^2 + x^2 - y^2)][2ax - (a^2 + x^2 - y^2)]$$

(3°) Al estudiar cada factor se obtienen:

$$[\underbrace{a^2 + x^2 + 2ax}{} - y^2][\underbrace{2ax - a^2 - x^2}{} + y^2]$$

$\Rightarrow$ $[(a + x)^2 - y^2][y^2 - (a - x)^2]$

(4°) Factorizando las diferencias de cuadrados

$\therefore \boxed{(a + x + y)(a + x - y)(y + a - x)(y - a + x)}$

7.7.3.4 **Suma de Cubos**

Se denomina así a toda expresión de la forma: $a^3 + b^3$

Equivalencia: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Regla Semántica

$$\text{Suma de los cubos de a y b} = \left(\text{Suma de las raíces cúbicas de } a^3 \text{ y } b^3\right)\left(\text{Tema Geométrica conjugada entre a y b}\right)$$

7.7.3.4.1 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $x^9 + y^{21}$

Solución:

(1°) Se trata de una suma de cubos debido a:

raíz cúbica de $(x^9) = x^3$

raíz cúbica de $(y^{21}) = y^7$

(2°) De acuerdo a la regla semántica establecemos la factorización en base a las raíces **cúbicas.**

$$\Rightarrow x^9 + y^{21} = \underbrace{(x^3 + y^7)}_{\Sigma \text{ de raíces cúbicas}}\left[\underbrace{(x^3)^2 - (x^3)(y^7) + (y^7)^2}_{\text{Tema geométrica conjugada}}\right]^1$$

$$\therefore \boxed{x^9 + y^{21} = (x^3 + y^7)(x^6 - x^3y^7 + y^{14})}$$

Diferencia de Cubos

Se denomina así a toda expresión de la forma: $a^3 - b^3$

Equivalencia:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Regla Semántica:

$$\left(\text{Diferencia de los cubos de "a" y "b"}\right) = \left(\text{Diferencia de las Raíces cúbicas de } a^3 \text{ y } b^3\right) \times \left(\text{Tema geométrica entre a y b}\right)$$

7.7.3.4.2 **Ejemplo**

Factorizar: $a^{33} - b^{45}$

Solución:

(1°) Se trata de una diferencia de los cubos de a^{11} y b^{15} pues:

raíz cúbica de $(a^{33}) = a^{11}$

raíz cúbica de $(b^{45}) = b^{15}$

(2°) De acuerdo a la regla semántica para la diferencia de cubos.

$$\Rightarrow \quad a^{33} - b^{45} = \underbrace{\left(a^{11} - b^{15}\right)}_{\substack{\text{Diferencia de las}\\ \text{raices cúbicas}}}\left[\left(a^{11}\right)^2 + \underbrace{\left(a^{11}\right)\left(b^{15}\right)}_{\substack{\text{Media Geométrica entre los}\\ \text{cuadrados de las raices}\\ \text{cúbicas } (a^{11} \text{ y } b^{15})}} + \left(b^{15}\right)^2\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{a^{33} - b^{45} = (a^{11} - b^{15})(a^{22} + a^{11}b^{15} + b^{30})}$$

Obsérvese que de factorizar la terna geométrica los factores serían irracionales:

$$a^{22} + a^{11}b^{15} + b^{30} = \left(a^{11} + \sqrt{a^{11}b^{15}} + b^{15}\right)\left(a^{11} - \sqrt{a^{11}b^{15}} + b^{15}\right)$$

Ejemplo:

Factorizar: $a^6 - b^6$

Solución:

(1°) Por ser una diferencia de los cubos de a^2 y b^2 y mediante la regla semántica:

$$\Rightarrow a^6 - b^6 = \underbrace{(a^2 - b^2)}_{\substack{\text{Diferencia de las}\\ \text{raices cúbicas}}}\underbrace{(a^4 + a^2b^2 + b^4)}_{\substack{\text{Terna Geométrica entre}\\ \text{cuadrados de } a^2 \text{ y } b^2}}$$

(2°) Examinando los factores encontramos que ambos son factorizables.

$$\therefore \quad a^8 - b^6 = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\substack{\text{Por ser una dif.}\\ \text{de cuadrados}}}\underbrace{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}_{\substack{\text{Originado por la}\\ \text{terna geométrica}}}$$

7.7.3.5 La Diferencia de Potenciaciones de Igual Exponente

Se denomina de este modo a toda expresión de la forma: $a^n - b^n$

Equivalencia:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + b^{n-1}),\ \forall\, n \in \mathbb{N} \geq 2$$

Obtenido de acuerdo a la regla de las divisiones notables

Regla Semántica:

$$\begin{matrix}\text{Diferencia de}\\ \text{potencias}\end{matrix} = \left(\begin{matrix}\text{diferencia de las raices}\\ \text{enésimas de } a^n \text{ y } b^n\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Serie Geométrica de n términos de}\\ \text{razón } \dfrac{\text{"b"}}{\text{a}}\text{, primer término } a^{n-1} \text{ y de}\\ \text{último término } b^{n-1}\end{matrix}\right)$$

Comentario:

La diferencia de potencias $a^n - b^n$ posee siempre como factor a la diferencia de sus raíces enésimas $(a - b) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

7.7.3.5.1 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^7 - y^7$

Solución:

(1°) Se tienen las raíces séptimas x, y.

(2°) De acuerdo a la regla semántica

$$\Rightarrow\ x^7 - y^7 = (x - y) (x^6 + x^5 y + x^4 y^2 + x^3 y^3 + x^2 y^4 + xy^5 + y^6)$$

7.7.3.5.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^{28} - y^{36}$

Solución:

(1°) Para tener la posibilidad de aplicar la factorización de la diferencia de potenciaciones será necesario que los exponentes no sean primos entre sí:

$$\Rightarrow\ \text{MCD}\,(28, 36) = 4$$

(2°) La expresión consignada será equivalente a:

$$\Rightarrow\ \left(x^7 \right)^4 - \left(y^9 \right)^4$$

(3°) De acuerdo a la regla semántica:

$$\left(x^7 \right)^4 - \left(y^9 \right)^4 = \left(x^7 - y^9 \right)\left[\left(x^7 \right)^3 + \left(x^7 \right)^2\left(y^9 \right) + \left(x^7 \right)^1\left(y^9 \right)^2 + \left(y^9 \right)^3 \right]$$

$$\Rightarrow\ x^{28} - y^{36} = \left(x^7 - y^9 \right)\left[x^{21} + x^{11} y^9 + x^7 y^{18} + y^{27} \right]$$

(4°) Asociando entre los términos contenidos en el corchete:

$$\underbrace{x^{21} + x^{14}}\, y^9 + x^7 \underbrace{y^{18} + y^{27}}$$

$$\Rightarrow\ x^{14} (x^7 + y^9) + y^{18} (x^7 + y^9),\ \text{factor común}\ (x^7 + y^9)$$

$$\Rightarrow\ (x^7 + y^9) (x^{14} + y^{18})$$

(5°) Restituyendo la factorización realizada

$$\therefore\ \boxed{x^{28} - y^{36} = (x^7 - y^9) (x^7 + y^9) (x^{14} + y^{18})}$$

Comentario:

Otra alternativa de factorización propuesta es concebirla como una diferencia de cuadrados.

$$\Rightarrow x^{28} - y^{36} = (x^{14} + y^{18}) \underbrace{(x^{14} - y^{18})}_{\substack{\text{Es una nueva diferencia de} \\ \text{cuadrados: } (x^7 + y^9)(x^7 - y^9)}}$$

$$\therefore \boxed{x^{28} - y^{36} = (x^7 - y^9)(x^7 + y^9)(x^{14} + y^{18})}$$

7.7.3.6 **La Suma de Potenciaciones de Igual Exponente.**

Se denomina de este modo a toda expresión de la forma:

$$a^n + b^n \ ; \ n \geq 3$$

Equivalencia:

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + b^{n-1})$ $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ impares}}$

obtenido de acuerdo a la regla de divisiones notables

Regla Semántica:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma de} \\ \text{Potencias}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Suma de las raíces} \\ \text{enésimas de "a" y "b"}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{Serie geométrica de } \textbf{signos} \\ \textbf{alternados de n términos de} \\ \text{razón } \dfrac{\text{"b"}}{\text{a}}\text{, de primer término} \\ a^{n-1} \text{ y último término } b^{n-1}\end{array}\right)$$

Comentario:

La suma de enésimas potencias **impares** posee siempre como factor a la suma de las raíces enésimas $(a + b)$

7.7.3.6.1 **Ejemplo**

Factorizar: $x^5 + y^5$

Solución:

(1°) Se tienen las raíces quintas de las potencias, x e y

(2°) De acuerdo a la regla semántica

$$\therefore \boxed{x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)}$$

7.7.3.6.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^{40} + b^{65}$

Solución:

(1°) Obtenemos el MCD (40, 65) = 5

$\Rightarrow (x^8)^5 + (y^{13})^5$, es una suma de quintas potencias.

(2°) De acuerdo a la regla semántica

$$(x^8+y^{13})\left[(x^8)^4-(x^8)^3(y^3)+(x^8)^2(y^3)^2-(x^8)(y^3)^3+(y^3)^4\right]$$

$$\therefore \boxed{x^{40}+y^{65} = (x^6+y^{13})(x^{32}-x^{24}y^3+x^{16}y^6-x^8y^9+y^{12})}$$

7.7.3.7 **Trinomio Mónico**

Se denomina de este modo a la expresión de la forma:

$$x^{2m}+(a+b)x^m+ab$$

Equivalencia

$$x^{2m}+(a+b)x^m+ab = (x^m+a)(x^m+b)$$

Regla Semántica

(Trinomio mónico de **coeficientes suma y término independiente producto de a y b respectivamente**)	=	(Producto de dos binomios mónicos con términos independientes que verifican la suma y productos de a y b respectivamente)

Comentario:

Recuerde que un polinomio se denomina mónico cuando el coeficiente principal es la unidad.

Asimismo, se denomina trinomio a todo polinomio de la forma: $ax^{2m}+bx^m+c$

7.7.3.7.1 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^2+17x+72$

Solución:

(1°) Por ser un trinomio mónico, ubiquemos un par de números cuya suma sea 17 y que multiplicados originen 72; dichos números son: 8 y 9.

(2°) De acuerdo a la regla semántica y la equivalencia establecida, los factores serán: $(x+9)(x+8)$

$$\therefore \boxed{x^2+17x+72 = (x+9)(x+8)}$$

7.7.3.7.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^6-28x^3b^9+27b^{18}$

Solución:

(1°) En el trinomio mónico $x^6-(28b^9)x^3+(27b^{18})$

(2°) Los términos que verifican los coeficientes son: $-27b^9$ y $-b^9$

pues: producto : $27\,b^{18}$

suma : $-28\,b^9$

$$\Rightarrow x^6 - (28\,b^9)\,x^3 + (27\,b^{18}) = (x^3 - b^9)(x^3 - 27b^9)$$

(3°) Cada uno de los factores hallados son suma de cubos

$$\Rightarrow \quad x^3 - b^9 = (x - b^3)(x^2 + xb^3 + b^6)$$

$$\Rightarrow x^3 - 27b^9 = (x - 3b^3)(x^2 + 3xb^3 + 9b^6)$$

Por lo que los factores primos serán:

$$\therefore \boxed{(x - b^3)(x - 3b^3)(x^2 + xb^3 + b^6)(x^2 + 3xb^3 + 9b^6)}$$

7.7.3.7.3 **Ejemplo:**

Factorizar: $(x^4 + x^2)^2 - 44(x^4 + x^2) + 84$

Solución:

(1°) La expresión adopta la forma de un trinomio mónico

$\Rightarrow$ los números que verifican la condición suma-producto son: -42 y -2

(2°) De acuerdo a lo establecido

$$[(x^4 + x^2) - 42][(x^4 + x^2) - 2]$$

(3°) Investigando los factores hallados, percibimos nuevos trinomios mónicos.

$$\Rightarrow \underbrace{(x^4 + x^2 - 42)}_{7\ y\ -6}\underbrace{(x^4 + x^2 - 2)}_{2\ y\ -1}$$

$$\Rightarrow (x^2 + 7)(x^2 - 6)(x^2 + 2)(x^2 - 1)$$

$$\therefore \boxed{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 7)(x^2 - 6)}$$

7.7.4. Factorización por la Regla de Aspas

Justificación. Para ejecutar el axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma se dispone de una variedad de reglas entre ellas lo que ilustramos a continuación:

7.7.4.1 ***Ejemplo:***

Ejecutar la sentencia: $(7x + 3)(9x + 2)$

Solución:

(1°) (Mediante el axioma de distribución)

$$(7x + 3)(9x + 2) = (7x + 3)\,9x + (7x + 3)\,2$$

(2°) Nuevamente el axioma de distribución

$$= (7x+3)\,9x + (7x+3)\,2$$

$$= 63x^2 + 27x + 14x + 6$$

$\therefore$ $\boxed{(7x+3)(9x+2) = 63x^2 + 41x + 6}$

Solución: **(Mediante la regla de aspas)**

1) Columnas:

$$\begin{array}{ccccc} 7x & + & 3 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 9x & + & 2 & & \\ \hline 63x^2 & + & 6 & + & \mathbf{41x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 7x & + & 3 \\ & \times & \\ 9x & + & 2 \end{array}$$

2) aspas: $14x + 27x$

41x

$\therefore$ $\boxed{(7x+3)(9x+2) = 63x^2 + 41x + 6}$

(3°) ***Conclusión:***

Los trinomios resultan de multiplicar dos binomios mediante aspas **cuyos términos principal e independiente provienen de las columnas, mientras que el término central es una combinación binaria del producto de aspas.**

Es decir:

$$63x^2 + 41x + 6$$

Provienen de las columnas

Proviene de la combinación binaria de las aspas

Comentario:
Esta metodología del aspa origina el método de aspas en la factorización de trinomios.

7.7.4.1.2

Ejemplo:
Factorizar: $217x^3 - 8 - 27x^6$

Solución:

(1°) Por ser un trinomio y de acuerdo a la regla del aspa e identificando el término principal e independiente.

Descomponiendo el término principal y el término independiente.

$$217x^3 \quad -8 \quad -27x^6$$

$$\left\{\begin{array}{cc} -8 & x^3 \\ 1 & -27x^3 \end{array}\right\}$$

(2°) Realizamos el producto de aspas; la suma algebraica debe de verificar el tercer término.

$$\begin{array}{ccccc} -8 & & x^3 & \Rightarrow & x^3 \\ & \times & & & \\ 1 & & 27x^3 & \Rightarrow & \underline{216x^3} \\ & & & & 217x^3 \end{array}$$

(3°) Los factores serán:

$\Rightarrow (-8 + x^3)(1 - 27x^3)$

$\Rightarrow (x^3 - 8)(1 - 27x^3)$ se observan diferencias cúbicas

$\Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(1 - 3x)(1 + 3x + 9x^2)$

$\therefore \boxed{217x^3 - 8 - 27x^6 = -(x - 2)(3x - 1)(x^2 + 2x + 4)(9x^2 + 3x + 1)}$

7.7.4.1 **Regla de Aspa Simple**

Se utiliza para factorizar trinomios y debe de seguirse la siguiente secuencia:

1°) Se descomponen el término principal e independiente.

2°) Se realiza las combinaciones binarias en aspas de modo que se verifique el tercer término.

Esquema: Sea el trinomio:

$$\underbrace{A_1 x^{2m}} + A_2 x^m + \underbrace{A_3}$$

(1°) Se descomponen los términos.

(2°) $A_2 x^m$ se verifica mediante alguna de las combinaciones binarias entre las descomposiciones.

7.7.4.1.1 **Ejemplo**

Factorizar: $21x^2 + 31x + 4$

Solución:

(1°) Por ser un trinomio, apliquemos la regla de aspas.

I) Se descomponen los términos principal e independiente.

$$\begin{array}{cc} 21x^2 + & 31x + 4 \\ \downarrow & \downarrow \\ 7x & 1 \\ 3x & 4 \end{array}$$

II) Se realiza el producto en aspas o combinación binaria que verifica el tercer término.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 7x & & 1 & \Rightarrow & 3x \\ & \times & & & \\ 3x & & 4 & \Rightarrow & \underline{28x} \\ & & & & 31x \end{array}\right.$$

(2°) En consecuencia los factores serán:

$\therefore \boxed{21x^2 + 31x + 4 = (7x+1)(3x+4)}$

Comentario:

La metodología explicada es justamente contraria al método de aspas para la multiplicación de binomios.

7.7.4.2 Regla de Aspa Doble

Se utiliza para factorizar polinomios de 6 términos de la forma.

$$A x^{2m} + B y^{2n} + C z^{2p} + D x^m y^n + E x^m y^p + F y^n z^p$$

Descripción:

I) A, B, C, D, E, F, son coeficientes reales

II) $A x^{2m}$, $B y^{2n}$, $C z^{2p}$ son los términos directrices de grado par

III) $D x^m y^n$, $E x^m y^p$, $F y^n z^p$, son las combinaciones binarias de las raíces **cuadradas** de los términos de grado par.

Ejemplos:

Son polinomios de las características descritas.

i) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

ii) $6x^2 + 15y^2 + 12 + 19xy - 18x - 29y$; $z = 1$

iii) $12a^4b^2 - 15a^2c^4 - 42b^2c^6 + 3a^3bc^2 + 53abc^5 + 10a^2b^2c^3$

iv) $16a^2 - 18b^2 - 6ab + 10ac - 15bc$; c^2 posee coeficiente **nulo.**

7.7.4.2.1 Regla de Factorización por Aspa Doble

(I) Se descomponen los términos diréctrices de grado par.

(II) Se verifican los términos de las combinaciones binarias mediante **las aspas** correspondientes.

(III) Los factores así reconstruidos se toman horizontalmente.

7.7.4.2.1 Ejemplo Explicativo

Factorizar: $a^2 + b^2 + c^2 + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc}$

Solución:

(1°) Al identificar los términos del polinomio:

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\substack{\text{términos directrices}\\ \text{de grado par}}} + \underbrace{2ab + 2ac + 2bc}_{\substack{\text{combinaciones}\\ \text{binarias}}}$$

(2°) De acuerdo a la regla de factorización:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\begin{matrix} a & b \\ \underbrace{a \quad b} & \end{matrix}$$

Se descomponen los términos directrices para verificar la combinación binaria correspondiente

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\begin{matrix} a & b & \Rightarrow ab \\ a & b & \Rightarrow ab \\ & & \overline{2ab} \end{matrix}$$

Se está verificando la combinación binaria en "2ab"; para lograr las otras combinaciones binarias se deberá seguir descomponiendo el término directriz en "c^2"

(3°) $$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\begin{matrix} a & b & c & \Rightarrow bc \\ a & b & c & \Rightarrow bc \\ & & & \overline{2bc} \end{matrix}$$

Se está verificando la combinación binaria en 2bc; falta verificar la combinación binaria en "2ac"

(4°) $$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\begin{matrix} a & b & c & \Rightarrow ac \\ a & b & c & \Rightarrow ac \\ & & & \overline{2ac} \end{matrix}$$

Se está verificando la combinación binaria en "2ac"

Finalmente la descomposición y las verificaciones permiten tener los factores como:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2b + 2ac + 2bc$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)(a+b+c) = (a+b+c)^2}$$

7.7.4.2.1.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $12a^4 b^2 - 15a^2c^4 - 42b^2c^6 + 3a^3bx^2 + 53abc^5 + 10a^2b^2c^3$

Solución:

(1°) Descomponiendo los términos directrices de grado par **luego de ser identificados** (*) para verificar las combinaciones binarias tendremos:

$$\begin{array}{cccccc} (*) & (*) & (*) & & & \\ 12a^4b^2 & -15a^2c^4 & -42b^2c^6 & +3a^3bc^2 & +53abc^5 & +10a^2b^2c^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3a^2b & -3ac^2 & 7bc^3 \\ 4a^2b & 5ac^2 & -6bc^3 \end{array}$$

1^{ra} Aspa — 2^{da} Aspa

3^{ra} Aspa

$\therefore$ $\boxed{(3a^2b - 3ac^2 + 7bc^3)(4a^2b + 5ac^2 - 6bc^3)}$

(2°) De acuerdo al esquema, describiremos lo siguiente:

1° ASPA: $(3a^2b)(5ac^2) = 15a^3bc^2$

$$\begin{array}{r} 15a^3bc^2 \\ -12a^3bc^2 \\ \hline 3a^3bc^2 \end{array} \quad ; \exists! \text{ "}3a^3bc^2\text{"}$$

Sólo luego de esta 1^{ra} verificación podemos pasar a la 2^{da} aspa; en caso contrario se trata de realizar otras combinaciones binarias apropiadas.

2° ASPA:

$$\begin{array}{lcr} (-3ac^2)(-6bc^3) & = & 18abc^5 \\ (5ac^2)(7bc^3) & = & 35abc^5 \\ \hline & & 53abc^5 \end{array} \quad ; \exists! \text{ "}53abc^5\text{"}$$

Sólo luego de esta 2^{da} verificación podemos pasar a la 3^{ra} aspa, en caso contrario se tratará de realizar otras combinaciones binarias apropiadas.

3° ASPA:

$$\begin{array}{lcr} (3a^2b)(-6bc^3) & = & -18a^2b^2c^3 \\ (4a^2b)(7bc^3) & = & 28a^2b^2c^3 \\ \hline & & 10a^2b^2c^3 \end{array}$$

Una vez verficados todas las combinaciones binarias podremos escribir los factores arriba anotados como:

$\therefore$ $(3a^2b - 3ac^2 + 7bc^3)(4a^2b + 5ac^2 - 6bc^3)$

7.7.4.1.3 **Ejemplo:**

Factorizar:	$6x^2 + 15y^2 + 12 + 19xy - 18x - 29y$

Solución

(1°) En este caso la tercera variable "z" asumió el valor 1 por lo que el término en 12 será considerado como el que complete el trio de términos directrices (*)

$$\Rightarrow \overset{*}{6x^2} + \overset{*}{15y^2} + \overset{*}{12} + 19xy - 18x - 29y$$

(2°) Luego de descomponer los términos directrices y verificar las combinaciones binarias tendremos:

* * *

$6x^2 + 15y^2 + 12 + 19xy - 18x - 29y$

$$\begin{array}{ccc} 3x & 5y & -3 \\ 2x & 3y & -4 \end{array}$$

1ra Aspa 2da Aspa

3er Aspa

Ejecutando las combinaciones binarias:

1er Aspa: $(3x)(3y) = 9xy$

$(2x)(5y) = 10xy$

$\overline{\quad 19xy}$; $\exists!\ 19xy$ en el polinomio

2da Aspa: $(5y)(-4) = -20y$

$(3y)(-3) = -9y$

$\overline{\quad -29y}$; $\exists!\ -29y$ en el polinomio

3er Aspa: $(3x)(-4) = -12x$

$(2x)(-3) = -6x$

$\overline{\quad -18x}$; $\exists!\ -18x$ en el polinomio

$\therefore \boxed{6x^2 + 15y^2 + 12 + 19xy - 18x - 29y = (3x + 5y - 3)(2x + 3y - 4)}$

(1er) Comentario:

De acuerdo a lo señalado anteriormente y para ejecutar el axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma, se dispone también de la regla del aspa doble para la multiplicación que origina el método de factorización correspondiente.

7.7.4.2.14 **Ejemplo:**

Ejecutar: $(2a + 3b + 4c)(3a - 5b - 6c)$

Solución:

(1°) Por el axioma de distribución:

$$(2a + 3b + 4c)(3a) - (2a + 3b + 4c)(5b) - (2a + 3b + 4c)(6c)$$

(2°) Prosiguiendo con el axioma de distribución

$$6a^2 + 9ab + 12ac - 10ab - 15b^2 - 20bc - 12ac - 18bc - 24c^2$$

(3°) Simplificando: $6a^2 - 15b^2 - 24c^2 - ab - 38bc$

Solución:

Mediante la regla de aspas:

$$\begin{array}{ccc} 2a & +3b & +4c \\ 3a & -5b & -6c \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{6a^2 \ - 15b^2 \ - 24c^2}_{\text{columnas}} \qquad \underbrace{-ab \ - 38bc}_{\text{aspas}}$$

Cabe resaltar la simplicidad de la regla

Comentario:
La mayoría de los métodos expuestos tratan de evitar las asociaciones, o son utilizados luego de haberla descartado.

7.7.4.3 Factorización del Polinomo de 4to Grado P (x)

Método de Aspa.

Esta metodología permite factorizar polinomios de 4° grados ordenados y completos de la forma:

$$F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e\ , \quad a \neq 0$$

Donde:

"ax^4"y "c" : son los términos principal e independiente respectivamente (extremos).

"cx^2" : es el término cuadrático a sustituirse.

"bx^3" y "dx" : son las combinaciones binarias luego de la sustitución.

Regla:

(1°) Se descomponen los extremos de modo que el producto en aspas determine un término cuadrático (generalmente distinto al proporcionado por el polinomio).

(2°) Se obtiene "Δ" el cual resulta de la diferencia de los términos cuadráticos señalados en (1°); el término Δ sustituye al término cuadrático original.

$$\boxed{\Delta = cx^2 \text{ original } - ax^2 \text{ de aspas.}}$$

(3°) Luego de la sustitución se verifican mediante aspas las combinaciones binarias descritas. Los factores se adoptan horizontalmente.

7.7.4.3.1 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^4 + 13x^3 + 45x^2 + 20x + 2$

Solución:

(1°) Descomponemos los términos extremos y obtenemos el resultante de las aspas.

$$x^4 + 13x^3 + 45x^2 + 20x + 2$$

$$\left.\begin{array}{ccc} x^2 & & 1 \\ x^2 & & 2 \end{array}\right\} \text{Aspas} = 3x^2$$

(2°) Obtenemos Δ : $\Delta = \underbrace{45x^2}_{\text{Original}} - \underbrace{3x^2}_{\text{Aspas}} = 42x^2$

En el polinomio:

Sustituimos el término cuadrático original por el correspondiente a $\Delta = 42x^2$

$$\Rightarrow \quad x^4 + 13x^3 + 42x^2 + 20x + 2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & 1 \\ x^2 & & 2 \end{array}$$

(3°) Se deberá verificar $13x^2$ y $20x$ mediante la descomposición apropiada de $42x^2$

$$\Rightarrow \quad x^4 + 13x^3 + 42x^2 + 20x + 2$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & 7x & & 1 \\ x^2 & & 6x & & 2 \\ & (\mathrm{I}) & & (\mathrm{II}) & \end{array}$$

Aspa I: $6x^3 + 7x^3 = 13x^3$; $\exists!\ 13x^3$ en el polinomio

Aspa II: $14x + 6x = 20x$; $\exists!\ 20x$ en el polinomio

$\therefore \boxed{x^4 + 13x^3 + 45x^2 + 20x + 2 = (x^2 + 7x + 1)(x^2 + 6x + 2)}$

7.7.4.3.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $16x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 22x - 15$

Solución:

(1°) Obtenemos Δ :

$$16x^4 - 8x^3 - 16x^2 - 22x - 15$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 4x^2 & & 3 \\ 4x^2 & & -5 \end{array}\right\} \text{Aspas: } \begin{array}{r} 12x^2 \\ -20x^2 \\ \hline -8x^2 \end{array}$$

$$\Delta = -16x^2 - (-8x^2) = -8x^2$$

(2°) Realizando la sustitución:

$$16x^4 - 8x^3 - 8x^2 - 22x - 15$$

$$\begin{array}{ccccc} 4x^2 & & 2x & & 3 \\ 4x^2 & & -4x & & -5 \\ & (\mathrm{I}) & & (\mathrm{II}) & \end{array}$$

de (I) : $-16x^3 + 8x^3 = -8x^3$; $\exists!\ -8x^3$ en el polinomio

de (II) : $-10x - 12x = -22x$; $\exists!\ -22x$ en el polinomio

(3°) Los factores serán:

$$\boxed{(4x^2 + 2x + 3)(4x^2 - 4x - 5)}$$

7.7.5. Factorización por Evaluación

Esta metodología es el corolario del siguiente teorema:

Teorema del Factor:

Sea $F(x)$ una regla polinomial no nula, $x \in \mathbb{R}$

Si $F(a) = 0$; a es un cero de $F(x)$

$\Rightarrow (x - a)$ es un factor de $F(x)$

(1°) **Corolario del Teorema del Factor**

Sea $F(x)$ una regla polinomial no nula

Si: $F(a) = F(b) = F(c) = \ldots = 0$

$\Rightarrow \{(x-a) ; (x-b) ; (x-c) \ldots\}$ es el conjunto de factores de $F(x)$

(2°) **Corolario del Teorema del Factor**

Si la suma de coeficientes de una polinomial $F(x)$ es nulo

$\Rightarrow F(x)$ tiene el factor: $x - 1$

Comentarios:

(a) El teorema del factor permite obtener sólo factores binomiales de primer grado.

(b) El teorema en mención a su vez permite factorizar siempre que se conozca un cero o los ceros de la polinomial en estudio.

(c) El teorema del factor así como el de los corolarios mencionados permiten la factorización de polinomios mediante la regla de evaluación.

7.7.5.1 **Regla de Evaluación para la Factorización**

(1°) **Se obtienen los ceros de $F(x)$ mónico:**

Los ceros de $F(x)$ están contenidos en el conjunto de divisores del término independiente y se verifican por selección.

(2°) **Se degrada el polinomio $F(x)$ de grado n**

Si se conocen los ceros se trata de obtener mediante divisiones, un polinomio de grado "n - 1" o "n - 2".

7.7.5.1 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $F(x) = x^3 - x^2 - 66x + 216$

Solución:

De acuerdo a la regla de evaluación $F(x)$ deberá ser **Mónico**.

(1°) Ubicamos el término independiente: 216

$\Rightarrow$ Divisores $= \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 8, \pm 12, \ldots\}$

Por selección obtenemos el cero necesario

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -66 & 216 \\ x = 4 & \downarrow & 4 & 12 & -216 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 3 \quad -54} & & & 0 \end{array}$$

(2°) Se obtuvo un cero y a la vez se ha degradado el polinomio a uno de 2° grado.

$\Rightarrow (x-4)(x^2+3x-54)$

$\therefore \boxed{(x-4)(x-6)(x+9)}$

Recuerde:

Un polinomio $F(x)$ es mónico si el coeficiente principal del mismo es la unidad.

Ejemplo: $F(x) = 7x + 8 + x^3 + 9x^2$

Es mónico pues el término principal es x^3

7.7.6.2 Ejemplo Explicativo

Factorizar: $F(x) = x^3 - 111x + 110$

Solución:

(1°) Observemos que la suma de los coeficientes es cero: 1, - 111 y 110

$\Rightarrow$ De acuerdo al corolario un factor es: $(x-1)$ así mismo un cero del mismo es $x = 1$

(2°) Degradando mediante la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -111 & 110 \\ x = 1 & \downarrow & 1 & 1 & -110 \\ \hline & 1 & 1 & -110 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-110)$

$\therefore \boxed{(x-1)(x-10)(x+11)}$

7.7.6. Factorización de Polinomios Recíprocos

Definición: Una regla polinomial $F(x)$ se denomina recíproca si al ser ordenada sus coeficientes equidistantes son iguales.

Los ceros de una regla polinomial se caracterizan por ser recíprocas entre sí, por lo que la recíproca carece de ceros nulos.

Ejemplo:

Sea: $F(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

Es una regla polinomial recíproca, pues sus coeficientes equidistantes son iguales como se puede observar:

$$\Rightarrow \quad F(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$$

La principal propiedad de este tipo de polinomial es la de tener sus ceros recíprocos como puede ilustrarse:

$$S = \left\{-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}\right\}$$

son los ceros de $F(x)$.

Se distinguen dos clases de polinomios recíprocos:

a) **Polinomios Recíprocos de grado par**

Que se caracterizan por:

i) Se puede degradar a un polinomio de grado mitad, luego del cambio de variable.

$$x + \frac{1}{x} = y$$

ii) Todos los ceros son recíprocos entre sí.

b) **Polinomios Recíprocos de Grado impar.**

i) Posee siempre como factor a $(x+1)$ ó $(x-1)$ y el otro factor es también una recíproca pero de grado par.

ii) Los ceros de una recíproca de grado impar son recíprocas entre sí y contienen siempre entre ellos a 1 ó -1.

7.7.6.1 **Ejemplo Explicativo**

Sea $F(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$

cuyo conjunto de ceros es:

$$S = \left\{-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}, -1\right\}$$

Se destaca que la recíproca $P(x)$ de grado impar posee ceros recíprocos incluyendo a, -1; para factorizar un polinomio recíproco se utilizan las propiedades descritas anteriormente.

Ejemplo Explicativo

Factorizar: $P(x) = 2x^5 + 25x^4 + 72x^3 + 72x^2 + 25x + 2$

Solución:

(1°) Por ser una recíproca de grado impar tiene el factor $x+1$ pues $P(-1) = 0$, degradando mediante Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 2 & 25 & 72 & 72 & 25 & 2 \\ x = -1 & \downarrow & -2 & -23 & -49 & -23 & -2 \\ \hline & 2 & 23 & 49 & 23 & 2 & 0 \end{array}$$

(2°) Se dispone hasta el momento de los factores:

$(x+1)(2x^4+23x^3+49x^2+23x+2)$ .... (I)

(3°) Factorizando la recíproca de grado par:

$$2x^4+23x^3+49x^2+23x+2$$

Para realizar el cambio de variable característico, se extrae x^2 (la mitad del grado).

$$\Rightarrow \left[2x^2+23x+49+\frac{23}{x}+\frac{2}{x^2}\right]; \quad x \neq 0$$

(4°) Asociando en el corchete:

$$2x^2+\frac{2}{x^2}+23x+\frac{23}{x}+49$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+23\left(x+\frac{1}{x}\right)+49 \quad \text{..} \quad (\text{II})$$

(Perfil típico de una recíproca de grado par)

(5°) Hacemos el cambio:

$$x+\frac{1}{x} = y \; ; \; \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = y^2-2$$

(6°) Al sustituir en (II) los cambios realizados.

$\Rightarrow 2(y^2-2)+23(y)+49$

$\Rightarrow 2y^2+23y+45$

Es la polinómica degradada resultante de la recíproca de grado par

(3°) Factorizando:

$$2y^2+23y+45$$

$$\begin{array}{ccc} 2y & \diagdown\!\!\!\diagup & 5 \\ y & & 9 \end{array}$$

$\Rightarrow (y+9)(2y+5)$

(8°) Restituyendo la variable x

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}+9\right)\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right]$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+9x+1)}{x}\frac{(2x^2+5x+2)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}(x^2+9x+1)(2x+1)(x+2)$$

(9°) La factorización concluye si consideramos que los factores serán a partir de (I) y (II):

$$\underbrace{(x+1)\,x^2}\,.\,\underbrace{\frac{1}{x^2}\,(2x+1)(x+2)(x^2+9x+1)}$$

$$\therefore \boxed{(x+1)(x+2)(2x+1)(x^2+9x+1)}$$

7.7.7. Factorización de Polinomios Cíclicos

Definición.- Un polinomio homogéneo de dos o más variables se denomina cíclico, si al permutar dos de sus variables, el valor absoluto no se altera.

Ejemplo: Sea $F(a,b) = a^2b + b^2a + a^3 + b^3$

$\Rightarrow F(b,a) = b^2a + a^2b + b^3 + a^3$

$\Rightarrow F(a,b) = F(b,a)$

$\therefore$ $\boxed{F(a,b) \text{ es un polinomio cíclico}}$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$

$\Rightarrow F(y,x,z) = (y-x)^5 + (x-z)^5 + (z-y)^5$

$\Rightarrow F(y,x,z) = -(x-y)^5 - (y-z)^5 - (z-x)^5$

$\Rightarrow F(x,y,z) = -\,F(y,x,z)$

$\therefore$ $\boxed{F(x,y,z) \text{ es un polinomio cíclico}}$

Propiedades de los Polinomios Cíclicos

- Si $F(a,b,c)$ es cíclica y posee como cero a "a", tendrá también como ceros a "b" y a "c"
- Si $F(a,b,c)$ es divisible entre $(a+b)$, será divisible entre $(b+c)$ y $(c+a)$
- Si $F(a,b,c)$ es divisible por $(a-b)$, será divisible por $(b-c)$ y $(c-a)$.

7.7.7.1 Representación de Polinomios Cíclicos

i) **Cíclicos de 2 variables**

de 1er grado: $A(x+y)$

de 2do grado: $A(x^2+y^2) + B(xy)$

de 3er grado: $A(x^3+y^3) + B(x^2y + xy^2)$

de 4to grado: $A(x^4+y^4) + B(x^3y + xy^3) + C(x^2y^2)$

ii) **Cíclicos de 3 Variables**

de 1er grado: $A(x+y+z)$ ó $A(\Sigma x)$

de 2do grado: $A(\Sigma x^2) + B(\Sigma xy)$

de 3er grado: $A(\Sigma x^3) + B(\Sigma x^2y) + C(xyz)$

de 4to grado: $A(\Sigma x^4) + B(\Sigma x^3y) + C(\Sigma x^2y^2)$

Regla de Factorización de un Polinomio Cíclico

a) Determinar si el polinomio es cíclico mediante la definición.

b) Al determinar **un cero** de la polinomial se pueden deducir los otros factores cíclicos.

c) Determinar los factores faltantes mediante el criterio de las equivalencias y la representación de un polinomio cíclico.

7.7.7.1.1 **Ejemplo:**

Factorizar: $F(x, y, z) = x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz$

Solución:

(1°) Determinemos si $F(x, y, z)$ es cíclica; para ello **permutamos** dos de sus variables de acuerdo a la definición:

$$\Rightarrow F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, z) = y^2(x+z) + x^2(y+z) + z^2(y+x) + 2yxz$$

$$\Rightarrow F(\mathbf{y}, \mathbf{x}, z) = F(x, y, z) \ ; \quad F(x, y, z) \text{ es cíclico.}$$

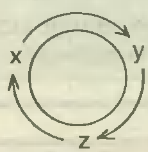
(2°) Obtenemos un cero de $F(x, y, z)$, para ello **experimentemos**: $x = -y$

$$\Rightarrow F(-y, y, z) = y^2(y+z) + y^2(-y+z) + z^2(0) - 2y^2z$$

$$\Rightarrow F(-y, y, z) = \underbrace{y^3 + y^2z - y^3}_{\text{opuestos}} + y^2z - 2y^2z$$

$$\Rightarrow F(-y, y, z) = 0$$

(3°) Un cero es $x = -y \Rightarrow$ un factor es $x+y$; los restantes se obtienen por la regla cíclica:



$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)$$

(4°) Mediante la equivalencia correspondiente verificamos:

$$\underbrace{x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz}_{\text{3er grado}} = \underbrace{k}_{\text{coeficiente}}\underbrace{(x+y)(y+z)(x+z)}_{\text{3er grado}}$$

(5°) Cálculo de "k" ; para ello asignamos: $x = y = z = 1$

$$\Rightarrow \ 1(2) + 1(2) + 1(2) + 2 = k(2)(2)(2)$$

$$8 = k(8) \ ; \quad k = 1$$

$$\therefore \ \boxed{x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz = (x+y)(y+z)(x+z)}$$

7.7.7.1.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $F(a, b, c) = a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

Solución:

(1°) Determinemos si $F(a, b, c)$ es cíclica; para ello permutamos dos de sus variables.

$\Rightarrow F(b, a, c) = b(a^3 - c^3) + a(c^3 - b^3) + c(b^3 - a^3)$

$\Rightarrow F(b, a, c) = -a(b^3 - c^3) - b(c^3 - a^3) - c(a^3 - b^3)$

$\Rightarrow F(a, b, c) = -F(b, a, c)$; **$F(a, b, c)$ es cíclico**

(2°) Obtenemos un cero del polinomio, para ello **experimentemos: $b = a$**

$\Rightarrow F(a, a, c) = a(a^3 - c^3) + a(c^3 - a^3) + c(0)$

$\Rightarrow F(a, a, c) = a(a^3 - c^3) - a(a^3 - c^3) = 0$

$\Rightarrow$ Un cero ocurre si $a = b$; luego un factor será : $(a - b)$

(3°) Por ser cíclico los otros factores serán: $(b - c)$ y $(c - a)$

(4°) Por ser $F(a, b, c)$ de 4° grado, colectamos los factores obtenidos y complementamos con uno de 1er. grado también cíclico.

$\Rightarrow (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

$\therefore \boxed{a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)}$

7.7.8 Factorización por adición y sustracción

Si luego de haber descartado los métodos anteriormente descritos, se intenta la metodología presente del modo siguiente:

a) **Si trata de adicionar una expresión que permita la obtención de un factor común, o de una expresión notable.**

b) **La adición mencionada debe estar apareada con el opuesto correspondiente de modo que no exista alteración de la expresión.**

7.7.8.1 Ejemplo:

Factorizar $a^3 + b^3$

sin el criterio de la suma de cubos.

Solución:

(1°) Adicionando $a^2b + ab^2$

$\Rightarrow a^3 + \underbrace{a^2b + ab^2} + b^3 - \underbrace{a^2b - ab^2}$

(2°) Al ordenar:

$\underbrace{a^3 - a^2b + ab^2} + \underbrace{a^2b - ab^2 + b^3}$

$\Rightarrow a(\mathbf{a^2 - ab + b^2}) + b(\mathbf{a^2 - ab + b^2})$

Como se observa la expresión: $a^2b + ab^2$ permitió obtener el factor común necesario.

$\therefore \boxed{(a^3 + b^3) = (a^2 - ab + b^2)(a + b)}$

7.7.8.2 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^7 + x^6 - x^5 - x^3 + 2x - 1$

Solución:

(1°) Si ordenamos el polinomio disociando $2x$

$$x^7 + x^6 - x^5 - x^3 + x + x - 1$$

(2°) Agregando los opuestos x^2y $- x^2$

$\Rightarrow x^7 + x^6 - x^5 - x^3 - x^2 + x + x + x^2 - 1$

Observemos que al asociar

$\Rightarrow x^5 \,(\mathbf{x^2 + x - 1}) - x\,(\mathbf{x^2 + x - 1}) + (\mathbf{x^2 + x - 1})$, $\exists$ factor común

$\therefore \boxed{(x^2 + x - 1)(x^5 - x + 1)}$

7.7.8.3 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^5 + x^4 - 2x^2 - 2x - 1$

Solución:

(1°) Si ordenamos el polinomio disociando $-2x^2$ y $-2x$

$\Rightarrow x^5 + x^4 - x^2 - x^2 - x - x - 1$

(2°) Agregando x^3 y $-x^3$ para realizar la ordenación:

$$x^5 + x^4 + \underbrace{x^3 - x^3}_{} - x^2 - x - x^2 - x - 1$$

$\Rightarrow$ Asociando: $x^3\,(x^2 + x + 1) - x\,(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1)$

$\therefore \boxed{(x^2 + x + 1)(x^3 - x - 1)}$

7.7.8.3 **Ejemplo**

Factorizar: $x^6 - x^2 - 2x - 1$

Solución:

(1°) Al ordenar y disociar $-2x$: $x^6 - x^2 - x - x - 1$

(2°) Al sumar $x^4 + x^3$ y el opuesto :

$\Rightarrow x^6 - x^4 - x^3 + x^4 - x^2 - x + x^3 - x - 1$

$\Rightarrow x^3\,(x^3 - x - 1) + x\,(x^3 - x - 1) + (x^3 - x - 1)$

$\therefore \boxed{(x^3 - x - 1)(x^3 + x + 1)}$

7.7.8.4 **Ejemplo:**

Factorizar: $x^{13} + x^8 - x^6 - x^2 - 2x - 1$

Solución:

(1°) Agregando x^7 y el opuesto correspondiente luego de disociar -2x

$\Rightarrow x^{13} + x^8 + x^7 - x^7 - x^2 - x - x^6 - x - 1$

(2°) Al asociar:

$$\underbrace{x^{13} + x^8 + x^7} - \underbrace{x^7 - x^2 - x} - \underbrace{x^6 - x - 1}$$

$\Rightarrow x^7 (x^6 + x + 1) - x (x^6 + x + 1) - (x^6 + x + 1)$

(3°) Extrayendo $(x^6 + x + 1)$

$\therefore \boxed{(x^6 + x + 1) (x^7 - x - 1)}$

7.9 **EL MAXIMO COMUN DIVISOR (MCD)**

Definición: El MCD de dos o más expresiones algebraicas enteras es otra expresión algebraica entera del mayor coeficiente y mayor grado posible contenido en cada una de ellas.

7.9.1 **Ejemplo:** Sea

$$E = a^2b^4c^3$$
$$F = a^3b^2c^5$$
$$\Rightarrow MCD = a^2b^2c^3$$

De acuerdo a la definición "$a^2b^2c^3$" es la expresión entera de mayor grado posible contenida en "F" y "E".

7.10 **EL MINIMO COMUN MULTIPLO (MCM)**

Definición: El Minimo Común Multiplo de dos o más expresiones enteras es otra expresión algebraica entera del menor coeficiente numérico y del menor grado grado posible que contiene exactamente a cada una de las expresiones dadas.

Ejemplo: Sean:

$$E = a^2b^4c^3$$
$$F = a^3b^2c^5$$
$$\Rightarrow MCM = a^3b^4c^5$$

De acuerdo a la definición "$a^3b^4c^5$" es la expresión del estrictamente mínimo grado posible que contiene a E y F.

Propiedades

(1°) Si dos o más expresiones algebraicas son primas entre sí.

$\Rightarrow \boxed{MCD_{(A,B)} = 1}$

(2°) Si A y B son dos expresiones algebraicas enteras.

$\Rightarrow \boxed{MCD_{(A,B)} \times MCM_{(A,B)} = A \times B}$

(3°) Si A y B son dos expresiones algebraicas no primas entre sí

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} A - B = MCD \text{ ó} \\ A - B \text{ Contiene al } MCD \end{array}}$

(4°) Toda expresión algebraica entera que divida a dos o más expresiones enteras, divide también a su MCD.

(5°) Si dos o más expresiones algebraicas enteras se multiplican o dividen por una misma cantidad, el MCD quedara multiplicado o dividido por la misma expresión.

(6°) Si dos o más expresiones algebraicas enteras se dividen por su MCD, los coeficientes serán primos entre si.

(7°) El MCD de dos o más expresiones algebraicas enteras no se altera aunque se multiplique o divida una de ellas por otra expresión entera prima.

(8°) El MCD de tres o más expresiones algebraicas enteras es el mismo que el de todas, excepto el que corresponda a dos de ellas.

(9°) Si $A(x)$, $B(x)$ y $R(x)$ son tales que $R(x)$ es el residuo de dividir: $A(x) \div B(x)$

$$\Rightarrow MCD\left[A(x), B(x)\right] = MCD\left[B(x), R(x)\right]$$

(10°) Si $A(x)$ y $B(x)$ son tales que: $B(x)$ es divisor de $A(x)$

$$\Rightarrow MCD(A(x), B(x)) = B(x)$$

7.11 **REGLA DE LOS FACTORES PARA DETERMINAR EL MCD Y MCM DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS (Consecuencia de la Definición)**

i) Se descomponen en factores primos cada una de las expresiones dadas.

ii) El MCD se obtiene seleccionando los **factores comunes** afectados por los menores exponentes.

iii) El MCM se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes afectados por sus mayores exponentes.

7.11.1 **Ejemplo:**

Sean: $E = (x+2)^7(x+3)^5(x+7)^6$

$F = (x+2)^5(x+3)^4(x+8)^3$

$G = (x+2)^6(x+7)^8(x+9)^7$

De acuerdo a la regla:

$\Rightarrow$ $MCD = (x+2)^5$ **(sólo el factor común a las tres)**

$\Rightarrow$ $MCM = (x+2)^7(x+3)^5(x+7)^8(x+8)^3(x+9)^7$

Seleccionamos los factores comunes y los no comunes con el mayor exponente.

7.11.2 Ejemplo:

Sean:

$$P = (x+y)(y+z)$$
$$Q = (x+a)(x+b)$$
$$R = (x+y)(x+a)$$

$\Rightarrow$ MCD = 1, (por ser P, Q y R primos entre sí)

$\Rightarrow$ MCM $= (x+a)(x+b)(x+y)(y+z)$

7.11.3 Ejemplo:

Sean:

$$K = x^3 - 1$$
$$W = x^4 - 1$$
$$U = x^2 - 2x + 1$$

Determinar el MCD y MCM

Solución:

(1°) Factorizando cada una de las expresiones

$$\Rightarrow \quad K = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$W = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$U = (x-1)^2$$

(2°) Realizando las selecciones de acuerdo a la regla:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} MCD_{(K,W,U)} &= x-1 \\ MCM_{(K,W,U)} &= (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1) \end{aligned}}$$

7.12 REGLA PARA DETERMINAR EL MCD DE DOS POLINOMIOS MEDIANTE EL ALGORITMO DE LAS DIVISIONES SUCESIVAS

Se utiliza como alternativa, para aquellos casos en los cuales la factorización resulta de gran dificultad y se trate de dos polinomios únicamente.

$\Rightarrow$ i) Se dividen los polinomios

ii) Si la división resulta exacta el polinomio que hace de divisor sera el MCD.

iii) Si la división ejecutada en (i) no resultase exacta, se prosigue, dividiendo el primer divisor entre el primer residuo; se prosigue sucesivamente hasta llegar a una división exacta. **El MCD, será el último divisor.**

7.12.1 Ejemplo:

Hallar el MCD de los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^3 - 13x^2 + 47x - 35$$
$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Solución:

(1°) Dividiendo P ÷ K

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
P \rightarrow & x^3 & -13x^2 & +47x & -35 & x^3-6x^2+11x-6 \leftarrow K \\ \cline{6-6}
 & -x^3 & +6x^2 & -11x & +6 & 1 \\ \cline{2-5}
 & P_1 = & -7x^2 & +36x & -29 &
\end{array}
$$

(2°) Por no ser exacta, la división prosigue: $K \div R_1$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
K \rightarrow & x^3 & -6x^2 & +11x & -6 & 7x^2-36x+29 \leftarrow -R_1 \\ \cline{2-6}
(\text{Por } 7) \Rightarrow & 7x^3 & -42x^2 & +77x & -42 & x+1 \\
 & -7x^3 & +36x^2 & -29x & & \\ \cline{2-4}
 & & -6x^2 & +48x & -42 & \\
 & & x^2 & -8x & +7 & \\
 & & 7x^2 & -56x & +49 & \\
 & & -7x^2 & +36x & -29 & \\ \cline{3-5}
 & & R_2 = & -20x & +20 &
\end{array}
$$

Dividiendo entre -6 y multiplicando por 7 para proseguir la división. ⇒

(3°) La división debe proseguir: $R_1 \div R_2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & & & & -20x+20 \leftarrow R_2/-20 \\
R_1 \rightarrow & 7x^2 & -36x & +29 & \Rightarrow x-1 \longleftarrow \text{Ultimo divisor} \\ \cline{5-5}
 & -7x^2 & +7x & & 7x-29 \\ \cline{2-3}
 & & -29x & +29 & \\
 & & 29x & -29 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

(4°) Por ser una división exacta el MCD = Ultimo divisor

$$\therefore \boxed{MCD = x-1}$$

Comentario:

Si se factorizan los datos P (x) y K (x):

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-5)(x-7)$$
$$\Rightarrow K(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

Mediante la regla:

$$\Rightarrow \boxed{MCD = (x-1)}$$

Ejemplo: Hallar el MCD de las expresiones:

$P(x) = x^2 - 1$

$Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución:

(1°) Si se restan, la diferencia debe contener al MCD

$$\Rightarrow \quad P - Q = x^2 - 1 - (x^2 - 2x + 1)$$
$$= x^2 - 1 - x^2 + 2x - 1$$
$$= 2x - 2$$
$$P - Q = 2(x - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) Verifiquemos mediante el teorema del residuo si (x - 1) es divisor común.

$$\Rightarrow \quad P(1) = 1 - 1 = 0$$
$$Q(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\therefore \boxed{MCD(P, Q) = x - 1}$$

7.13 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

7.13.1 Ejercicio Explicativo

Factorizar: $a^3x^3 - a^3y^3 - b^3x^3 + b^3y^3$

(1°) **Asociando los dos primeros términos:**

$$\Rightarrow \underbrace{a^3x^3 - a^3y^3} - \underbrace{b^3x^3 + b^3y^3}$$

$$\Rightarrow a^3(x^3 - y^3) - b^3(x^3 - y^3)$$

(2°) Extrayendo $(x^3 - y^3)$

$$\Rightarrow (x^3 - y^3)(a^3 - b^3)$$

(3°) Cada uno de los factores es una diferencia de cubos

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2)(a - b)(a^2 + ab + y^2)$$

Ordenando:

$$\therefore \boxed{(x - y)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 + xy + y^2)}$$

7.13.2 Ejercicio Explicativo

Determinar los factores primos del polinomio siguiente:

$$x^2y^2 + x^2y + x^2 + xy^2 + xy + x + y^2 + y + 1$$

Recuerde:

El método asociativo consiste en obtener un factor común probando asociaciones de referencia.

Solución:

(1°) Asociando de tres en tres:

$$\Rightarrow \underbrace{x^2y^2 + x^2y + x^2} + \underbrace{xy^2 + xy + x} + \underbrace{y^2 + y + 1}$$

(2°) Se obtiene el factor común $(y^2 + y + 1)$

$\Rightarrow x^2 (y^2 + y + 1) + x (y^2 + y + 1) + (y^2 + y + 1)$

$\Rightarrow (y^2 + y + 1)$ es el factor común por extraerse

$\Rightarrow (y^2 + y + 1) (x^2 + x + 1)$

(3°) Por tener factores primos, concluimos:

$\therefore \boxed{(y^2 + y + 1) (x^2 + x + 1)}$

7.13.3 Ejercicio Explicativo:

Factorizar: $(n^4 + 1) + (n^4 + 2) + (n^4 + 3) . . . + (n + 1)^4 \; ; n \in \mathbb{N}$

Recuerde:

$$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m (m + 1)}{2} \; ; \; m \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Un estudio breve del polinomio nos permite hacer la ordenación:

$$\Rightarrow \underbrace{n^4 + 1} + \underbrace{n^4 + 2} + \underbrace{n^4 + 3} + \; . . . \; + \underbrace{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$$

$\longleftarrow$ $(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)$ términos $\longrightarrow$

(2°) Asociando términos:

$$\Rightarrow \underbrace{n^4 + n^4 + . . . + n^4}_{\substack{\text{serie monótona de} \\ (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) \text{ términos}}} + \underbrace{1 + 2 + 3 + . . . + (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)}_{\substack{\text{suma de números naturales consecutivos de} \\ (4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) \text{ términos}}}$$

(3°) Sumando las asociaciones:

$$\Rightarrow \underbrace{\left(4n^2 + 6n^2 + 4n + 1 \right) n^4}_{\substack{\text{Se utilizó un coeficiente} \\ \text{que es el n° de términos repetidos}}} + \underbrace{\frac{\left(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \right)\left(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2 \right)}{2}}_{\substack{\text{Se utilizó la fórmula de} \\ 1 + 2 + 3 + . . . + x = \frac{x(x + 1)}{2} \; ; x \in \mathbb{N}}}$$

(4°) Extrayendo factor común y sumando lo fraccionario

$$\left(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \right)\left(\frac{2n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2}{2} \right)$$

(5°) En el primer factor de multiplicar por 2:

$$\Rightarrow \left(\frac{8n^3 + 12n^2 + 8n + 2}{2} \right)\left(\frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 + n^4 + 1}{2} \right)$$

de disociar $2n^4$ de disociar 2

$$\Rightarrow \left[\frac{(2n+1)^3+(2n+1)}{2}\right]\left[\frac{(n+1)^4+n^4+1}{2}\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{4}(2n+1)\left[(2n+1)^2+1\right]\left[(n+1)^4+n^4+1\right]\ ;\ n \in \mathbb{N}}$$

7.13.4 Ejercicio Explicativo

Expresar en función a los factores primos:

$$3(5a+b)^2+(7a+4b)^2+4(5a+b)(7a+4b)\ ;\ a, b \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

La regla de aspas permite factorizar polinomios de 3 términos de grado par y que tenga una combinación binaria de las raíces cuadradas.

Solución:

(1°) Aplicando la regla del aspa:

$$\Rightarrow 3(5a+b)^2+(7a+4b)^2+4(5a+b)(7a+4b)$$

$$\begin{array}{lcl} 3(5a+b) & & (7a+4b) \Rightarrow (5a+b)(7a+4b) \\ (5a+b) & \times & (7a+4b) \Rightarrow 3(5a+b)(7a+4b) \\ \hline & & 4(5a+b)(7a+4b) \end{array}$$

$$= 3x^2+y^2+4xy$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 3x & & y \Rightarrow xy \\ x & \times & y \Rightarrow 3xy \end{array}\right\} 4xy$$

$$= (x+y)(3x+y)$$

(2°) Atendiendo los factores hallados, se tendrá:

$$\Rightarrow [(5a+b)+(7a+4b)][3(5a+b)+(7a+4b)]$$

$$\Rightarrow [5a+b+7a+4b][15a+3b+7a+4b]$$

$$\Rightarrow (12a+5b)(22a+7b)$$

7.13.5 Ejercicio Explicativo

Expresar en función a los factores primos:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

Recuerde:

Que la expresión propuesta es notable

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2 = -(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

Solución:

(1°) El polinomio consignado se puede escribir asociando como:

$$\Rightarrow \underbrace{a^4+b^4-2a^2b^2}\ \underbrace{-2a^2c^2-2b^2c^2}+c^4$$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4$$

(2°) Aplicando la regla de aspas a continuación:

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^2 & \quad & -c^2 \\ (a-b)^2 & & -c^2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}} \right\} \quad \begin{array}{r} -c^2(a-b)^2 \\ -c^2(a+b)^2 \\ \hline -c^2\underbrace{[2(a^2+b^2)]}_{\text{según Legendre}} \end{array}$$

(3°) Se obtienen factores:

$$\underbrace{[(a+b)^2 - c^2][(a-b)^2 - c^2]}_{\text{Diferencias de cuadrados}}$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$$

7.13.6 Ejercicio Explicativo

Factorizar: $x^6 - 10x^3 + 27$

Solución:

(1°) Agregando $8x^3$ y ordenando:

$$\Rightarrow x^6 + \overbrace{8x^3 + 27 - 10x^3}^{\text{cero}} - 8x^3 \qquad \underbrace{-10x^3 - 8x^3}_{-18x^3}$$

$$\Rightarrow (x^2)^3 + (2x)^3 + (3)^3 - 3(x^2)(2x)(3) \text{ ....} (1)$$

(2°) La expresión (1) está asociado con:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$\Rightarrow (x^2+2x+3)(x^4+4x^2+9-2x^3-3x^2-6x)$$

$$\therefore \boxed{(x^2+2x+3)(x^4-2x^3+x^2-6x+9)}$$

Comentario:

Este caso de factorización así como cualquier otro se verifica mediante la multiplicación correspondiente por el método diagonal.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & 1 & -6 & 9 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 1 & -6 & 9 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & -12 & 18 \\ 3 & 3 & -6 & 3 & -18 & 27 \end{array}$$

← Coeficientes de: $x^4 - 2x^3 + x^2 - 6x + 9$

Coeficientes de: $x^2 + 2x + 3$

$= x^6 - 10x^3 + 27$

7.13.7 Ejercicio Explicativo

Expresar en función de factores primos:

(1) $a^2 + 3b^2 + 4ab + 7b + 3a + 2$

(2) $6x^2 - 25y^2 + b^2 - 5xy + 5bx$

Recuerde:

Mediante la regla del aspa doble se puede factorizar polinomios de grado par y un máximo de 6 términos.

Solución:

Aplicando la regla del aspa doble:

(1) $a^2 + 3b^2 + 4ab + 7b + 3a + 2$

$$\begin{matrix} a & 3b & & 1 \\ a & b & & 2 \end{matrix}$$

III

I II

Este caso involucra un término independiente, **este actúa como un elemento a descomponerse.**

1ᵃˢ aspas: Verifican la combinación en b: $3ab + ab = 4ab$

2ᵃˢ aspas: Verifican la combinación en b: $6b + b = 7b$

3ᵃˢ aspas: Verifican la combinación en a: $2a + a = 3a$

$\therefore \boxed{(a + 3b + 1)(a + b + 2)}$

(2) Aplicando la regla del aspa doble

$6x^2 - 25y^2 + b^2 - 5xy + 5bx$

$\Rightarrow 6x^2 - 25y^2 + b^2 - 5xy + 5bx + 0by$

$$\begin{matrix} 3x & 5y & b \\ 2x & -5y & b \end{matrix}$$

I II

Este caso establece la ausencia de un término de las combinaciones binarias en "by", la secuencia se logra si se le considera coeficiente 0.

1ᵃˢ aspas: $-15xy + 10xy = -5xy$

2ᵃˢ aspas: $5by - 5by = (0)\,by$

3ᵃˢ aspas: $3bx + 2bx = 5bx$

$\therefore \boxed{(3x + 5y + b)(2x - 5y + b)}$

7.13.8 Ejercicio Explicativo

Escribir en función de sus factores primos:

$$x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

Que la factorización mediante el aspa doble para el polinomio de 4° grado, es esencialmente un método de pruebas, con los que debemos de familiarizarnos.

Solución:

(1°) Utilizando la regla del aspa para el polinomio de 4° grado.

$$x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & 15 \\ & \mathrm{I} & \\ x^2 & & 2 \end{array}$$

(2°) (I) Estas aspas proporcionan: $2x^2 + 15x^2 = 17x^2$

Se dispone de : $-7x^2$

Diferencia : $-7x^2 - (17x^2) = -24x^2$; "sustituye" a $-7x^2$

$\Rightarrow x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

$$\boxed{-24x^2}$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & 8x & & 15 \\ x^2 & & -3x & & 2 \\ & \mathrm{II} & & \mathrm{III} & \end{array}$$

(3°) (II) y (III) verifican los términos de 3er grado y 1er grado correspondientemente; los factores serán:

$\Rightarrow (x^2 + 8x + 15)(x^2 - 3x + 2)$; aplicando aspas simples

$$\begin{array}{cccc} x & 5 & x & -2 \\ x & 3 & x & -1 \end{array}$$

$\therefore \boxed{(x+5)(x+3)(x-2)(x-1)}$

7.13.9 Ejemplo Explicativo

Escribir en función a los factores primos:

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Comentario:

Mediante este caso observemos otra forma de enfocar el método de aspas dobles para el P (x) de 4° grado.

Solución:

(1°) Aplicando la regla del aspa para el polinomio de 4° grado.

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$$

$$\boxed{\Delta = 49x^2}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3x^2 & & 2 & 4x^2 \\ 2x^2 & & 3 & 9x^2 \\ \hline & & & 13x^2 \end{array}$$

(2°) Secuencia:

(I) Buscamos " Δ ": $\Delta = \underbrace{62x^2}_{\text{Lo disponible}} - \underbrace{(13x^2)}_{\text{De aspas}} = 49x^2$

(II) Sustituimos $62x^2$ por $49x^2$

(III) La secuencia se prosigue mediante aspas simples.

$$\Rightarrow\ 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$$

$$\boxed{+\Delta = 49x^2}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 3x^2 & A_1 & -7x & A_2 & 2 \\ 2x^2 & & -7x & & 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} A_1 = -21x^3 - 14x^3 & ;\ A_2 = -21x - 14x \\ A_1 = -35x^3 & ;\ A_2 = -35x \end{array}$$

(3°) Se obtiene los factores:

$$\Rightarrow\ (3x^2 - 7x + 2)(2x^2 - 7x + 3)$$

$$\begin{array}{cc} 3x & -1 \\ x & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & -3 \end{array}$$

$$\therefore\ \boxed{(3x - 1)(2x + 1)(x - 3)(x - 2)}$$

7.13.10 Ejemplo Explicativo

Determinar "a" y "b" de modo que los polinomios:

$P(x) = x^3 - ax^2 - a + 19b - 4 \quad ; x \in \mathbb{R}$

$F(x) = x^3 - (a + 1)x^2 + 23x - a - 7 \quad ; x \in \mathbb{R}$

Tengan un factor común de primer grado: $a; b \in \mathbb{N}$.

Recuerde:

La diferencia de $P(x) - F(x)$, debe contener el factor común o máximo común divisor como es lo solicitado por el enunciado.

Solución:

(1°) $\Rightarrow\ P(x) - F(x) = x^2 - 23x + 3 + 19b$

$\Rightarrow$ Aplicando aspas:

$$\boxed{\text{Si: } b = 1}$$

$$(\mathrm{I})\ \left\{\begin{array}{l} x^2 - 23x + (3 + 19b) \\ \left\{\begin{array}{cc} x & -22 \\ x & -1 \end{array}\right\} (x - 1)(x - 22) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Si: } b = 3}$$

$$(\mathrm{II})\ \left\{\begin{array}{l} x^2 - 23x + \underbrace{(3 + 19b)}_{60} \\ \left\{\begin{array}{cc} x & -20 \\ x & -3 \end{array}\right\} (x - 3)(x - 20) \end{array}\right.$$

(2°) De (I) : $b = 1; x = 1$; veamos si hay consistencia.

$P(1) = 1 - a - a + 19 - 4 = 0 \quad ; 16 - 2a = 0 \quad \therefore\ a = 8$

$F(1) = 1 - (a + 1) + 23 - a - 7 = 0 \quad ; 16 - 2a = 0 \quad \therefore\ a = 8$

$\therefore\ a = 8 ; b = 1$; Factor Común $(x - 1)$.

$\Rightarrow P(22) = 10\,648 - 485a + 15 = 0 ; a = 21.986$

$F(22) = 10\,648 - 24a + 499 = 0 ; a = 464.458$

No hay consistencia.

(3°) De (II) : $b = 3 ; x = 3$; veamos si hay consistencia

$P(3) = 27 - 10a + 53 = 0 \quad ; a = 8$

$F(3) = 27 - (a + 1)9 + 69 - a - 7 = 0 \quad ; a = 8$

$\therefore\ a = 8 ; b = 3 ; (x - 3)$

(4°) Además:

$P(20) = 800 - 400a - a + 57 - 4 = 0 \quad ; a = 2.127 \quad ; a \notin \mathbb{N}$

$F(20) = 800 - (a + 1)400 + 460 - a - 7 = 0 \quad ; a = 2.127 \quad ; a \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ Rptas: $a = 8$ y $b = 1$ con F. Común $x - 1$

$a = 8 ; b = 3$ con F. Común $x - 3$

7.13.11 Ejemplo Explicativo

Escribir en función de sus factores primos:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 ; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

Que el método de evaluación permite obtener factores de primer grado.

Solución:

(1°) Aplicando el método de evaluación:

A. Divisores del término independiente: - 24

$d = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24 \}$

B. La regla de Descartes:

$\underbrace{x^3 - 9x^2}_{V}\ \underbrace{\ }_{V}$ ...

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24$; 3 variaciones

V V V 3 ceros positivos

$\Rightarrow d = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 \}$

(2°) Evaluando:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -9 & 26 & -24 \\ x = 2 & \downarrow & 2 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array} ; \boxed{\text{un factor es } (x - 2)}$$

(3°) Factores: $x^2 - 7x + 12$; otros factores $(x - 3)(x - 4)$

$x \quad -3$

$x \quad -4$

$\therefore \boxed{(x - 2)(x - 3)(x - 4)}$

7.13.12 **Ejemplo Explicativo**

Escribir en función de los factores primos:

$$30x^3 + 31x^2 + 10x + 1 \ ; \ x \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) El método de evaluación es **aplicable a los polinomios mónicos.**

$$\Rightarrow P(x) = 30\left(x^3 + \frac{31}{30}x^2 + \frac{10}{30}x + \frac{1}{30} \right)$$

$\Rightarrow$ Divisores del término independiente

$$d = \left\{ \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{1}{15}, \pm\frac{1}{30} \right\}$$

(2°) Por la regla de Descartes; existen 3 permanencias es decir los 3 ceros serán negativos.

$$\Rightarrow d = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{15}, -\frac{1}{30} \right\}$$

(3°) Evaluando:

$$\begin{array}{r|ccc|c} & 1 & \frac{31}{30} & \frac{10}{30} & \frac{1}{30} \\ x = -\frac{1}{2} & \downarrow & -\frac{1}{2} & -\frac{8}{30} & -\frac{1}{30} \\ \hline & 1 & \frac{16}{30} & \frac{2}{30} & 0 \end{array}$$

(4°) Los factores serán:

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right)\left(x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} \right)$$

$$\Rightarrow P(x) = \cancel{30}\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}} \right)\left(\frac{15x^2 + 8x + 1}{\cancel{15}} \right) = (2x+1)$$

$15x^2 + 8x + 1$

$3x \quad 1$

$5x \quad 1$

$(3x+1)(5x+1)$

$$\therefore \boxed{P(x) = (2x+1)(3x+1)(5x+1)}$$

7.13.13 **Ejemplo Explicativo**

Escribir en función de los factores primos:

$$x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

Solución:

(1°) Utilizando el método de Evaluación y de acuerdo a la regla de Descartes probaremos únicamente con divisores positivos.

$\Rightarrow d = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \}$

(2°) Evaluando:

$\Rightarrow$

	1	-21	175	-735	1624	-1764	720
1	↓	1	-20	155	-580	1044	-720
	1	-20	155	-580	1044	-720	0
2	↓	2	-36	238	-684	720	
	1	-18	119	-342	360	0	
3	↓	3	-45	222	-360		
	1	-15	74	-120	0		
4	↓	4	-44	120			
	1	-11	30	0			

$\underbrace{1 \quad -11 \quad 30}_{2^\circ \text{ grado}}$

(3°) Los factores serán:

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x^2-11x+30)$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -5 \\ x & & -6 \end{array}$$

$\therefore \boxed{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$

7.13.14 Ejemplo Explicativo

Factorizar:

$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

Solución:

(1°) $\underbrace{a(b+c-a)^2}_{1^\circ}+\underbrace{b(c+a-b)^2}_{2^\circ}+\underbrace{c(a+b-c)^2}_{3^\circ}+\underbrace{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}_{4^\circ}$

Al permutar $a \rightleftarrows b$

$\underbrace{b(a+c-b)^2}_{2^\circ}+\underbrace{a(c+b-a)^2}_{1^\circ}+\underbrace{c(b+a-c)^2}_{3^\circ}\ \underbrace{(a+c-b)(c+b-a)(b+a-c)}_{4^\circ}$

El polinomio no se altera, **por lo que este resulta ser cíclico.**

(2°) Buscando un cero del polinomio probemos con: $a = 0$

$\Rightarrow 0+b(c-b)^2+c(b-c)^2+(b+c)(c-b)(b-c)$

$\Rightarrow \cancel{(b-c)^2(b+c)} - \cancel{(b+c)(b-c)^2} = 0$

$\Rightarrow$ Un factor es "a"

(3°) Los otros factores serán: b y c

$\Rightarrow a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = \overset{\substack{\text{coeficiente} \\ \downarrow}}{k}abc$

$\Rightarrow$ Calculamos el parámetro k, para ello $a = b = c = 0$

$$\Rightarrow 1(1+1-1)^2+1(1+1-1)^2+1(1+1-1)^2+(1+1-1)(1+1-1)(1+1-1)=k(1)(1)(1)$$

$$1+1+1+1=k\,;k=4$$

$\therefore$ $\boxed{4abc}$ será la factorización

7.13.15 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar:

$$(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$$

Recuerde:

Si en: $m^3+n^3+p^3$

Se verifica que: $m+n+p=0$

$$\Rightarrow m^3+n^3+p^3=3mnp$$

Solución:

(1°) Al ordenar:

$$\Rightarrow [(x-a)(b-c)]^3+[(x-b)(c-a)]^3+[(x-c)(a-b)]^3$$

$$\Rightarrow [xb-xc-ab+ac]^3+[xc-xa-bc+ab]^3+[xa-xb-ac+bc]^3$$

(2°) Observemos que la suma de las bases:

$$\begin{array}{c} xb-xc-ab+ac \\ xc-xa-bc+ab \\ xa-xb-ac+bc \\ \hline \Sigma=0 \end{array}$$

(3°) Aplicando la propiedad de la transformación a producto de una suma de cubos de suma de bases iguales a cero.

$$\Rightarrow 3[(x-a)(b-c)][(x-b)(c-a)][(x-c)(a-b)]$$

$\therefore$ $\boxed{3(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

7.13.16 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $\Sigma(b+c-2a)^3$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Recuerde que:

Si: $x+y+z=0$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$$

Solución:

(1°) Desarrollando la sumatoria:

$$(b + c - 2a)^3 + (a + c - 2b)^3 + (a + b - 2c)^3$$

(2°) La suma de las bases:

$$\begin{array}{c} b + c - 2a \\ a + c - 2b \\ a + b - 2c \\ \hline \Sigma = 0 \end{array}$$

$\therefore \boxed{3(b + c - 2a)(a + c - 2b)(a + b - 2c)}$

Comentario:

Es necesario considerar que:

$$\Sigma(b + c - 2a)^3 = 3(b + c - 2a)(a + c - 2b)(a + b - 2c)$$

conforman una equivalencia.

7.13.17 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $a^4 + 9b^4 + 5a^2b^2$

Solución:

(1°) El trinomio puede transformarse notablemente si agregamos y restamos a^2b^2

$\Rightarrow \underbrace{a^4 + 9b^4 + 6a^2b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} - a^2b^2$; luego de sumar a^2b^2 y restar a^2b^2

(2°) $\Rightarrow \left(a^2 + 3b^2\right)^2 - (ab)^2$; se tiene una diferencia de cuadrados.

$\therefore \boxed{(a^2 + 3b^2 + ab)(a^2 + 3b^2 - ab)}$

7.13.18 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1$; $x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Descomponiendo $-2x^3$ y $2x^2$; agregando y restando x.

$\Rightarrow x^5 - x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + x^2 \overbrace{+ x - x}^{} - 1$

(2°) Asociando:

$\Rightarrow \underbrace{x^5 - x^4 - x^3}_{} - \underbrace{x^3 + x^2 + x}_{} + \underbrace{x^2 - x - 1}_{}$

$\Rightarrow x^3(x^2 - x - 1) - x(x^2 - x - 1) + (x^2 - x - 1)$

(3°) Se observa la presencia del factor $x^2 - x - 1$

$\therefore \boxed{(x^2 - x - 1)(x^3 - x + 1)}$

7.13.19 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $x^{10} + 2x^6 - 2x^5 - 8x^2 - 2x + 1 \; ; x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Descomponiendo $2x^6$; $-2x^5$; $-2x$ y agregando x^2

$\Rightarrow x^{10} + x^6 + x^6 - x^5 - x^5 + x^2 - x - x + 1 - 9x^2$

(2°) Asociando

$\Rightarrow \underbrace{x^{10} + x^6 - x^5} + \underbrace{x^6 + x^2 - x} - \underbrace{x^5 - x + 1} - 9x^2$

$\Rightarrow \underbrace{x^5(x^5 + x - 1) + x(x^5 + x - 1) - (x^5 + x - 1)} - 9x^2$

(3°) Extrayendo $(x^5 + x - 1)$

$\Rightarrow (x^5 + x - 1)[x^5 + x - 1] - 9x^2$

$\Rightarrow (x^5 + x - 1)^2 - (3x)^2$; se obtiene una diferencia de cuadrados.

$\Rightarrow (x^5 + x - 1 + 3x)(x^5 + x - 1 - 3x)$

$\therefore \boxed{(x^5 + 4x - 1)(x^5 - 2x - 1)}$

7.13.20 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar: $x^7 + x^5 + x^3 - x^2 + 1$

Solución:

(1°) Agregando y sustrayendo x^4 y x.

$\Rightarrow x^7 + x^5 + \overbrace{\overset{*}{x^4} - \overset{*}{x^4}} + x^3 - x^2 + \overbrace{\overset{*}{x} - \overset{*}{x}} + 1$

(2°) Asociando

$\Rightarrow \underbrace{x^7 + x^5 + x^4} - \underbrace{x^4 - x^2 - x} + \underbrace{x^3 + x + 1}$

$\Rightarrow x^4(x^3 + x + 1) - x(x^3 + x + 1) + (x^3 + x + 1)$

$\therefore \boxed{(x^3 + x + 1)(x^4 - x + 1)}$

7.13.21 **Ejemplo Explicativo**

Factorizar:

$$acx^4 + b(a + c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a + c)x + ac$$

Solución:

(1°) Aplicando la regla del aspa doble para el polinomio de 4° grado.

$$acx^4 + b(a+c)x^3 + (a^2+b^2+c^2)x^2 + b(a+c)x + ac$$

$$\boxed{\Delta = b^2x^2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
ax^2 & & bx & & c \\
cx^2 & & bx & & a \\
 & (\mathrm{I}) & & (\mathrm{II}) &
\end{array}$$

(2°) Se obtiene la diferencia:

$\Delta = (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - (a^2 + c^2)x^2$

$\Delta = b^2x^2$

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{array}{r} abx^3 \\ bcx^3 \\ \hline b(a+c)x^3 \end{array} \qquad\qquad (\mathrm{II}) \quad \begin{array}{r} abx \\ bcx \\ \hline b(a+c)x \end{array}$$

$\therefore$ $\boxed{(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)}$ Es la factorización.

7.13.22 Ejemplo Explicativo

Factorizar: $x^5 - 6x^4y - 17x^3y^2 + 17x^2y^3 + 6xy^4 - y^5$

$x, y \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Se tiene un polinomio recíproco de grado impar de 2 variables.

$\Rightarrow$ posee el factor $x - y$.

(2°) Se le puede degradar a un polinomio de 4° grado y este a su vez uno de 2° grado.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 1 & -6y & -17y^2 & 17y^3 & 6y^4 & -y^5 \\
x = y & \downarrow & y & -5y^2 & -22y^3 & -5y^4 & y^5 \\ \hline
 & 1 & -5y & -22y^2 & -5y^3 & y^4 & 0
\end{array}$$

(3°) Se obtiene el polinomio recíproco

$x^4 - 5x^3y - 22x^2y^2 - 5xy^3 + y^4$

$$\Rightarrow x^2y^2\left[\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} - 22 - 5\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2y^2\left[\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 5\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 22\right]$$

(4°) Haciendo los cambios necesarios

$$\Rightarrow \text{Si } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a ; \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2y^2\left[a^2 - 2 - 5a - 22\right] = x^2y^2\left(a^2 - 5a - 24\right)$$

$$\Rightarrow x^2y^2(a-8)(a+3) = x^2y^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-8\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+3\right)$$

$$\therefore \boxed{(x^2+y^2-8xy)(x^2+y^2+3xy)}$$

7.13.23 **Ejemplo Explicativo**

Hallar el MCM de:

$$A = 6x^2 - 17x - 3$$
$$B = 6x^2 - 11x - 2$$
$$C = x^2 - 5x + 6$$

***Recuerde*:**

El MCM de varias expresiones es la expresión de menor grado posible que las contiene como factores.

Solución:

(1°) Factorizando A

$$\Rightarrow A = 6x^2 - 17x - 3$$

$$\left.\begin{array}{lllll} 6x & & 1 & \Rightarrow & x \\ x & & -3 & \Rightarrow & -18x \end{array}\right\} -17x$$

$$\Rightarrow \boxed{A = (x-3)(6x+1)} \text{ .... } (1)$$

(2°) Factorizando B

$$\Rightarrow B = 6x^2 - 11x - 2$$

$$\left.\begin{array}{lllll} 6x & & 1 & \Rightarrow & x \\ x & & -2 & \Rightarrow & -12x \end{array}\right\} -11x$$

$$\Rightarrow \boxed{B = (6x+1)(x-2)} \text{ .... } (2)$$

(3°) Factorizando C

$$\Rightarrow C = x^2 - 5x + 6$$

$$\left.\begin{array}{lllll} x & & -3 & \Rightarrow & -3x \\ x & & -2 & \Rightarrow & -2x \end{array}\right\} -5x$$

$$\Rightarrow \boxed{C = (x-3)(x-2)} \text{ .... } (3)$$

De (1), (2) y (3) por selección

$$\therefore \boxed{MCM = (x-2)(x-3)(6x+1)}$$

7.13.24 Ejemplo Explicativo

Hallar el MCD de:

$$A = x^2(x^2+2y^2)+(y^2+z^2)(y+z)(y-z)$$
$$B = (x^2+y^2)(x^2+y^2+2x^2)+z^4$$
$$C = (x^2+z^2)^2-y^4$$

Recuerde:

El MCD de tres expresiones algebraicas se determinan por selección del factor común.

Solución:

(1°) Factorizando cada expresión, luego de realizar las operaciones indicadas:

$$\Rightarrow A = \underbrace{\overbrace{x^4+2x^2y^2}+y^4}\overbrace{\,-z^4}$$

$$\Rightarrow A = \left(x^2+y^2\right)^2-\left(z^2\right)^2$$

$\boxed{A = (x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)}$ ....(1)

(2°) Factorizando B

$\Rightarrow B = \left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)z^2+z^4$, por ser un trinomio cuadrado perfecto.

$\boxed{B = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$ ....(2)

(3°) Factorizando C

$C = \left(x^2+z^2\right)^2-\left(y^2\right)^2$, por ser una diferencia de cuadrados.

$\boxed{C = (x^2+z^2+y^2)(x^2+z^2-y^2)}$ ....(3)

(4°) Por selección del factor común.

$\therefore \boxed{MCD(A, B, C) = (x^2+y^2+z^2)}$

7.13.25 Ejemplo Explicativo

Utilizando la regla de las divisiones sucesivas, hallar el MCD de:

$$A = 2x^4+3x^2+x+3$$
$$B = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

Recuerde:

Las divisiones sucesivas se reducen a dividir residuos en forma reiterada de acuerdo con el Algoritmo de Euclides.

Solución:

(1°) Un esquema previo es: MCD (A, B)

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4		Q_{m+1}
A ÷	B	R_1	R_2	R_3	. . .	R_m
R_1	R_2	R_3	R_4		0	

$\Rightarrow \boxed{MCD_{(A,B)} = R_m}$

(2°) Ejecutando el algoritmo de las divisiones sucesivas según el esquema:

	x + 1	2x - 4x	x + 1
$A \rightarrow x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	$2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x + 3 \leftarrow B$	$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \leftarrow R_1$	$x^2 + x + 1 \leftarrow R_2$
$2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$	$-2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x$	$-x^3 - x^2 - x$	
$-2x^5 + 0 - 3x^3 - x^2 - 3x$	$-4x^3 - x^2 - x + 3$	$x^2 + x + 1$	
$2x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$	$4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$	$-x^2 - x - 1$	
$-2x^4 + 0 - 3x^2 - x - 3$	$R_2 \rightarrow 7x^2 + 7x + 7$	0	
$R_1 \rightarrow -x^3 - 2x^2 - 2x - 1$			

$\therefore \boxed{MCD = x^2 + x + 1}$

7.13.26 Ejercicio Explicativo

Obtener el MCD de:

$$A = 16x^3 + 36x^2y - 12x^2y - 18y^3$$
$$B = 8x^2 - 2xy - 3y^2$$

mediante divisiones sucesivas.

(1°) Según algoritmo solicitado:

(I) $16x^3 \div 8x^2 = 2x$ (III) $40x^2y \div 8x^2 = 5y$

(V) $y^2 (8x^2 - 2xy - 3y^2)$ (VI) $8x^2y^2 \div 4xy^2 = 2x$

	2x + 5y	2x + y
$16x^3 + 36x^2y - 12xy^2 - 18y^3$	$8x^2 - 2xy^3 - 3y^4$	$4xy^2 - 3y^3$
$-16x^3 + 4x^2y + 6xy^2$	$8x^2y^2 - 2xy^3 - 3y^4$	
$40x^2y - 6xy^2$	$-8x^2y^2 + 6xy^3$	
$-40x^2y + 10xy^2 + 15y^3$	$4xy^3 - 3y^4$	
$R_1 = 4xy^2 - 3y^3$	$-4xy^3 + 3y^4$	
	0	

(VII) $4x^3 \div 4xy^2 = y$

(II) $-2x (8x^2 - 2xy - 3y^2)$

(IV) $-5y (8x^2 - 2xy - 3y^2)$ (VIII) $-y (4xy^2 - 3y^3)$

(2°) $4xy^2 - 3y^3 = y^2(4x - 3y)$; es el divisor que permite: $R \equiv 0$.

$\therefore$ $\boxed{MCD = 4x - 3y}$

7.14. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

(1) **Hallar el factor primo de menor grado de:**

$$4a^2(2a - 3b) + b^3(b^3 - 1) + 6ab^2$$

Rpta: $b^2 - b + 2a$

(2) **Factorizar:** $(x + 2y)^5 - x^5 - 32y^5$

Rpta: $10xy(x + 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

(3) **Factorizar:** $(a + ac + c)(ac^2 + ac + a^2c) - a^2c^2$

Rpta: $a^2c(a + 1)(a + c)(c + 1)$

(4) **Fatorizar:** $4x^4 + 7x^2 + 16$

Rpta: $(2x^2 + 3x + 4)$ y $(2x^2 - 3x + 4)$

(5) **Factorizar:** $(a + ac)(a + c) - (ac + d)(c + d)$

Rpta: $(a - d)(a + ac + c + d)$

(6) **Factorizar:** $(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)(c^2 + d^2)$

Rpta: $(a + d)(a - d)\Sigma a^2$

(7) **Factorizar:** $(x^2 - 6x - 7)(x^2 + 7x + 12)$

Rpta: $(x - 7)(x + 1)(x + 3)(x + 4)$

(8) **Factorizar:** $(1 - 6x)^2 - (19x^2 - x)(1 - 6x) + 9x^2(10x^2 - x)$

Rpta: $(3x - 1)^2(2x - 1)(5x - 1)$

(9) **Factorizar:** $16m^2n^2 - 2p^2 + 4p + 32mn - 14mnp$

Rpta: $(8mn + p)(2mn - 2p + 4)$

(10) **Fatorizar:** $7x^2 - \frac{69}{2}xy - 18x - 71y - 22y^2 - 40$

Rpta: $\left(\frac{7}{2}x + 2y + 5\right)(2x - 11y - 8)$

(11) **Factorizar:** $op(39y^2) + op(92y) + 210xy + 560x + 32$

Rpta: $(70x - 13y + 4)(3y + 8)$

(12) Hallar la suma de todos los términos independientes de los factores primos de la expresión:

$$\left(n^2+n-1\right)^2+(2n+1)^2$$

Rpta: 2

(13) **Factorizar:**

$$x^2(x-1)+y(x+y+1)(x-y-1)+(y+1)^2(1-x)$$

Rpta: $(x-y-1)(x+y+1)(x+y-1)$

(14) **Factorizar:** $(3x+y)^2\left(9x^2+y^2\right)+9x^2y^2$

Rpta: $\left(9x^2+3xy+y^2\right)^2$

(15) Calcular la suma de los 3 factores primos

$$x^3-x^2-17x+33$$

Rpta: $(3x-1)$

(16) **Hallar el Factor Binomio de:**

$$3x^4-2y^2-x^2y+7yz-7x^2z$$

Rpta: (x^2-y)

(17) **Factorizar:** $6x^2-7x^2y-3x^2y^2+5xy+4x-2$

Rpta: $(3x+xy-1)(2x-3xy+2)$

(18) **Cuál es el número de divisores de:** ·

$$x^5\left(x^5-2q^5\right)^3-q^5\left(x^5-2q^5\right)^3$$

Rpta: 64 divisores

(19) **Factorizar** $(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7$

Rpta: $7(a-b)(b-c)(c-a)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)^2$

(20) **Obtener el factor que no se repite**

$$(m-n)^4(m-n+1)+(n-m)^2(n-m-1)$$

Rpta: $(m-n-1)$

(21) **Uno de los factores de la expresión**

$$x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x - 1 \text{ es:}$$

Rpta: $(x^2 + 4x + 1)$

(22) Hallar el número de factores en que se descompone la siguiente expresión:

$$x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 7x - 6$$

Rpta: 4

(23) Indicar un factor de:

$$x^5 + 2x^3 + x - 1$$

Rpta: $(1 + x + x^2)$

(24) Indicar el N° de factores primos que tiene la siguiente expresión:

$$S = \sum_{k=0}^{17} x^k$$

Rpta: 5

(25) **Factorizar:**

$$x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$$

Rpta: $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 5)$

(26) **Factorizar:**

$$(2a + b - c)^5 - (b + c - 2a)^5 - (c + 2a - b)^5 - (2a + b - c)^5$$

Rpta: $160\,abc\,(4a^2 + b^2 + c^2)$

(27) Hallar el MCD del conjunto siguiente de expresiones:

$$E = (x-2)^4 (x+5)^2 \left(x^3 + 27\right)$$
$$F = \left(x^4 - 16\right)^4 (x+3)^2 (x-1)^4 \left(x^2 + 1\right)$$
$$G = \left(x^2 - 4\right)^2 \left(x^2 - 25\right)(x-1)^6$$

Rpta: $(x-2)^2$

(28) Hallar el MCD y MCM del siguiente conjunto:

$$E = 16x^3 - 20x^2 + 8x - 4$$
$$F = 16x^3 - 12x^2 + 6x - 2$$

Rpta: MCD $= 4x^2 - x + 1$
MCM $= 8x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

CAPITULO 8

LA FRACCION ALGEBRAICA

8.1 *Definición.-* Una fracción algebraica es la razón indicada de dos **expresiones algebraicas racionales**, de las cuales el denominador no debe ser una constante.

Ejemplo:

$$P(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad ; \; x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$Q(x) = \frac{x+4}{123} \quad ; \; x \in \mathbb{R} \quad ; \text{ No es una fracción algebraica}$$

$$R(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 30} \quad ; \; x \in \mathbb{R}^{+} - \{900\} \; ; \text{ No es una fracción algebraica}$$

8.2 **CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES O DOMINIO DE UNA FRACCION (CVA)**

Definición.- Es el conjunto cuyos elementos o grupos ordenados de variables permiten que la fracción:

- No tenga denominador nulo.
- Tenga sentido en el conjunto de los números reales.

***Ejemplo*:**

Hallar el CVA de la siguiente fracción:

$$F(x) = \frac{4}{2-x} + \frac{5}{7x-1}$$

Solución:

(1°) Mediante la definición:

$$x \in \mathbb{R} - \{ (2 - x) = 0; 7x - 1 = 0 \}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{ 2; 1/7 \}$$

(2°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{CVA = \{ x / x \in \mathbb{R} - \{ 2, 7 \}\}}$$

Ejemplo:

Hallar el CVA de la siguiente fracción:

$$K(x,y) = \frac{4}{(x - 2y)} + \frac{7}{2x + 5y} + \frac{1}{3}$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición del CVA.

$$CVA = \{ (x, y) / x, y \in \mathbb{R} \wedge x - 2y \neq 0 , 2x + 5 \neq 0 \}$$

(2°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{CVA = \{ (x, y) / x, y \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2y ; 2x \neq -5y ; (x \neq 0 , y \neq 0) \}}$$

Lectura:

"El conjunto de valores admisibles de la fracción $k(x, y)$ es el conjunto de pares ordenados tales que x e y son números reales y que x es diferente de $2y$, y $2x$ es distinto de $-5y$".

8.3 OBSERVACIONES RELATIVAS AL SIGNO DE LAS FRACCIONES

a) El signo positivo o negativo de la fracción afecta a toda ella, y el comportamiento es análogo al de un signo de colección.

Ejemplo:

$$a - \frac{x - y}{b} = a - \frac{x}{b} + \frac{y}{b}$$

b) Una fracción **será de signo positivo** cuando ambos términos sean de igual signo y negativo cuando ambos sean de signos opuestos.

8.4 FRACCIONES EQUIVALENTES

Definición.- Dos fracciones son equivalentes cuando adoptan los mismos valores numéricos para un dominio o conjunto de valores admisibles comunes

Ejemplo:

Sean: $F(x) = \dfrac{x^2}{x(x+1)}$ y $G(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Son equivalentes para: $x = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

8.5 PRINCIPIO DE TRANSFORMACION DE FRACCIONES

Si se multiplican o dividen los términos de una fracción algebraica por una expresión racional algebraica no nula, se obtendrá una fracción algebraica equivalente (se deberá mantener la intersección de los dominios a fin de prevalecer la definición).

Ejemplo:

Sea: $P(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

Son equivalentes: $Q(x) = \dfrac{x^4-x^2}{x^5-x^2}$; luego de multiplicar por x^2

$R(x) = \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$; luego de dividir por x - 1

$\Rightarrow P(x) = Q(x) = R(x),\ x \in D_{P(x)} \cap D_{Q(x)} \cap D_{R(x)}$

8.6 REGLA DE SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en otra equivalente, cuyos términos contengan menos factores comunes; para ello:

(1°) Se factorizan los términos de la fracción.

(2°) Se suprimen los factores comunes de los términos de la fracción (diviendolos por su MCD).

Ejemplo Explicativo

Simplificar: $F = \dfrac{21x+21-xy-y}{31x+31+xy+y}$; $31x+31+x+y \neq 0$

Solución:

Deacuerdo a la regla:

(1°) Factorizando los términos de la fracción:

$$\Rightarrow F = \frac{21(x+1)-y(x+1)}{31(x+1)+y(x+1)} \ ; \ 31x+31+x+y \neq 0$$

(2°) Se observan factores repetidos en el numerador y denominador

$$\Rightarrow F = \frac{(x+1)(21-y)}{(x+1)(31+y)} \ ; \ x \neq -1,\ y \neq -31$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{21-y}{31+y}}$$ Fracción simplificada ; $x \neq -1,\ y \neq -31$

8.7 REGLA DE REDUCCION DE UN CONJUNTO DE FRACCIONES AL MINIMO COMUN DENOMINADOR (HOMOGENIZACION)

Reducir dos o más fracciones algebraicas a un común denominador es transformarlas en otras equivalentes que tengan todas ellas el mismo denominador; para ello se sigue la regla siguiente:

a) Se simplifican las fracciones del conjunto dado

b) Se factorizan los denominadores del conjunto de fracciones, hallando su M.C.M, el cual se tomara por denominador común.

c) Se divide dicho M.C.M por el denominador de cada fracción y el cociente se multiplica por el numerador correspondiente de la fracción simplificada.

Ejemplo:

Sean: $$\frac{x}{y(x+y)} \; ; \; \frac{y}{x-y} \; ; \; \frac{1}{x^2-y^2}$$

Reducir a su menor denominador común

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla; luego de tener las fracciones simplificadas y factorizando los denominadores.

$$\Rightarrow \frac{x}{y(x+y)} \; ; \; \frac{y}{x-y} \; ; \; \frac{1}{(x+y)(x-y)}$$

(2°) El M.C.M será: $y(x+y)(x-y)$ el cual a su vez será el mínimo común denominador.

(3°) Dividiendo este M.C.M por cada denominador tendremos los cocientes.

$$x-y \; ; \; y(x+y) \, , \; y$$

(4°) Multiplicando respectivamente por los dos términos de las fracciones propuestas, se tendrán:

$$\frac{x(x-y)}{y(x+y)(x-y)} \; ; \; \frac{y^2(x+y)}{y(x+y)(x-y)} \; ; \; \frac{y}{y(x+y)(x-y)}$$

FRACCIONES CON DENOMINADOR COMUN

8.8 ALGEBRA DE LAS FRACCIONES

Las operaciones con fracciones algebraicas tienen las mismas reglas, que las fracciones numéricas o aritméticas.

8.8.1 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Para sumar algebraicamente fracciones algebraicas es necesario que tengan igual denominador.

Si las fracciones poseen denominador heterogéneo, se reduce previamente a denominador común

Ejemplo:

Ejecutar: $$\frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{2a+2} - \frac{4a}{a^2-1}$$

Solución:

Por tener fracciones con denominadores heterogéneos

(1°) Factorizando los denominadores

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}+\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{a-1}{2(a+1)}-\frac{4a}{(a+1)(a-1)}$$

El mínimo común múltiplo será: $2(a+1)(a-1)$

(2°) Al expresar la suma en forma homogénea

$$\Rightarrow \frac{2a^2+2}{2(a+1)(a-1)}+\frac{(a+1)^2}{2(a+1)(a-1)}-\frac{(a-1)^2}{2(a+1)(a-1)}-\frac{8a}{2(a+1)(a-1)}$$

(3°) Sumando algebraicamente los numeradores:

$$\Rightarrow \frac{2a^2+2+\overbrace{(a+1)^2-(a-1)^2}-8a}{2(a+1)(a-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2+2+\overbrace{4a}-8a}{2(a+1)(a-1)}\ ;\ (a+1)^2-(a-1)^2 \text{ Legendre}$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2-4a+2}{2(a+1)(a-1)}=\frac{2(a^2-2a+1)}{2(a+1)(a-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2(a-1)^2}{2(a+1)(a-1)}=\frac{a-1}{a+1}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a^2+1}{a^2-1}+\frac{a+1}{2a-2}-\frac{a-1}{2a+2}-\frac{4a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}}$$

8.8.2 Multiplicación de Fracciones

La multiplicación de fracciones algebraicas equivale a otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el productos de los denominadores.

Ejemplo

Ejecutar: $\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$

Solución:

(1°) Para facilitar la ejecución de la multiplicación, es conveniente factorizar los términos de cada fracción para simplificar previamente.

$$\Rightarrow \left[\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}\right]\left[\frac{a^2+b^2+2ab}{2ab}\right]\left[\frac{ab}{a^2+b^2}\right]$$

(2°) De acuerdo a la regla de multiplicación.

$$\Rightarrow \frac{2\left(a^2+b^2\right)(a+b)^2 ab}{2(a+b)(a-b)ab\left(a^2+b^2\right)}$$ Al ordenar los factores primos.

(3°) Simplificando:

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}\cancel{\left(a^2+b^2\right)}(a+b)^{\cancel{2}}\cancel{ab}}{\cancel{2}(a+b)(a-b)\cancel{ab}\cancel{\left(a^2+b^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a+b}{a-b}}$$

8.8.3 División de Fracciones

El cociente de dos fracciones algebraicas es aquella que resulta de multiplicar la fracción dividiendo por la recíproca de la fracción divisor.

Ejemplo

Ejecutar: $\left(a-\dfrac{b^2}{2a}\right)\left(a-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)\div\left(\dfrac{2a^2b-b^3+a}{a+b}-\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}\right)$

Solución

(1°) Para facilitar la división se recomienda factorizar los términos de la división previamente transformando a multiplicación.

$$\Rightarrow \left(\frac{2a^2-b^2}{2a}\right)\left(\frac{a^2+ab-a^2-b^2}{a+b}\right)\div\left(\underbrace{\frac{2a^2b-b^3+a}{a+b}-\frac{a}{a+b}}_{\text{Fracción Homogénea}}\right)$$

(2°) De acuerdo a la regla de división:

$$\Rightarrow \left(\frac{2a^2-b^2}{2a}\right)\frac{b(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{(a+b)}{b\underbrace{\left(2a^2-b^2\right)}}$$

Simplificando:

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\left(2a^2-b^2\right)}}{2a}\cdot\frac{\cancel{b}(a-b)}{\cancel{(a+b)}}\cdot\frac{\cancel{(a+b)}}{\cancel{b}\cancel{\left(2a^2-b^2\right)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a-b}{2a}}$$

8.8.4 Potenciación de Fracciones

Regla.- Para ejecutar la potenciación de una fracción se ejecutan las potenciaciones de los términos de la fracción.

Ejemplo:

Ejecutar: $\left(\dfrac{2a^4b^5}{3d^6e^{11}} \right)^5$

Solución:

De acuerdo a la regla:

$$\Rightarrow \frac{\left(2a^4b^5\right)^5}{\left(3d^6e^{11}\right)^5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{32a^{20}b^{25}}{243d^{30}e^{55}}}$$

8.8.5 Fracciones Compuestas

Definición.- Son aquellas fracciones cuyos términos son otras fracciones algebraicas.

Ejemplo:

$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$$

Es una fracción compuesta

Solución:

(1°) Para ejecutar la simplificación de las fracciones compuestas se ejecutan las sentencias hasta lograr una fracción simple.

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}} = \frac{\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}}$$

(2°) Ejecutando la multiplicación de medios y extremos resulta:

$$\Rightarrow \frac{2\left(a^2+b^2\right)(a-b)(a+b)}{4ab(a-b)(a+b)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a^2+b^2}{2ab}}$$

8.9 DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES

Es el procedimiento algebraico por el cual se expresa una **fracción racional propia** e irreductible como la suma de dos o más fracciones sencillas. Las fracciones obtenidas de este modo se llaman **FRACCIONES PARCIALES.**

8.9.1 Corolario de la Factorización

"Todo polinomio se puede expresar como un producto de factores de primer grado o factores primos de segundo grado, **todos ellos de coeficientes reales**".

Mediante este corolario, aceptemos el siguiente teorema que establece:

8.9.2 Teorema

"Si una fracción racional es **propia** y ésta reducida a su mínima expresión, entonces ésta se expresa como la suma de fraccciones parciales de acuerdo a: (Véase el cuadro resumen adjunto).

CASO	FORMA	DESCOMPOSICION EN F. PARCIALES
I	$\dfrac{F(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_mx+b_m)}$ "Los factores denominador son de primer grado y primos entre sí".	$\dfrac{A_1}{a_1x+b_1}+\dfrac{A_2}{a_2x+b_2}+\dfrac{A_3}{a_3x+b_3}+\ldots+\dfrac{A_m}{a_mx+b_m}$ (A_1, A_2, A_3, . . . A_m , son constantes por determinarse).
II	$\dfrac{F(x)}{(ax+b)^m}$ "El denominador contiene una potencia natural de un factor de primer grado".	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\dfrac{A_3}{(ax+b)^3}+\ldots+\dfrac{A_m}{(a\ x+b)^m}$ (A_1, A_2, A_3, . . . A_m son constantes por determinarse).
III	$\dfrac{F(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_mx^2+b_m+c_m)}$ "Los factores en el denominador son de segundo grado y primos entre sí".	$\dfrac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\dfrac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\dfrac{A_2x+B_3}{a_3x^2+b_3x+c_3}+\ldots+\dfrac{A_mx+B_m}{a_mx^2+b_mx+c_m}$ (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, . . . A_m, B_m son constantes por determinarse).
IV	$\dfrac{F(x)}{(ax^2+bx+c)^m}$ "El denominador contiene una potencia natural de un factor primo de segundo grado".	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\dfrac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\ldots+\dfrac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$ (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, . . . A_m, B_m son constantes por determinarse).

Ejemplo:

Sea $\dfrac{45}{(x+1)(x-9)}$, para descomponerla planteamos lo siguiente según (I):

$\Rightarrow \dfrac{45}{(x+1)(x-9)} = \dfrac{A_1}{(x+1)} + \dfrac{A_2}{x-9}$; A_1, A_2 se determinan mediante equivalencias.

Ejemplo:

Sea $\dfrac{7x+39}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, para descomponerla planteamos lo siguiente según (II):

$$\Rightarrow \frac{7x+39}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{x}{(2x-7)^5}$, para descomponerla planteamos lo siguiente según (II):

$$\Rightarrow \frac{x}{(2x-7)^5} = \frac{A_1}{2x-7} + \frac{A_2}{(2x-7)^2} + \frac{A_3}{(2x-7)^3} + \frac{A_4}{(2x-7)^4} + \frac{A_5}{(2x-7)^5}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{2x^2+3}{(x+1)(x+2)(x+3)^3}$ para descomponerla planteamos lo siguiente según (I) y (II):

$$\Rightarrow \frac{2x^2+3}{(x+1)(x+2)(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \overbrace{\underbrace{\frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{(x+3)^3}}}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{7x^3-1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+5\right)}$; descomponiendo según (III):

$$\Rightarrow \frac{7x^3-1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+5\right)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{A_2x+B_2}{x^2-x+5}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{2x^3-3}{\left(3x^2+x-1\right)^4}$; descomponiendo según (IV):

$$\Rightarrow \frac{2x^3-3}{\left(3x^2+x-1\right)^4} = \frac{Ax+B}{3x^2+x-1} + \frac{Mx+N}{\left(3x^2+x-1\right)^2} + \frac{Px+R}{\left(3x^2+x-1\right)^3} + \frac{Sx+U}{\left(3x^2+x-1\right)^4}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+7\right)\left(3x-5\right)}$; descomponiendo según (I) y (III):

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{\left(x^2+x+7\right)\left(3x-5\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+7} + \frac{C}{3x-5}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{4x^3+x+2}{\left(x^2+x+1\right)^3\left(x-2\right)^4}$; descomponiendo según (III) y (IV):

$$\Rightarrow \frac{a_1x+b_1}{\left(x^2+x+1\right)} + \frac{a_2x+b_2}{\left(x^2+x+1\right)^2} + \frac{a_3x+b_3}{\left(x^2+x+1\right)^3} + \frac{c}{(x-2)} + \frac{d}{(x-2)^2} + \frac{e}{(x-2)^3} + \frac{f}{(x-2)^4}$$

Ejemplo:

Sea $\dfrac{2x+9}{\left(x^2+11\right)\left(x^2+1\right)^3}$

$$\Rightarrow \frac{2x+9}{\left(x^2+11\right)\left(x^2+1\right)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+11} + \overbrace{\underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Gx+H}{\left(x^2+1\right)^3}}}$$

Los parametros A, B, C, D, etc se obtienen a partir de las equivalencias planteadas.

Ejemplo:

Calcular A_1 y A_2 si:

$$\frac{25}{(x+1)(x+9)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+9}$$

Solución:

(1°) $$\frac{25}{(x+1)(x+9)} = \frac{A_1(x+9)+A_2(x+1)}{(x+1)(x+9)}$$

(2°) $25 = \left(A_1+A_2\right)x + \left(9A_1+A_2\right)$

(3°) $A_1+A_2 = 0$ y $9A_1+A_2 = 25$, al resolver

$\therefore \boxed{A_1 = \dfrac{25}{8}}$ $\boxed{A_2 = -\dfrac{25}{8}}$

8.10 LAS FRACCIONES DE STIRLING

Definición.- Son las fracciones de la forma:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{a_i\,a_{i+1}\,a_{i+2}\cdots}\right)$$

En las cuales: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ no son iguales a cero y forman un P.A.

Las fracciones de Stirling se caracterizan por ser sumables mediante una simple descomposición de fracciones.

Ejemplo:

Ejecutar: $$E = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(x+3i-2)(x+3i+1)}$$

Solución:

(1°) Desarrollando la sumatoria

$$E = \underbrace{\frac{1}{(x+1)(x+4)}}_{i=1} + \underbrace{\frac{1}{(x+4)(x+7)}}_{i=2} + \underbrace{\frac{1}{(x+7)(x+10)}}_{i=3} + \underbrace{\frac{1}{(x+10)(x+13)}}_{i=4}$$

(2°) Descomponiendo cada fracción

$$\Rightarrow E = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+10}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+10} - \frac{1}{x+13}\right]$$

(3°) Extrayendo $\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} \underbrace{- \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x+10}}_{\text{Parejas Opuestas}} - \frac{1}{x+13}\right]$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+13}\right]$$

(4°) Ejecutando esta última sentencia

$$\Rightarrow E = \frac{1}{3}\frac{(x+13-x-1)}{(x+1)(x+13)} = \frac{1}{3}\frac{12}{(x+1)(x+13)} = \frac{4}{(x+1)(x+13)}$$

$$\therefore \boxed{E = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(x+3i-2)(x+3i+1)} = \frac{4}{(x+1)(x+13)}}$$

Usualmente se utiliza la regla práctica siguiente:

Una suma de fracciones de Stirling se reduce a la diferencia de los extremos descompuestos debido a que los intermedios forman parejas opuestas.

Ejemplo:

Ejecutar:

$$S = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla:

$$S = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)} \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right];$$

$\frac{1}{2}$ es la recíproca de la diferencia compensatoria de la descomposición.

Ejecutando las sentencias

$$S = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} = \frac{2nx+n^2+3n}{2(x+1)(x+2)(x+n+1)(x+n+2)}$$

(2°) Para poder apreciar el desarrollo en términos formales, observemos la siguiente secuencia.

Descomponiendo

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)}\right] + \ldots$$

$$- \ldots + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} - \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right]$$

(2°) Ordenando:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} \underbrace{- \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}} - \underbrace{\frac{1}{(x+3)(x+4)}} + \ldots \right.$$

$$\left. \underbrace{\ldots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}}_{\text{Parejas Opuestas}} - \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right]$$

(3°) Luego de seleccionar los extremos:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+n+1)(x+n+2)}\right]$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{2nx+n^2+3n}{(x+1)(x+2)(x+n+1)(x+n+2)}}$$

8.11 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

8.11.1 Ejercicio Explicativo

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias:

$$A(x) = \frac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6} : \left(\frac{x^2+6x+3}{x^2+x-6}\right) ; \; B(x) = \frac{2x+3}{x+3} \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

1) El conjunto de valores admisibles (CVA) contiene a todos aquellos valores que permiten a la expresión algebraica tener sentido en el conjunto de los números reales.

2) La división carece de sentido si el divisor es cero.

Solución:

(1°) Realizando el análisis de A (x) de modo que se produzca el vacío.

$$A(x) = \frac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6} : \left(\frac{x^2+6x+3}{x^2+x-6}\right)$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \quad \vee \quad x^2+6x+3=0 \quad \vee \quad x^2+x-6=0$$

(2°) $$(2x+3)(x-2) = 0 \quad \vee \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-12}}{2} \quad \vee \quad (x+3)(x-2) = 0$$

(3°) $$\left(x = -\frac{3}{2}, x = 2\right) \quad \vee \quad \left(x = -3+\sqrt{6}, x = -3-\sqrt{6}\right) \quad \vee \quad (x = -3, x = 2)$$

(2°) El CVA o dominio será

$$\therefore \boxed{CVA_A = x \in IR - \left\{-\frac{3}{2}, 2, -3+\sqrt{6}, -3-\sqrt{6}\right\}}$$

(3°) En relación a $B(x) = \dfrac{2x+3}{x+3}$

el vacío en la definición de división se producirá si: $x + 3 = 0$, $x = -3$

$$\therefore \boxed{CVA_B = x \in IR - \{-3\}}$$

8.11.2 Ejercicio Explicativo

Escribir en forma de fraccciones parciales:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+2)(3x+1)(x+3)}$$

Recuerde el Teorema siguiente:

Si: $\dfrac{F(x)}{(ax+b)(mx+n)(px+q)}$ (Fracción Propia)

$$\Rightarrow \frac{F(x)}{(ax+b)(mx+n)(px+q)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{mx+n} + \frac{C}{px+q}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al Teorema y el cuadro resumen planteamos la equivalencia siguiente:

$$\Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{(x+2)(3x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(3x+1)} + \frac{C}{(x+3)}$$

(2°) Debemos de calcular A, B y C considerando que tenemos a disposición una equivalencia de variable "x" y eliminando denominadores.

$$\Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{(x+2)(3x+1)(x+3)} = \frac{A(3x+1)(x+3)+B(x+2)(x+3)+C(x+2)(3x+1)}{(x+2)(3x+1)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2+x+1 = A(3x+1)(x+3)+B(x+2)(x+3)+C(x+2)(3x+1)}$$

(3°) Por criterios del tratamiento de equivalencias podemos asignar valores a la variable.

$\Rightarrow$ **Asignemos a: $x = -3$**

$$\Rightarrow 2(-3)^2+(-3)+1 = C(-3+2)[3(-3)+1]$$

$$16 = C(-1)(-8) \qquad \therefore \boxed{C = 2}$$

$\Rightarrow$ **Asignemos a: $x = -2$**

$$\Rightarrow 2(-2)^2+(-2)+1 = A[3(-2)+1][-2+3]$$

$$7 = A[-5] \qquad \therefore \boxed{A = -\frac{7}{5}}$$

$\Rightarrow$ **Asignemos a: $x = 0$**

$$\Rightarrow \quad 1 = 3A+6B+2C$$

$$\Rightarrow \quad 1 = -\frac{21}{5}+6B+4 \qquad \therefore \boxed{B = \frac{1}{5}}$$

$$\therefore \boxed{\frac{2x^2+x+1}{(x+2)(3x+1)(x+3)} = -\frac{7}{5(x+2)} + \frac{1}{5(3x+1)} + \frac{2}{(x+3)}}$$

8.11.3 Ejercicio Explicativo

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{x^4+20x-3}{x^2-1}$$

Recuerde:

Los criterios de descomposición en fracciones se utiliza teniendo fracciones propias.

Solución:

(1°) No es posible plantear de inmediato la equivalencia para la descomposición debido a tener originalmente una fracción impropia.

$$\Rightarrow \frac{x^4+20x-3}{x^2-1} = x^2+1+\frac{20x-2}{x^2-1}\text{; pues:}$$

$$\begin{array}{r|rrr|rr}
1 & 1 & 0 & 0 & 20 & -3 \\
0 & & 0 & 1 & & \\
 & & & 0 & 0 & \\
1 & & & & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 20 & -2
\end{array}$$

(2°) Apliquemos el Teorema a la fracción propia obtenida.

$$\Rightarrow \frac{20x-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}$$

(3°) Luego de eliminar denominadores.

$\Rightarrow 20x-2 = A(x-1)+B(x+1)$

$\Rightarrow 20x-2 = (A+B)x+(-A+B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 20 \\ -A+B = -2 \end{cases}$$

(4°) Resolviendo el sistema:

$\Rightarrow \quad B = 9 \ ; \ A = 11$

$$\therefore \boxed{\frac{x^4+20x-3}{x^2-1} = x^2+1+\frac{9}{x+1}+\frac{11}{x-1}}$$

8.11.4 Ejercicio Explicativo

Descomponer en fracciones parciales a:

$$\frac{x+31}{2x^2+7x-15}\ ;\ x\in \mathbb{R}-\left\{-5;\frac{3}{2}\right\}$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la factorización tendremos:

$$\frac{x+31}{(2x-3)(x+5)}\ ;\ x\in \mathbb{R}\ ;\ \text{Planteamos la siguiente equivalencia}$$

(2°) $$\frac{x+31}{(2x-3)(x+5)} = \frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+31}{(2x-3)(x+5)} = \frac{A(x+5)+B(2x-3)}{(2x-3)(x+5)}$$

$\Rightarrow \quad x+31 = A(x+5)+B(2x-3)$

$\Rightarrow \quad x+31 = (A+2B)x+(5A-3B)$

(3°) Se tiene el sistema que garantiza la descomposición.

$$\Rightarrow \begin{cases} A + 2B = 1 \\ 5A - 3B = 31 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Resolviendo: $A = 5$; $B = -2$

$$\therefore \boxed{\frac{x+31}{2x^2+7x-15} = \frac{5}{2x-3} - \frac{2}{x+5}}$$

8.11.5 Ejercicio Explicativo

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)} \ ; \ x \in \mathbb{R} - \{0; 2; -3\}$$

Solución:

(1°) Planteamos la equivalencia correspondiente de acuerdo al cuadro resumen:

$$\Rightarrow \frac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)}{x(x+3)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{5x^2 + 19x - 18 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) **En (1) : Elegimos $x = 2$**

$\Rightarrow 5(2)^2 + 19(2) - 18 = A(0) + B(0) + C(2)(5)$ $\quad \therefore \boxed{C = 4}$

En (1) : Elegimos $x = 0$

$\Rightarrow 0 + 0 - 18 = A(3)(-2) + B(0) + C(0)$ $\quad \therefore \boxed{A = 3}$

En (1) : Elegimos $x = -3$

$\Rightarrow 5(-3)^2 + 19(-3) - 18 = A(0) + B(-3)(-5) + C(0)$ $\quad \therefore \boxed{B = -2}$

$$\therefore \boxed{\frac{5x^2+19x-18}{x(x+3)(x-2)} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-2}}$$

8.11.6 Ejercicio Explicativo

Transformar a fracciones parciales

$$\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} \ ; \ x \in \mathbb{R} - \{-4, -3\}$$

Solución:

(1°) Planteamos la equivalencia correspondiente de acuerdo al cuadro resumen:

$$\Rightarrow \frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{x+4}$$

Calculando A, B y C a partir de la equivalencia generada

$$\Rightarrow \frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} = \frac{A(x+3)(x+4)+B(x+4)+C(x+3)^2}{(x+3)^2(x+4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2+16x+29 = A(x+3)(x+4)+B(x+4)+C(x+3)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) **En (1) : Elegimos: x = - 3**

$$\Rightarrow 2(-3)^2+16(-3)+29 = B(1) \qquad \therefore\ B = -1$$

En (1) : Elegimos: x = - 4

$$\Rightarrow 2(-4)^2+16(-4)+29 = C(-4+3)^2 \qquad \therefore\ C = -3$$

En (1) : Elegimos: x = 0

$$\Rightarrow 29 = 124+4B+9C$$

$$\Rightarrow 29 = 12A-4-27 \qquad \therefore\ A = 5$$

(3°) Finalmente:

$$\therefore\ \boxed{\frac{2x^2+16x+29}{(x+3)^2(x+4)} = \frac{5}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{3}{x+4}}$$

8.11.7 Ejercicio Explicativo

Transformar en fracciones parciales:

$$\frac{2x^2-14x+8}{(x^2+3x-2)(x-3)}$$

Solución:

(1°) Planteamos la equivalencia correspondiente de acuerdo al cuadro resumen:

$$\Rightarrow \frac{2x^2-14x+8}{(x^2+3x-2)(x-3)} = \frac{Ax+B}{(x^2+3x-2)} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Rightarrow 2x^2-14x+8 = (Ax+B)(x-3)+C(x^2+3x-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) **En (1) : Elegimos: x = 3**

$$\Rightarrow 2(9)-14(3)+8 = C(9+9-2) \qquad \therefore\ \boxed{C = -1}$$

En (1) : Elegimos: $x = 0$

$\Rightarrow 8 = B(-3) + C(-2)$

$8 = B(-3) + 2$ $\quad\therefore \boxed{B = -2}$

En (1) : Elegimos: $x = 1$

$\Rightarrow -4 = -2(A + B) + 2C$

$-4 = -2(A - 2) - 2$ $\quad\therefore \boxed{A = 3}$

(3°) Finalmente obtenemos:

$$\therefore \boxed{\frac{2x^2 - 14x + 8}{\left(x^2 + 3x - 2\right)(x - 3)} = \frac{3x - 2}{x^2 + 3x - 2} - \frac{1}{x - 3}}$$

8.11.8 Ejercicio Explicativo

Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{14x^3 + 14x^2 - 4x + 3}{\left(3x^2 - x + 1\right)(x - 1)(x + 2)}$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{1, -2; \left\{3x^2 - x + 1 = 0\right\}\right\}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al Teorema y del cuadro resumen; planteamos la siguiente equivalencia:

$$\Rightarrow \frac{14x^3 + 14x^2 - 4x + 3}{\left(3x^2 - x + 1\right)(x - 1)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{3x^2 - x + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 2}$$

(2°) Eliminar los denominadores

$$14x^3 + 14x^2 - 4x + 3 = (Ax + B)(x - 1)(x + 2) + C(3x^2 - x + 1)(x + 2)$$
$$+ D(3x^2 - x + 1)(x - 1) \ldots\ldots (1)$$

(3°) Para determinar A, B, C y D, asignamos valores a la variable x.

En (1) asignamos a: $x = 1$

$\Rightarrow 14 + 14 - 4 + 3 = C(3)(3)$ $\quad\therefore \boxed{C = 3}$

En (1) asignamos a: $x = -2$

$\Rightarrow 14(-2)^3 + 14(-2)^2 - 4(-2) + 3 = D\left[3(-2)^2 - (-2) + 1\right](-2 - 1)$ $\quad\therefore \boxed{D = 1}$

En (1) asignamos a: $x = 0$

$\Rightarrow 3 = B(-2) + C(2) + D(-1)$

$3 = B(-2) + 6 - 1$ $\quad\therefore \boxed{B = 1}$

En (1) : El coeficiente 3° grado es identificable, lo cual se escribe como:

$14x^3 = (A + 3C + 3D)x^3$

$14 = A + 9 + 3$ $\quad\therefore \boxed{A = 2}$

(4°) Finalmente obtenemos

$$\therefore\ \boxed{\frac{14x^3+14x^2-4x+3}{\left(3x^2-x+1\right)\left(x-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{2x+1}{3x^2-x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}}$$

8.11.9 Ejercicio Explicativo

Transformar a fracciones parciales:

$$\frac{5x^2+13x-1}{\left(x^2+7x+1\right)\left(3x^2-x-3\right)}$$

$$x\in \mathrm{IR}-\left\{\left(x^2+7x+1\right)\left(3x^2-x-3\right)=0\right\}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al cuadro resumen podemos plantear la equivalencia:

$$\frac{5x^2+13x-1}{\left(x^2+7x+1\right)\left(3x^2-x-3\right)}=\frac{Mx-N}{x^2+7x+1}+\frac{Ax+B}{3x^2-x-3}$$

$\Rightarrow 5x^2+13x-1 = (Ax+B)(x^2+7x+1)+(Mx+N)(3x^2-x-3)$

$\Rightarrow 5x^2+13x-1 = (A+3M)x^3+(7A+B+3N-M)x^2+(A+7B-3M-N)x+B-3N$

(2°) Identificando coeficientes en la equivalencia:

$$\Rightarrow \begin{cases} A+3M=0 \dotfill (1)\\ 7A+B+3N-M=5 \dotfill (2)\\ A+7B-3M-N=13 \dotfill (3)\\ B-3N=-1 \dotfill (4)\end{cases}$$

(3°) Resolviendo el sistema: de (1): $A = -3M$; de (4): $B = 3N-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11M-3N=-3 \dotfill (5)\\ 3M-10N=-10 \dotfill (6)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ de (6) : $M = \dfrac{10N-10}{3}$ ....(7)

$\Rightarrow$ En (5) : $11\left(\dfrac{10N-10}{3}\right)-3N=-3 \qquad \therefore \boxed{N=1}$

(4°) Sustituyendo $N = 1$

$\Rightarrow$ En (7) : $M = 0$

$\Rightarrow$ En (1) : $A = 0$

$\Rightarrow$ En (2) : $B = 2$

(5°) Finalmente se tendrá:

$$\therefore\ \boxed{\frac{5x^2+13x-1}{\left(x^2+7x+1\right)\left(3x^2-x-3\right)}=\frac{1}{x^2+7x+1}+\frac{2}{3x^2-x-3}}$$

8.11.10 Ejercicio Explicativo

Simplificar: $$H = \frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq b$; $b \neq c$; $a+b+c \neq 0$

Recuerde:

Un polinomio es cíclico cuando al permutar sus variables de 2 en 2, este polinomio cambia de signo o se mantiene.

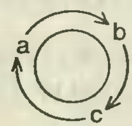
Solución:

(1°) Factorizando los términos de la fracción.

$\Rightarrow$ **Para el numerador:** Ubicando factores, para ello $a = b$: (mediante la regla cíclica)

$= \cancel{bc(b-c)} + \cancel{bc(c-b)} + b^2(0) = 0$

De acuerdo a:



(2°) $\Rightarrow bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b) = \underset{\text{Parámetro}}{k_1}\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}_{3^\circ\text{ grado}}$; calculamos "$k_1$"

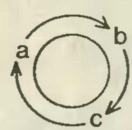
$\Rightarrow a = 2, b = 1, c = 0;\ 0+0+2(1) = k(1)(1)(-2) \qquad \therefore\ k_1 = -1$

(3°) El numerador será: $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ....(1)

(4°) **Para el denominador:** $a = b$

$= \cancel{b^3(b-c)} + \cancel{b^3(c-b)} + c^3(0) = 0$

De acuerdo a:



$\Rightarrow \underbrace{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}_{4^\circ\text{ grado}} = k_2\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}_{3^\circ}\underbrace{(a+b+c)}_{1^\circ}$

$\Rightarrow a = 2;\ b = 1;\ c = 0 : 8(1)+1(-2)+0 = k_2(1)(1)(-2)(3) \qquad \therefore\ k_2 = -1$

(5°) El denominador será: $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ....(2)

$\Rightarrow$ De (1) y (2) en H:

$$H = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)} \qquad \therefore\ \boxed{H = \frac{1}{a+b+c}}$$

8.11.11 **Ejemplo Explicativo**

Simplificar: $$E = \left[\frac{a^3+b^3}{a\left(a^3-2b^3\right)}\right]^{-3} + \left[\frac{a^3+b^3}{b\left(2a^3-b^3\right)}\right]^{-3}$$

Recuerde:

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

Solución:

(1°) Al ordenar se obtiene:

$$\Rightarrow E = \frac{\left[a\left(a^3-2b^3\right)\right]^3}{\left(a^3+b^3\right)^3} + \frac{\left[b\left(2a^3-b^3\right)\right]^3}{\left(a^3+b^3\right)^3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\left[a\left(a^3-2b^3\right)\right]^3 + \left[b\left(2a^3-b^3\right)\right]^3}{\left(a^3+b^3\right)^3} \quad \text{.................................} (1)$$

(2°) Desarrollando los cubos de los binomios en el numerador

$$\Rightarrow a^3\underbrace{\left(a^3-2b^3\right)^3} + b^3\underbrace{\left(2a^3-b^3\right)^3}$$

Atendiendo a los paréntesis interiores.

$$\Rightarrow a^3\left[a^9-8b^9-3\left(a^3\right)\left(2b^3\right)\left(a^3-2b^3\right)\right] + b^3\left[8a^9-b^9-3\left(2a^3\right)\left(b^3\right)\left(2a^3-b^3\right)\right]$$

$$\Rightarrow [\,a^{12} - 8a^3b^9 - 6a^9b^3 + 12a^6b^6\,] + [\,8a^9b^3 - b^{12} - 12a^6b^6 + 6a^3b^9\,]$$

$$\Rightarrow a^{12} - b^{12} \underbrace{- 6a^9b^3 + 8a^9b^3} + \underbrace{\cancel{12a^6b^6} - \cancel{12a^6b^6}} \underbrace{- 8a^3b^9 + 6a^3b^9}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a^{12} - b^{12}} + \underbrace{2a^9b^3 - 2a^3b^9}$$

(3°) Factorizando:

$$\Rightarrow (a^6+b^6)\,\underline{(a^6-b^6)} + 2a^3b^3\,\underline{(a^6-b^6)}$$

$$\Rightarrow (a^6-b^6)(a^6+b^6+2a^3b^3)$$

$$\Rightarrow \left(a^6-b^6\right)\left(a^3+b^3\right)^2 = \left(a^3-b^3\right)\left(a^3+b^3\right)\left(a^3+b^3\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(a^3-b^3\right)\left(a^3+b^3\right)^3 \text{; reemplazando en (1)}$$

(4°) Simplificando

$$\Rightarrow E = \frac{\left(a^3-b^3\right)\cancel{\left(a^3+b^3\right)^3}}{\cancel{\left(a^3+b^3\right)^3}}$$

$$\therefore \boxed{E = a^3 - b^3}$$

8.11.12 Ejercicio Explicativo

Simplificar: $G = \left[\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x^2-a^2\right)^{-\frac{1}{2}}} \right] \left(-\dfrac{n^{-\frac{1}{2}}}{m^{-\frac{3}{2}}} \right)$

Sabiendo que: $x = a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$

$(a; m, n, x \in \mathbb{R} - \{0\} ; n > m).$

Solución:

(1°) De acuerdo a lo consignado para x.

$$\Rightarrow x = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 \pm a^2 = a^2\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right) \pm a^2 = a^2\left(\frac{m^2+n^2 \pm 2mn}{2mn}\right) = a^2\left(\frac{n \pm m}{\sqrt{2mn}}\right)^2 \text{ ; pues } n > m$$

$$\Rightarrow \left(x^2 \pm a^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2mn}}{a(n \pm m)} \quad \text{..(1)}$$

(2°) Reemplazando (1) en G' pues $G = G'\left(\dfrac{-n^{-\frac{1}{2}}}{m^{-\frac{3}{2}}}\right)$ ....(2)

$$\Rightarrow G' = \frac{\dfrac{\sqrt{2mn}}{a} \times \dfrac{1}{(n+m)} + \dfrac{\sqrt{2mn}}{a} \times \dfrac{1}{(n-m)}}{\dfrac{\sqrt{2mn}}{a} \times \dfrac{1}{(n+m)} - \dfrac{\sqrt{2mn}}{a} \times \dfrac{1}{(n-m)}} \text{ ; extrayendo } \frac{\sqrt{2mn}}{a}$$

$$\Rightarrow G' = \frac{\cancel{\dfrac{\sqrt{2mn}}{a}}\left(\dfrac{1}{n+m} + \dfrac{1}{n-m}\right)}{\cancel{\dfrac{\sqrt{2mn}}{a}}\left(\dfrac{1}{n+m} - \dfrac{1}{n-m}\right)} = \frac{\dfrac{n-m+n+m}{n^2-m^2}}{\dfrac{n-m-n-m}{n^2-m^2}}$$

(3°) Se logra:

$$\Rightarrow G' = \frac{2n}{-2m} \quad \text{..(3)}$$

(4°) de (3) en (2)

$$\Rightarrow G = \left(\frac{n}{-m}\right) \times \left(-\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{m^{-\frac{3}{2}}}\right) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore \boxed{G = \sqrt{mn}}$$

8.11.13 **Ejercicio Explicativo**

Si: $(a+b+c)^2 = 3(ab+ac+bc)$

Simplificar: $$H = \frac{(a+b)^{10}}{b^5\,c^5} + \frac{(a+c)^{10}}{c^5\,b^5} + \frac{(b+c)^{10}}{a^5\,b^5}$$

$a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Recuerde:

Sea: $a, b, c \in \mathbb{R}$

Si: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

$\Rightarrow \quad a = b = c$

Solución:

(1°) De la condición consignada:

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 3ab + 3ac + 3bc$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$

$\Rightarrow a = b = c$; de acuerdo al cuadro de equivalencias notables condicionales.

(2°) Sustituyendo:

$$\Rightarrow H = \frac{(2a)^{10}}{a^5\,a^5} + \frac{(2a)^{10}}{a^5\,a^5} + \frac{(2a)^{10}}{a^5\,a^5}$$; poniendo en términos de "a"

$$\Rightarrow H = 3\left(\frac{2^{10}\,a^{10}}{a^{10}}\right) = 3(1024)$$

$$\therefore \boxed{H = 3\,072}$$

8.11.14 **Ejercicio Explicativo**

Si: $ab + ac + bc = 0$

Calcular: $$k = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^3 + b^3 + c^3 + abc}$$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) A partir de la equivalencia:

$$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$$

(2°) Imponiendo la condición: $ab+ac+bc = 0$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(0)-3abc$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3-3abc \text{ .... } (1)$$

(3°) Considerando la equivalencia:

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$\Rightarrow$ Imponiendo nuevamente la condición original se obtiene:

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 \text{ .... } (2)$$

(4°) Potenciando a exponente 2 nuevamente (2)

$$(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \text{ .... } (3)$$

$\Rightarrow$ De la condición original, al cuadrado: $(ab+ac+bc)^2 = 0^2$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 = -2abc(a+b+c) \text{ .... } (4)$$

(5°) De (4) en (3):

$$(a+b+c)^4 = a^4+b^4+c^4-4abc(a+b+c) \text{ .... } (5)$$

$\Rightarrow$ De (1) y (5) en "K":

$$\Rightarrow k = \frac{a^4+b^4+c^4}{a^3+b^3+c^3+abc} = \frac{(a+b+c)^4+4abc(a+b+c)}{(a+b+c)^3+3abc+abc}$$

$$\Rightarrow k = (a+b+c)\frac{\left[(a+b+c)^3+4abc\right]}{(a+b+c)^3+4abc} \qquad \therefore \boxed{k = a+b+c}$$

8.11.15 **Ejemplo Explicativo**

Si:

$$\frac{x}{2}+3\frac{ab}{y} = a \text{ .... } (1)$$

$$\frac{z}{4}+5\frac{cd}{w} = c \text{ .... } (2)$$

$$\frac{y}{3}+4\frac{bc}{z} = 2b \text{ .... } (3)$$

Calcular: $k = \dfrac{xyzw}{abcd}$ $\quad x;y;z;b;c;d \in \mathbb{R}-\{0\}$

Solución:

(1°) Considerando a “x”, “y”, “z” variables dependientes de las otras “a”, “b”, “c”, “d” y “w”.

De (2) $: \dfrac{z}{4c} = 1-\dfrac{5d}{w}$ $\quad ; \; z = 4c\left(\dfrac{w-5d}{w}\right)$ ....(4)

(2°) De (4) en (3) : $\dfrac{y}{3b}+\dfrac{\cancel{4c}}{\cancel{4c}\left(\dfrac{w-10d}{w-5d}\right)} = 2$ $\quad ; \; y = 3b\left(\dfrac{w-10d}{w-5d}\right)$ ....(5)

De (5) en (1) : $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{\cancel{3b}}{\cancel{3b}\left(\dfrac{w-10d}{w-5d}\right)} = 1$; $x = 2a\left(\dfrac{-5d}{w-10d}\right)$ ....(6)

(3°) De (4) , (5) y (6) en “k”:

$$\Rightarrow k = \underbrace{2a\left(\frac{-5d}{w-10d}\right)}_{x}\underbrace{3b\left(\frac{w-10d}{w-5d}\right)}_{y}\underbrace{4c\left(\frac{w-5d}{w}\right)}_{z}\times\frac{W}{a\,b\,c\,d}$$; ordenando los factores:

$$\Rightarrow k = \frac{-120\,\cancel{abcd}}{\cancel{abcd}}\left(\frac{1}{\cancel{w-10d}}\right)\left(\frac{\cancel{w-10d}}{\cancel{w-5d}}\right)\left(\frac{\cancel{w-5d}}{\cancel{w}}\right)\cancel{W}$$

$$\therefore \boxed{k = -120}$$

8.11.16 **Ejemplo Explicativo**

Si: $x = a^3$

Calcular: $E = \displaystyle\sum_{n=1}^{n=4}\left[\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)\ldots(a^{n-1}-x)}{\sqrt{a}^{\,n(n-1)}-\sqrt{a}^{\,n(n+1)}}\right]$ $\quad a \in \mathbb{R}-\{1;0\}$

Solución:

(1°) De acuerdo a la notación Σ , el desarrollo de la proposición será:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(1-x)}{1-\sqrt{a}^{\,2}}}_{n=1}+\underbrace{\frac{(1-x)(a-x)}{\sqrt{a}^{\,2}-\sqrt{a}^{\,6}}}_{n=2}+\underbrace{\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{\sqrt{a}^{\,6}-\sqrt{a}^{\,12}}}_{n=3}+\underbrace{\frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)(a^3-x)}{\sqrt{a}^{\,12}-\sqrt{a}^{\,20}}}_{n=4}$$

(2°) Reemplazando **x** $= a^3$

$$E = \underbrace{\frac{1-a^3}{1-a}}+\underbrace{\frac{(1-a^3)(a-a^3)}{a-a^3}}+\underbrace{\frac{(1-a^3)(a-a^3)(a^2-a^3)}{a^3-a^6}}+\underbrace{\frac{(1-a^3)(a-a^3)(a^2-a^3)(a^3-a^3)}{a^6-a^{10}}}_{0}$$

$$1 + a + a^2 + \frac{a(1-a^3)(1-a^2)}{a(1-a^2)} + \frac{\cancel{a^3(1-a^3)}(1-a^2)(1-a)}{\cancel{a^3(1-a^3)}}$$

(3°) Se tendrá:

$$E = 1 + a + a^2 + 1 - a^3 + (1 - a^2)(1 - a)$$
$$E = 1 + a + a^2 + 1 - a^3 + 1 - a^2 - a + a^3$$

$\therefore \boxed{E = 3}$

8.11.17 Ejemplo Explicativo

Una manada de lobos atacó en varias oportunidades una granja de pollos. Averiguar cuántos pollos se comieron o llevaron si sólo sobraron 3 vivos y en los dos primeras incursiones se llevaron o comieron la mitad en cada oportunidad, en la tercera y cuarta incursión la tercera parte cada vez, hasta que en la quinta y sexta ocasión la cuarta parte y los 11/12 de los que sobrevivían respectivamente.

Solución:

(1°) Hubo "x" pollos entonces se desprende el cuadro siguiente:

$\Rightarrow$ Se comieron: "x - 3"

	HABIAN	ATACADOS	QUEDABAN VIVOS
1er Ataque	x	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}x$
2do Ataque	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)$	$\frac{1}{4}x$
3er Ataque	$\frac{1}{4}x$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x\right)$	$\frac{1}{6}x$
4to Ataque	$\frac{1}{6}x$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}x\right)$	$\frac{1}{9}x$
5to Ataque	$\frac{1}{9}x$	$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}x\right)$	$\frac{1}{12}x$
6ta Ataque	$\frac{1}{12}x$	$\frac{11}{12}\left(\frac{1}{12}x\right)$	$\frac{1}{144}x$

(2°) En la última oportunidad quedaron 3 vivos.

$$\Rightarrow \frac{1}{144}\ x = 3 \ ; \qquad x = 432 \ ;$$

$\Rightarrow$ x - 3 = 429 pollos

$\therefore$ $\boxed{\text{Se comieron o mataron 429 pollos}}$

8.11.18 Ejercicio Explicativo

Si: $\dfrac{x+y}{ma+nb} = \dfrac{y+z}{mb+nc} = \dfrac{x+z}{mc+na}$

Simplificar: $E = \dfrac{(ab+ac+bc)(x+y+z)}{(a+b+c)\left[(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z\right]}$

Solución:

(1°) De la condición: $\dfrac{x+y}{ma+nb} = \dfrac{y+z}{mb+nc} = \dfrac{x+z}{mc+na} = k$

$\Rightarrow \dfrac{x+y+y+z+x+z}{ma+nb+mb+nc+mc+na} = k$; según propiedad de las series de razones iguales.

$\Rightarrow \dfrac{2(x+y+z)}{(m+n)a+(m+n)b+(m+n)c} = k$; en el denominador existe factorización evidente.

$\Rightarrow \dfrac{2(x+y+z)}{(m+n)(a+b+c)} = k$ .... (1)

(2°) Multiplicando por "a", "b" y "c" la condición en la siguiente forma:

$$\dfrac{\overset{\text{por a}}{ay+az}}{amb+anc} = \dfrac{\overset{\text{por b}}{bx+bz}}{bmc+bna} = \dfrac{\overset{\text{por c}}{cx+cy}}{mac+nbc} = k$$

(3°) Aplicando propiedad de serie de razones

$\Rightarrow \dfrac{x(b+c)+y(a+c)+z(a+b)}{(m+n)(ab+ac+bc)} = k$ ..(2) pues:

$amb+anc+bmc+bna+mac+nbc$
$m(ab+ac+bc)+n(ab+ac+bc)$
$(ab+ac+bc)(m+n)$

$\Rightarrow$ de (1): $\dfrac{x+y+z}{a+b+c} = \dfrac{k}{2}(m+n)$

$\Rightarrow$ de (2): $\dfrac{(b+c)x+y(a+c)+(a+b)z}{(ab+ac+bc)} = k(m+n)$

(4°) Asociando en la expresión propuesta:

$$\Rightarrow E = \underbrace{\left[\dfrac{x+y+z}{a+b+c}\right]}_{(1)}\underbrace{\left[\dfrac{ab+ac+bc}{(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z}\right]}_{(2)}$$

$$\Rightarrow E = \dfrac{k\cancel{(m+n)}}{2} \times \dfrac{1}{k\cancel{(m+n)}}$$

$\therefore \boxed{E = 1/2}$

8.11.19 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar:

$$E = \frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Recuerde:

Las fracciones de Stirling se suman previa descomposición característica de los sumandos.

Solución:

(1°) Se tiene una suma de fracciones de Stirling; descomponiendo:

$$\frac{1}{1\times2\times3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\cancel{\frac{1}{2\times3}}\right)$$
$$\frac{1}{2\times3\times4} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{2\times3}}-\cancel{\frac{1}{3\times4}}\right)$$
$$\frac{1}{3\times4\times5} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3\times4}}-\cancel{\frac{1}{4\times5}}\right)$$
$$\frac{1}{4\times5\times6} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{4\times5}}-\cancel{\frac{1}{5\times6}}\right)$$
$$\frac{1}{5\times6\times7} = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{5\times6}}-\frac{1}{6\times7}\right)$$

....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

(2°) Sumando $E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

(3°) Finalmente

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}}$$

8.11.20 **Ejercicio Explicativo**

Si: $x = b+c-a$
$y = a+c-b$
$z = a+b-c \;;\; a, b, c \in \mathbb{R}$

Simplificar: $$E = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$$

Comentario:

Este caso muestra un análisis de las condiciones proporcionadas, para luego utilizar productos notables.

Solución:

(1°) De los datos:

$$\left.\begin{array}{l} x = b+c-a \text{.................................}(1) \\ y = a+c-b \text{.................................}(2) \\ z = a+b-c \text{.................................}(3) \end{array}\right\} \quad \text{a, b y c variables independientes}$$

$\Rightarrow$ $x+y+z = a+b+c$; Esta suma **no implica** que $x = a$, $y = b$, $z = c$

(2°) Examinando el denominador este se puede escribir como:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]$$

(3°) La fracción se escribirá como:

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{\frac{1}{2}(a+b+c)}\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)}{\cancel{\frac{1}{2}(x+y+z)}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\right]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)}{\left[2(b-a)\right]^2+\left[2(c-b)\right]^2+\left[2(c-a)\right]^2}$$

(4°) pues: $x-y = 2b-2a = 2(b-a)$
$x-z = 2c-2a = 2(c-a)$
$y-z = 2c-2b = 2(c-b)$

$$\Rightarrow E = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{4}}$$

8.11.21 **Ejercicio Explicativo**

Si: $abz = acy = bcx$

Calcular: $$E = \left[\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}\right]\left[\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}\right]$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}$

(x, y, z) ; $(a, b, c) \in \mathbb{R} - \{(0, 0, 0)\}$

Solución:

(1°) A partir de la condición; dividiendo entre "a b c"

$$\Rightarrow \frac{abz}{abc} = \frac{acy}{abc} = \frac{bcx}{abc} \; ; \; \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \text{ ....(1)}$$

$$\Rightarrow (x = ak \; ; \; y = bk \; ; \; z = ck) \text{ ....(2)}$$

(2°) En el 2° factor, las igualdades de (2)

$$\Rightarrow \frac{a^3\left(k^3+1\right)}{a^2\left(k^2+1\right)} + \frac{b^3\left(k^3+1\right)}{b^2\left(k^2+1\right)} + \frac{c^3\left(k^3+1\right)}{c^2\left(k^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k^3+1}{k^2+1}\right)(a+b+c) \text{ ....(3)}$$

(3°) Similar gestión en el 1er factor:

$$\Rightarrow \frac{(ak+bk+ck)^2 + (a+b+c)^2}{(ak+bk+ck)^3 + (a+b+c)^3} \text{ ; extrayendo factores comunes.}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2\left(k^2+1\right)}{(a+b+c)^3\left(k^3+1\right)} \text{ ; pues: } (ak+bk+ck)^2 = \left[k(a+b+c)\right]^2 = k^2(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k^2+1}{(a+b+c)\left(k^3+1\right)} \text{ ....(4)}$$

(4°) La expresión será: (3) × (4):

$$E = \left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)\frac{1}{(a+b+c)} \times \frac{\left(k^3+1\right)(a+b+c)}{\left(k^2+1\right)}$$

$$\therefore \boxed{E = 1}$$

8.11.22 Ejercicio Explicativo

Hallar el conjunto de valores admisibles de la fracción algebraica siguiente:

$$\frac{6-6a}{5a^2-3a-2} \; ; \; a \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) La definición de fracción algebraica:

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{5a^2 - 3a - 2 = 0\}$; condicionamos la variable "a".

(2°) Esta condición viene del conjunto de valores admisibles para la fracción, podemos llamarlo también **dominio** de valores admisibles.

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{ (5a+2)(a-1) = 0 \}$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{ a = 1 ; a = -2/5 \}$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{ 1 ; -2/5 \}$

(3°) Finalmente escribiremos el CVA (Conjunto de Valores Admisibles).

$\therefore \boxed{CVA = \{ a / a \in \mathbb{R} - \{ 1; 2/5 \} \}}$

8.11.23 **Ejercicio Explicativo**

En una máquina de escribir mecánica se puede preparar una nómina en 120 horas; pero digitando la misma nómina en una computadora personal se le prepara en 80 horas. En cuánto tiempo se prepara toda la nómina si se pone a trabajar en ambas.

Comentario:

Recuerde que los rendimientos o aportes unitarios de trabajo son sumables.

Solución:

(1°) Tiempo para el conjunto : "x" horas

Rendimiento de la máquina : "$\frac{w}{120}$" $\frac{\text{Trabajo}}{\text{hora}}$

Rendimiento de la P.C. : "$\frac{w}{80}$" $\frac{\text{Trabajo}}{\text{hora}}$

Rendimiento Conjunto : "$\frac{w}{x}$" $\frac{\text{Trabajo}}{\text{hora}}$

Trabajo : "w"

(2°) Σ de Rendimientos = Rendimiento Total

$$\Rightarrow \frac{w}{120} + \frac{w}{80} = \frac{w}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{120} + \frac{1}{80} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2+3}{240} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{240}{5} = x \; ; \; x = 48$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Tiempo que tardan juntos: 48 horas}}$

8.11.24 **Ejercicio Explicativo**

Una ensambladora de computadoras personales tiene el encargo de 240 máquinas y otra ensambladora similar de 396 máquinas en el mismo período de tiempo.

El pedido fue completado antes del plazo previsto en 5 semanas y 3 semanas respectivamente.

¿Qué plazo se les había dado, sabiendo que la última produce 6 máquinas más por semana que la primera, y que dicho plazo es más de 18 semanas.

Solución:

(1°) Sean: x # semanas ; x >18

$\Rightarrow$ 1ra Ensambladora : 240 máquinas

Período : "x" semanas

Producción semanal : $\dfrac{240}{x-5}\ \dfrac{\text{Máquinas}}{\text{semana}}$

$\Rightarrow$ 2da Ensambladora : 396 Máquinas

Período : "x" semanas

Producción semanal : $\dfrac{396}{x-3}\ \dfrac{\text{Máquinas}}{\text{semana}}$

$\Rightarrow$ Diferencia de Produc. : $6\ \dfrac{\text{Máquinas}}{\text{semana}}$

(2°) Se podra tener:

$$\Rightarrow \frac{396}{x-3}-\frac{240}{x-5}=6\ ;\ \frac{66}{x-3}-\frac{40}{x-5}=1$$

$$\Rightarrow 66(x-5)-40(x-3)=(x-3)(x-5)$$

$$\Rightarrow x^2-34x+225=0$$

$$\Rightarrow (x-25)(x-9)=0$$

(3°) Finalmente:

$\Rightarrow$ x = 25 semanas < > 6 1/4 meses ; x >18

x = 9 semanas < > 2 1/4 meses ; x >18

$\therefore$ $\boxed{\text{Plazo} = 25 \text{ semanas}}$

8.11.25 Ejercicio Explicativo

Un muro de 1000 m^2 puede ser pintado a mano por Juan en 120 horas. El mismo muro puede ser pintado con una máquina por Antonio en 20 horas.

¿Qué tiempo demoran en pintar de un solo color dicha pared y de qué color será, sabiendo que el primero usa color azul y el segundo crema?.

Solución:

(1°) Tiempo que tardan : "x" horas

$\Rightarrow$ Rendimiento de Juan : $R_1 = \dfrac{1000\ m^2}{120 \text{ horas}}$

$\Rightarrow$ Rendimiento de Antonio : $R_2 = \dfrac{1000\ m^2}{20 \text{ horas}}$

$\Rightarrow$ Rendimiento Conjunto : $R = \dfrac{1000}{x}$

(2°) Antonio es más rápido que Juan por lo que la pared acabará de color crema.

$\Rightarrow R_2 - R_1 = R$; debido a que Juan "destruye" lo que Antonio hace; es decir, Juan **no ayuda**.

(3°) $\dfrac{1000}{20} - \dfrac{1000}{120} = \dfrac{1000}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{6-1}{120} = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{120} = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{x}$; $x = 24$ h.

$\therefore$ $\boxed{\text{Demoran: 24 horas y el color será crema}}$

8.11.26 Ejercicio Explicativo

Carlos puede recoger suficientes manzanas para llenar 1/2 barril en 10 horas, José 5 barriles en 150 horas; mientras que Roy llena un barril en 60 horas.

¿En cuánto tiempo pueden completar 8 1/2 barriles trabajando simultáneamente?.

Recuerde:

Si R_1, R_2 y R_3 son los rendimientos de tres personas en forma conjunta si cumplirá:
$R = R_1 + R_2 + R_3$

Solución:

(1°) Tiempo para terminar el trabajo : x horas

$\Rightarrow$ Rendimiento Conjunto $R = \dfrac{8\frac{1}{2}}{x} \times \dfrac{\text{Barriles}}{\text{horas}}$

$\Rightarrow$ Rendimiento de Carlos : $R_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{10} \times \dfrac{\text{Barril}}{\text{hora}}$

$\Rightarrow$ Rendimiento de José : $R_2 = \dfrac{5}{150} \times \dfrac{\text{Barriles}}{\text{hora}}$

$\Rightarrow$ Rendimiento de Roy : $R_3 = \dfrac{1}{60} \times \dfrac{\text{Barril}}{\text{hora}}$

(2°) Todos aportan sus rendimientos:

$\Rightarrow \boxed{R_1 + R_2 + R_3 = R}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{17}{2x}$; Resolviendo

$\Rightarrow \dfrac{3+2+1}{60} = \dfrac{17}{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{17}{2x} \;;\; 2x = 170 \quad ; \quad x = 85$$

$\therefore$ **Tiempo para terminar de llenar 8 1/2 barriles: 85 horas.**

8.11.27 **Ejercicio Explicativo**

Varios amigos toman en alquiler una cabaña para el verano en 320 soles. Si se unen al grupo dos personas más, los aportes personales se reducen en 8 soles.

¿Cuántas personas componían el grupo originalmente?

Solución:

(1°) Sea "x" el n° original

$\Rightarrow$ Aporte original por persona : $\dfrac{320}{x} \dfrac{\text{soles}}{\text{persona}}$

$\Rightarrow$ Aporte final por persona : $\dfrac{320}{x+2} \dfrac{\text{soles}}{\text{persona}}$

(2°) Aporte original > Aporte final

$\Rightarrow$ Diferencia : $\dfrac{320}{x} - \dfrac{320}{x+2} = 8$

(3°) Resolviendo la ecuación : $\dfrac{40}{x} - \dfrac{40}{x+2} = 1$

$\Rightarrow$ Por x (x + 2) : $\dfrac{40}{\cancel{x}} \cancel{x}(x+2) - \dfrac{40}{\cancel{(x+2)}} x \cancel{(x+2)} = x(x+2)$

$\Rightarrow$ Efectuando : $\cancel{40x} + 80 - \cancel{40x} = x(x+2)$

$\Rightarrow$ Ordenando : $x^2 + 2x - 80 = 0$

$\Rightarrow$ Factorizando : $(x+10)(x-8) = 0$

$\Rightarrow x = 8 \; ; x = -10$

$\therefore$ **n° de personas original : 8**

8.11.28 **Ejercicio Explicativo**

En una farmacia, para obtener una solución comercial se añade agua a 20 lts. de una solución al 90% de ácido y se obtiene una solución al 60% correspondiente. Vuelve a añadir ácido hasta obtener una solución al 80%.

¿Qué cantidad de ácido se añadió?

¿Qué volumen tiene la última solución?

Solución:

(1°) Al principio:

$$20 \text{ lts de solución} \begin{cases} 90\% \text{ Acido} = 18 \text{ lts.} \\ 10\% \text{ Agua} = 2 \text{ lts.} \end{cases}$$

(2°) Si agregamos "y" litros de agua se tendrá la siguiente composición:

$$(20+y) \text{ lts.} \begin{cases} 60\% \text{ Acido} \\ 40\% \text{ Agua} = \dfrac{2+y}{20+y} \end{cases}$$; Es conveniente tomar las **referencia en agua.**

$$\Rightarrow \frac{2+y}{20+y} = \frac{2}{5} \ ; \ 10+5y = 40+2y \ ; \ 3y = 30 \quad , \quad y = 10$$

En (II) se agrega: $y = 10$ lts. de agua:

$$\Rightarrow 30 \text{ lts.} \begin{cases} 60\% \text{ Acido} = 18 \text{ lts.} \\ 40\% \text{ Agua} = 12 \text{ lts.} \end{cases}$$

(3°) Si agregamos "x" litros de ácido a la última composición, tendremos:

$$(30+x) \text{ lts.} \begin{cases} 80\% \text{ Acido} = \dfrac{x}{30+x} \ ; \\ 20\% \text{ Agua} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{30+x} = \frac{4}{5} \ ; 5x = 120+4x \ ; x = 120 \text{ lts.}$$

$$\Rightarrow 150 \begin{cases} 80\% \text{ Acido} = 120 \text{ lts.} \\ 20\% \text{ Agua} = 30 \text{ lts.} \end{cases}$$

$\therefore$ Se agregó: 120 lts. de ácido, volumen de composición final: 150 lts.

8.11.29 Ejercicio Explicativo

Si: $x+y+z = 6k$

Simplificar: $$E = \left(k-\frac{x}{3}\right)^3 + \left(k-\frac{y}{3}\right)^3 + \left(k-\frac{z}{3}\right)^3 + \frac{xyz}{9}$$

Recuerde:

$$(x+y+z)^3 = (x+y-z)^3 + (x-y+z)^3 + (-x+y+z)^3 + 24xyz$$

Es una equivalencia notable.

Solución:

(1°) Multiplicando por 216.

$$\Rightarrow 216E = 216\left(k-\frac{x}{3}\right)^3 + 216\left(k-\frac{y}{3}\right)^3 + 216\left(k-\frac{z}{3}\right)^3 + 24xyz$$

$$\Rightarrow 216E = (6k-2x)^3 + (6k-2y)^3 + (6k-2z)^3 + 24xyz$$

(2°) Imponiendo la condición:

$$\Rightarrow 216E = (-x+y+z)^3 + (x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 + 24xyz$$

$\Rightarrow 216E = (x+y+z)^3$; de acuerdo a la tabla de equivalencias.

(3°) $\Rightarrow 216E = (6k)^3$

$$\Rightarrow 216E = 216k^3$$

$$\therefore \boxed{E = k^3}$$

8.11.30 Ejercicio Explicativo

Si: $2a + 7b + 13c = 111m$

Calcular: $E = (2m-a)^2 + (7m-b)^2 + (13m-c)^2$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Desarrollando la expresión E:

$$\Rightarrow E = \underbrace{4m^2 + a^2 - 2(2m)a} + \underbrace{49m^2 + b^2 - 2(7m)b} + \underbrace{169m^2 + c^2 - 2(13m)c}$$

(2°) Asociando términos semejantes.

$$\Rightarrow E = 222m^2 - 2(2m)a - 2(7m)b - 2(13m)c + a^2 + b^2 + c^2$$

(3°) Extrayendo 2m:

$$\Rightarrow E = 2m[\underbrace{111m - 2a - 7b - 13c}_{0}] + a^2 + b^2 + c^2$$

(4°) Atendiendo a la condición: $111m - 2a - 7b - 13c = 0$

$$\Rightarrow E = 2m[0] + a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \boxed{E = a^2 + b^2 + c^2}$$

8.11.31 Ejercicio Explicativo

Si:

$$\sqrt{x-5} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$$

$$\sqrt{y-7} = \frac{m}{p} + \frac{p}{m}$$

$$\sqrt{z-9} = \frac{n}{p} + \frac{p}{n}$$

Calcular: $E = \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{p} + \frac{p}{m}\right)\left(\frac{n}{p} + \frac{p}{n}\right) - x - y - z$

$m, n, p \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla distributiva del producto respecto a la suma.

$$\Rightarrow \left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)=\left(\frac{m^2}{np}+\frac{mp}{mn}+\frac{mn}{mp}+\frac{np}{m^2}\right)\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{np}\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)+\frac{mp}{mn}\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)+\frac{mn}{mp}\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)+\frac{np}{m^2}\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{p^2}+\frac{m^2}{n^2}+1+\frac{p^2}{n^2}+\frac{n^2}{p^2}+1+\frac{n^2}{m^2}+\frac{p^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{p^2}+\frac{p^2}{m^2}+\frac{p^2}{n^2}+\frac{n^2}{p^2}+\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{m^2}+2 \quad \text{..(1)}$$

(2°) A su vez:

$$\left.\begin{aligned}
&\Rightarrow x-5=\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}+\frac{n^2}{m^2}+2\ ;\ x=\frac{m^2}{n^2}+\frac{n^2}{m^2}+7\\
&\Rightarrow y-7=\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)^2=\frac{m^2}{p^2}+\frac{p^2}{m^2}+2;\ y=\frac{m^2}{p^2}+\frac{p^2}{m^2}+9\\
&\Rightarrow z-9=\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)^2=\frac{n^2}{p^2}+\frac{p^2}{n^2}+2\ ;\ z=\frac{n^2}{p^2}+\frac{p^2}{n^2}+11
\end{aligned}\right\} \text{.........(2)}$$

(3°) de (1) y (2) sustituyendo sobre E:

$$\Rightarrow E=\underbrace{\frac{m^2}{p^2}+\frac{p^2}{m^2}+\frac{p^2}{n^2}+\frac{n^2}{p^2}+\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}+2}_{(1)}-\underbrace{\frac{m^2}{n^2}-\frac{n^2}{m^2}-\frac{m^2}{p^2}-\frac{p^2}{m^2}-\frac{n^2}{p^2}-\frac{p^2}{n^2}-27}_{(2)}$$

(4°) Luego de la diferencia obtenemos:

$\Rightarrow E = 2 - 27$

$\therefore \boxed{E = -25}$

8.11.32 Ejercicio Explicativo

Sabiendo que: $m=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

$n=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

Calcular: $$E=\sqrt[7m^2+14]{\left(\frac{m^4-n^4}{2}-8\right)^{3n^2+18}}$$

$a, b \in \mathbb{R}-\{0\}\ ;\ a>b$

Solución:

(1°) De acuerdo a los datos podemos tener:

$$\Rightarrow 7m^2 + 14 = 7\left[m^2 + 2\right]$$

$$= 7\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + 2\right]$$

$$= 7\left[\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4\right] \text{..} (1)$$

(2°) $$\Rightarrow 3n^2 + 18 = 3\left[n^2 + 6\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + 6\right]$$

$$= 3\left[\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4\right] \text{..} (2)$$

(3°) $$\Rightarrow m^4 - n^4 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2\right]}_{\text{Por Legendre}}\underbrace{\left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2\right]}_{\text{Por Legendre}}$$

$$= \underbrace{2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)}\underbrace{4\,\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 8\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

(4°) $$\Rightarrow \frac{m^4 - n^4}{2} - 8 = \frac{1}{2} \times 8\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8 = 4\left[\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2\right] = 4\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 \text{.....} (3)$$

(5°) Sustituyendo (1), (2), (3) sobre "E"

$$\Rightarrow E = \sqrt[7\cancel{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4\right)}]{\left[4\underbrace{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2}_{n}\right]^{3\cancel{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4\right)}}} = \sqrt[7]{(4n)^3}$$

$$\therefore \boxed{E = \sqrt[7]{64n^3}}$$

8.11.33 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar: $$k = \frac{(ax + by)^4 - 4abxy\left[(ax + by)^2 + (ay - bx)^2\right] - (ay - bx)^4}{\left[(ay + bx)^2 + (ax - by)^2\right]\left(x^2 - y^2\right)\left(a^2 - b^2\right)}$$

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$; $a \neq b$; $x \neq y$.

Solución:

(1°) En la expresión tenemos las siguientes observaciones:

$$\Rightarrow (ax+by)^2+(ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2) \text{ ; según } \textbf{Lagrange}$$

$$\Rightarrow (ax+by)^4-(ay-bx)^4 = \left[(ax+by)^2+(ay-bx)^2\right]\left[(ax+by)^2-\left(ay-bx^2\right)\right]$$

$$= \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\left[(ax+by)^2-(ay-bx)^2\right]$$

$$\Rightarrow k = \frac{\overbrace{(ax+by)^4-(ay-bx)^4}-4abxy\left[(ax+by)^2+(ay-bx)^2\right]}{\left[(ay+bx)^2+(ax-by)^2\right]\left(x^2-y^2\right)\left(a^2-b^2\right)}$$

(2°) Se logra la posibilidad de factorizar:

$$\Rightarrow k = \frac{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\left[(ax+by)^2-(ay-bx)^2\right]-4abxy\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\left[\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\right]\left(x^2-y^2\right)\left(a^2-b^2\right)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\cancel{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}\left(\overbrace{a^2x^2+b^2y^2-a^2y^2-b^2x^2}+\cancel{4abxy}-\cancel{4abxy}\right)}{\cancel{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2-y^2\right)\left(a^2-b^2\right)}$$

$$\Rightarrow k = \frac{a^2\left(x^2-y^2\right)-b^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(a^2-b^2\right)} = \frac{\cancel{\left(x^2-y^2\right)\left(a^2-b^2\right)}}{\cancel{\left(a^2-b^2\right)\left(x^2-y^2\right)}}$$

$$\therefore \boxed{k = 1}$$

8.11.34 Ejercicio Explicativo

Si:

$$a^3+b^3+c^3 = 896 \quad \text{..........} (1)$$

$$(a+b+c)(ab+ac+bc) = 9 \quad \text{..........} (2)$$

$$abc = \frac{5}{3} \quad \text{..........} (3)$$

Calcular: $E = \dfrac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}$; $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Solución:

(1°) Adaptando la fracción E con la finalidad de poder usar los datos consignados:

$$\Rightarrow E = \frac{(a+b+c)(ab+ac+bc)}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$; el numerador es igual a 9.

$$\Rightarrow E = \frac{9}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)} \quad ;\text{..........} (1)$$

(2°) Hacemos un estudio en el denominador

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{Como} : (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = \Sigma a^2b + a^3+b^3+c^3 \\ \text{También} : (a+b+c)(ab+ac+bc) = \Sigma a^2b + 3abc \\ \text{Al restar:} \\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - \underbrace{(a+b+c)(ab+ac+bc)}_{9} = \underbrace{a^3+b^3+c^3}_{896} - \underbrace{3abc}_{5/3} \\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = 896-5+9 = 900 \\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = 900 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(3°) De (2) en (1):

$$\Rightarrow E = \frac{9}{900}$$

$$\therefore \boxed{E = 1/100}$$

8.11.35 **Ejercicio Explicativo**

Efectuar:

$$k = \frac{3ab}{c^{-1}} + \left(\frac{b}{c^{-1}} + \frac{a}{c^{-1}} - \frac{a}{b^{-1}}\right) - \frac{(a-1)a^{-1} + (b-1)b^{-1} + (c-1)c^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}-c^{-1}}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Ordenando:

$$\Rightarrow \frac{3ab}{c^{-1}} + \left(\frac{b}{c^{-1}} + \frac{a}{c^{-1}} - \frac{a}{b^{-1}}\right) = \frac{3abc}{bc+ac-ab}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{a-1}{a} + \dfrac{b-1}{b} + \dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}} = \frac{\dfrac{abc-bc+abc-ac+abc-ab}{\cancel{abc}}}{\dfrac{bc+ac-ab}{\cancel{abc}}}$$

$$= \frac{3abc-ac-bc-ab}{bc+ac-ab}$$

(2°) Restando: $\dfrac{3abc}{bc+ac-ab} - \dfrac{3abc-ac-bc-ab}{bc+ac-ab}$

(3°) Se tiene fracciones homogéneas, por ello:

$$\Rightarrow k = \frac{\cancel{3abc} - \cancel{3abc} + ac + bc + ab}{bc+ac-ab}$$

$$\therefore \boxed{k = \frac{ab+ac+bc}{-ab+ac+bc}}$$

8.11.36 Ejercicio Explicativo

Calcular: $\dfrac{1}{(n+1)}\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

Recuerde:

$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \ldots \times a_n$ Es la productoria.

Solución:

(1°) Desarrollando la productoria $\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

$$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

(2°) Por tener diferencias de cuadrados y asociando

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}$$

(3°) Efectuando lo indicado

$$= \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\ldots\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)}\times\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}$$

(4°) Simplificando

$$= \underbrace{\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)\left(\frac{4}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\ldots\left(\frac{\cancel{2n+2}}{\cancel{2n+1}}\right)}\times\underbrace{\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\ldots\left(\frac{\cancel{2n}}{2n+1}\right)}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2n+2}{2}\right)}\times\underbrace{\left(\frac{1}{2n+1}\right)}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1}$$

(5°) La expresión será: $\dfrac{1}{n+1}\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)}\times\dfrac{(n+1)}{(2n+1)}$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{n+1}\prod_{k=2}^{2n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2n+1}}$$

8.11.37 **Ejercicio Explicativo**

Obtener la gráfica correspondiente a la función cuya regla es:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-10}$$

Recuerde:

Es una fracción en x

a) **Los polos.-** Son los elementos $\in \mathbb{R}$ que anulan el denominador.

b) **Los ceros.-** Son los elementos $\in \mathbb{R}$ que anulan al numerador de la fracción.

Solución:

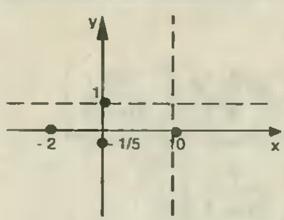
(1°) Posee un cero: $x + 2 = 0 , \; x = -2$
"Es decir la gráfica corta al eje x en - 2"

(2°) Posee un polo: $x - 10 = 0 ; x = 10$
"Es decir por 10 pasa una asíntota vertical"

(3°) En el $\pm\infty$: $f(x) = \dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{10}{x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{10}{x}} = \dfrac{1+\dfrac{2}{\infty}}{1-\dfrac{10}{\infty}} = 1$

En el ∞ sus ordenadas tienden a 1
En el $-\infty$ sus ordenadas tienden a 1

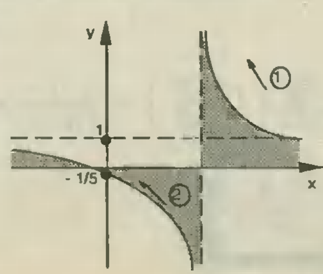
(4°) La gráfica posee una asintota por 1



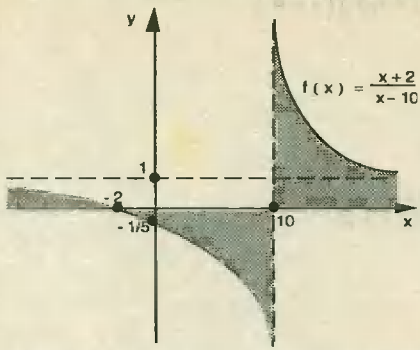
Corte con el eje "y" : Si $x = 0$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{0+2}{0-10} = -\frac{1}{5}$$

(5°) Para la gráfica tendremos las referencias siguientes:



(6°) La gráfica quedará establecida de acuerdo al esquema siguiente:



El cual revela el comportamiento de la regla de correspondencia para cada valor que adopte la letra variable "x".

8.12 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

(1) **Ejecutar:** $E = (a-b)\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2\right]^2-\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^2\frac{(a-b)}{0,25}$

Rpta: $16(a-b)$

(2) Si : $2a+2b=-c$

Calcular: $k=\left(\frac{2(a+b)}{c}+\frac{c+2a}{2b}+\frac{2b+c}{2a}\right)\left(\frac{2a}{2b+c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{c}{2(a+b)}\right)$

Rpta: 9

(3) Si: x e y son reciprocos

Simplificar $\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\frac{a+y}{y(y-z)(y-x)}+\frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$

Rpta: $\frac{a}{z}$

(4) **Calcular:** $k=\sum_{i=}^{n}\frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}$

Rpta: $\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$

(5) **Simplificar:** $k=\frac{a^2(b+c)-c^2\left(a^2+b^2\right)+ab^2(a+b+c)+b^4}{(a+b)b+(a-c)c}$

Rpta: a^2+b^2

(6) **Calcular:** $$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+2)(i+3)(i+4)}$$

Rpta: $\dfrac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}$

(7) **Calcular:** $$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!}$$

Rpta: $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

(8) Si: $am = bn = cp = k$

Calcular: $$y = \frac{mnp(a+b+c)(ab+ac+bc)}{abc(m+n+p)(mn+mp+np)}$$

Rpta: $y = 1$

(9) Si : $$x = \frac{b^{-2}+c^{-2}-1}{2(bc)^{-1}}, \quad y = \frac{1-\left(b^{-1}-c^{-1}\right)^2}{\left(b^{-1}+c^{-1}\right)^2-1}$$

Calcular: $$E = \frac{xy-1}{x+y}$$

Rpta: 1

(10) Efectuar: $$P = \left(\frac{33x}{y}+\frac{y}{33x}+1\right)\left(\frac{33x}{y}+\frac{y}{33x}-1\right)\frac{33^2x^2y^2\left(33^2x^2-y^2\right)}{33^6x^6-y^6}$$

Rpta: $P = 1$

(11) Para que valor de x la fracción:

$$\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+x^2-5x+3}$$ adopta el valor de 1 1/7

Rpta: 15

(12) Si $F(x) = (a^3-x^3)(a+x)$

Calcular: $$E = \frac{F(b)+F(-b)}{a^4-b^4}$$

Rpta: 2

(13) **Calcular:** $k = \sum_{i=1}^{n} i \times 3^{i-1}$

Rpta: $\dfrac{(2n-1)3^n + 1}{4}$

(14) **Calcular:** $H = \sum_{i=1}^{n} i \times 2^{n-1}$

Rpta: $(n-1)2^n + 1$

(15) Si: $(a+b+c)x = (a-b-c)y = (-a+b-c)z = (-a-b+c)w$

Calcular: $E = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w}$

Rpta: 0

(16) Si: $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$

Calcular: $H = \dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y}$

Rpta: $H = -3$

(17) **Calcular:** $E = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Rec}\left(i\sqrt{i+1} + (i+1)\sqrt{i}\right)$

Rpta: $E = 1 - \sqrt{n+1}^{\,-1}$

(18) Si: $a + b + c = 0$

Calcular: $K = \operatorname{Rec}(a^2 + b^2 - c^2) + \operatorname{Rec}(a^2 - b^2 + c^2) + \operatorname{Rec}(-a^2 + b^2 + c^2)$

Rpta: $K = 0$

(19) **Ejecutar:** $E = \operatorname{Rec}(x^{-2} - 1) - 2\operatorname{Rec}(x^{-4} - 1) + \operatorname{Rec}(x^2 + 1)$

Rpta: $E = 1$

(20) **Simplificar:** $y = 2\operatorname{Rec}\left(x^{-2} + x\right) \div \left[\operatorname{Rec}\left(\dfrac{x^{-1} - x}{x-1}\right) + \operatorname{Rec}\left(\dfrac{x^{-1} + x}{x+1}\right)\right]$

Rpta: $y = x + 1$

(21) **Ejecutar:** $$E = \frac{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{a}+1\right) a\,\mathrm{Rec}\left(a^3+\mathrm{op}\,b^3\right)}{\mathrm{Rec}\left(a^2-ab\right)}$$

Rpta: $E = 3a - b$

(22) Si: $x = \dfrac{m^{1987}+n^{1987}}{2}$

Calcular E: $$E^{-1} = \frac{m^{1987}}{3\,974m^{1987}-3\,974x}+\frac{n^{1987}}{3\,974n^{1987}-3\,974x}$$

Rpta: $E = 1\,987$

(23) **Simplificar:** $$k = \frac{\mathrm{Rec}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\mathrm{Rec}\left(\frac{x}{a}+1\right)}{\mathrm{Rec}\left(1-\frac{a}{x}\right)-\mathrm{Rec}\left(\frac{x}{a}+1\right)}+\frac{2}{1-\frac{x}{a}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$$

Rpta: $K = 1$

(24) Si: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1} = 0$

Calcular: $$F = \frac{a^9+b^9+c^9-3abc\left(a^6+b^6+c^6\right)+6a^3b^3c^3}{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}$$

Rpta: $F = (a+b+c)^3$

(25) Si: $b\left(\dfrac{1}{x}-y\right) = y\left(a-b\right)$

Simplificar: $$E = \left(\frac{a^3+2b^3}{ab^2}\right)\left(\frac{x^{-1}y^2}{x^{-3}+2y^3}\right)$$

Rpta: $E = 1$

(26) Hallar los polos y ceros de la regla de correspondencia siguiente:

$$F(x) = \frac{x^4-130x^2+1089}{x^4-37x^2+36}$$

Rpta: Ceros : 3, - 3, 11 y - 11
Polos : 1, - 1, 6 y - 6

CAPITULO 9

TEORIA COMBINATORIA

9.1. LOS FACTORIALES Y LOS COEFICIENTES BINOMIALES

9.1.1 El Factorial de "n" ($n \in \mathbb{N}$)

Definición.- Es el producto de los "n" primeros números naturales y representado por el símbolo n!.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n \; ; \forall n \in \mathbb{N} \geq 1 \wedge 0! = 1$$

Simbologías:

n! (Kramp) ; $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ (Gauss) ; $\underline{|n}$ (notación inglesa)

9.1.2 El Semifactorial de "n" ($n \in \mathbb{N}$)

Definición.- Es el producto de los enteros impares $1 \times 3 \times 5 \times \ldots n$, si "n" es impar y el producto de los enteros pares $2 \times 4 \times 6 \ldots \times$ "n", si n es par.

Simbología

$$n!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \ldots n \,/\, n \in \mathbb{N} \text{ impares}$$

$$n!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \ldots n \,/\, n \in \mathbb{N} \text{ pares}$$

$$0!! = 1 \; ; \; n!! = \underline{\underline{|n}}$$

9.1.3 El Coeficiente Binomial

Definición.- Sean $m \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq n$, llamaremos coeficiente binomial "m" en "n" al símbolo $\binom{m}{n}$, donde:

$$\begin{pmatrix} m \longrightarrow \text{índice superior} \in \mathbb{R} \\ n \longrightarrow \text{índice superior} \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

Se calcula mediante:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \;;\; \text{si } m, n \in \mathbb{N};\ m \geq n$$

También:

$$\binom{m}{n} = \frac{\overbrace{m(m-1)(m-2).....(m-n+1)}^{\text{"n" factores}}}{n!} \quad ; m \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

9.1.4 El Coeficiente Polinomial

Definición.- Sean los elementos de $\mathbb{N}$, tales que:

$$a + b + c + \ldots + m = n$$

Llamaremos coeficiente polinómico o multinómico al símbolo:

$$\binom{n}{a, b, c, \ldots m}$$

Fórmula:

$$\binom{n}{a, b, c, ...m} = \frac{n!}{a! \times b! \times c! ....m!}$$

$$a + b + c + ... + m = n \wedge a, b, c, ...m \in \mathbb{N}$$

Consecuencia :

$$\binom{n}{p,q} = \binom{n}{p} = \binom{n}{q} \quad ; \; p + q = n$$

9.2 PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS FACTORIALES (n!)

(1°) Sea: $n!$; $n \in \mathbb{N}$

$n! = n \times (n - 1)!$; Propiedad Degradativa .

(2°) Si: $a! = b!$

$\Rightarrow a = b$; $a, b \in \mathbb{N}$

(2°)' Si: $a! = 1 \vee$

$\Rightarrow a = 1 \wedge a = 0$

(3°) $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1,\ n \in \mathbb{N}$

también: $\sum_{i=1}^{n} i \times i! \equiv (n+1)! - 1$

(4°) $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}\ ;\ n \in \mathbb{N}$

(5°) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} \equiv 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Tambien: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{i}{(i+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

(6°) Sea: $n!!\ ;\ n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\ n!! = n(n-2)!!$ Propiedad Degradativa de los Semifactoriales

(7°) Producto de Semifactoriales de Enteros Consecutivos

$n!! \times (n+1)!! \equiv (n+1)!$

(8°) Si : $a!! = b!!$

$\Rightarrow\ a = b\ ;\ a, b \in \mathbb{N}$

(8°)' Si: $a!! = 1$

$\Rightarrow\ a = 1 \lor a = 0$

(9°) Relación de los Semifactoriales y el Factorial

$(2n)!! = 2^n(n!)\ ;\ (2n+1)!! = \dfrac{(2n+1)!}{2^n(n)!}\ ;\ n \in \mathbb{N}$

9.3. PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES $\binom{m}{n}$

(1°) $\binom{n}{n} = 1\ ;\ n \in \mathbb{N}\ ;\ \binom{n}{k} = 0$ si $n, k \in \mathbb{N} \land n < k$

(2°) $\binom{n}{0} = 1;\ n \in \mathbb{R}$ Ej: $\binom{9}{0} = 1\ ;\ \binom{-1/4}{0} = 1$

(3°) $\binom{n}{1} = n\ ;\ n \in \mathbb{R}$; Ej.: $\binom{7}{1} = 7;\ \binom{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

(4°) Propiedad de los coeficientes binomiales complementarios.

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k};\ n \geq k\ ;\ n, k \in \mathbb{N}\ ;$$

(5°) Suma de pares de coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\equiv\binom{n+1}{k+1}\text{, si } k \in \mathbb{N}\ ;\ n \in \mathbb{R}$$

(6°)

$$\binom{m}{n}+\binom{m-1}{n}+\binom{m-2}{n}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{m+1}{n+1}\ ;\ n \in \mathbb{N}$$

Suma de C.B. de inferiores iguales y superiores decrecientes.

(7°) Suma equivalente en la versión de complementos

$$\binom{m}{m-n}+\binom{m-1}{m-n-1}+\binom{m-2}{m-n-2}+\ldots+\binom{n}{0}=\binom{m+1}{m-n};\ m, n \in \mathbb{N}, m > n$$

(8°)

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{3}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m;\ \ m \in \mathbb{N}$$

(9°)

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{2}+\binom{m}{4}+\binom{m}{6}+\ldots+\binom{m}{m-1}=2^{m-1};\ \ m \in \mathbb{N}\text{ impares}$$

(10°)

$$\binom{m}{1}+\binom{m}{3}+\binom{m}{5}+\binom{m}{7}+\ldots+\binom{m}{m-1}=2^{m-1};\ \ m \in \mathbb{N}\text{ pares}$$

(11°)

$$\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\binom{m}{4}\ldots\pm\binom{m}{m}=0\ ;\ \ m \in \mathbb{N}$$

(12°)

$$\binom{m}{p}\binom{n}{0}+\binom{m}{p-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{p-2}\binom{n}{2}+\ldots+\binom{m}{0}\binom{n}{p}=\binom{m+n}{p};\ m, n, p \in \mathbb{N}$$

(13°) Igualdad de Coeficientes Binomiales

$$\binom{a}{b}=\binom{p}{q}\ \Rightarrow\ \begin{cases} a=p\ \wedge\ b=q \\ b,\ q \in \mathbb{N}\end{cases}\quad \vee\quad \begin{cases} a=p\ \wedge\ b+q=p \\ a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{N}\end{cases}$$

(14°) Propiedades Degradativas de los Coeficientes Binomiales:

$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$; degradan el superior e inferior; $n \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$; degrada **únicamente** el **superior**; $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \frac{n-(k-1)}{k}\binom{n}{k-1}$; degrada **únicamente** el **inferior**; $n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

Ejemplo Explicativo

Calcular: $k = \sqrt[50]{0! + \frac{3!}{(-11)^{-1}} + (4!!)^{2!!} + 0!! + \frac{100!!}{50!}}$

Solución:

(1°) Por partes:

$0! = 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4!! = 4 \times 2 = 8$

$2!! = 2 = 2$

$0!! = 1$

$100!! = 50! \times 2^{50}$

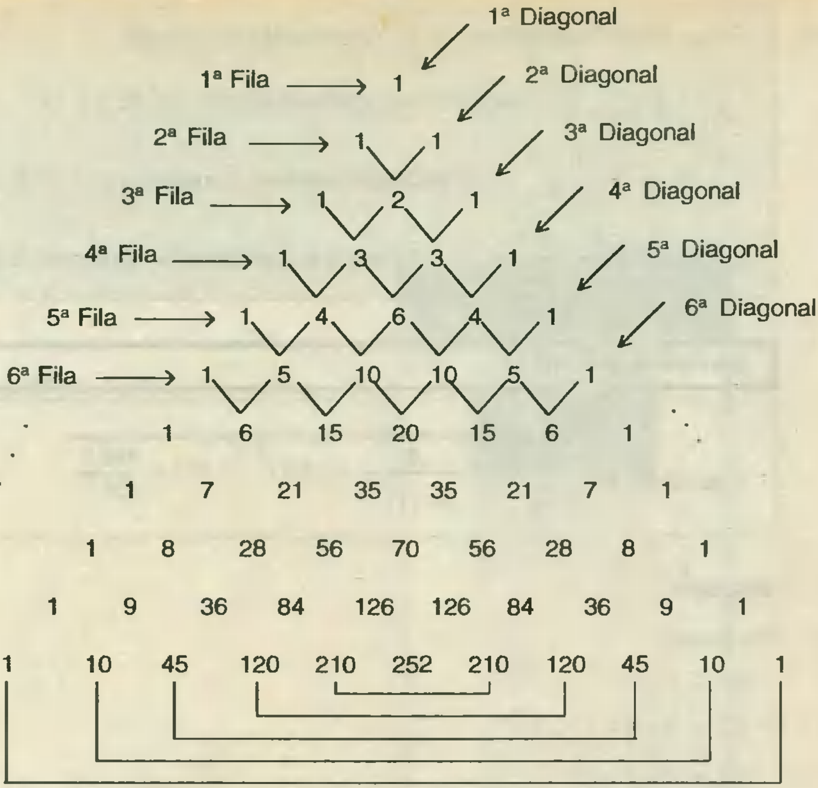
(2°) Sustituyendo :

$$\Rightarrow \sqrt[50]{\underbrace{1 + 6(-11) + 64 + 1}_{0} + \frac{50! \times 2^{50}}{50!}} = \sqrt[50]{2^{50}}$$

$\therefore$ $\boxed{k = 2}$

9.4. EL TRIANGULO DE BLAISE PASCAL O DE TARTAGLIA

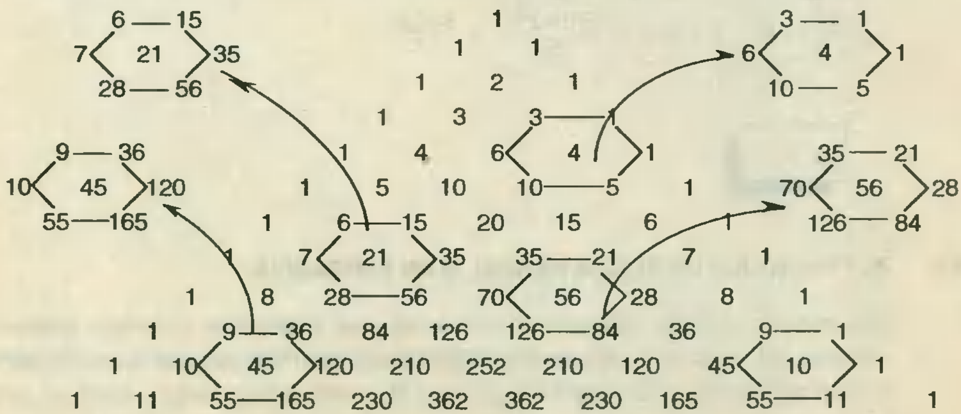
Denominado también triángulo aritmético es una disposición o arreglo triangular de números naturales cuyo vértice superior y los lados están formados por la unidad, asimismo a partir de la 2ª fila, determina los siguientes elementos comprendidos entre los lados.



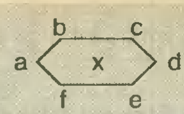
Los elementos equidistantes de cada fila son iguales.

9.4.1. Los Exágonos del Triángulo Numérico

Con los elementos del triángulo se pueden formar exágonos en la forma siguiente:



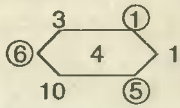
En general en cada exágono:



Se verifica:

$$\begin{cases} b + c = x & \text{.......................... (1)} \\ a + x = f & \text{.......................... (2)} \\ x + d = e & \text{.......................... (3)} \\ f + e = a + b + c + d + x & \text{.......................... (4)} \\ ace = bdf & \text{.......................... (5)} \end{cases}$$

Ejemplo:



$$6 \times 1 \times 5 = 3 \times 1 \times 10$$

$$10 + 5 = 6 + 3 + 1 + 1 + 4$$

9.4.2. El Triángulo Numérico en Función de Coeficientes Binomiales.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

En cada pareja adyacente se verifica la propiedad de los coeficientes binomiales:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Ejemplo: $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$ $\qquad \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$

Ejemplo: $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5$

9.4.3. Suma de los Elementos de las Filas del Triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccl}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 1 \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^1 \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^2 \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^3 \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^4 \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^5 \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^6 \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^7 \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^8 \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^9 \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1 & \text{\_\_\_\_\_} & \Sigma = 2^{10}
\end{array}
$$

La Σ de los elementos de las filas son potencias de 2, siendo el correspondiente al de la enésima fila 2^{n-1}.

1^a fila _____ $\binom{0}{0}$ _____ $\Sigma_1 = 2^0$

2^a fila _____ $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ _____ $\Sigma_2 = 2^1$

3^a fila _____ $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ _____ $\Sigma_3 = 2^2$

4^a fila _____ $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ _____ $\Sigma_4 = 2^3$

5^a fila _____ $\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$ _____ $\Sigma_5 = 2^4$

6^a fila _____ $\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$ _____ $\Sigma_6 = 2^5$

7^a fila _____ $\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$ _____ $\Sigma_7 = 2^6$

. . . .

$(n+1)$ fila _____ $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \ldots\ \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$ _____ $\Sigma_{n+1} = 2^n$

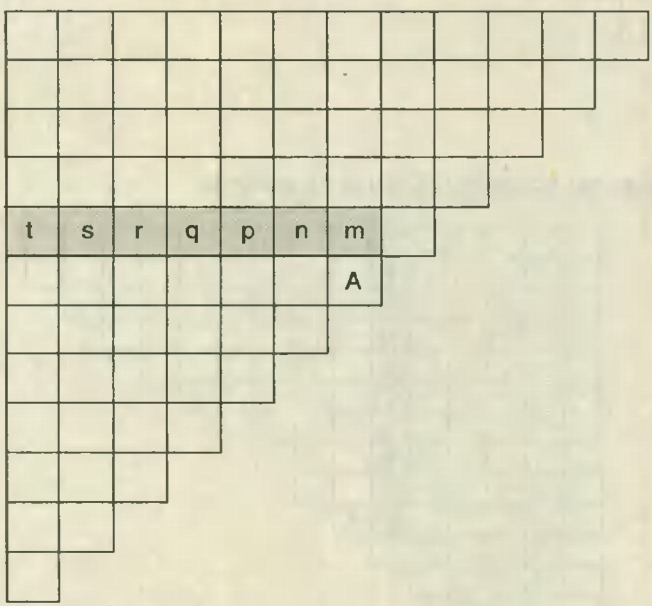
9.4.4. Disposición Perpendicular de los elementosdel Triángulo de Pascal

A partir del triángulo se obtiene:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . .
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . .	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	. . .		
1	4	10	20	35	56	84	120	. . .			
1	5	15	35	70	126	210	. . .				
1	6	21	56	126	252	. . .					
1	7	28	84	210	. . .						
1	8	36	120	. . .							
1	9	45	. . .								
1	10	. . .									
1	. . .										
. . .											

En esta disposición se observan las siguientes propiedades verificables.

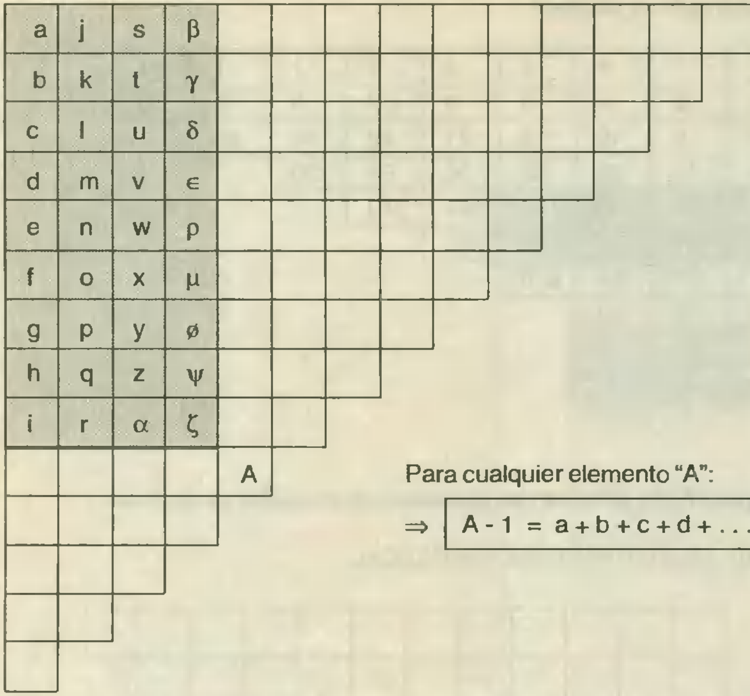
9.4.4.1 1ªPropiedad: EN EL TRIANGULO DE PASCAL



Para cualquier elemento “A” de una fila

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = m + n + p + q + r + s + t}$$

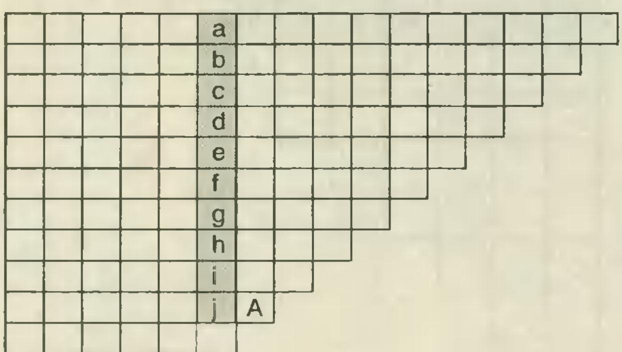
9.4.4. 2ª Propiedad: EN TODO TRIANGULO DE PASCAL



Para cualquier elemento “A”:

$$\Rightarrow \boxed{A - 1 = a + b + c + d + \ldots + \psi + \zeta}$$

9.4.4. 3ª Propiedad: EN TODO TRIANGULO DE PASCAL



Para cualquier elemento “A”.

$$\Rightarrow \boxed{A = a + b + c + d + e + f + g + h + i + j}$$

9.5. TEORIA COMBINATORIA

***Definición**..-* La combinatoria se encarga del estudio de las propiedades de las ordenaciones que pueden formarse con los elementos de un conjunto dado, estableciendo diferencias entre sí de acuerdo a lo siguiente:

A) Por el número de elementos que entran en cada ordenación.

B) Por la clase de elementos.

C) Por el orden de colocación.

La combinatoria prescinde de la naturaleza de los elementos, pero no del orden en que están colocados, esto significa considerar a todos los objetos como diferentes.

Al número de elementos que dispone el conjunto dado se denomina **BASE**.
Las agrupaciones de elementos, según el número de ellos: 1, 2, 3, 4, 5, . . . se llaman nonarias, binarias, ternarias, cuaternarias, quinarias, etc. A este número se le denomina **ORDEN** de la agrupación.

La combinatoria estudia tres clases de agrupaciones:

1.- Las variaciones.

2.- Las permutaciones.

3.- Las combinaciones.

9.6. PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE CONTEO (Para la determinación del número de posibilidades lógicas de algún suceso sin describir necesariamente cada caso).

Si algún suceso puede ocurrir de n_1 maneras diferentes y siguiendo este suceso un segundo suceso puede ocurrir de n_2 maneras diferentes; y siguiendo este segundo suceso, un tercer suceso puede ocurrir de n_3 maneras diferentes, . . . , entonces el número de maneras en que estos sucesos pueden ocurrir esta indicado por el producto: $n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots \times n_k$

Ejemplo

Si ocho corredores compiten en la carrera final de los 100 metros ¿De cuántos modos pueden ganarse los tres primeros puestos?.

Solución:

(1°) Modelo : (1er lugar) (2do lugar) (3er lugar)

El primer puesto : 8 modos

El segundo puesto : 7 modos

El tercer puesto : 6 modos

(2°) Por el principio de conteo

$\therefore$ # de modos de ganar los 3 puestos: $8 \times 7 \times 6 = 336$ modos

9.6.1. La Variación $\left(V_n^m\right)$.- (Variaciones sin Repetición)

Definición.- Las variación de "m" elementos de un conjunto base, es otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos que involucran a "n" elementos del conjunto base. Una pareja de variaciones se diferencian por dos razones: Por la disposición de sus elementos, o bien en alguno de sus elementos.

Dos variaciones serán iguales si tienen los mismos elementos y la misma disposición.

Fórmula

$$\left(V_n^m\right) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Donde:

"m" : n° de elementos del conjunto base.

"n" : n° de elementos de cada grupo.

Lectura:

Variación de "m" elementos en grupos de "n".

Ejemplo 1

Sea el conjunto base B = { a, b, c, x }.
Formar las variaciones en grupos de dos.

Solución:

(1°) Se desea V_2^4 ; de acuerdo a la definición

$$\Rightarrow \quad V_2^4 = \{ ab, ac, ax, bc, bx, cx, ba, ca, xa, cb, xb, xc \}$$

$\longleftarrow$ 12 elementos $\longrightarrow$

(2°) También:

$$\Rightarrow \quad V_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ variaciones de 2 en 2}$$

Ejemplo 2

¿De cuántas maneras pueden sentarse cuatro personas que ingresan a un aula en el cual hay siete asientos desocupados?.

Solución:

(1°) Se desea obtener las variaciones de siete elementos en grupos de cuatro:

$$\Rightarrow \quad V_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$$

$$\therefore \quad \boxed{V_4^7 = 840 \text{ maneras}}$$

9.6.2 La Variación con Repetición $\left(VR_n^m\right)$

Definición.- La variación con repetición de "m" elementos de un conjunto base es otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos de tal modo que en cada grupo entran "n" elementos pudiendo algunos repetirse una o varias veces y considerando que dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en la disposición.

Dos variaciones con repetición serán iguales si tienen los mismos elementos y la misma disposición.

Fórmula

$$\boxed{VR_n^m = m^n}$$

Donde:

"m" : n° de elementos del conjunto base

"n" : n° de elementos de cada grupo, incluye las repeticiones.

Lectura: Variación con repetición de "m" elementos en grupo de "n".

Ejemplo 1

Sea el conjunto base: $B = \{x, y, z\}$, formar las variaciones repetidas en grupos de dos.

Solución:

(1°) Se desea: VR_2^3 ; de acuerdo a la definición

$$\Rightarrow \quad VR_2^3 = \{xx, yy, zz, xy, yx, zx, xz, yz, zy\} \text{ ; 9 elementos}$$

(2°) También:

$$\Rightarrow \quad VR_2^3 = 3^2 = \left(\begin{array}{c}\text{\# de elementos} \\ \text{de la base}\end{array}\right)^{\text{\# de elementos de cada grupo}}$$

$$\therefore \quad \boxed{VR_2^3 = 9 \text{ variaciones con repetición}}$$

Ejemplo 2

Se desea codificar la producción de focos de cierta fábrica usando los dígitos 2, 5 y 9 de modo que se utilicen 6 dígitos en cada foco. ¿Cuántos códigos podrán establecerse?.

Solución:

(1°) Se desea obtener variaciones con repetición de 3 elementos en grupos de 6 , VR_6^3

$\Rightarrow$ VR_6^3 variaciones con repeticiones.

$\Rightarrow$ $VR_6^3 = 3^6 = 729$

$\therefore$ $\boxed{VR_6^3 = 729 \text{ códigos}}$

9.6.3. La Permutación "P_m".- (Permutación sin repetición)

Definición.- Las permutaciones de "m" elementos de un conjunto base, es otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos que involucran a los "m" elementos. Dos permutaciones se diferencian una de otra solamente por la disposición de sus elementos.

Dos permutaciones son iguales si tienen la misma disposición

Fórmula $\boxed{P_m = m!}$

Donde: "m" : n° de elementos del conjunto base.

Lectura: Permutación de "m" elementos.

Ejemplo:

Sea el conjunto base: B = { a, b, c } formar las permutaciones.

Solución:

(1°) Mediante la definición se tendra :

$\Rightarrow$ $P_3 =$ { abc, bac, cab, acb, bca, cba } 6 pemutaciones simples

$\Rightarrow$ $P_3 = 3! = 6$

Ejemplo:

Hallar el número de permutaciones que se pueden obtener con las letras de "MURCIELAGO".

Solución:

Disponemos de 10 letras distintas, la permutación de éstas será:

$P_{10} = 10!$

$P_{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$\therefore \boxed{P_{10} = 3'628,800 \text{ permutaciones}}$

9.6.4. La Permutación con Repetición $P_m^{a,b,c...,k}$

Definición.- Dado un conjunto base con "m" elementos, entre los cuales hay "a" de una misma clase, otro número "b" de otra clase, otro número "c" de otra clase y así sucesivamente, denominamos permutación con repetición a las diferentes formas en que se pueden ordenar a estos "m" elementos.

Una de estas permutaciones se diferencia de otra por el lugar que ocupan dos elementos distintos.

Fórmulas

$$\boxed{P_m^{a,b,c,..k} = \frac{m!}{a! \times b! \times c! \ldots k!}}$$

Donde:

m: n° de elementos del conjunto base.

a, b, c, . . . k : n° de elementos repetidos.

$a + b + c + \ldots + k = m$

Ejemplo:

Sea el conjunto base:

$B = \{a, a, b, c\}$ formar las permutaciones.

Solución:

(1°) Se desea hallar $P_4^{2,1,1}$

(2°) $\Rightarrow P_4^{2,1,1} = \left\{ \begin{matrix} \text{aabc , accb} \\ \text{acab , acba} \\ \text{abca , baca} \\ \text{baac , bcaa} \\ \text{abac , cbaa} \\ \text{caab , caba} \end{matrix} \right\}$ 12 permutaciones con repetición

(3°) Mediante la fórmula

$P_4^{2,1,1} = \dfrac{4!}{2! \times 1! \times 1!} = 12$ permutaciones repetidas

Ejemplo:

¿Cuántas permutaciones diferentes puede obtenerse con las letras de "MACHUPICCHU".

Solución:

(1°) El conjunto base: B = { M, A, C, H, U, P, I, C, C, H, U }

$\Rightarrow$ Se desea $P_{11}^{1,1,3,2,2,1,1}$ pues: # M = 1, # A = 1, # C = 3, # H = 2, # U = 2

P = 1, # I = 1

(2°) Con:

$$P_{11}^{1,1,3,2,2,1,1} = \frac{11!}{1! \times 1! \times 3! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1!}$$

(3°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{P_{11}^{1,1,3,2,2,1,1} = 1'663{,}200 \text{ permutaciones con repetición}}$$

9.6.5 La Combinación C_n^m (Combinación sin repetición)

Definición.- La combinación de "m" elementos de un conjunto base, es otro conjunto ordenado cuyos elementos son grupos que involucran a "n" elementos del conjunto base. Una pareja de combinaciones se diferencian si tienen distintos elementos.

Dos combinaciones son iguales si tienen los mismos elementos y diferente o igual disposición.

Fórmula:

$$\boxed{C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}\ ; \ m \geq n}$$

Donde:

m : n° de elementos del conjunto base.
n : n° de elementos de cada grupo formado.

Lectura: Combinaciones de "m" elementos en grupos de "n".

Ejemplo :

Sea el conjunto base B = { a, b, c, x }
Formar las combinaciones de dos en dos.

Solución:

(1°) Se desea C_2^4 ; mediante la definición

$\Rightarrow$ C_2^4 = { ab, ac, ax, bc, bx, cx }, 6 elementos

(2°) También:

$$\Rightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

$$\therefore \boxed{C_2^4 = 6 \text{ combinaciones de 2 en 2}}$$

Ejemplo :

¿Cuántas Juntas Directivas de cuatro personas pueden formarse en una entidad de 12 personas?.

Solución:

(1°) Se desea combinaciones de 12 personas en grupos de 4, no interesando la disposición de cada grupo.

(2°) También :

$$\Rightarrow C_4^{12} = \frac{12!}{4! \times 8!}$$

$$\therefore \boxed{C_4^{12} = 495 \text{ juntas directivas}}$$

9.6.6. La Combinación con Repetición CR_n^m

Definición.- La combinación de "m" elementos de un conjunto base, es otro conjunto ordenado en el cual los grupos de "n" objetos distintos o repetidos se consideran iguales si poseen los mismos elementos repetidos igual número de veces no importando su disposición.

Fórmula:

$$\boxed{CR_n^m = C_n^{m+n-1}}$$

Donde:

m: n° de elementos del conjunto base.

n : n° de elementos de cada grupo formado, incluye las repeticiones.

Lectura:

Combinaciones repetidas de "m" elementos en grupos de "n".

Ejemplo :

Sea el conjunto base B = { a, b }
Formar las combinaciones repetidas de dichos elementos en grupos de 5.

Solución:

(1°) Se desea CR_2^5 ; mediante la definición correspondiente :

$$\Rightarrow CR_2^5 = \{ aaaaa, aaaab, aaabb, aabbb, abbbb, bbbbb \} ; \text{6 elementos}$$

(2°) También:

$$CR_5^2 = C_5^{2+5-1} = C_5^6 = \frac{6!}{5! \times 1!}$$

Ejemplo :

Hallar el número de términos del desarrollo de la siguiente potenciación:

$$(a+b+c+d+e)^3$$

Solución:

Se trata de calcular CR_3^5, es decir las combinaciones repetidas de 5 elementos en grupos de 3 los cuales se justifican también por la multiplicación a realizarse para obtener el producto solicitado:

$$\Rightarrow CR_3^5 = C_3^{5+3-1} = C_3^7 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

$\therefore$ $\boxed{(a+b+c+d+e)^3 \text{ posee 35 términos al ser desarrollado}}$

9.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

9.7.1. Ejercicio Explicativo

En el desarrollo de $(a^2 + b - a)^8$.
Hallar los coeficientes de los términos de la forma $a^{10}b^k$; $k \neq 0$.

Solución:

(1°) El término general del desarrollo será:

$$T = \binom{8}{\alpha, \beta, \gamma} \left(a^2\right)^{\alpha} b^{\beta} (-a)^{\gamma} \; ; \; \alpha + \beta + \gamma = 8$$

(2°) Por condición deberá cumplirse:

$$\begin{cases} T = \binom{8}{\alpha, \beta, \gamma} a^{2\alpha+\gamma} b^{\beta} (-1)^{\gamma} = c\, a^{10} b^{k} \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \alpha + \beta + \gamma = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 2\alpha + \gamma = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ \beta = k \end{cases}$$

(3°) Seleccionamos los valores que verifican la proposición.
Nos permite tener luego

$$\begin{pmatrix} \alpha = 3 \\ \gamma = 4 \\ k = \beta = 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \alpha = 4 \\ \gamma = 2 \\ k = \beta = 2 \end{pmatrix}$$

(4°) Los términos serán:

$$T_1 = \binom{8}{4,2,2} a^{10} b(-1)^4 = \frac{8!}{3!\times 1!\times 4!} a^{10} b = 280 a^{10} b$$

$$T_2 = \binom{8}{4,\ 2,\ 2} a^{10} b^2 (-1)^2 = \frac{8!}{4!\times 2!\times 2!} a^{10} b^2 = 420 a^{10} b^2$$

$\therefore$ **Los coeficientes buscados son 280 y 420**

9.7.2 Ejercicio Explicativo

Un granjero compra 3 vacas, 2 cerdos y 4 gallinas a un comerciante que tiene 5 vacas, 4 cerdos y 6 gallinas.
¿Cuántas maneras de seleccionar tiene el granjero?.

Solución:

(1°) Para poder efectuar la compra deberá seleccionar de acuerdo a:

(2°) Escogiendo las vacas : $\binom{5}{3}$ maneras , hay 5 vacas y necesita 3

(3°) Escogiendo los cerdos : $\binom{4}{2}$ maneras , hay 4 cerdos y necesita 2

(4°) Escogiendo las gallinas : $\binom{6}{4}$ maneras , hay 6 gallinas y necesita 4

(5°) Por el Principio Fundamental.

Selección general : $\binom{5}{3}\binom{4}{2}\binom{6}{4}$

Usando complementos $\Rightarrow \binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{6}{2}$

$$= \frac{5\times 4}{2!}\times\frac{4\times 3}{2!}\times\frac{6\times 5}{2!}$$

$$= \frac{5\times 4}{2}\times\frac{4\times 3}{2}\times\frac{6\times 5}{2}$$

$$= 10\times 6\times 15$$

$\therefore$ **Selección = 900 maneras**

9.7.3. Ejercicio Explicativo

Simplificar: $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{n}{(n+1)!}$; $n \in \mathbb{N}$

Solución:

(1°) La suma propuesta es el desarrollo de $\sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{n}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} \;;$$

(2°) En razón a cumplirse que $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; la implementamos

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)}\right)$$

(3°) Observemos que las parejas logradas al ser sumadas permiten obtener:

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1!}\cancel{-\frac{1}{2!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2!}}\cancel{-\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}\cancel{-\frac{1}{4!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4!}}\cancel{-\frac{1}{5!}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n!}}-\frac{1}{(n+1)}\right)$$

(4°) Resulta que son rescatables primera y última fracciones:

$$\Rightarrow \frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \quad \boxed{\sum_{n=1}^{n}\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}}$$

9.7.4. Ejercicio Explicativo

Simplificar: $\sum\limits_{n=0}^{n} n!(n+1)^2$; $n \in \mathbb{N}$

Recuerde:

La sumatoria $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

Solución:

(1°) Induciendo:

(2°) Tomando: 2 términos : $0! \times 1^2 + 1! \times 2^2 = 1+4 = 5 = 3!-1$

3 términos : $\underbrace{0! \times 1^2 + 1! \times 2^2}_{5} + 2! \times 3^2 = 5+18 = 23 = 4!-1$

4 términos: $\underbrace{0!\times 1^2+1!\times 2^2+2!\times 3^2}_{23}+3!\times 4^2 = 23+96 = 119 = 5!-1$

$(n+1)$ términos : $0!\times 1^2+1!\times 2^2+2!\times 3^2+\ldots+n!(n+1)^2 = (n+2)!-1$

(3°) $\therefore \boxed{\sum_{n=0}^{n} n!(n+1)^2 = (n+2)!-1}$

9.7.5 Ejercicio Explicativo

Hallar "n" si se verifica la igualdad siguiente:

$$\frac{\binom{n}{2}+\binom{n+1}{3}}{\binom{n+2}{4}} = \frac{7}{5}\ ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Simplificando el primer miembro de la ecuación:

$$\Rightarrow \frac{\binom{n}{2}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}}{\left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)\binom{n}{2}}$$; pues por degradación: $\binom{n+1}{3} = \frac{n+1}{3}\binom{n}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\binom{n}{2}\left[1+\frac{n+1}{3}\right]}{\left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)\binom{n}{2}} = \frac{7}{5}$$; por degradación: $\binom{n+2}{4} = \left(\frac{n+2}{4}\right)\binom{n+1}{3}$

$= \left(\frac{n+2}{4}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{3}\right)\binom{n}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n+4}{3}}{\frac{(n+1)(n+2)}{3\times 4}} = \frac{7}{5}\ ;$$

(2°) La ecuación equivalente será:

$$\Rightarrow \frac{(n+4)\,3\times 4}{3(n+1)(n+2)} = \frac{7}{5}\ ;$$

$$\Rightarrow 20(n+4) = 7(n+1)(n+2)\ ;$$

$$\Rightarrow 7n^2+n-66 = 0$$

$$\Rightarrow (7n+22)(n-3) = 0,\ n = 3,\ n = -\frac{22}{7},\ n \in \mathbb{N}$$

(3°) Finalmente :

$\therefore \boxed{n = 3}$

9.7.6 Ejercicio Explicativo

Simplificar:

$$y = \left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)....(2n)}{2 \times 6 \times 10 \times 14 ....(4n-2)}\right]! \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Comentario:

Este caso permitirá usar los conceptos de factorial y semifactorial.

Solución:

(1°) Hacemos un estudio del numerador, el cual revela una sucesión de términos consecutivos, **el cual se puede completar**; en relación al denominador los factores pueden ser ordenados con el factor 2 común a todos.

(2°) Multiplicando y dividiendo por n!

$$\Rightarrow y = \left[\frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)}{n!\underbrace{(2\times1)(2\times3)(2\times5)(2\times7)...2(2n-1)}_{\text{n Factores}}}\right] ; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{(2n)!}{n!\ \underbrace{2^n \times 1\times3\times5\times7...(2n-1)}}\right]! \ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{(2n)!}{\underbrace{n!\times2^n}(2n-1)!!}\right]! \ n \in \mathbb{N} \ ; \text{pues :} \quad 2n!! = n! \times 2^n$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{(2n)!}{(2n)!! \times (2n-1)!!}\right]! \ n \in \mathbb{N}; \text{pues :} \quad (2n)!! \times (2n-1)!! = (2n)!$$

(3°) Se tendrá:

$$\Rightarrow y = \left[\frac{(2n)!}{(2n)!}\right]! \ ; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y = [1]!$$

$\therefore \boxed{y = 1}$

Observación:

Este caso ha podido ser absuelto mediante el uso de la inducción.

9.7.7 Ejercicio Explicativo

Resolver:

$$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=\frac{x^3+6x-3}{6}\ ;\ x\in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) Desarrollando cada coeficiente binomial en la ecuación no algebraica permitirá tener:

(2°) $$\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\binom{x}{3}=\frac{x^3+6x-3}{6}$$

$$\Rightarrow\ 1+x+\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=\frac{x^3+6x-3}{6}$$

(3°) Por 6 : $6+6x+3x(x-1)+x\underbrace{(x-1)(x-2)}_{x^2-3x+2}=x^3+6x-3$

$$\Rightarrow\quad 6+6x+\cancel{3x^2}-3x+x^3-\cancel{3x^2}+2x=x^3+6x-3$$

$$\Rightarrow\quad \cancel{x^3}+5x+6=\cancel{x^3}+6x-3$$

$$\Rightarrow\quad 9=x$$

$$\therefore\ \boxed{S=\{9\}}$$

9.7.8. Ejercicio Explicativo

Demostrar que se **verifica** la siguiente identidad:

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\ ;\ n\in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Partamos del 2° miembro de la identidad:

$\Rightarrow \dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; si ponemos común denominador

(2°) $\dfrac{(n+1)!-n!}{n!(n+1)!}$; podemos factorizar el numerador pensando que: $(n+1)!=(n+1)n!$

$\Rightarrow \dfrac{(n+1)!-n!}{n!(n+1)!}$;

(3°) $\dfrac{n![(n+1)!-1]}{n!(n+1)!}$; es posible simplificar n!

$$\Rightarrow \frac{n}{(n+1)!}$$; Se obtuvo el 2° miembro, lo que concluye nuestra verificación.

$$\therefore \boxed{\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} \; ; \; n \in \mathbb{N}}$$

9.7.9. Ejercicio Explicativo

Calcular:

$$E=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

Recuerde:

La equivalencia:

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!} \; ; \; k \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Desde que se verifica:

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

(2°) Aplicando dicha descomposición a la suma propuesta:

$$\Rightarrow \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

(3°) Observamos que se simplifican todos los términos con excepción de los extremos.

$$\Rightarrow E=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!} \; ;$$

$$\Rightarrow E=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore \boxed{E=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}}$$

9.7.10 Ejercicio Explicativo

Para fotografiar a 4 niños, 6 señoras y 5 varones adultos se les ordena de modo que los niños están en primera fila, las señoras sentadas en segunda fila y los varones de pie en tercera fila.
¿De cuántas maneras puede ordenarse a las personas para ser fotografiadas?.

Recuerde:

La permutación obedece a la regla:

$$P_m = m! \;, m \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Las filas están sujetas a las permutaciones correspondientes:

(2°) 1ª fila (niños) : P_4

2ª fila (señoras) : P_6

3a fila (adultos) : P_5

(3°)
$$\begin{aligned}\# \text{ de modos} &= P_4 \times P_6 \times P_5 \\ &= 4! \times 6! \times 5! \\ &= 24 \times 720 \times 120\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boxed{\# \text{ de modos} = 2'073{,}600}$

9.7.11 Ejercicio Explicativo

Resolver en "m":

$$\frac{V_6^m + V_5^m}{V_4^m} = 900 \quad ; \; m \in \mathbb{N}$$

Recuerde:

La variación se define por:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} \; ; \; m, n \in \mathbb{N} \; ; \; m \geq n$$

Solución:

(1°) Obteniendo las equivalencias por partes

$$V_6^m = \frac{m!}{(m-6)!}$$

$$V_5^m = \frac{m!}{(m-5)!}$$

$$V_4^m = \frac{m!}{(m-4)!}$$

(2°) Se tendrá la ecuación equivalente:

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{m!}{(m-6)!}+\dfrac{m!}{(m-5)!}}{\dfrac{m!}{(m-4)!}} \text{ ; expresando en función a } \frac{m!}{(m-6)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{m!}{(m-6)!}+\dfrac{m!}{(m-5)\times(m-6)!}}{\dfrac{m!}{(m-4)(m-5)(m-6)!}} = \frac{\dfrac{m!}{(m-6)!}\left[1+\dfrac{1}{m-5}\right]}{\dfrac{m!}{(m-6)!}\left[\dfrac{1}{(m-4)(m-5)}\right]}$$

(3°) Finalmente; luego de simplificar :

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{m-4}{m-5}}{\dfrac{1}{(m-4)(m-5)}} = 900 \text{ ; } \frac{(m-4)^2(m-5)}{(m-5)} = 900$$

$$\Rightarrow m-4 = 30$$

$$\therefore \boxed{m = 34}$$

9.7.12 Ejercicio Explicativo

Resolver en "m"

$$V^m_{m-3} \times P_3 = 5040 \text{ ; } m \in \mathbb{N}$$

Recuerde:

Que la permutación viene dado por:

$$P_m = m! \text{ ; } n \in \mathbb{N}.$$

y la variación por:

$$V^m_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Solución:

(1°) Por definición y las reglas dadas.

$$V^m_{m-3} = \frac{m!}{[m-(m-3)]!} = \frac{m!}{3!}$$

$$\Rightarrow \frac{m!}{3!} \times 3! = 5040$$

(2°) Luego de simplificar:

$$\Rightarrow m! = 5040$$

$$\Rightarrow \ m! = 7! \quad ; \text{ pues : } \quad \begin{array}{r|l} 5040 & 2 \\ 2520 & 3 \\ 840 & 4 \\ 210 & 5 \\ 42 & 6 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\therefore \ \boxed{m = 7}$$

9.7.13. Ejercicio Explicativo

Si: $$\left(\sqrt[\lfloor\!\underline{2}\,\lfloor\!\underline{3}\,\lfloor\!\underline{4}]{\left[\frac{\lfloor\!\underline{9}}{\lfloor\!\underline{7} + \lfloor\!\underline{8}}\right]^{\lfloor\!\underline{4} + \lfloor\!\underline{5} + \lfloor\!\underline{6}}}\right)^{x} = 1024$$

Hallar el valor de x.

Recuerde:

$m! = m\,(m-1)!$ Propiedad Degradativa de los factoriales.

Solución:

(1°) Simplificando la ecuación.

Para ello eliminemos el radical:

$$\left(\frac{\lfloor\!\underline{9}}{\lfloor\!\underline{7} + \lfloor\!\underline{8}}\right)^{\frac{(\lfloor\!\underline{4} + \lfloor\!\underline{5} + \lfloor\!\underline{6})x}{\lfloor\!\underline{2}\,\lfloor\!\underline{3}\,\lfloor\!\underline{4}}} = 1024 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) Simplificando la base y el exponente:

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{9}}{\lfloor\!\underline{7} + \lfloor\!\underline{8}} = \frac{9 \times 8 \times \lfloor\!\underline{7}}{\lfloor\!\underline{7} + 8\lfloor\!\underline{7}} = \frac{9 \times 8 \times \lfloor\!\underline{7}}{9\lfloor\!\underline{7}} = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Base)}$$

$$\Rightarrow \frac{\lfloor\!\underline{4} + \lfloor\!\underline{5} + \lfloor\!\underline{6}}{\lfloor\!\underline{2} \times \lfloor\!\underline{3} \times \lfloor\!\underline{4}} \quad \frac{\lfloor\!\underline{4} + 5\lfloor\!\underline{4} + 6 \times 5\lfloor\!\underline{4}}{2 \times 6 \times \lfloor\!\underline{4}}$$

$$= \frac{36\lfloor\!\underline{4}}{12\lfloor\!\underline{4}} = 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Exponente)}$$

(3°) Sustituyendo los resultados

$\Rightarrow$ En (1):

$$8^{3x} = 1024$$

$$\Rightarrow 2^{9x} = 2^{10}$$

$$\Rightarrow 9x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{ \frac{10}{9} \right\}}$$

9.7.14 **Ejercicio Explicativo**

Determinar el conjunto solución de la siguiente ecuación no algebraica:

$$3\binom{77}{7(x!!)} = 11\binom{76}{7(x!!)-1} \quad ; \; x \in \mathbb{N}$$

(x!! , es el semifactorial de x).

Recuerde:

$\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$; Propiedad degradativa del coeficiente binomial.

Solución:

(1°) Es posible aplicar la propiedad degradativa al primer miembro de la ecuación:

$$\Rightarrow 3\times\frac{77}{7(x!!)}\times\binom{76}{7(x!!)-1} = 11\binom{76}{7(x!!)-1}$$

(2°) Simplificando:

$$\Rightarrow 3\times\frac{77}{7(x!!)} = 11 \; ; \; \binom{76}{7(x!!)-1} \neq 0$$

$$\Rightarrow 3\times 77 = 77(x!!)$$

(3°) La ecuación equivalente será:

$$\Rightarrow \; 3 = x!!$$

$$\Rightarrow \; 3!! = x!!$$

$$\Rightarrow \; x = 3$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{3\}}$$

9.7.15 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el conjunto solución de la ecuación no algebraica:

$$\binom{\lfloor\underline{5} + 2}{\lfloor\underline{5}} . \; x = \frac{\lfloor\underline{5!} + 2}{4} \Big/ \binom{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{5} - 2}^{-1} \quad ; \; x \in \mathbb{N}$$

Recuerde :

Propiedad degradativa del coeficiente binomial:

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \quad ; \quad m \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) Podemos aislar $x!$

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \frac{\lfloor 5!+2}{4\binom{\lfloor 5+2}{\lfloor 5}} \cdot \frac{\binom{120}{118}}{3570} \quad ; \quad \lfloor 5 = 120$$

(2°) Simplificando en el 2° miembro

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \frac{\lfloor 122}{4\binom{122}{120}} \cdot \frac{\binom{120}{118}}{3570}$$

(3°) Aplicando la propiedad degradativa a $\binom{122}{120}$

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \frac{\lfloor 122}{\underbrace{4\times\frac{122}{120}\times\frac{121}{119}\cancel{\binom{120}{118}}}} \times \frac{\cancel{\binom{120}{118}}}{3570}$$

(4°) Aplicando la propiedad degradativa a $\lfloor 122$

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \frac{\cancel{122}\times\cancel{121}\times\lfloor 120}{4\times\frac{\cancel{122}}{\cancel{120}}\times\frac{\cancel{121}}{119}} \times \frac{1}{3570}$$

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \frac{30\times 119}{3570}\times \lfloor 120$$

$$\Rightarrow \underline{\lfloor x!} = \lfloor 120 = 5!$$

$$\Rightarrow \quad x = 5$$

$\therefore$ $\boxed{S = \{5\}}$

9.7.16. Ejercicio Explicativo

Calcular: $$k = \frac{\binom{45}{9}^2 - \binom{45}{8}^2}{\left[\binom{46}{9} + \binom{45}{8}\right]^2 - \left[\binom{46}{9} - \binom{45}{8}\right]^2}$$

Recuerde:

(1) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$; Legendre

(2) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$; P. Degradativa

(3) $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ P. de la Suma

Solución:

(1°) Transformando equivalentemente

$$k = \frac{\left[\binom{45}{9} + \binom{45}{8}\right]\left[\binom{45}{9} - \binom{45}{8}\right]}{4\binom{46}{9}\binom{45}{8}}$$

(2°) Aplicando propiedad de la suma y la propiedad degradativa en cada corchete, tendremos:

$$k = \frac{\left[\binom{46}{9}\right]\left[\frac{37}{9}\binom{45}{8} - \binom{45}{8}\right]}{4\binom{46}{9}\binom{45}{8}}$$

(3°) Luego de simplificar:

$$k = \frac{\binom{45}{8}\left[\frac{28}{9}\right]}{4\binom{45}{8}} \Rightarrow k = \frac{28}{4 \times 9}$$

$$\therefore \boxed{k = \frac{7}{9}}$$

9.7.17. Ejercicio Explicativo

Resolver: $[\![x]\!]! + \dfrac{144}{[\![x]\!]!} = 30$; $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$[\![x]\!]$ es el mayor entero de "x"

Recuerde:

Si: $[\![x]\!] = m \,;\, m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \; m \leq x < m + 1$

Solución:

(1°) Hacemos el cambio:

$$[\![x]\!]! = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Rightarrow \; a + \frac{144}{a} = 30$$

(2°) multiplicando por "a".

$$\Rightarrow \; a^2 + 144 = 30a$$
$$\Rightarrow \; a^2 - 30a + 144 = 0$$
$$\Rightarrow \; (a - 24)(a - 6) = 0$$

(3°) Se obtiene:

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 24 \\ a = 6 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(4°) de (1) y (2):

$$\Rightarrow \; [\![x]\!]! = 24 = 4! \,,\, [\![x]\!] = 4 \,;\; 4 \leq x < 5$$
$$\Rightarrow \; [\![x]\!]! = 6 = 3! \,,\, [\![x]\!] = 3 \,;\; 3 \leq x < 4$$
$$\Rightarrow \; x \in [3, 4\rangle \wedge x \in [4, 5\rangle$$
$$\therefore \; \boxed{x \in [3, 5\rangle}$$

9.7.18. Ejercicio Explicativo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden lograr con los dígitos desde 0 al 9 de modo que la 1ª cifra sea distinto de cero y que los otros no sean repetidas.

Recuerde:

Si un suceso puede ocurrir de n_1 modos y otro suceso de n_2 modos
$\Rightarrow \; n_1 \times n_2$ será el total de modos posibles.

Solución:

(1°) Sea $N = \overline{xyz}$

9 modos   9 modos   8 modos

(2°) # total de modos = $9 \times 9 \times 8$

$$\therefore \; \boxed{\#\text{ total de modos } = 648}$$

9.7.19. Ejercicio Explicativo

En las elecciones de un club, se tiene cuatro candidatos para presidente, tres para vice-presidente y cinco para tesorero. ¿De cuántas formas puede elegirse la mesa directiva?.

Solución:

(1°) La junta directiva está compuesta por:

J = (Presidente), (Vice-Presidente), (Tesorero)

$\Rightarrow$ J = (4 modos), (3 modos), (5 modos)

(2°) De acuerdo al principio fundamental de conteo.

$\Rightarrow$ J = (4)(3)(5)

$\therefore$ $\boxed{\text{60 modos para elegir la junta directiva}}$

9.7.20. Ejercicio Explicativo

Un testigo de cierto delito, dijo que la placa del vehículo usado por los delincuentes era un número de 6 dígitos de los cuales los tres primeros eran 487; no pudo precisar los últimos tres dígitos, pero aseguró que eran distintos.
¿Cuántos números de placas se tendrá que investigar?

Solución:

(1°) Sea la placa P de la forma:

$\Rightarrow P = 487\overline{abc}$

(2°) Debemos de calcular el número de modos que es posible obtener abc.

$\Rightarrow$ (a) (b) (c)

(10 modos) (9 modos) (8 modos)

$\Rightarrow$ 720 modos

$\therefore$ $\boxed{\text{720 placas por investigar}}$

9.7.21. Ejercicio Explicativo

El número de combinaciones de "x" objetos tomados en grupos de 3, está con el número de variaciones de los mismos objetos, tomado en grupos de a 2, en la relación 1/2. Calcular el número de objetos.

Recuerde:

$$C^m_n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$ Combinaciones de " m " elementos en grupos de " n "

$$V^m_n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$ Variaciones de " m " elementos en grupos de " n "

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

C^{x}_{2} : Combinaciones de x objetos en grupos de 2.

V^{x}_{2} : Variaciones de x objetos en grupos de 2.

$$\Rightarrow \frac{C^{x}_{2}}{V^{x}_{2}} = \frac{1}{2}$$

(2°) Resolviendo esta igualdad condicional

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{x(x-1)}{2}}{\dfrac{x!}{(x-2)!}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x)!} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cancel{x!}}{2(\cancel{x!})} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{x \in \mathbb{N}}$$

(3°) El enunciado es una propiedad general por lo que el número de objetos es cualquier número natural mayor o igual a 2.

9.7.22. Ejercicio Explicativo

En una librería se disponen de 10 títulos matemáticos; 7 novelas históricas y 5 biografías.
¿De cuántas maneras se puede elegir 5 títulos matemáticos, 3 novelas históricas y tres biografías en un estante que puede contener solamente 11 libros?.

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

Títulos matemáticos : C^{10}_{5} modos

Novelas históricas : C^{7}_{3} modos

Biografías : C^{5}_{3} modos

(2°) # de maneras $= C^{10}_{5} \times C^{7}_{3} \times C^{5}_{3}$

$$= \frac{10!}{5! \times 5!} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3!}$$

$$= (252) \times (35) \times (10)$$

$\therefore$ $\boxed{\# \text{ de maneras } = 88200}$

9.7.23. **Ejercicio Explicativo**

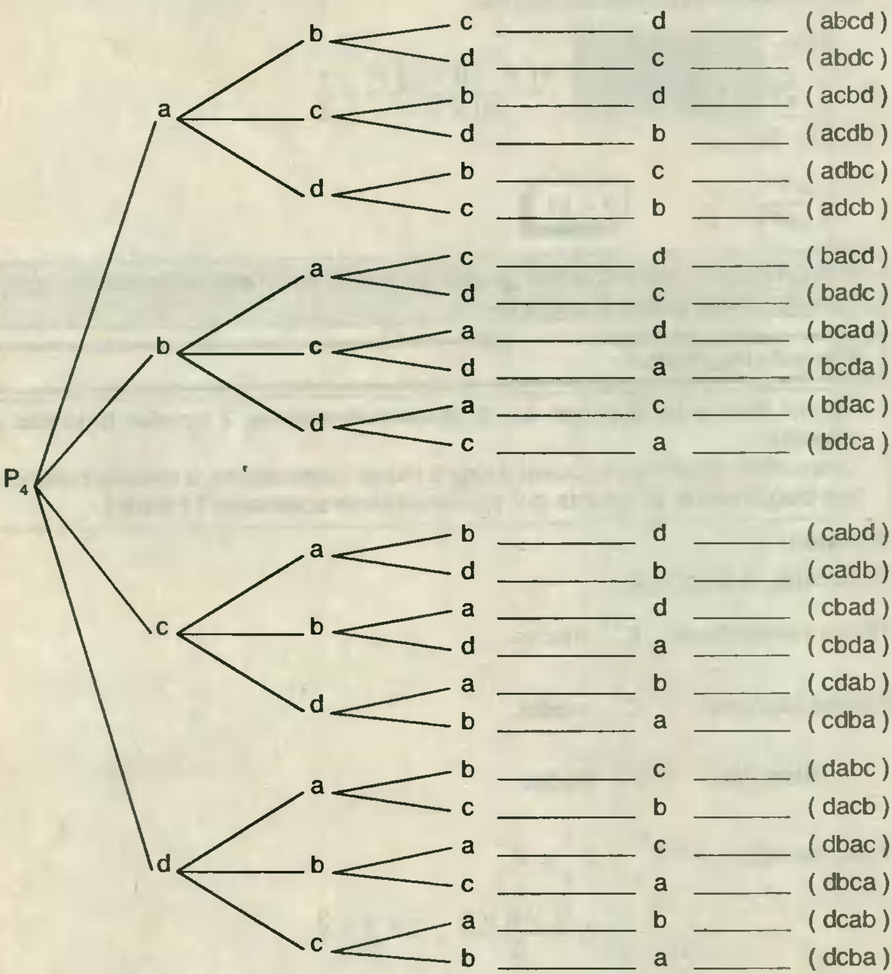
Formar las permutaciones de los elementos del conjunto base $B = \{a, b, c, d\}$. Mediante un diagrama de Arbol.

Recuerde:

La permutación se expresa como: P_n tal que $P_n = n!$

Solución:

(1°) Mediante el Diagrama del árbol.



9.7.24 **Ejercicio Explicativo**

Efectuar: $$k = \left[\frac{62}{67}\binom{-37}{31} + \binom{-36}{30}\frac{11}{6}\right] . \binom{-36}{31}^{-1}$$

Recuerde:

Propiedades degradativas del coeficiente Binomial:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \ ; \ n \in \mathbb{R}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1} \ ; n \in \mathbb{R}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k} \ ; n \in \mathbb{R}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) Degradando a fin de tener coeficientes binomiales semejantes

$$\Rightarrow \binom{-36}{30} = \frac{-36}{-36-30}\binom{-37}{30} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\Rightarrow \binom{-37}{31} = \frac{-37+1-31}{31}\binom{-37}{30} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

(2°) Sustituyendo (A) y (B) sobre k

$$\Rightarrow k = \left[\frac{62}{67} \times \underbrace{\frac{-67}{31}\binom{-37}{30}}_{B} + \underbrace{\frac{36}{66}\binom{-37}{30} \times \frac{11}{6}}_{A}\right] . \binom{-36}{31}^{-1}$$

(3°) Simplificando:

$$k = \left[-2\binom{-37}{30} + \binom{-37}{30}\right]\binom{-36}{31}^{-1}$$

$$\Rightarrow k = \left[-\binom{-37}{30}\right]\binom{-36}{31}^{-1} = -\frac{\binom{-37}{30}}{\binom{-36}{31}}$$

(4°) Degradando nuevamente:

$$k = -\frac{\binom{-37}{30}}{\frac{-36}{31}\binom{-37}{30}}$$

$$\therefore \ \boxed{k = \frac{31}{36}}$$

9.7.25. **Ejercicio Explicativo**

Al resolver:

$$\begin{cases} 30P_x = P_{(x+2)} \text{ .... } (1) \\ V^{y+2}_{3} = 42y \text{ .... } (2) \\ C^{z+2}_{4} = z^2 - 1 \text{ .... } (3) \end{cases}$$

Obtener: $x + y + z$; $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Recuerde:

$P_m = m!$;

$V^{n}_{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;

$C^{m}_{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$

Por partes:

(1°) De acuerdo a las definiciones correspondientes.

$30P_x = P_{x+2}$; $30x! = (x+2)!$; $x > 0$

$\Rightarrow 30x! = (x+2)(x+1)x!$; $x! \neq 0$

(2°) Resolviendo la ecuación obtenida

$\Rightarrow 30 = x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} x & 7 \\ x & -4 \end{array}$$

$\therefore \boxed{x = 4}$ .... (I) ; $x \neq -7$; $x > 0$

(3°) En relación a la variación.

$\Rightarrow V^{y+2}_{3} = 42y$

$\Rightarrow \dfrac{(y+2)!}{(y+2-3)!} = 42y$; $\dfrac{(y+2)!}{(y-1)!} = 42y$

$\Rightarrow (y+2)(y+1)y\dfrac{(y-1)!}{(y-1)!} = 42y$; simplificando:

$\Rightarrow (y+2)(y+1) = 42$; $y \neq 0$

$\Rightarrow\ y^2 + 3y - 40 = 0\ ;\ (y+8)(y-5)$

$\therefore\quad \boxed{y = 5}$ .... (II) ; $y \neq -8\ ,\ y \neq 0$

(4°) En relación a la combinación

$$\Rightarrow\ C_4^{z+2} = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow\ \frac{(z+2)!}{4!(z-2)!} = z^2 - 1\ ;\ \frac{(z+2)(z+1)z(z-1)\cancel{(z-2)!}}{4\cancel{(z-2)!}} = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow\ z^2 + 2z - 24 = 0;\ \ (z-4)(z+6) = 0;$$

$\therefore\quad \boxed{z = 4}$ .... (III) ; $z \neq -6$

$\therefore\quad \boxed{x + y + z = 13}$

9.7.26. Ejercicio Explicativo

Un almuerzo se forma con una taza de sopa, un emparedado y una bebida.
Si hay tres tipos de sopas, dos tipos diferentes de emparedados y cuatro bebidas distintas.
¿Cuántos almuerzos diferentes se puede confeccionar?.

Recuerde:

El principio fundamental de conteo:

$$n = n_1\, n_2\, n_3 \ldots n_k$$

Donde:

$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ son los sucesos posibles a ocurrirse.

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado

El total de modos de formar los almuerzos será como sigue:

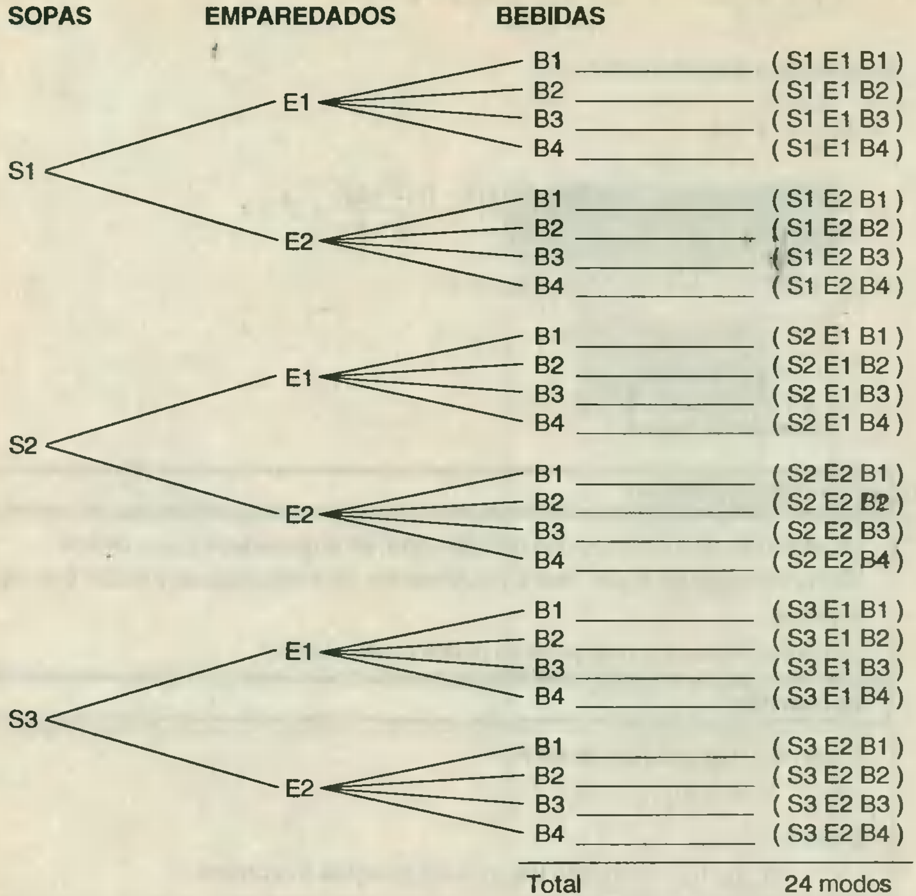
Sopas	Emparedados	Bebidas
↑	↑	↑
3 modos	2 modos	4 modos

(2°) De acuerdo al principio de conteo.

\# de almuerzos $= 3 \times 2 \times 4 = 24$ modos

$\therefore\quad$ \# de almuerzos = 24 modos

(3°) Lo anterior puede ilustrarse con un diagrama del árbol útil para entender el fenómeno con objetividad.



9.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: Teoría combinatoria

(1) Calcular :

$$y = \frac{C_k^n}{C_k^n + C_{k+1}^n} = \frac{C_{k+2}^n}{C_{k+2}^n + C_{k+3}^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{R} ; \; k \in \mathbb{N}$$

Rpta: $\dfrac{2(k+2)}{n+1}$

(2) Simplificar: $E = \dfrac{\binom{-9}{3} + \binom{-10}{4}}{\binom{-11}{4} + \binom{-11}{5}}$

Rpta: $-\dfrac{25}{91}$

(3) Si diez corredores compiten la carrera de 100 m. ¿De cuántas maneras puede ganarse los tres primeros puestos?

Rpta: 720 modos

(4) Hay 10 automóviles de servicio público que viajan entre las ciudades "A" y "B". ¿De cuántas maneras puede una persona ir de "A" hacia "B" y regresar en un vehículo diferente?

Rpta: 90

(5) Tres viajeros llegan a cierto pueblo en el cual hay siete lugares dedicados al alojamiento. ¿De cuántos modos pueden elegirse sus respectivos establecimientos debiendo estar cada uno en lugares exclusivos

Rpta: 210 modos

(6) Simplificar: $y = \sum_{i=1}^{n-4} \left(\dfrac{C_i^n}{C_i^n + C_{i+1}^n} + \dfrac{C_{i+2}^n}{C_{i+2}^n + C_{i+3}^n} \right)$

Rpta: $\dfrac{n-4}{2}$

(7) Calcular: $E = \sum_{i=1}^{n} \binom{5+i}{2,\, i+3}$

Rpta: $\dfrac{n}{6}\left(n^2 + 15n + 74\right)$

(8) De cuántas maneras se pueden elegir dos o más corbatas de una colección que contiene 8.

Rpta: 247

(9) De cuántas maneras se puede repartir 12 objetos entre 3 personas de modo que cada uno reciba 4 objetos; ¿De cuántas maneras se pueden dividir los 12 objetos en 3 grupos de 4 objetos cada uno?

Rpta: 34650 y 5775 grupos

(10) Se dispone de telas de 5 tonos distintos de color verde, 4 tonos distintos de color azul y 3 tonos distintos de color rojo. Hallar el número de selecciones de tonos que se pueden efectuar con la condición de tomar siempre un tono verde y un tono azul.

Rpta: 3720

(11) ¿De cuántos modos se puede seleccionar un almuerzo compuesto de sopa, segundo y postre, sabiendo que en el restaurant se ofrecen 7 sopas distintas, 9 segundos surtidos y 5 postres variados?

Rpta: 315

(12) ¿Cuántos números pares de 3 cifras se pueden formar con los 10 dígitos?

Rpta: 450

(13) De entre 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 azules. ¿De cuántas maneras puede seleccionar 5 bolas si deben de ser 2 rojas, una blanca y 2 azules?

Rpta: 450

(14) En la sección de un hospital se disponen de 12 enfermeras, de cuántas maneras puede hacerse una selección de 5 de modo que:

a) Una enfermera determinada se incluye siempre.
b) Cuando una enfermera determinada se excluye siempre.

Rpta: a) 330 b) 462

(15) De cuántas maneras se pueden escoger tres cartas sucesivas de un mazo de 52 cartas,

a) Si se repone de inmediato
b) No se repone

Rpta: a) 40608 b) 132600

(16) Se desea repartir 9 revistas entre 4 personas si el mayor de ellos recibe 3 revistas mientras que los otros 2 revistas ¿De cuántas maneras ocurriría dicho evento?

Rpta: 7560

(17) De cuántas maneras 3 chilenos, 4 peruanos, 4 argentinos y 2 mejicanos pueden sentarse en una fila de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos.

Rpta: 165888

(18) En cierto examen un estudiante debe contestar 8 de 10 preguntas.

a) Cuántas maneras de escoger tiene
b) De cuántas maneras puede contestar, si los tres primeros son obligatorios.

Rpta: a) 45 maneras b) 21 maneras

(19) Hallar el número de modos en que 4 varones y 4 damas se pueden sentar en fila si los varones y damas deben de quedar alternados.

También hallar el número de maneras si se sientan alternadamente y uno de los varones se sienta siempre junto a una dama determinada.

Rpta: a) 1152 b) 504

(20) Hallar el número de maneras en que se pueden colocar sobre un estante de 5 libros grandes, 4 medianos y 3 pequeños de modo que los libros de igual tamaño estén juntos.

Rpta: 103680

CAPITULO 10

LA POTENCIACION

10.1. ***Definición.-*** La potenciación de exponente "n" es una operación que a cada par de números reales "x", "n", le asigna la regla correspondiente x^n.

10.2. **EL TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON**

Si "x" e "y" son números reales y "n" es un entero positivo, se verifica que:

$$\boxed{(x+y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

Demostración:

(1°) A partir de la equivalencia notable.

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots S_{n-1}x + S_n$$

(2°) Si hacemos: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_j = y$

$$\Rightarrow S_1 = a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1} + a_n = ny = \binom{n}{1} y$$

$$\Rightarrow S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 \ldots\ldots + a_{n-1}\,a_n = \binom{n}{2} y^2$$

$$\Rightarrow S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 \ldots\ldots + a_{n-2}\,a_{n-1}\,a_n = \binom{n}{3} y^3$$

....

$$\Rightarrow S_n = a_1a_2a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n = \binom{n}{n} y^n$$

(3°) Por lo que la igualdad se transforma en:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n$$

El cual se puede expresar mediante sumatoria como:

$$\therefore \boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \;;\; x, y \in \mathbb{R} \;;\; n \in \mathbb{N}}$$

10.2. COROLARIOS DEL TEOREMA DEL BINOMIO:

10.2.1 El Término General T_{k+1}:

Si: $(x+y)^n$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$0 \le k \le n \qquad n \in \mathbb{N}$$

10.2.2 El término Central de $(x+y)^{2n}$

Si: $(x+y)^{2n}$

$$\Rightarrow T_{\substack{central\\único}} = \binom{2n}{n} x^n y^n$$

10.2.3 Los Términos Centrales de $(x+y)^{2n+1}$

Si: $(x+y)^{2n+1}$; $x, y \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \boxed{T_{1^\circ\,central} = \binom{2n+1}{n} x^{n+1} y^n}$$

$$\boxed{T_{2^\circ\,central} = \binom{2n+1}{n+1} x^n y^{n+1}}$$

Observar: $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$

10.2.4 Los Términos T y T' Equidistantes del desarrollo de $(x+y)^n$

$$\Rightarrow \boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

$$\boxed{T'_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

10.2.5 Descripción de las Características de la Expansión $(x+y)^n$; $x \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

(1°) El desarrollo consta de "n + 1" términos; los cuales se determinaron de combinar repetidamente las variables x e y en grupos de "n" es decir también el número de términos de $(x+y)^n$ será:

$$\boxed{CR_n^2 = C_n^{n+2-1} = C_n^{n+1} = n+1}$$

(2°) **Si se tiene:** $(x+y)^n$ Los términos del desarrollo tienen signos positivos, con $x > 0$, $y > 0$

Si se tiene: $(x - y)^n$ — Los términos del desarrollo tienen signos alternados siendo el primero positivo con $x > 0$, $y > 0$

Si se tiene: $(-x - y)^n$ — **con n par**, todos los términos tienen signos positivos.

Si se tiene: $(-x - y)^n$ — **con n impar**, todos los términos tienen signos negativos.

Si se tiene: $(-x + y)^n$ — **con n par**, los términos tienen signos alternados empezando con positivo.

Si se tiene: $(-x + y)^n$ — **con n impar**. los términos serán de signos alternados empezando con negativo.

(3°) Los coeficientes de cada término son números combinatorios o coeficientes binomiales de la forma: $\binom{n}{k}$

(4°) Los coeficientes binomiales de los términos equidistantes de los extremos son iguales entre sí, siempre que $(n + 1)$ sea par, en caso contrario, el término central único carece de pareja.

(5°) Sea: $(x + y)^n$, $n \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}, 0\}$

$\Rightarrow$ El desarrollo de la expresión posee infinitos términos el cual estará sujeto a la condición de convergencia siguiente:

$$x = 1,\ 0 < |y| \leq 1$$

En caso contrario el desarrollo carece de sentido.

10.2.6 El Triángulo Aritmético y el Teorema del Binomio de Newton

Los elementos de las filas y diagonales del triángulo aritmético corresponden a las expansiones de los binomios de Newton conforme se muestra:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^2 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^3 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^4 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^5 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^6 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^7 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^8 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \leftarrow \text{coef. de } (a+b)^9
\end{array}$$

Ejemplo:

Desarrollar: $(a + b)^7$

Solución:

$\Rightarrow \qquad (a+b)^7 = a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7$

$\Rightarrow$ De la octava	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
fila del triángulo	1	7	21	35	35	21	7	1

$\therefore \boxed{(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7}$

También:

Coef. de $(1-x)^{-1}$

Coef. de $(1-x)^{-2}$

Coef. de $(1-x)^{-3}$

Coef. de $(1-x)^{-4}$

Coef. de $(1-x)^{-5}$

Coef. de $(1-x)^{-6}$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}
$$

Ejemplo:

Desarrollar: $(1-x)^{-3} \qquad 0 < |x| < 1$

Solución:

$\Rightarrow \qquad (1-x)^{-3} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots$

$\Rightarrow$ De la 3ª diagonal	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
del triángulo	1	3	6	10	15	21	28

$\therefore \boxed{(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + \ldots \infty}$

Ejemplo:

Desarrollar: $\left(1+\dfrac{x^7}{2}\right)^{-2}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-2} = 1-\frac{x^7}{2}+\left(\frac{x^7}{2}\right)^2-\left(\frac{x^7}{2}\right)^3+\left(\frac{x^7}{2}\right)^4-\ldots$$

$\Rightarrow$ De la 2ª diagonal: 1 2 3 4 5

$$\therefore \boxed{\left(1+\frac{x^7}{2}\right)^{-2} = 1-x^7+\frac{3}{4}x^{14}-\frac{x^{21}}{2}+\frac{5}{16}x^{28}\ldots\infty}$$

10.2.7 Suma de Coeficientes de $(x+y)^n$

En: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$; $x, y \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \Sigma \operatorname{coef}(x+y)^n = 2^n$; luego de hacer: $x = y = 1$

$\Rightarrow \Sigma \operatorname{coef}(x-y)^n = 0$; luego de hacer: $x = 1, y = 1$

10.2.8 Suma de Exponentes del desarrollo de $\left(x^\alpha + y^\beta\right)^n$

$$\boxed{\Sigma \operatorname{Exp} = (\alpha+\beta)\frac{n(n+1)}{2} \ ; \ n \in \mathbb{N}}$$

10.2.9 Coeficiente de Máximo Valor Absoluto de $(x+y)^n$

Si: $(x+y)^{2n} \Rightarrow$ Coef. máximo $= \binom{2n}{n}$.

Corresponde al término central único.

Si: $(x+y)^{2n+1} \Rightarrow$ Coef. máximos $\binom{2n+1}{n}$ y $\binom{2n+1}{n+1}$

Corresponden a los términos centrales.

10.2.10 Término de Máximo Valor Absoluto de $(x+y)^m$

Si el término "T_{k+1}" es el de máximo valor absoluto.

$$\Rightarrow T_k < T_{k+1} > T_{k+2}$$

10.3. EXPANSION DEL BINOMIO DE NEWTON DE EXPONENTE NO NATURAL

Corolario:

Sea: $(a+x)^n$, con: $a = 1 \wedge n \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x)^n = \sum_{K=0}^{1} \binom{n}{k} x^{n-k} \ ; \ 0 < |x| < 1}$$

El binomio de exponente no natural posee en su expansión infinitos términos. Dicho desarrollo deberá cumplir la condición de convergencia, de modo que el mismo tenga sentido.

Corolario:

Sea: $(1 + x)^n$ con $n \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$

El término general del desarrollo será:

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{n}{k} x^n \; ; \; 0 \le k < \infty \; ; \; 0 < |x| < 1$$

10.3.1 **Condición de Convergencia**

Sea: $(a + x)^n$ con $n \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$

$\Rightarrow (a + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$ converge a cero.

Si: $a = 1 \wedge 0 < |x| < 1$

Es importante señalar que el teorema del binomio de Newton se mantiene inalterable no habiendo ninguna modificación esencial en la concepción del desarrollo de binomio con exponente no natural.

Todo binomio a exponente no natural puede cumplir las condiciones de convergencia.

Ejemplo: $(36 + 11)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \left[36\left(1 + \frac{11}{36} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = 6\left(1 + \frac{11}{36} \right)^{\frac{1}{2}}$$

10.4 POTENCIACION DE POLINOMIOS

El Teorema de Leibnitz

Si: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$\boxed{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m)^n \equiv \sum \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} . x_3^{\alpha_3} \ldots x_m^{\alpha_m}}$$

Tales que: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_m = n$

Donde: $\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m}$ Es el coeficiente polinomial.

Ejemplo:

Desarrollar: $(a + b + c)^3$

Solución:

(1°) De acuerdo al Teorema:

$$(a+b+c)^3 = \Sigma \binom{3}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$$

(2°) Considerando todas las ternas n_1, n_2, n_3 ; tales que $n_1 + n_2 + n_3 = 3$

$$= \binom{3}{3,0,0} a^3b^0c^0 + \binom{3}{2,1,0} a^2b^1c^0 + \binom{3}{2,0,1} a^2b^0c^1 + \binom{3}{1,1,1} a^1b^1c^1 + \binom{3}{0,3,0} a^0b^3c^0$$

$$+ \binom{3}{0,2,1} a^0b^2c^1 + \binom{3}{1,2,0} a^1b^2c^0 + \binom{3}{0,0,3} a^0b^0c^3 + \binom{3}{1,0,2} a^1b^0c^2 + \binom{3}{0,1,2} a^0b^1c^2$$

(3°) Desarrollando cada coeficiente polinomial:

$$\binom{3}{3,0,0} = \frac{3!}{3!\,0!\,0!} = 1 \quad ; \quad \binom{3}{2,1,0} = \frac{3!}{2! \times 1! \times 0!} = 3 \; ; \; \binom{3}{2,0,1} = \frac{3!}{2! \times 0! \times 1!} = 3$$

$$\binom{3}{1,1,1} = \frac{3!}{1! \times 1! \times 1!} = 6 \quad ; \quad \binom{3}{0,3,0} = \frac{3!}{0! \times 3! \times 0!} = 1 \; ; \; \binom{3}{0,2,1} = \frac{3!}{0! \times 2! \times 1!} = 3$$

$$\binom{3}{1,2,0} = \frac{3!}{1! \times 2! \times 0!} = 3 \quad ; \quad \binom{3}{0,0,3} = \frac{3!}{0! \times 0! \times 3!} = 1 \; ; \; \binom{3}{1,0,2} = \frac{3!}{1! \times 0! \times 2!} = 3$$

$$\binom{3}{0,1,2} = \frac{3!}{0! \times 1! \times 2!} = 3$$

(4°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 6abc + b^3 + 3b^2c + 3ab^2 + c^3 + 3ac^2 + 3bc^2 \text{ ; 10 términos}}$$

10.4.1 Corolario: Número de términos resultantes de la potenciación de un polinomio

Sea: $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m)^n$

$\Rightarrow \boxed{\#\text{ términos } = CR^m_n}$

m : # de elementos del polinomio base.
n : Exponente de la potencia.

Que se entiende como las combinaciones con repetición de "m" elementos en grupos de "n".

10.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

10.5.1 Ejercicio Explicativo

Obtener el n° de términos del desarrollo de $(a+b+c)^3$

Solución:

(1°) De acuerdo al corolario:

m = 3: términos del polinomio base.

n = 3: exponente de la potencia.

(2°) Sustituyendo en la conocida fórmula.

$$\Rightarrow \ \# \text{ términos} = CR_3^3$$

$$\Rightarrow \qquad = C_3^{3+3-1}$$

$$= C_3^5$$

$$= C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2!} = 0$$

$$\therefore \ \boxed{\# \text{términos} = 10}$$

10.5.2 Ejercicio Explicativo

Determinar "x" en el desarrollo del siguiente binomio:

$$\left(\frac{\sqrt{2^{x-1}}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt[\sqrt{2}]{2^{x+1}}}}{\sqrt[-3]{32}} \right)^n, \ n \in \mathbb{N}$$

de modo que se cumpla lo siguiente:

La diferencia entre nueve veces **el tercer** término y el quinto término del desarrollo es - 2760.

La diferencia entre el logaritmo del triple del coeficiente binomial del cuarto término y el logaritmo del coeficiente binomial del segundo término es la unidad.

Recuerde:

El término de lugar k del desarrollo del binomio $(a + b)^n$ será:

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} \quad v$$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

$$\Rightarrow \begin{cases} 9T_3 - T_5 = -2760 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \log\left[3\binom{n}{3} \right] - \log\binom{n}{1} = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(2°) Resolviendo el sistema; de (2):

$$\Rightarrow \log\left[\frac{3\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} \right] = 1 \ ; \ n > 1$$

$$\Rightarrow \frac{3\binom{n}{3}}{n} = 10 \ ; \ \frac{3}{n} \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \ ; \ \boxed{n = 6} \ ; \ \cancel{n = -3} \ ; \ n > 1$$

(3°) El binomio en estudio será: $\left(2^{\frac{3x-5}{6}} + 2^{\frac{3x+10}{6}} \right)^6$, pues n = 6

$$\Rightarrow \text{de (1)}: \ 9\binom{6}{2}\left[2^{\frac{3x-5}{6}}\right]^4\left[2^{\frac{3x+10}{6}}\right]^2 - \binom{6}{4}\left[2^{\frac{3x-5}{6}}\right]^2\left[2^{\frac{3x+10}{6}}\right]^4 = -2760$$

(4°) Simplificando:

$$\Rightarrow \binom{6}{2}\left[9 \times 2^{\frac{9x}{3}} - 2^{\frac{9x+15}{3}}\right] = -2760 \ ; \ \boxed{\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15}$$

$$\Rightarrow 9 \times 2^{3x} - 2^{3x+5} = -184$$

$$\Rightarrow 9(2^{3x}) - 2^{3x}(32) = -184$$

$$\Rightarrow 2^{3x}(9 - 32) = -184$$

$$\Rightarrow 2^{3X}(-23) = -184 \ ; \ 2^{3x} = 8 \ ; \ 2^{3x} = 2^3 \ ; \ 3x = 3$$

$$\therefore \boxed{x = 1}$$

10.5.3 Ejercicio Explicativo

Un término del desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^7}{x^{10}} \right)^{33}$$

tiene por grado - 59.

Hallar los grados relativos de dicho término.

Solución:

(1°) Obtengamos el término general del desarrollo:

$$T_{k+1} = \binom{33}{k}\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^{33-k}\left(\frac{y^7}{x^{10}}\right)^k \quad ; \ 0 \le k \le 33$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{33}{k} x^{132-4k} \,.\, x^{-10k} y^{7k} y^{3k-99} \quad ; \ 0 \le k \le 33$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{33}{k} x^{132-14k} y^{10k-99} \quad ; \ 0 \le k \le 33$$

(2°) En relación a los grados:

$\Rightarrow$ Grado = 132 - 14k + 10k - 99 = - 59 .... (1)

$\Rightarrow$ (Gx = 132 - 14k ; Gy = 10k - 99) .... (2)

(3°) Resolviendo (1): 33 - 4k = -59

$$92 = 4k \qquad \therefore \; k = 23$$

En (2): Gx = 132 - (14) (23) ; Gy = (10) (23) - 99

$\therefore$ $\boxed{Gx = -190 \; ; \; Gy = 131}$

10.5.4 Ejercicio Explicativo

En la expansión del binomio:

$$\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{6} + x^{-\frac{28}{15}} \right)^{n} \quad ; \; x \in \mathbb{R} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

La suma de los coeficientes binomiales de los 3 últimos términos es 79.

Obtener el término independiente.

Recuerde:

Un término es independiente si el grado correspondiente es igual a cero.

Solución:

(1°) La regla de conformación de los coeficientes de los 3 últimos términos será:

$$\binom{n}{2} \; ; \; \binom{n}{1} \text{ y } \binom{n}{0} \quad ; \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 79$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 79$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \; ; \; n = 12 \; ; \; n = -13 \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{6} + x^{-\frac{28}{15}} \right)^{12}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{12}{k} \left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{6} \right)^{12-k} \left(x^{-\frac{28}{15}} \right)^{k}$$

(2°) Por ser un término Independiente: $\frac{4}{3}(12-k) - \frac{28k}{15} = 0$

$\Rightarrow$ Resolviendo: 20 (12 - k) - 28k = 0 , k = 5

$$\Rightarrow T_6 = \binom{12}{5}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{6}\right)^7\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^5$$

$$\therefore \boxed{T_6 = 6^{-7}\binom{12}{5}}$$

10.5.5 **Ejercicio Explicativo**

En el desarrollo del siguiente binomio:

$$(a^{\alpha} + b^{11})^{\gamma} ;\ a, b \in \mathbb{R}$$

El término central tiene por parte variable a: $a^{75}\, b^{165}$; calcular "α" y "γ".

Comentario

El enunciado nos indica implícitamente que el exponente del binomio es par.

Solución:

(1°) Por tener un único término central:

$$\Rightarrow T_c = \binom{\gamma}{\frac{\gamma}{2}} (a^{\alpha})^{\frac{\gamma}{2}} (b^{11})^{\frac{\gamma}{2}} \quad ;\ a , b, \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T_c = \binom{\gamma}{\frac{\gamma}{2}} a^{\frac{\alpha\gamma}{2}}\, b^{\frac{11\gamma}{2}} = \text{Coef. } a^{75}\, b^{165} \quad ;\ a , b \in \mathbb{R}$$

(2°) De esta identidad se obtiene:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\gamma}{2} = 75 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) & ;\ \text{de igualar exponentes de "a".} \\ \dfrac{11\gamma}{2} = 165 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) & ;\ \text{de igualar exponentes de "b".} \end{cases}$$

(3°) Resolviendo el sistema; de (2):

$11\gamma = 2 \times 165 \qquad \therefore\ \gamma = 30$

$\Rightarrow$ En (1): $\dfrac{\alpha(30)}{2} = 75 \therefore\ \alpha = 5$

$$\therefore \boxed{\alpha = 5 ; \gamma = 30}$$

10.5.6 **Ejercicio Explicativo**

En el desarrollo del binomio: $(x^a + y^b)^m$; $x, y \in \mathbb{R}$

El término décimo es $220x^{33}\, y^{126}$.

Calcular: "a" ; "b" y "m".

Recuerde:

Sea $(x+y)^m$; $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

Solución:

(1°) Expresando el término de ubicación 10 de acuerdo al teorema del término general:

$$\Rightarrow T_{10} = \binom{m}{9}\left(x^a\right)^{m-9}\left(y^b\right)^9 \; ; \; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow T_{10} = \binom{m}{9} x^{a(m-9)} y^{9b} = 220x^{33} y^{126} \; ; \; x, y \in \mathbb{R}$$

(2°) Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \binom{m}{9} = 220 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ a(m-9) = 33 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 9b = 126 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(3°) Resolviendo el sistema:

De (3): $b = \dfrac{126}{9}$; $\boxed{b = 14}$

De (1): $\binom{m}{9} = 220$, por selección: $\boxed{m = 12}$

De (2): $a(12-9) = 33$ $\boxed{a = 11}$

$\therefore \boxed{a = 11 \,;\, b = 14 \,;\, m = 12}$

10.5.7 Ejercicio Explicativo

En el desarrollo del binomio: $\left(x^\beta + y^\gamma\right)^m$; $x, y \in \mathbb{R}$

El primer término central es $126x^{250} y^{116}$

Calcular "β", "γ" y "m".

Comentario:

Este ejemplo trata de resaltar que el exponente del binomio es impar.

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado y por ser "m" impar.

$$\Rightarrow T_c = \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \left(x^\beta\right)^{\frac{m+1}{2}} \left(y^\gamma\right)^{\frac{m-1}{2}}$$, es el 1er. término central

$$\Rightarrow T_c = \binom{m}{\frac{m-1}{2}} x^{\beta\left(\frac{m+1}{2}\right)} y^{\gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = 126x^{50}\,y^{116} \ ; \ x, y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \binom{m}{\frac{m-1}{2}} = 126 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \beta\ \dfrac{m+1}{2} = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \gamma\ \dfrac{m-1}{2} = 115 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

(2°) Resolviendo el sistema:

$\Rightarrow$ de (1): $\binom{m}{\frac{m-1}{2}} = 126$; por selección: $\boxed{m = 9}$

$\Rightarrow$ de (2): $\beta\ \dfrac{9+1}{2} = 25 \qquad \therefore \boxed{\beta = 5}$

$\Rightarrow$ de (3): $\gamma\ \dfrac{9-1}{2} = 116 \qquad \therefore \boxed{\gamma = 29}$

$\therefore \boxed{m = 9 \ ; \ b = 5 \ ; \ g = 29}$

10.5.8 Ejercicio Explicativo

En el binomio: $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$; $m, x \in \mathbb{Z}^+$

Al ser expandido se sabe que:

El 4° término es 20 veces mayor que el exponente del binomio; que el coeficiente del mismo término es cinco veces mayor que el correspondiente al del segundo término en el mismo desarrollo.

Determinar el valor de "m" y "x".

Solución:

(1°) De acuerdo a las condiciones establecidas:

Sea T_4 el cuarto término

Sea T_2 el segundo término

$\Rightarrow T_4 = 20\,m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\Rightarrow$ Coef. del T_4 = 5 Coef. del $T_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\Rightarrow$ Se puede tener del mismo binomio que:

$$T_4 = \binom{m}{3}\left[2^{\frac{x-1}{2}}\right]^{m-3}\left[2^{-\frac{x}{3}}\right]^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{Coef. de } T_2 = \binom{m}{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(2°) Resolviendo las ecuaciones

$$\Rightarrow \text{de (2):} \quad \underbrace{\binom{m}{3}}_{\text{Coef. de } T_4} = 5\underbrace{\binom{m}{1}}_{\text{Coef. de } T_2} \quad ; \text{ es una ecuación trascendente}$$

$$\Rightarrow \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} = 5 \times \frac{m}{1!}$$

$\Rightarrow (m-1)(m-2) = 30 \quad ; m = 0$; luego de simplificar m.

$\Rightarrow m^2 - 3m - 28 = 0 ; m = 0$

$\Rightarrow (m-7)(m+4) = 0 \quad ; m = 0$

$\Rightarrow m = 7 ; m = -4 ; m = 0 \qquad \therefore$ $m = 7$ pues $m \in \mathbb{Z}^+$

(3°) De (1) y (3): $\binom{7}{3}\left[2^{\frac{x-1}{2}}\right]^4\left[2^{-\frac{x}{3}}\right]^3 = 20 \times 7$; con $m = 7$

$\Rightarrow \cancel{35} \cdot 2^{2x-2} \cdot 2^{-x} = \cancel{20} \cdot 7$; pues $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$

$\Rightarrow 2^{x-2} = 2^2 \;;\; x - 2 = 2 \;;\; x = 4$

$\therefore \boxed{m = 7 \text{ y } x = 4}$

10.5.9 Ejercicio Explicativo

Tres términos de la expansión del binomio: $(a+b)^m$; $a, b \in \mathbb{R}$

Verifican la igualdad siguiente:

$$T_8 + T_6 = \frac{6}{7}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)T_7$$

Determinar "m".

Recuerde:

Si $(a+b)^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

Solución:

(1°) De la igualdad proporcionada se puede tener:

$$\Rightarrow \frac{T_8}{T_7} + \frac{T_6}{T_7} = \frac{6}{7}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad ; \; a, b, \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{T_8}{T_7} = \frac{\binom{m}{7} a^{m-7} b^7}{\binom{m}{6} a^{m-6} b^6} = \frac{\left(\frac{m-6}{7}\right)\binom{m}{6}}{\binom{m}{6}} \frac{b}{a} = \frac{m-6}{7} \times \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{T_6}{T_7} = \frac{\binom{m}{5} a^{m-5} b^5}{\binom{m}{6} a^{m-6} b^6} = \frac{\binom{m}{5}}{\left(\frac{m-5}{6}\right)\binom{m}{5}} \times \frac{a}{b} = \frac{6}{m-5} \times \frac{a}{b}$$

(2°) En ambos casos se usó: $\binom{x}{y} = \frac{x-y-1}{y}\binom{x}{y-1}$

$$\Rightarrow \text{En (1): } \left(\frac{6}{m-5}\right)\frac{a}{b} + \left(\frac{m-6}{7}\right)\frac{b}{a} = \frac{6}{7}\frac{a}{b} + \frac{6}{7}\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{m-5} = \frac{6}{7} \; ; \; \frac{m-6}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\Rightarrow 7 = m-5 \; ; \; m-6 = 6$$

$$\therefore \boxed{m = 12}$$

10.5.10 Ejercicio Explicativo

El siguiente binomio:

$$\left(\frac{x^{n-10}}{a^{n+3}} + \frac{a^{2n-3}}{x^{4n-61}}\right)^{n+9} \quad ; \; x, a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

posee 16 términos, se pide determinar:

(a) El término 10 del desarrollo.

(b) El término general.

Solución:

(1°) Dato: $(n+9)+1 = 16$ (n° de términos)

$\Rightarrow n = 6$

$\Rightarrow$ El binomio en estudio será ordenado como:

$\Rightarrow \left(x^{-4} a^{-9} + a^9 x^{-37}\right)^{15}$; luego de sustituir (n = 6)

(2°) Obtenemos el décimo término

$\Rightarrow T_{10} = \binom{15}{9}\left[x^{-4} a^{-9}\right]^{15-9}\left[a^9 x^{-37}\right]^9$; para el décimo término

$$\therefore \boxed{T_{10} = 5\,005 \frac{a^{27}}{x^{357}}}$$

(3°) Obtenemos el término general

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{15}{k}\left[x^{-4}a^{-9}\right]^{15-k}\left[a^{9}x^{-37}\right]^{k} \text{ ; para el término general}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{15}{k} x^{-60+4k}\, a^{-135+9k}\, a^{9k}\, x^{37k}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{15}{k} x^{41k-60}\, a^{18k-135} \ ;\ 0 \le k \le 15$$

$$\therefore \boxed{T_{k+1} = \binom{15}{k} x^{41k-60}\, a^{18k-135} \ ;\ 0 \le k \le 15}$$

10.5.11 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar la expresión:

$$\left(\frac{a+1}{a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}} + a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}} + 1} - \frac{b^{\frac{2}{7}} - 1}{b^{\frac{2}{7}} - b^{\frac{1}{7}}}\right)^{60}$$

$$a \in \mathbb{R} - \{0 ; 1\} \ ;\ b \in \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$$

y determinar el término del desarrollo en el cual el valor absoluto o positivo de sus grados relativos son iguales.

Indicar dicho lugar y los grados relativos.

Comentario:

Este caso involucra los cocientes notables, la fórmula del término general del B.N. y los grados relativos de las variables "a" y "b" en un término especifico.

Solución:

(1°) Procediendo a la simplificación, para ello anotamos:

$$\Rightarrow \frac{a+1}{\dfrac{\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{5} + 1}{a^{\frac{1}{5}} + 1}} \text{ ; pues } \underbrace{a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{3}{5}} + a^{\frac{2}{5}} - a^{\frac{1}{5}} + 1}_{\text{es un cociente notable}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{5} + 1}{a^{\frac{1}{5}} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+1)\left(a^{\frac{1}{5}} + 1\right)}{(a+1)} = a^{\frac{1}{5}} + 1 = \sqrt[5]{a} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{b^{\frac{2}{7}}-1}{b^{\frac{2}{7}}-b^{\frac{1}{7}}} = \frac{\left(b^{\frac{1}{7}}+1\right)\cancel{\left(b^{\frac{1}{7}}-1\right)}}{b^{\frac{1}{7}}\cancel{\left(b^{\frac{1}{7}}-1\right)}}$$; pues: $b^{\frac{2}{7}}$ - 1 es una diferencia de cuadrados:

$$b^{\frac{2}{7}}-1 = \left(b^{\frac{1}{7}}+1\right)\left(b^{\frac{1}{7}}-1\right)$$

(2°) El binomio será:

$$\Rightarrow \left(\sqrt[5]{a}+1-\frac{b^{\frac{1}{7}}+1}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{60} ;$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[5]{a}+1-\frac{1}{b^{\frac{1}{7}}}\right)^{60}$$; pues $\frac{b^{\frac{1}{7}}+1}{b^{\frac{1}{7}}} = \frac{b^{\frac{1}{7}}}{b^{\frac{1}{7}}}+\frac{1}{b^{\frac{1}{7}}}$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[5]{a}-\frac{1}{\sqrt[7]{b}}\right)^{60}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{60}{k}\left(\sqrt[5]{a}\right)^{60-k}\left(-\sqrt[7]{b}^{\,-1}\right)^{k} \;;\; a, b \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

(3°) De igualar exponentes $\frac{60-k}{5} = +\frac{k}{7}$; 420 - 7k = 5k

$\Rightarrow$ 420 = 12k $\quad\quad \therefore$ k = 35 , lugar 36

$\therefore$ $\boxed{\text{lugar 36 ; } G_a = 5 \text{ ; } G_b = -5}$

10.5.12 **Problema Explicativo**

Hallar el lugar en el que se ubica el término del desarrollo del binomio:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\right)^{210} \;;\; a ; b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

que contiene a "a" y "b" elevados al mismo exponente.

Recuerde:

Si: $(a+b)^n$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \;;\; 0 \le k \le n$$

Solución:

(1°) Obteniendo el término general:

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{210}{k}\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4}}\right)^{210-k}\left(b^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{4}}\right)^{k} \;;\; 0 \le k \le 210$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{210}{k} a^{\frac{210-k}{2}} a^{-\frac{k}{4}} b^{-\frac{210-k}{4}} b^{\frac{k}{2}}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{210}{k} a^{\frac{420-3k}{4}} b^{\frac{3k-210}{4}} \; ; \; 0 \le k \le 210$$

(2°) Por condición, los exponentes son iguales.

$$\Rightarrow \frac{420-3k}{4} = \frac{3k-210}{4} \; ; \; 0 \le k \le 210$$

$\Rightarrow$ Resolviendo la ecuación:

$\Rightarrow 420 - 3k = 3k - 210$

$\Rightarrow 630 = 6k \qquad \therefore \; k = 105$

(3°) Este último resultado garantiza la igualdad de exponentes y establece que dicha propiedad se verifica en el lugar: $k + 1 = 106$

$\therefore$ **Rpta:** lugar 106

10.5.13 **Ejercicio Explicativo**

En la expansión del binomio:

$$\left(a^5 + \frac{1}{a^4} \right)^m \; ; \; a \in \mathbb{R} - \{0\} \; ; \; m \in \mathbb{N}$$

Existen 10 términos racionales enteros, hallar el valor de "m".

Recuerde:

Si: $(x + y)^m$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \; ; \; 0 \le k \le m$$

Solución:

(1°) Obteniendo el término general para su estudio

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} \left(a^5 \right)^{m-k} \left(a^{-4} \right)^k$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{5m-5k} a^{-4k}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{5m-9k} \; ; \; m \in \mathbb{N} \; \text{..........} \; (1)$$

(2°) La expresión de (1) establece que los términos disminuyen de 9 en 9 respecto al exponente de "a".

(3°) En el décimo término del exponente deberá verificar:

$0 \le 5m - 9k < 9 \; ; \; k + 1 = 10 \; ; \; k = 9$

Aislando "m"

$\Rightarrow\ 0 \le 5m - 81 < 9$

$\Rightarrow\ 81 \le 5m < 90$

$\Rightarrow\ 16\ 1/5 \le m < 18$

$\therefore\ \boxed{m = 17}$

Comentario:

Si tenemos: $\left(a^5 + \dfrac{1}{a^4}\right)^{17}$, el desarrollo tendrá por parte variable:

$$\underbrace{a^{85}\,;\ a^{76}\,;\ a^{67}\,;\ a^{58}\,;\ a^{49}\,;\ a^{40}\,;\ a^{31}\,;\ a^{22}\,;\ a^{13}\,;\ a^{4}}_{\text{10 términos enteros}}\,;\ a^{-5}\,;\ a^{-14}\,;\ a^{-23}$$

10.5.14 Ejercicio Explicativo

Hallar el término central de la expansión del binomio:

$$\left(a^{-2}\sqrt[2]{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m \quad ;\ a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}\ ;\ m \in \mathbb{N}$$

Sabiendo que el coeficiente de quinto término y el correspondiente al del tercero están en la razón de 14 a 3.

Recuerde:

Sea: $(x - b)^m$

$\Rightarrow\ T_{k+1} = \binom{m}{k} x^{m-k} (-b)^k\ ;\ 0 \le k \le m$

Solución:

(1°) Por datos declarados:

Coef. del $T_5 = \binom{m}{4}$

Coef. del $T_3 = \binom{m}{2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\binom{m}{4}}{\binom{m}{2}} = \dfrac{14}{3}$; se tiene una ecuación no algebraica.

(2°) Resolviendo la ecuación:

$\Rightarrow\ \dfrac{(m-2)(m-3)}{12} = \dfrac{14}{3}$; pues $\dfrac{\binom{m}{4}}{\binom{m}{2}} = \dfrac{\dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}}{\dfrac{m(m-1)}{2}}$

$\Rightarrow (m-2)(m-3) = 56$

$\Rightarrow m^2 - 5m - 50 = 0$

$$\begin{array}{lcr} m & \diagdown\!\!\!\diagup & -10 \\ m & & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow m = 10\,;\, m = -5 \qquad \therefore\ m = 10\ ;\ m \in \mathbb{N}$

(3°) El binomio será: $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} \right)^{10}$; pues $a\,a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{\dfrac{a^{-2}}{\sqrt{a}}} = a^{-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}} = a^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow T_{central} = \binom{10}{5} \left(a^{\frac{1}{2}} \right)^5 \left(-a^{-\frac{1}{2}} \right)^5$$

$$\Rightarrow T_{central} = \binom{10}{5} a^{\frac{5}{2}} \left(-a^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$\therefore\ \boxed{T_{central} = -252}$$

10.5.15 Ejercicio Explicativo

Las expansiones de los binomios:

$$A = \left(\frac{x}{y} + y^4 \right)^{50} \quad ;\ x \in \mathbb{R}\ ;\ y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$B = \left(x^5 + y\,\sqrt[13]{y^{-12}} \right)^{20} \quad ;\ x, y \in \mathbb{R}$$

Poseen un término común.

Determinar la ubicación de los mismos.

Recuerde:

Si: $(a+b)^m$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \ ;\ 0 \le k \le m$$

Solución:

(1°) Sean m + 1 y n + 1 las ubicaciones de los términos comunes de A y B respectivamente.

$\Rightarrow$ Parte variable del T_{m+1} = Parte variable de T_{n+1}

$$\Rightarrow T_{m+1} = \binom{50}{m} \left(xy^{-1} \right)^{50-m} \left(y^4 \right)^m = \binom{50}{m} x^{50-m}\, y^{5m-50}$$

$$\Rightarrow T_{n+1} = \binom{20}{n} \left(x^5 \right)^{20-n} \left(y^{\frac{25}{13}} \right)^n = \binom{20}{n} x^{100-5n}\, y^{\frac{25}{13}n}$$

(2°) Se pueden tener las siguientes relaciones:

$$\Rightarrow \begin{cases} 50 - m = 100 - 5n \ldots\ldots (1) \\ 5m - 50 = \dfrac{25}{13}n \ldots\ldots (2) \end{cases}$$; luego de igualar exponentes.

(3°) Resolviendo el sistema:

de (1) : $m = 5n - 50$ .... (3)

$\Rightarrow$ En (2) : $5(5n - 50) - 50 = \dfrac{25}{13}n$;

$\Rightarrow$ $25n - 300 = \dfrac{25}{13}n$; $13(25n) - 3\,900 = 25n$ $\therefore$ $\boxed{n = 13}$

$\Rightarrow$ En (3) : $m = 5(13) - 50$ $\therefore$ $\boxed{m = 15}$

$\therefore$ **Las ubicaciones son: 16 y 14 respectivamente.**

10.5.16 Ejercicio Explicativo

En el binomio: $\left[\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right]^m$; $m > 0$

La suma de los términos tercero y quinto es 135; la suma de los coeficientes binómicos de los tres últimos términos es 22. Hallar el valor de "x".

Recuerde:

El término general del desarrollo del binomio: $(a + b)^n$ viene dado por:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ ; \ 0 \leq k \leq n$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

$$\begin{cases} T_3 + T_5 = 135 \ldots\ldots (1) \\ \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = 22 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(2°) Resolviendo el sistema:

De (2): Por tener una sola incógnita.

$\Rightarrow 1 + m + \dfrac{m(m-1)}{2} = 22$

$\Rightarrow 2 + 2m + m^2 - m = 44$

$\Rightarrow m^2 + m - 42 = 0$

$\Rightarrow (m + 7)(m - 6) = 0$

$\Rightarrow m = -7 ; m = 6 ; m > 0$

(3°) Sustituyendo el valor m = 6 ; de (1) :

$$\Rightarrow \binom{m}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^{m-2}\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2+\binom{m}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^{m-4}\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4 = 135 \ldots\ldots (1)$$

$$\Rightarrow \binom{6}{2}\left(\sqrt{2^x}\right)^4\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2+\binom{6}{4}\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4 = 135$$

$$\Rightarrow \cancel{15}\left(2^{2x}\right)\left(2^{1-x}\right)+\cancel{15}\left(2^x\right)\left(2^{2-2x}\right) = \cancel{135}$$

$$\Rightarrow 2^{x+1}+2^{2-x} = 9$$

$$\Rightarrow 2\left(2^x\right)+\frac{4}{\left(2^x\right)} = 9$$

$$\Rightarrow 2\left(2^x\right)-9\left(2^x\right)+4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2\left(2^{2x}\right)-1\right)\left(2^x-4\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{-1}\ ,\ 2^x = 2^2$$

$$\therefore \boxed{x = -1 \text{ ó } x = 2}$$

10.5.17 Ejercicio Explicativo

El noveno término del desarrollo del binomio:

$$\left[-\frac{\sqrt{10}}{x^{4\log x}}-x^2\right]^{10} \quad \text{es } 450$$

Hallar "x".

Comentario:

Este caso nos permite hacer el tratamiento de la teoría del binomio de Newton y el correspondiente al logaritmo.

Solución:

(1°) Dato: $T_9 = 450$ .... (1)

$\Rightarrow$ Para usar dicho dato, utilizamos la fórmula del término general.

$$\Rightarrow T_9 = \binom{10}{8}\left(\frac{-\sqrt{10}}{x^{4\log x}}\right)^2\left(-x^2\right)^8 = 450$$

(2°) Simplificando:

$$\Rightarrow \cancel{45}\times\frac{\cancel{10}}{x^{8\log x}}\cdot x^{16} = \cancel{450}$$

$$\Rightarrow x^{16-8\log x} = 1 = x^0$$

(3°) De igualar exponentes.

$$\Rightarrow 16-8\log x = 0$$

$$\Rightarrow 16 = 8\log x\ ;\ \log x = 2\ ;\ x = 10^2$$

$$\therefore \boxed{S = \{100\}}$$

10.5.18 **Ejercicio Explicativo**

Hallar la condición para el cual la expansión del binomio:

$$\left[1+\frac{5x-1}{199}\right]^{\frac{1}{3}} \quad ; \ x \in \mathbb{R}_0^+$$

Resulta ser una serie convergente.

Recuerde:

Si: $(a+b)^m$; $m \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$

$$\Rightarrow (a+b)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

Mediante la condición de convergencia: $a = 1$; $0 < |b| < 1$

Solución:

(1°) Para que la serie binomial sea convergente, la parte variable deberá cumplir la condición de convergencia:

$$0 < \frac{5x-1}{199} < 1 \quad ; \ x \in \mathbb{R}_0^+$$

(2°) Resolviendo la limitación.

$\Rightarrow 0 < 5x - 1 < 199$; luego de multiplicar por 199

$\Rightarrow 1 < 5x < 200$; luego de sumar +1

$\Rightarrow \frac{1}{5} < x < \frac{200}{5}$; luego de dividir entre 5

$\Rightarrow \frac{1}{5} < x < 40$

$\therefore \boxed{x \in \left\langle \frac{1}{5} ; 40 \right\rangle}$

Para todos y cada uno de los valores de este intervalo; el desarrollo del binomio será convergente.

10.5.19 **Ejercicio Explicativo**

El binomio siguiente de términos positivos:

$$\left(\frac{m-1}{2m-15}+\frac{3x-10}{2x-11}\right)^{\frac{1}{5}} \quad ; \ x \in \mathbb{R} \ ; \ m \in \mathbb{N}$$

Tiene todas las condiciones de modo que su expansión infinita será convergente.

Calcular "m" y delimitar "x".

Recuerde:

$(a+x)^n$ con $n \in \mathbb{R} - \{\mathbb{N}\}$ es convergente

Si: $a = 1$, $0 < |x| < 1$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado, según condiciones:

Sea: $(y+x)^m$; $y = 1$, $0 < x < 1$

$\Rightarrow$ La serie binomial será convergente.

(2°) Por lo expuesto: $\dfrac{m-1}{2m-15} = 1$ ..... (A) ; $0 < \dfrac{3x-10}{2x-11} < 1$ ...... (B)

(3°) $\Rightarrow$ Resolviendo (A) : $m - 1 = 2m - 15$ $\quad\therefore \boxed{m = 14}$

$\Rightarrow$ Resolviendo (B) : $0 \leq \dfrac{3x-10}{2x-11} < 1$

$\Rightarrow$ Descomponiendo : $0 \leq \dfrac{3}{2} + \dfrac{13}{2(2x-11)} < 1$

$\Rightarrow$ Sumando $-\dfrac{3}{2}$: $-\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{13}{2(2x-11)} < -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Al reciprocar : $-\dfrac{13}{3} \geq 2x - 11 > -13$

$\Rightarrow$ Sumando 11 : $\dfrac{20}{3} \geq 2x > -2$

$\Rightarrow$ Dividiendo entre 2 : $\dfrac{10}{3} \geq x > -1$

$\therefore \boxed{m = 14 \ ; \ x \in \left< -1; \dfrac{10}{3} \right>}$

10.5.20 Ejercicio Explicativo

Hallar el número de términos del desarrollo del siguiente binomio homogeneo.

$$\left(\sqrt[n^{700-n^2}]{x^{n^2-720}} + \sqrt[n^{-16n-20}]{y^{16n}} \right)^n \quad ; \ n \in \mathbb{N}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado.

$\Rightarrow \dfrac{n^2-720}{n^{700-n^2}} = \dfrac{16n}{n^{-16n-20}}$ .... (1)

(2°) Resolviendo la ecuación **no algebraica**

$\Rightarrow (n^2 - 720)\, n^{-700+n^2} = (16n)\, n^{16n+20}$

(3°) Buscando simetría: multiplicando por n^{-20}

$\Rightarrow (n^2 - 720)\, n^{n^2-720} = (16n)\, n^{16n}$; $\exists$ simetría

$\Rightarrow n^2 - 720 = 16n$; $(n^2 - 720)\, n^{n^2-720} = (16n)\, n^{16n}$

$\Rightarrow n^2 - 16n - 720 = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (n - 36)(n + 20) = 0 \quad ; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = 36 ; n = -20 \quad ; n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $\boxed{\text{n° de términos} = 37}$

10.5.21 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el valor de "m", a partir del siguiente binomio:

$$\left[\frac{x^5}{y^3} + \frac{y}{x} \right]^m$$

sabiendo que el producto de uno de los términos de su desarrollo y el equidistante, es de grado 242.

Recuerde:

Si: $(a + b)^n$; $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ y

Exponentes Permutados

$T'_{k+1} = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ es el equidistante

Solución:

(1°) El binomio se ordenará como: $\left[x^5 y^{-3} + y x^{-1} \right]^m$

$\Rightarrow$ Sea $\quad T_{k+1} = \binom{m}{k} \left(x^5 y^{-3} \right)^{m-k} \left(y x^{-1} \right)^k$ .... (I)

$T'_{k+1} = \binom{m}{k} \left(x^5 y^{-3} \right)^{k} \left(y x^{-1} \right)^{m-k}$ .... (II)

$\Rightarrow T_{k+1} \cdot T'_{k+1} = \binom{m}{k}^2 \left(x^5 y^{-3} \right)^m \left(y x^{-1} \right)^m$

(2°) Por condición, el grado es igual a 242:

$\Rightarrow 2m = 242$

$\therefore$ $\boxed{m = 121}$

10.5.22 **Ejercicio Explicativo**

En el binomio: $\left[\dfrac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}} + a \sqrt[x+1]{a^{x-1}} \right]^8$; $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Determinar "x" para que el cuarto término de la expansión del binomio resulte ser $56a^{5,5}$

Solución:

(1°) Al ordenar el binomio en estudio:

$$\left[a^{\frac{4}{5}-\frac{x-1}{x}} + a^{1+\frac{x-1}{x}} \right]^8 = \left[a^{\frac{5-x}{5x}} + a^{\frac{2x-1}{x}} \right]^8$$

(2°) Por condición el cuarto término deberá ser igual a $56a^{5,5}$

$$\Rightarrow T_4 = \underbrace{\binom{8}{3}\left(a^{\frac{5-x}{5x}} \right)^5 \left(a^{\frac{2x-1}{x}} \right)^3} = 56a^{5,5}$$

(3°) Por ser una identidad:

$$\Rightarrow \cancel{5}\left(\frac{5-x}{\cancel{5}x} \right) + 3\left(\frac{2x-1}{x} \right) = 5,5$$

Resolviendo esta ecuación:

$$\Rightarrow \frac{5-x+6x-3}{x} = \frac{11}{2}$$

$$2(5x+2) = 11x$$

$$10x+4 = 11x$$

$$\therefore \boxed{x = 4}$$

10.5.23 **Ejercicio Explicativo**

En la expresión: $\left[2\sqrt[x]{2^{-1}} + \dfrac{4}{\sqrt[4-x]{4}} \right]^6$

Determinar “x” para que el tercer término del desarrollo del binomio sea igual a 240.

Recuerde:

Si: $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \; ; \; 0 \le k \le n$$

Solución:

(1°) Ordenando el binomio en estudio:

$$\left[2^{1-\frac{1}{x}} + 2^{2-\frac{2}{4-x}} \right]^6 = \left[2^{\frac{x-1}{x}} + 2^{\frac{6-2x}{4-x}} \right]^6$$

(2°) Por condición el tercer término deberá ser igual a 240.

$$\Rightarrow T_3 = \binom{6}{2}\left(2^{\frac{x-1}{x}}\right)^4\left(2^{\frac{6-2x}{4-x}}\right)^2 = 240 \text{ ....(I)}$$

(3°) Resolviendo la ecuación (I)

$$\Rightarrow 15\,.\,2^{4\left(\frac{x-1}{x}\right)+2\left(\frac{6-2x}{4-x}\right)} = 240$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{4(x-1)(4-x)+2(6-2x)x}{(4-x)x}} = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow \frac{4\left(-x^2+5x-4\right)+2\left(6x-2x^2\right)}{x\left(4-x\right)} = 4$$

$$\Rightarrow -4x^2+20x-16+12x-4x^2 = 16x-4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2-16x+16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x-2 = 0$$

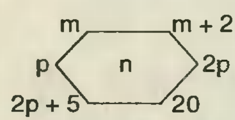
$$\therefore \boxed{x = 2}$$

10.5.24 Ejercicio Explicativo

Hallar el vigésimo octavo término del desarrollo del binomio:

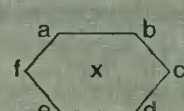
$$\left(x^n+\frac{1}{x^m}\right)^{mnp} \quad ; \; x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

sabiendo que "m", "n" y "p" están relacionados por el exágono obtenido del triángulo de Pascal:



Recuerde:

En todo exágono de Pascal



Se verifica:

$$a\,c\,e = f\,b\,d \text{ ....(I)}$$
$$a+b = x$$
$$f+x = e$$
$$x+c = d$$
$$f+a+b+c+x = e+d$$

Solución:

(1°) A partir del exágono:

$$\begin{cases} m(2p)(2p+5) = p(m+2)(20) \ldots\ldots (\mathrm{I}) \\ m+(m+2) = n \ldots\ldots (\mathrm{II}) \\ p+n = 2p+5 \ldots\ldots (\mathrm{III}) \\ n+2p = 20 \ldots\ldots (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

(2°) de (IV) - (III) : $p = 15 - 2p \qquad \therefore\ p = 5$

de (III) : $5 + n = 10 + 5 \qquad \therefore\ n = 10$

de (II) : $m + m + 2 = 10 \qquad \therefore\ m = 4$

(3°) El binomio en estudio será:

$$\Rightarrow \left(x^{10} + \frac{1}{x^4} \right)^{200}$$

(4°) El término vigésimo octavo es el 28.

$$\Rightarrow T_{28} = \binom{200}{27} \left(x^{10} \right)^{200-27} \left(x^{-4} \right)^{27}$$

$$\therefore\ \boxed{T_{26} = \binom{200}{27} x^{1622}}$$

10.5.25 **Ejercicio Explicativo**

En el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^{10}}{x^3} \right)^{90} \quad ;\ x, y \in \mathbb{R} - \{ 0 \}$$

los términos de lugares:

$$"k+3"\ ;\ "2k-1"\ ;\ "\frac{2k}{5} - 1"\ ;\ "41 - \frac{2k}{3}"$$

Tienen como suma de sus grados a 1 080. Hallar el valor de "k".

Recuerde:

Sea $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ ;\ 0 \le k \le 1$$

Solución:

(1°) El binomio al ser ordenado queda expresado por: $\left[x^2 y^{-1} + y^{10} x^{-3} \right]^{90}$

$$\Rightarrow T_{k+3} = \binom{90}{k+2} \left(x^2 y^{-1} \right)^{88-k} \left(y^{10} x^{-3} \right)^{k+2} \qquad ;\ G = 88 - k + 7k + 14$$

$$T_{2k-1} = \binom{90}{2k-2} \left(x^2 y^{-1} \right)^{92-2k} \left(y^{10} x^{-3} \right)^{2k-2} \qquad ;\ G = 92 - 2k + 14k - 14$$

$$T_{\frac{2k}{5}-1} = \binom{90}{\frac{2k}{5}-2}\left(x^2y^{-1}\right)^{92-\frac{2k}{5}}\left(y^{10}x^{-3}\right)^{\frac{2k}{5}-2} \quad ; \; G = 92-\frac{2k}{5}+\frac{14k}{5}-14$$

$$T_{41-\frac{2k}{3}} = \binom{90}{40-\frac{2k}{3}}\left(x^2y^{-1}\right)^{50+\frac{2k}{3}}\left(y^{10}x^{-3}\right)^{40-\frac{2k}{3}} ; \; G = 50+\frac{2k}{3}+280-\frac{14k}{3}$$

(2°) Por condición: Σ grados $= 1080$

$$\Rightarrow 102+6k+78+12k+78+\frac{12k}{5}+330-4k = 1080$$

(3°) Resolviendo la ecuación:

$$\Rightarrow 588+\frac{82k}{5} = 1080 \;\Rightarrow\; \frac{82k}{5} = 492 \; ; \; k = \frac{492\times 5}{82}$$

$\therefore \boxed{k = 30}$

10.5.26 **Ejercicio Explicativo**

En la expansión del binomio:

$$\left[\, x^{[\![a]\!]} + y^{[\![b]\!]} \,\right]^n \; ; \; n > 0$$

La suma de los grados de los términos es 2520; en el término central la diferencia de grados relativos es 20 (Gy > Gx).

Calcular “a”, “b” y “n” si: $[\![a]\!]+[\![b]\!]+[\![n]\!]= 32$

Recuerde:

(i) Si: $(a+b)^n \Rightarrow T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

(ii) Si: $(a+b)^n \Rightarrow T_{central} = \binom{n}{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}\, b^{\frac{n}{2}}$

Solución:

(1°) A partir del binomio en estudio:

Σ exponentes $= \left([\![a]\!]+[\![b]\!]\right)\dfrac{n(n+1)}{2} = 2\,520$ ....(I)

$$T_{central} = \binom{n}{\frac{n}{2}}\left(x^{[\![a]\!]}\right)^{\frac{n}{2}}\left(y^{[\![b]\!]}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$\Rightarrow \dfrac{n}{2}[\![b]\!] - \dfrac{n}{2}[\![a]\!] = 20$ ....(II)

Por condición:

$[\![a]\!]+[\![b]\!]+n = 32$ ....(III)

(2°) Resolviendo el sistema obtenido:

de (III) : $[\![a]\!] + [\![b]\!] = 32 - n$ .... (IV)

Sustituyendo (IV) en (I):

$(32 - n)\, n\, (n + 1) = 5040$

El cual se verifica   Si: $\boxed{n = 20}$

(3°) De (IV) : $[\![a]\!] + [\![b]\!] = 12$

De (II) : $[\![b]\!] - [\![a]\!] = 2$

$\Rightarrow [\![b]\!] = 7 \; ; \; [\![a]\!] = 5$

$\therefore \boxed{5 \leq a < \; ; \; 7 \leq b < 8 \; ; \; n = 20}$

10.6 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: POTENCIACION

(1) Hallar el valor de "n" si el tercer término de la expansión del binomio. $\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}} \right)^n$

Contiene a $x^{3/2}$

Rpta: $n = 7$

(2) En el binomio:

$\left(a^n + x^2\, y\, z \right)^n$, la suma de los coeficientes es 65536.

Calcular "n" y la suma de los exponentes de los términos del desarrollo.

Rpta: $n = 16 \; ; \; \Sigma_{exp} = 2\,720$

(3) Hallar el término central en el desarrollo de: $\left(\dfrac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}} \right)^{60}$

Rpta: $T_{central} = \binom{60}{30}$

(4) Hallar el coeficiente de x^{18} en el desarrollo del binomio: $\left(16x^4 + 1972x \right)^9$

Rpta: 84

(5) Si el producto de los términos centrales en el desarrollo del binomio:

$\left(x^2 + y^{m-20} \right)^m$ es de grado 403 ; $m \in \mathbb{N}$

Calcular el valor de m

Rpta: $m = 31$

(6) Hallar el valor de n

si en el desarrollo del binomio $\left[x^2 + \operatorname{Rec}\left(x^9 \right) \right]^{|n|}$

El término 12 contiene a: x^{21}

Rpta: $n = 71$ ó $n = -71$

(7) Sea el binomio: $\left(x^{C_k^n} + 2\,y^{C_{k-1}^{2n}} \right)^n$; $n, k \in \mathbb{N}$

en cuyo desarrollo, la suma de exponentes es 2 016 y la suma de coeficientes 2 187

Calcular n y k

Rpta: $n = 7$, $k = 3$

(8) Calcular: "x" si la expansión del binomio que resulta de:

$$\left[b^{2b} + b^{2c} + 2b^{b+c} \right]^{\left(\frac{C_{x-4}^{x-1} + 2C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1}}{2} \right)!}$$

Posee 241 términos

Rpta: $x = 4$

(9) Determinar el número de términos racionales enteros que contiene el desarrollo del binomio.

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \right)^{155}$$

Rpta: 13 términos racionales

(10) Que valor debe asignarse a "m" de modo que la multiplicación de los términos centrales del desarrollo del binomio:

$$\left(\sqrt[800]{x^{m-394}} + x^{-2} \right)^{17}$$

resulte una constante

Rpta: $m = 1\,994$

(11) Hallar "n" si el quinto término del desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{a}{\sqrt[[\![n]\!]]{x}} + \frac{\sqrt[[\![n]\!]]{x}}{b} \right)^{[\![n]\!]+1} \; ; \; [\![n]\!] = \text{Máximo entero de } n.$$

debe ser independiente de x

Rpta: $n \in [\,7, 8 \,\rangle$

(12) Simplificar: $k = \dfrac{\binom{-3}{0}+\binom{-3}{1}x+\binom{-3}{2}x^2+\binom{-3}{3}x^3+\ldots\infty}{\binom{-2}{0}-\binom{-2}{1}+\binom{-2}{2}-\binom{-2}{3}\ldots\infty}$; $|x|<1$

Rpta.: $\dfrac{4}{(1-x)^3}$

(13) Encontrar en el desarrollo de: $\left(2x^2-y^3+\dfrac{1}{2}z^2\right)^7$

el término que contiene x^4z^4

Rpta: $-\dfrac{105}{4}x^4\,y^3\,z^4$

(14) Encontrar en el desarrollo de: $\left(2x^2-\dfrac{1}{2}y^3\right)^8$

el término que contiene a "x^8"

Rpta: $70x^8y^{12}$

(15) Encontrar en el desarrollo de:

$(3xy^2+z^2)^7$ el término que contiene a y^6

Rpta: $945\,x^3\,y^6\,z^8$

(16) Encontrar en el desarrollo de: $(xy-y^2+2z)^6$

el término que contiene a x^3y^5

Rpta: $-240\,x^3y^5z^2$

(17) Encontrar en el desarrollo de: $(2x^3-3xy^2+z^2)^6$

el término que contiene a $x^{11}y^4$

Rpta: $-4\,320\,x^{11}y^4z^2$

(18) Calcular la suma de coeficientes del desarrollo de:

$[6x+y+z]^{\binom{6}{3,2,1}+\binom{8}{4,2,2,0}}$

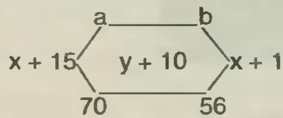
Rpta: $2^{1\,440}$

(19) Hallar el término central del desarrollo del binomio:

$$\left(x^{24} + 6x^{16}y^{11} + 12x^{8}y^{22} + 8y^{33} \right)^{[\![\pi^2+\pi+3]\!]} \; ; \; \pi = \frac{22}{7}$$

Rpta.: $T_{central} = 2^{24} \binom{48}{24} x^{192}y^{264}$

(20) A partir del exágono obtenido del triángulo de Pascal.

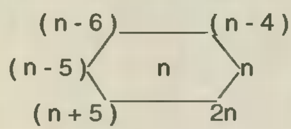


Hallar el término central del binomio: $\left(xN^{y} + aN^{-b} \right)^{ab}$

Rpta.: $T_{central} = \binom{300}{150} 2^{300} N^{1500}$

(21) Hallar el vigésimo octavo término del desarrollo de: $\left(x^{n} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \right)^{4n}$

si "n" es un elemento del exágono de Pascal:



Rpta.: $T_{28} = \binom{40}{27} x^{121}$

(22) En el binomio: $\left(a^{m} + b^{n-8} \right)^{p-19}$

El término central ocupa el lugar 13 y tiene por parte variable: $a^{48}\, b^{132}$

Calcular: "m", "n" y "p"

Rpta: $m = 4,\ n = 19,\ p = 43$

(23) Si en el binomio: $\left(x^{\beta-1} + y^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{m-37}$ el primer término central es: $126x^{250}\, y^{116}$

Calcular: "β", "γ" y "m"

Rpta: $\beta = 51,\ \gamma = 58,\ m = 46$

(24) Si: $\left(a^2+b^5\right)^{116}$ y $\left(-a^8-b^{10}\right)^{49}$ al ser desarrollados tienen un término común, determinar los lugares de dichos términos.

$\boxed{\textbf{Rpta: } 81 \text{ y } 84}$

CAPITULO 11

LA RADICACION ALGEBRAICA

11.1 ***Definición.-*** Se llama radicación a la operación o algoritmo que hace corresponder al par (n; x) denominados índice y radicando. Un tercer término " r " llamado raíz.

Simbólicamente: $x \in \mathbb{R} \wedge n \geq 2 \Rightarrow (n\,;x) \xrightarrow{\sqrt[n]{\ }} r$

Tradicionalmente nos referimos a la radicación del siguiente modo:

"Dada una variable real "x" y un número natural "n" existe un tercer número "r" llamado raíz, siempre que: $r^n = b$.

Es decir: si $\sqrt[n]{b} = r \Rightarrow r^n = b\ ;\ n \neq 0$

Ejemplos:

$$\sqrt[10]{1024} = 2 \Rightarrow 2^{10} = 1024$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \Rightarrow (-3)^5 = -243$$

$$\sqrt[9]{\frac{1}{512}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

$$\sqrt[3]{-343} = -7 \Rightarrow (-7)^3 = -343$$

Observación.- El concepto de radicación se amplia al conjunto de los números complejos.

***Ejemplos*:**

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}^4 = -1$$

$$\sqrt[5]{1+i} = \sqrt[10]{2}\,(\text{cis } 9°) \Rightarrow \left\{\sqrt[10]{2}\ \text{cis } 9°\right\}^5 = 1+i$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \text{cis } 10° \Rightarrow \{\text{cis } 10°\}^6 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

11.2 VALOR PRINCIPAL DE UNA RADICACION

Se define mediante la igualdad:

$$\sqrt[n]{a} = |r| \text{ si } a \in \mathbb{R}^+ \wedge n \in \mathbb{N}^*$$

Ejemplo:

$\sqrt{100} = \|10\| = 10$	Es el valor principal o aritmético
$\sqrt{(-2)^2} = \|-2\| = 2$	Es el valor principal o aritmético
$\sqrt[8]{256} = \|2\| = 2$	Es el valor principal o aritmético
$\sqrt[5]{243} = \|3\| = 3$	Es el valor principal o aritmético
$\sqrt[4]{-16} \in \varnothing$	$\nexists$ Valor principal real
$\sqrt[3]{-8} = -2$	; - 2 es la raíz cúbica de - 8; carece de raíz principal.
$\sqrt{125x^2} = \left\|5\sqrt{5}\,x\right\|$	Es la raíz principal; v
$= 5\sqrt{5}\,x$	si $x \geq 0$, v
$= -5\sqrt{5}\,x$	si $x < 0$

Ejemplo:

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$ Es la raíz principal v

$= x + 1$ si $x + 1 \geq 0$, v

$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = -x - 1$ si $x + 1 < 0$

Ejemplo:

$\sqrt{y^2 - 2y + 1} = |y - 1|$ Es la raíz principal v

$= y - 1$ si $y - 1 \geq 0$, v

$= -y + 1$ si $y - 1 < 0$

11.3 PROPIEDADES DE LA RADICACION

11.3.1 Raíz de un producto

Simbología: $\sqrt[n]{ab} \equiv \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$; $a > 0 \wedge b > 0$

Semántica:

"La radicación es distributiva respecto a la multiplicación".

11.3.2 Raíz de una suma algebraica

Simbología: $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

Semántica:

"La radicación no es distributiva respecto a la suma algebraica".

11.3.3 Raíz de un cociente

Simbología: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \equiv \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$

Semántica:

"La radicación es distributiva respecto a la división".

11.3.4 Raíz de una potenciación

Simbología: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Semántica:

La raíz de una potenciación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario; la afirmación recíproca es cierta.

11.3.5 Raíz de otra raíz

Simbología: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Semántica:

La raíz de otra raíz es equivalente a la radicación del mismo radicando con un radical de índice que es el producto de los índices de las raíces componentes.

11.3.6 Irracional Cuadrático

Simbología: $a + \sqrt{b}$

Semántica:

Es la expresión irracional, en la cual "a" es la parte racional y $\sqrt{b}$ es la parte irracional, tal que $a - \sqrt{b}$ es el conjugado.

11.3.7 Postulado de igualdad de Irracionales Cuadráticos

Simbología:

Sea: $a + \sqrt{b} = p + \sqrt{q}$

$\Rightarrow a = p \;\wedge\; \sqrt{b} = \sqrt{q}$

Semántica:

"Las partes racionales e irracionales deberán ser iguales correspondientemente".

11.3.8 Teorema de la potenciación de un Irracional cuadrático

Simbología:

$$\text{Sea: } (a+\sqrt{b})^n; \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad (a+\sqrt{b})^n = p+q\sqrt{b}$$
$$\wedge \quad (a-\sqrt{b})^n = p-q\sqrt{b}$$

Semántica:

"La potenciación de un irracional cuadrático es otro irracional cuadrático obtenido mediante el desarrollo del binomio de Newton, tal que las potenciaciones de los conjugados son conjugados entre sí."

11.3.9 Identidad de la raíz cuadrada de un Irracional Cuadrático

Simbología:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \equiv \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Semántica:

Si: $a^2 - b = k^2 \Rightarrow a \pm \sqrt{b}$ .Es un cuadrado perfecto y se verifica la regla de la suma y producto (Véase los ejercicios resueltos).

11.3.10 La raíz cúbica de un Irracional Cuadrático

$$\text{Sea: } \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} = x \pm \sqrt{x^2 - c}$$
$$\text{Tal que: } \sqrt[3]{a^2 - b} = c \quad (\text{cubo perfecto: } a^2 - b)$$
$$\wedge \quad 4x^3 - 3xc = a$$

Semántica:

Los algoritmos mostrados para las raíces cuadrada y cúbica son válidos incluyendo los casos en los cuales sean o no cuadrados y cubos perfectos los subradicales dados.

11.4 LA RACIONALIZACION

Definición.- Es el estudio de los conjuntos de los pares de expresiones irracionales cuya multiplicación origina un producto racional.

11.5 FACTOR RACIONALIZANTE

Definición.- Si la multiplicación de dos expresiones algebraicas irracionales resulta ser racional entonces ambos términos serán denominados factores racionalizantes uno del otro.

11.5 SINTESIS DE LOS PRINCIPALES CASOS DE LA RACIONALIZACION

CASO	EXPRESION	FACTOR RACIONALIZANTE	PRODUCTO
I	$\sqrt[m]{b^n}$; $m > n$	$\sqrt[m]{b^{m-n}}$	b
II	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$
III	$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a}^2 - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}^2$	$a + b$
	$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}^2$	$a - b$
	$a \pm m\sqrt[3]{b}$ (*)	$a^2 \mp am\sqrt[3]{b} + m^2\sqrt[3]{b}^2$	$a^3 \pm m^3 b$
IV	$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$	$(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$	$a - b$
	$\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$	$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$	$a - b$
	$\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}$	$\left(\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-2}]{a} + \sqrt[2^{n-2}]{b}\right)$ .... n factores	$a - b$
V	$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a}^{n-1} + \sqrt[n]{a}^{n-2}\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a}^{n-3}\sqrt[n]{b}^2 + \ldots + \sqrt[n]{b}^{n-1}$	$a - b$; $n \in \mathbb{N}$
	$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a}^{n-1} - \sqrt[n]{a}^{n-2}\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{a}^{n-3}\sqrt[n]{b}^2 - \ldots + \sqrt[n]{b}^{n-1}$	$a + b$; $n \in \mathbb{N}$ impares
VI	$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{b}^2 + \sqrt[3]{c}^2 - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}$	$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$ Caso III *
	$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}^2 + \sqrt[3]{c}^2 \mp \sqrt[3]{ab} \mp \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}$	$a - b - c - 3\sqrt[3]{abc}$ Caso III *

11.6 RAIZ ENESIMA DE POLINOMIOS P(x)

De acuerdo a la definición de Radicación; es el Algoritmo que hace corresponder al par (n; P(x)) un tercer término R(x), tal que:

$$P(x) \equiv R^n(x) + r(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

donde: P (x): **Polinomio radicando**
R (x): **Raíz enésima**
r (x): **Residuo de la raíz enésima**

11.6.1 Grados de la Radicación Enésima:

Grado de la Raíz: $R^0 = \dfrac{P}{n}$; $R^0 \in \mathbb{N}$

Grado del Residuo: $r^0 \leq (n-1)\,R^0 - 1$; $r^0 \in \mathbb{N}$

11.6.2 Potencia enésima exacta de P (x)

$$P(x) = R^n(x)\ ;\ \text{Si } r(x) \equiv 0$$

11.6.3 Potencia enésima no exacta de P (x)

De (1): $P(x) = R^n(x) + r(x)\ ;\ r(x) \not\equiv 0$

$\Rightarrow P(x) - r(x) = R^n(x)$

La diferencia del polinomio P (x) y el residuo de extraer la raíz es siempre una potencia enésima exacta.

Ejemplo :

Hallar los grados de los términos de la siguiente radicación:

$$\sqrt{x^{10} + 20x^8 + 1}$$

***Solución*:**

(1°) $P^\circ = 10\ ;\ n = 2$ (Indice de radical)

(2°) $\Rightarrow R^0 = \dfrac{10}{2} = 5$ (Grado de la raíz)

(3°) $\Rightarrow r^0 \leq (n-1)R^0 - 1 =$ (Grado del residuo de la radicación)

$\Rightarrow r^0 \leq (2-1)5 - 1$

$\therefore \boxed{R = 5\ ;\ r^0 \leq 4^0\ ;\ r_{max} = 4^0}$

Ejemplo :

Hallar los grados de los términos de la siguiente radicación:

$$\sqrt[3]{x^{24} + 6x^{23} + 12x^{22} + 11}$$

***Solución*:**

(1°) $P^\circ = 24\ ;\ n = 3$ (Indice de Radical)

(2°) $\Rightarrow R^\circ = \dfrac{24}{3} = 8$ (Grado de la raíz)

(3°) $\Rightarrow r^\circ \leq (n-1)R^\circ - 1$ (Grado de residuo de la radicación)

$r^\circ \leq 2(8) - 1$

$r^\circ \leq 15$

$\therefore \boxed{R^\circ = 8\ ;\ r^\circ \leq 15\ ;\ r^\circ_{max} = 15}$

Ejemplo :

Hallar los grados de la radicación: $\sqrt[7]{x^{63} + x^{62} + x^{61} + x + 1}$

***Solución*:**

(1°) $P^o = 63 \;;\; n = 7$ (Indice de radical)

(2°) $\Rightarrow R^o = \dfrac{63}{7} = 9$ (Grado de la raíz)

(3°) $\Rightarrow r^o \leq (7-1)\,9 - 1$ (Grado del residuo).

$r^o \leq 53$

$\therefore \boxed{R^o = 9 \;;\; r^o \leq 53 \;;\; r_{max} = 53^o}$

Ejemplo :

Hallar los grados de la radicación:

$$\sqrt[12]{a^{60} + 64a^{59}b + a^{58}b^2 + b^{60}}$$

***Solución*:**

(1°) $P^o = 60 \;;\; n = 12$ (Indice del radical)

(2°) $R = \dfrac{60}{12} = 5$ (Grado de la raíz)

(3°) $r_a{}^o \leq 11\,(5) - 1 \;;\; r^o = 60$ absoluto (Grado del residuo).

$r_a \leq 54$

11.6.4 Raíz Cuadrada de un Polinomio P (x)

***Metodología*.-** Es condición necesaria que P(x) sea de grado 2 ó múltiplo de 2, además de ser ordenado y completo en grupos de 2 o binarias a partir del término independiente.

$$G_R = \frac{n}{2} \;;\quad G_r = \frac{n}{2} - 1 \;;\quad P^o{}_{(x)} = n$$

1.- Obtención del primer término de la raíz (T_1)

Se extrae la raíz cuadrada al término que contiene el grado.

El divisor de la radicación lo constituye: $\boxed{d = 2T_1}$

2.- Obtención del segundo término de la raíz (T_2)

El cociente de dividir el primer término del primer grupo binario entre el divisor de la radicación "d".

El primer residuo "r_1" se calcula como:

$$\boxed{r_1 = 1^{er}\text{ binomio} - [\,(T_1 + T_2)^2 - T_1{}^2\,]}$$

3.- Obtención del tercer término de la raíz (T_3)

El cociente de dividir el primer término de R_1 entre "d" será T_3.

El segundo residuo r_2 se calcula como:

$$\boxed{r_2 = r_1 - [\,(T_1 + T_2 + T_3)^2 - (T_1 + T_2)^2\,] + 2^{\circ}\text{ grupo binario}}$$

4.- El procedimiento continúa en forma repetitiva hasta lograr que el grado del residuo sea menor o igual que el grado de la raíz disminuido en la unidad.

Ejemplo :

Calcular: $\sqrt{16x^6 + 24x^5 - 7x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 7}$

***Solución*:**

(1°) $R^o = 3 \; ; \; r^o \leq 3 - 1 = 2^o$

$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$

$$\Rightarrow \sqrt{16x^6 + 24x^5 - 7x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 7} \quad \Big| \quad 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$$

$$\begin{array}{rl}
& -\,24x^5 - 9x^4 \\
\hline
& -\,16x^4 + 4x^3 + x^2 \\
r_1 & 16x^4 + 12x^3 - 4x^2 \\
\hline
& 16x^3 - 3x^2 + x + 7 \\
r_2 & -\,16x^3 - 12x^2 + 8x - 4 \\
\hline
& -\,15x^2 + 9x + 3 \\
r_{(x)} &
\end{array}$$

divisor: $2\,(4x^3)^1 = 8x^3$

Segundo término de la radicación:(T_2)

$24x^5 \div 8x^3 = 3x^2$

$(4x^3 + 3x^2)^2 - (4x^3)^2$

$= 24x^5 + 9x^4$

Tercer término de la radicación: (T_3)

$-16x^4 \div 8x^3 = -2x$

$(4x^3 + 3x^2 - 2x)^2 - (4x^3 + 3x^2)^2$

$= -16x^4 - 12x^3 + 4x^2$

Cuarto término de la radicación: (T_4)

$-16x^3 \div 8x^3 = 2$

$(4x^3+3x^2 -2x +2)^2 - (4x^3+3x^2 -2x)^2$

$= 16x^3 + 12x^2 - 8x + 4$

(2°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} R(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ r(x) = -15x^2 + 9x + 3 \end{array}}$$

(3°) **Verif:** $(4x^3 + 3x^2 - 2x + 2)^2 - 15x^2 + 9x + 3$

$$\therefore \boxed{P(x) = 16x^6 + 24x^5 - 7x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 7}$$

11.6.5 Raíz Cúbica de un Polinomio P (x)

Metodología:.- (Es condición necesaria que P(x) sea de 3° grado o múltiplo de 3, estar ordenado decrecientemente respecto al grado y completo asociado de 3 en 3 o ternas.

$$G_R = \frac{n}{3} \; ; \quad G_r \leq 2\left(\frac{n}{3}\right) - 1 \; ; \quad P^o_{(x)} = n$$

(1°) **OBTENCION DEL PRIMER TERMINO DE LA RAIZ (T_1)**

Se extrae la raíz cúbica al término que contiene al grado.
El divisor de la radicación es: **d** $= 3\,T_1^2$

(2°) **OBTENCION DEL SEGUNDO TERMINO DE LA RAIZ (T_2)**

El cociente de dividir el primer término de la primera terna entre el divisor de la radicación "d".

El primer residuo "r_1" se calcula como:

$$\boxed{r_1 = 1^a \text{ Terna } - [(T_1 + T_2)^3 - T_1^3]}$$

(3°) **OBTENCION DEL TERCER TERMINO DE LA RAIZ (T_3)**

El cociente de dividir el primer término de r_1 entre "d" será T_3.

El segundo residuo r_2 se calcula como:

$$\boxed{r_2 = r_1 - [(T_1 + T_2 + T_3)^3 - (T_1 + T_2)^3] + 2^a \text{ terna}}$$

(4°) El procedimiento continúa en forma repetitiva hasta lograr que el grado del residuo sea menor o igual que el doble del grado de la raíz disminuido en la unidad.

Ejemplo:

Calcular: $\sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 30x^4 + x^2 + x + 5}$

***Solución*:**

(1°) $R = 2^\circ \; ; \; r^\circ \leq 2(2) - 1 = 3^\circ$

$T_1 \quad T_2 \quad T_3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 30x^4 + 0x^3 + x^2 + x + 5}$	$x^2 - 3x + 1$
$\underline{9x^5 - 27x^4 + 27x^3}$	divisor: $d = 3(x^2)^2 = 3x^4$
$r_1 \quad 3x^4 + 27x^3 + x^2 + x + 5$	**2° término de la raíz (T_2)**
$\underline{- 3x^4 + 18x^3 - 30x^2 + 9x - 1}$	$- 9x^5 \div (3x^4) = - 3x$
$45x^3 - 29x^2 + 10x + 4$	$(x^2 - 3x)^3 - (x^2)^3$
r_2	$- 9x^5 + 27x^4 - 27x^3$
	Tercer término de la raíz (T_3)
	$3x^4 \div (3x^4) = 1$
	$(x^2 - 3x + 1)^3 - (x^2 - 3x)^3$
	$= 3x^4 - 18x^3 + 30x^2 - 9x + 1$

(2°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} R(x) &= x^2 - 3x + 1 \\ r(x) &= 45x^3 - 29x^2 + 10x + 4 \end{aligned}}$$

Verificación:

$$P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3 + 45x^3 - 29x^2 + 10x + 4$$

$$\therefore \boxed{P(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 + x^2 + x + 5}$$

11.6.6 Raíz cuarta de un polinomio P(x)

Metodología.- Es condición necesaria que P(x) sea de grado 4 o múltiplo de 4, estar ordenado decrecientemente respecto al grado y completo, asociado de 4 en 4 o cuaternas.

$$\boxed{G_R = \frac{n}{4} \; ; \quad G_r \le 3\left(\frac{n}{4}\right) - 1 \; ; \quad P^{o}_{(x)} = n}$$

(1°) **OBTENCION DEL PRIMER TERMINO DE LA RAIZ (T_1)**

Se extrae la raíz cuarta al término que contiene al grado.
El divisor de la radicación lo constituye: $d = 4\,T_1^3$

(2°) **OBTENCION DEL SEGUNDO TERMINO DE LA RAIZ (T_2)**

El cociente de dividir el primer término de la primera cuaterna entre el divisor de la radicación "d".
El primer residuo "R_1", se calcula como:

$$\boxed{r_1 = 1^{a} \text{ cuaterna} - [\,(T_1 + T_2)^4 - T_1^4\,]}$$

(3°) **OBTENCION DEL TERCER TERMINO DE LA RAIZ (T_3)**

El cociente de dividir el primer término de r_1 entre "d" será T_3.
El segundo residuo "r_2" se calcula como:

$$\boxed{r_2 = r_1 - [\,T_1 + T_2 + T_3)^4 - (T_1 + T_2)^4\,] + 2^{a} \text{ cuaterna}}$$

(4°) El procedimiento continúa en forma repetitiva hasta lograr que el grado del residuo sea menor o igual que el triple del grado de la raíz disminuido en la unidad.

Ejemplo :

Calcular: $\sqrt[4]{16x^8 + 64x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 11}$

***Solución*:**

(1°) $R^{o} = 2^{o} \; ; \; r^{o} \le 3(2) - 1 = 5^{o}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{16x^8 + 64x^7 + 0x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 11}$	$\underset{T_1}{2x^2} + \underset{T_2}{2x} \underset{T_3}{- 3}$
$- 64x^7 - 96x^6 - 64x^5 - 16x^4$	**divisor:** $4\,(2x^2)^3$ $d = 32x^6$
$r_1 \rightarrow - 96x^6 - 63x^5 - 15x^4$ $96x^6 + 288x^5 + 72x^4 - 336x^3 + 0 + 216x - 81$	**2° término de la radicación** $64x^7 \div 32x^6 = 2x$ $(2x^2 + 2x)^4 - (2x^2)^4$
$225x^5 + 57x^4 - 335x^3 + x^2 + 217x - 70$ $r_{(x)}$	$= 64x^7 + 96x^6 + 64x^5 + 16x^4$
	3° término de la radicación $- 96x^6 \div 32x^6 = -3$ $(2x^2 + 2x - 3)^4 - (2x^2 + 2x)^4$

(2°) Finalmente:

$$R(x) = 2x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad R^o = \frac{8}{4} = 2^o$$

$$r(x) = 225x^5 + 57x^4 - 335x^3 + x^2 + 217x - 80 \; ; \quad r^o = 3(2) - 1 \leq 5^o$$

(3°) **Verificación:**

$$P(x) = (2x^2 + 2x - 3)^4 + 225x^5 + 57x^4 - 335x^3 + x^2 + 217x - 70$$

$$\therefore \boxed{P(x) = 16x^8 + 64x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 11}$$

11.6.7 Raíz Quinta de un Polinomio P (x)

Metodología.- Es condición necesario que P(x) sea de grado 5 o múltiplo de 5, además de ser ordenado y completo agrupados de 5 en 5 (quinarios)

$$\boxed{G_R = \frac{n}{5}\,; \quad G_r = \frac{4n}{5} - 1\,; \quad P_{(x)} = n}$$

(1°) **OBTENCION DEL PRIMER TERMINO DE LA RAIZ (T_1)**
Se extrae la raíz quinta al término que contiene al grado.
El divisor de la radicación lo constituye: $\mathbf{d = 5\,T_1^4}$

(2°) **OBTENCION DEL SEGUNDO TERMINO DE LA RAIZ (T_2)**
El cociente de dividir el primer término del primer grupo quinario entre el divisor de la radicación d.
El primer residuo r_1 se calcula:

$$\boxed{r_1 = 1 \text{ grupo quinario } - [\,(T_1 + T_2)^5 - T_1^5\,]}$$

(3°) **OBTENCION DEL TERCER TERMINO DE LA RAIZ (T_3)**
El cociente de dividir el primer término de r_1 entre "d" será T_3.
El segundo residuo r_2 se calcula como:

$$\boxed{r_2 = r_1 - [\,T_1 + T_2 + T_3)^5 - (T_1 + T_2)^5\,] + 2^0 \text{ grupo quinario}}$$

(4°) El procedimiento continúa en forma repetitiva hasta lograr que el grado del residuo sea menor o igual que cuatro veces el grado de la raíz disminuido en la unidad.

Ejemplo:

Calcular: $\sqrt[5]{x^5 + 15x^4 + 10x^3 + x^2 + x + 300}$

***Solución*:**

(1°) $R^o = 1 \; ; \; r^o \leq 4(1) - 1 = 3^o$

	$T_1 \quad T_2$
$\Rightarrow \quad \sqrt[5]{x^5 + 15x^4 + 10x^3 + x^2 + x + 300}$	$x + 3$
$-15x^4 - 90x^3 - 270x^2 - 405x - 243$	divisor: $5x^4$
$r_1 \nearrow \quad -80x^3 - 269x^2 - 404x + 57$	**2º término de la radicación** $15x^4 \div 5x^4 = 3$
	$(x+3)^5 - x^5$ $15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

(2°) Finalmente:

$$R(x) = x + 3$$

$$\therefore \quad \boxed{r(x) = -80x^3 - 269x^2 - 404x + 57}$$

(3°) **Verificación:** $(x+3)^5 - 80x^3 - 269x^2 - 404x + 57 = P(x)$

$$P(x) = x^5 + 15x^4 + 10x^3 + x^2 + x + 300$$

11.7 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

11.7.1 Ejercicio Explicativo

Si: $x^6 + 6x^5 + 30x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + e$
Es un cubo perfecto, calcular:
a, b, c y e

Recuerde:

Si $P(x)$ es una potencia enésima perfecta, la raíz enésima de **$P(x)$** deberá tener residuo idénticamente nulo.

***Solución*:**

(1°) Extrayendo la raíz cúbica de modo que el residuo $r(x)$ sea: $r(x) \equiv 0$

$\sqrt{x^6 + 6x^5 + 30x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + e}$	$x^2 + 2x + 6$
$-6x^5 - 12x^4 - 8x^3$	divisor: $3x^4$
$r_1 \nearrow \quad 18x^4 + (a-8)x^3 + bx^2 + cx + e$ $-18x^4 - 72x^3 - 180x^2 - 216x - 216$	2° término de la raíz: $6x^5 \div 3x^4 = 2x$
$r_{(x)} \nearrow \quad (a-80)x^3 + (b-180)x^2 + (-216)x + e - 216$	$\Rightarrow (x^2+2x)^3 - (x^2)^3$ $= 6x^5 + 12x^4 + 8x^3$
	3° término de la raíz $18x^4 \div 3x^4 = 6$ $\Rightarrow (x^2+2x+6)^3 - (x^2+2x)^3$ $= 18x^4 + 72x^3 + 180x^2 + 216x + 216$

(2°) $r(x) \equiv 0$

$\Rightarrow \quad (a - 80) = 0$

$\Rightarrow \quad b - 180 = 0$

c - 216 = 0
e - 216 =

(3°) $\therefore$ $\boxed{a = 80 ; \quad b = 180 ; \quad c = 216 ; \quad e = 216}$

(4°) **Verificación:**

$$x^6 + 6x^5 + 30x^4 + 80x^3 + 180x^2 + 216x + 216 = (x^2 + 2x + 6)^3$$

11.7.2 Ejercicio Explicativo

Extraer la raíz cúbica a:

$$27a^6 + 54a^5b + 63a^4b^2 + a^3b^3 + 51b^6$$

Recuerde :

El grado de la raíz cúbica será:

$$R^o = \frac{6}{3} = 2^o$$

mientras que el grado del residuo será:

$$r^o \le 2(2) - 1 = 3^o$$

Estos grados son en relación a P (x); de una variable en el caso de tener dos variables y de ser homogéneo el polinomio, el grado del residuo se mantiene igual que el grado del polinomio.

***Solución*:**

(1°) **Ordenando en relación a la variable "a".**

$R^o = 2^o$; $r_a^o \le 2(2) - 1 = 3^o$; $r^o_{max} = 3$

I II III

$\sqrt[3]{27a^6 + 54a^5 + 63a^4 + a^3 + 0a^2 + 0a + 51}$	$3a^2 + 2a + 1$
$- 54a^5 - 36a^4 - 8a^3$	Divisor: $3(3a^2)^2 = 27a^4$
$27a^4 - 7a^3 + 0a^2 + 0a + 51$	2^o término de la radicación
$r_1 \longrightarrow$ $- 27a^4 - 36a^3 - 21a^2 - 6a - 1$	$54a^5 \div 27a^4 = 2a$
$r_{(x)} \longrightarrow$ $- 43a^3 - 21a^2 - 6a + 50$	$\Rightarrow (3a^2 + 2a)^3 - (3a^2)^3$ IV
	$= 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$
	3^0 término de la radicación
	$27a^4 \div 27a^4 = 1$
	$\Rightarrow (3a^2 + 2a + 1)^3 - (3a^2 + 2a)^3$
	$= 27a^4 + 36a^3 + 21a^2 + 6a + 1$

(2°) **Secuencia:**
(I) Primer término de la raíz.
(II) Divisor de la radicación.
(III) 2^0 término de la radicación.
(IV) 3^0 término de la radicación.

(3°) **Finalmente:**

$$r(x) = -43a^3b^3 - 21a^2b^4 - 6ab^5 + 50b^6$$

$\therefore$ $\boxed{R(x) = 3a^2 + 2ab + b^2}$

(3°) **Verificando:**

$$P(a,b) = (3a^2 + 2ab + b^2)^3 - 43a^3b^3 - 21a^2b^4 - 6ab^5 + 50b^6$$

$$P(a,b) = 27a^6 + 54a^5b + 63a^4b^2 + a^3b^3 + 51b^6$$

11.7.3 **Ejercicio Explicativo:**

Si:

$$P(x) = (p-5)x^6 - nx^5 + (m+19)x^4 - 86x^3 + 58x^2 - 24x + 9$$

Es un cuadrado perfecto.

Hallar $m + n + p$.

$x \in \mathbb{R}$.

Recuerde:

Solución:

(1°) **Extrayendo la raíz cuadrada a partir del término independiente, en razón a ser un cuadrado perfecto.**

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{9 - 24x + 58x^2 - 86x^3 + (m+19)x^4 - nx^5 + (p-5)x^6} & 3 - 4x + 7x^2 - 5x^3 \\
\quad 24x - 16x^2 & (6-4x)14x \\
\qquad 42x^2 - 86x^3 + (m+19)x^4 & \\
\quad - 42x^2 + 56x^3 - 49x^4 & (6 - 8x + 7x^2)(-7x^2) \\
\qquad\qquad - 30x^3 + (m-30)x^4 - nx^5 + (p-5)x^6 & \\
\qquad\qquad 30x^3 - 40x^4 + 35x^5 - 25x^6 & (6 - 8x + 7x^2 - 5x^3)(5x^3) \\
\qquad\qquad\qquad (m-70)x^4 + (35-n)x^5 + (p-30)x^6 &
\end{array}$$

(2°) **El residuo deberá ser idénticamente nulo.**

$\Rightarrow \quad m - 70 = 0$

$\Rightarrow \quad 35 - n = 0$

$\Rightarrow \quad p - 30 = 0$

(3°) $m = 70$; $n = 35$; $p = 30$

$\therefore \boxed{m + n + p = 135}$

11.7.4 **Ejercicio Explicativo**

Si: $\qquad x = \sqrt[20]{21^{\sqrt{21}}}$

Calcular:

$$K = \frac{\sqrt[-20]{21}}{11}\left[\sqrt[\sqrt{21}]{x} + x^{\sqrt{21}}\right]$$

Solución:

(1°) ⇒ **De la condición:** $x = 21^{\frac{\sqrt{21}}{20}}$ .... (1)

⇒ **De la expresión k :** $K = \dfrac{1}{11\sqrt[20]{21}} \times \left[\sqrt[\sqrt{21}]{x} + x^{\sqrt{21}} \right]$

(2°) ⇒ **Extrayendo** $x^{\sqrt{21}}$ **:** $K = \dfrac{x^{\sqrt{21}}}{11\sqrt[10]{21}} \times \left[\dfrac{\sqrt[\sqrt{21}]{x}}{x^{\sqrt{21}}} + 1 \right]$

⇒ **Ordenando :** $K = \dfrac{x^{\sqrt{21}}}{11\sqrt[20]{21}} \times \left[x^{\frac{1}{\sqrt{21}} - \sqrt{21}} + 1 \right]$

(3°) ⇒ **Ordenando :** $K = \dfrac{x^{\sqrt{21}}}{11\sqrt[20]{21}} \times \left[x^{\frac{-20}{\sqrt{21}}} + 1 \right]$

⇒ **De 1 en 2 :** $K = \dfrac{\left(21^{\frac{\sqrt{21}}{20}} \right)^{\sqrt{21}}}{11\sqrt[20]{21}} \times \left[\left(21^{\frac{\sqrt{21}}{20}} \right)^{\frac{-20}{\sqrt{21}}} + 1 \right]$ ....(2)

(4°) ⇒ **Efectuando lo**

indicado : $K = \dfrac{21}{11}^{\frac{21}{20} - \frac{1}{20}} \left[\dfrac{1}{21} + 1 \right]$

⇒ **Efectuando :** $K = \dfrac{21}{11} \times \left[\dfrac{22}{21} \right]$

$\therefore \boxed{k = 2}$

11.7.5 Ejercicio Explicativo:

Si: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $x \in \mathbb{R}$

Determine:

$$y = \frac{\left[\left(F_{(x)} \right)^{F\left(\frac{1}{3}\right)} \right]^{\frac{-27}{8}}}{\left(F_{(x-1)} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(F_{(x+1)} \right)^{\frac{1}{3}}}$$; sabiendo que la variable: x = 1/2.

Recuerde:

El desarrollo: $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3$

Solución:

(1°) **Factorizando F (x):**

$\Rightarrow F(x) = (x - 1)^3$ .... (1); pues: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

$\Rightarrow F(x+1) = (x + 1 - 1)^3 = x^3$ .... (2)

$\Rightarrow F(x - 1) = (x + 1 - 1)^3 = (x - 2)^3$........ (3)

(2°) $F(1/2) = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3 = -\frac{1}{8}$; de (1)

(3°) $F(1/3) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)^3 = -\frac{8}{27}$; de (1)

$\Rightarrow F\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; de (2)

$\Rightarrow F\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \left(\frac{1}{2} - 2\right)^3 = -\frac{27}{8}$; de (3)

(4°) **Reemplazando datos y resultados obtenidos:**

$$\Rightarrow y = \frac{\left(\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{8}{27}}\right)^{-\frac{27}{8}}}{\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \quad ; \text{ pues } \left(\left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{-8}{27}}\right)^{\frac{-27}{8}} = \left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{27}{8} \times \frac{8}{27}} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{1}{8}}{-1}$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{1}{8}}$$

11.7.6 **Ejercicio Explicativo**

Obtener m, n y p a partir de la equivalencia siguiente:

$$(a-b)^{m-1}\sqrt{c^{n-2}}\sqrt{d^{p-3}} = \frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}} - 2\frac{b^2d}{a}\sqrt{\frac{a^4c}{b^2d}} + \frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}} \qquad a, b, c, d, \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Solución:

(1°) **Para ordenar el 2° miembro de la equivalencia procedemos a racionalizar cada término:**

$$\Rightarrow \frac{cd}{a}\sqrt{\frac{a^6}{cd}}=\frac{cda^3}{a\sqrt{cd}}\times\frac{\sqrt{cd}}{\sqrt{cd}}=\frac{\cancel{cd}\cancel{a^3}\sqrt{cd}}{\cancel{acd}}=a^2\sqrt{cd}$$

$$\Rightarrow \frac{2b^2d}{a}\sqrt{\frac{a^4c}{b^2d}}=\frac{2a^2b^2d\sqrt{c}}{ab\sqrt{d}}\times\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}}=\frac{2a^2b^2d\sqrt{cd}}{abd}=2ab\sqrt{cd}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{c}\sqrt{\frac{b^4c^3}{d^3}}=\frac{d^2b^2c\sqrt{c}}{cd\sqrt{d}}\times\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d}}=\frac{\cancel{d^2}b^2\cancel{c}\sqrt{cd}}{\cancel{cd^2}}=b^2\sqrt{cd}$$

(2°) **La suma algebraica del 2° miembro será:**

$$\underbrace{a^2\sqrt{cd}-2ab\sqrt{cd}+b^2\sqrt{cd}=\sqrt{cd}(a-b)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

(3°) **La identidad en cuestión será:**

$$\Rightarrow (a-b)^{m-1}\sqrt{c^{n-2}}\sqrt{d^{p-3}}=(a-b)^2\sqrt{c}\sqrt{d}$$

(4°) **Identificando los correspondientes:**

$$\left.\begin{array}{ll}\Rightarrow m-1=2\ ; & m=3\\ \dfrac{n-2}{2}=\dfrac{1}{2}\ ; & n=3\\ \dfrac{p-3}{2}=\dfrac{1}{2}\ ; & p=4\end{array}\right\}(a-b)^{m-1}c^{\frac{n-2}{2}}d^{\frac{p-3}{2}}=(a-b)^2c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \boxed{m=n=3\ ;\ \ p=4}$$

11.7.7 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular:

$$E=\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)\div\frac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}-\frac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{ ab = 1 \ \ ; \ \ ab = 0 \}$

Recuerde:

la definición de radicación:

Si: $\sqrt[n]{x} = y$

$\Rightarrow \quad y^n = x$

Solución:

(1°) **Haciendo el cambio:**

$$\sqrt[4]{ab} = x \text{ .... } (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{a^3b^3} = x^3 \text{ .... } (2) \quad ; \text{ de elevar al cubo}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} = x^2 \text{ .... } (3) \quad ; \text{ de elevar al cuadrado}$$

(2°) **La expresión propuesta será:**

$$E = \left(\frac{x-x^2}{1-x^2} + \frac{1-x}{x}\right)\frac{1+x^3}{x} - \frac{1-x-x^2}{x^2}$$

(3°) **Simplificando:**

$$\Rightarrow E = \left(\frac{x\cancel{(1-x)}}{(1+x)\cancel{(1-x)}} + \frac{1-x}{x}\right).\frac{(1+x^3)}{x} - \frac{1-x-x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(x^2+1-x^2)}{x\cancel{(1+x)}}.\frac{\cancel{(1+x)}(1-x+x^2)}{x} - \frac{1-x-x^2}{x^2}$$

(4°) **Sumando las fracciones homogéneas:**

$$\Rightarrow E = \frac{(x^2+1-x^2)}{x^2} - \frac{1-x-x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{1}\cancel{-x}+x^2\cancel{-1}\cancel{+x}+x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2x^2}{x^2} = 2 \quad ; \text{ es independiente del valor de las variables}$$

$$\therefore \boxed{E = 2}$$

11.7.8 Ejercicio Explicativo

Efectuar:

$$y = \frac{a^2\sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - \sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}}$$

$a; x \in \mathbb{R}, a > 0, x > 0.$

Solución:

(1°) **Si hacemos el cambio:**

$$\sqrt[4]{x} = m \Rightarrow \sqrt{x} = m^2 \Rightarrow x = m^4 \text{ .... } (1)$$

$$\sqrt{a} = b \Rightarrow a = b^2 \text{ .... } (2)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^4$$

(2°) **También:**

$$\Rightarrow y = \frac{a^2\sqrt[4]{x} + x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - (a + \sqrt{x}) \quad \text{pues: } \sqrt{a^2 + x + 2a\sqrt{x}} = a + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y=\frac{b^4m+m^4b}{b^2m+bm^2}-\left(b^2+m^2\right)$$

(3°) **Simplificando:**

$$\Rightarrow y=\frac{\cancel{mb}\left(b^3+m^3\right)}{\cancel{bm}\left(b+m\right)}-\left(b^2+m^2\right)\ ;\ b^3+m^3=\left(b+m\right)\left(b^2-mb+b^2\right)$$

$$\Rightarrow y=\cancel{b^2}-mb+\cancel{m^2}-\cancel{m^2}-\cancel{b^2}$$

$\Rightarrow y = -mb$; **retornando a las variables originales**

$$\therefore\ \boxed{y=-\sqrt[4]{x}\,\sqrt{b}}$$

11.7.9 Ejercicio Explicativo

Efectuar:

$$y=\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}^{\,2}-\sqrt[3]{b}^{\,2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}^{\,2}}}{\dfrac{1}{\left(\sqrt[12]{a}+\sqrt[12]{b}\right)^{-1}\left(\sqrt[12]{a}-\sqrt[12]{b}\right)^{-1}}}-\sqrt[6]{b}$$

$a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$; $a \neq b$

Recuerde:

$$\left(\sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{b}\right)\left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}\right)=\sqrt[m]{a}^{\,2}-\sqrt[m]{b}^{\,2}$$

Solución:

(1°) **A partir de la expresión propuesta:**

$$\Rightarrow y=\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}^{\,2}-\sqrt[3]{b}^{\,2}}-\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}\ ;$$

$$\Rightarrow y=\frac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}^{\,2}-\sqrt[3]{b}^{\,2}}-\dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}-\sqrt[6]{b}$$

$$\Rightarrow y=\frac{\dfrac{a+b-\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}^{\,2}-\sqrt[3]{b}^{\,2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}-\sqrt[6]{b}$$

(2°) **Luego de factorizar:** $a+b-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}^{\,2}-\sqrt[3]{b}^{\,2}\right)$

$$\Rightarrow y=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[3]{a}^{2}-\sqrt[3]{b}^{2}\right)}}{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\cancel{\left(\sqrt[3]{a}^{2}-\sqrt[3]{b}^{2}\right)}}-\sqrt[6]{b}\;;$$

(3°) Simplificando:

$$\Rightarrow y=\frac{\cancel{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}{\cancel{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}}-\sqrt[6]{b}\;;$$

$$\Rightarrow y=\underbrace{\sqrt[6]{a}\cancel{+\sqrt[6]{b}}}\cancel{-\sqrt[6]{b}}$$

$$\therefore\ \boxed{y=\sqrt[6]{a}}$$

11.7.10 Ejercicio Explicativo

Evaluar la expresión siguiente:

$$K=\sqrt{(a-3b)^2-4b(2b-a)+8}+\sqrt{-a^2+b^2+a+15b+56}$$

si sabemos que:

$$a-b=8$$

Solución:

(1°) De la condición: $a = 8 + b$

$$\Rightarrow K=\sqrt{(8-2b)^2-4b(b-8)+8}+\sqrt{-(8+b)^2+b^2+8+b+15b+56}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{64+\cancel{4b^2}\underbrace{-32b\cancel{-4b^2}+32b}+8}+\sqrt{\underbrace{-64-b^2-16b+b^2+16b+64}_{0}}$$

(2°) Se tendrá:

$$\Rightarrow K=\sqrt{72}+0$$

$$\therefore\ \boxed{K=6\sqrt{2}}$$

11.7.11 Ejercicio Explicativo

Racionalizar:

$$E=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$$

Recuerde:

La siguiente equivalencia:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc\quad;\quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

Solución:

(1°) **El factor racionalizante Fr① será:**

$$\Rightarrow E=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}\times\underbrace{\frac{\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{6}\right)}{\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{6}\right)}}_{\longleftarrow\ Fr\,①\ \longrightarrow}$$

$$\Rightarrow E=\frac{Fr①}{5+3+2-3\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}}=\frac{Fr①}{10-3\sqrt[3]{30}}$$

(2°) Para racionalizar utilizamos Fr②

$$\Rightarrow E=\frac{Fr①}{\left(10-3\sqrt[3]{10}\right)}\times\underbrace{\frac{\left(100+30\sqrt[3]{10}+90\right)}{\left(100+30\sqrt[3]{10}+90\right)}}_{\longleftarrow\ Fr\,②\ \longrightarrow}$$

$$\Rightarrow E=\frac{Fr①\times Fr②}{10^3-\left(3\sqrt[3]{10}\right)^3}=\frac{Fr①\times Fr②}{1000-270}$$

$$\therefore\ \boxed{E=\frac{Fr①\times Fr②}{730}}$$

11.7.12 **Ejercicio Explicativo**

Racionalizar:

$$K=\frac{10}{\sqrt{143}-\sqrt{91}-\sqrt{33}+\sqrt{21}}$$

Solución:

(1°) **Ordenando los términos irracionales.**

$$\Rightarrow \sqrt{143}-\sqrt{91}-\sqrt{33}+\sqrt{21}$$

$$\Rightarrow \sqrt{11}\sqrt{13}-\sqrt{13}\sqrt{7}-\sqrt{11}\sqrt{3}+\sqrt{7}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow K=\frac{10}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)}$$

(2°) **Racionalizando:**

$$\Rightarrow K = \underbrace{\frac{10}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}} \times \underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt{13}-\sqrt{3}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{\cancel{10}\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)}{4 \times \cancel{10}}$$

$$\therefore \boxed{K = \frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{3}\right)}{4}}$$

11.7.12 **Ejercicio Explicativo**

Racionalizar:

$$K = \frac{10}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$$

Recuerde:

La equivalencia:

$$(a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\Rightarrow (x - y - z) (x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz) = x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$$

Solución:

(1°) **Los términos irracionales serán racionalizados mediante el proceso siguiente:**

$$\Rightarrow K = \frac{10}{\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)} \times \frac{\overleftrightarrow{\text{Fr}(1)}\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{6}\right)}{\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{14}-\sqrt[3]{6}\right)\underleftrightarrow{\text{Fr}(1)}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{10\ \text{Fr}(1)}{7-3-2-3\sqrt[3]{42}}$$

(2°) **Estamos expeditos para ultimar la racionalización:**

$$\Rightarrow K = \frac{10\ \text{Fr}(1)}{2-3\sqrt[3]{42}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{10\ \text{Fr}(1)}{\left(2-3\sqrt[3]{42}\right)} \times \frac{\left(4+6\sqrt[3]{42}+9\sqrt[3]{1764}\right)}{\left(4+6\sqrt[3]{42}+9\sqrt[3]{1764}\right)}\ ;\ \text{recuerde}$$

(3°) **En este caso se requiere utilizar:**

$$(a - b) (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\Rightarrow K = \frac{10\,Fr(1) \times Fr(2)}{2^3 - \left(3\sqrt[3]{42}\right)^3} = \frac{10\,Fr(1) \times Fr(2)}{8 - 1134}$$

$$\Rightarrow K = \frac{-10\,Fr(1) \times Fr(2)}{1126}$$

$$\therefore \quad \boxed{K = \frac{-5\,Fr(1) \times Fr(2)}{563}}$$

11.7.14 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$K_{(a)} = \frac{a^2 + 1 + a\sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}} \; ; \quad a \in \mathbb{R}.$$

Recuerde:

Sea x $\quad x \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow \; x = \sqrt{x^2}$$

Solución:

(1°) **Podemos expresar $K_{(a)}$ en la forma siguiente:**

$$\Rightarrow K_{(a)} = \frac{\sqrt{\left(a^2+1\right)^2} + a\sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}}$$

(2°) **Extrayendo el factor: $\sqrt{a^2+1}$ y conmutando el denominador.**

$$\Rightarrow K_{(a)} = \frac{\sqrt{a^2+1}\left[\sqrt{a^2+1} + a\right]}{\left[\sqrt{a^2+1} + a\right]}$$

$$\therefore \quad \boxed{K_{(a)} = \sqrt{a^2+1}}$$

11.7.15 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar:

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2} + x - 1} \; ;$$

$x \in \langle -1; 1 \rangle - \{0\}$

Recuerde:

Sea: $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a = \sqrt[m]{a^m}$, $m \neq 0$

Solución:

(1°) **Ordenando en el 2° sumando:**

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}-\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} \; ;$$

(2°) **Se logra hasta el momento:**

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \; ;$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \; ;$$

(3°) **Racionalizando a continuación:**

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-(1-x)}$$

$$\therefore \; \boxed{\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}}$$

11.7.16 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1} - \frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}+1} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}-1} \; ;$$

$a \in \mathbb{R} - \{ 1 ; -1 \}$

Recuerde:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow x-1=\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}^{\,2}+\sqrt[3]{x}+1\right)$

Solución:

(1°) **Asociando términos:**

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}-1}{\sqrt[3]{a}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)}\left(\sqrt[3]{a}^{2}+\sqrt[3]{a}+1\right)}{\cancel{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)}}-\frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)}\left(\sqrt[3]{a}-1\right)}{\cancel{\left(\sqrt[3]{a}+1\right)}}$$

(2°) **Simplificando:**

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2}+\cancel{\sqrt[3]{a}}+1-\cancel{\sqrt[3]{a}}+1$$

$$\therefore \boxed{\sqrt[3]{a}^{2}+2}$$

11.7.17 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$E=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}-\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right)\div\frac{a\sqrt{a^2-4}}{4}$$

Recuerde:

Identidad de Legendre:
$(x+y)^2-(x-y)^2 = 4xy$

Solución:

(1°) **Dando común denominador en los términos contenidos en el paréntesis.**

$$\Rightarrow E=\left(\frac{\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-4}\right)^2}{\left(a-\sqrt{a^2-4}\right)\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)}\right)\times\frac{4}{a\sqrt{a^2-4}}$$

(2°) **De acuerdo a Legendre en el "numerador" y la diferencia de cuadrados en el "denominador".**

$$\Rightarrow E=\left(\frac{4a\sqrt{a^2-4}}{a^2-a^2+4}\right)\times\frac{4}{a\sqrt{a^2-4}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\cancel{4a\sqrt{a^2-4}}}{\cancel{4}}\times\frac{4}{\cancel{a\sqrt{a^2-4}}}$$

$$\therefore \boxed{E=4}$$

11.7.18 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$y=\;n\left(\sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}-1}+\sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}+1}\right)\div\left(\sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}-1}-\sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}+1}\right)$$

$m, n \in \mathbb{R}^{+}-\{0\}$; $m>n$.

Recuerde:

(1°) $\quad a+b+2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$; $\quad$ (3°) $\quad \sqrt[-m]{a}=\dfrac{1}{\sqrt[m]{a}}$

(2°) $\quad a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;

Solución:

(1°) Reduciendo los términos repetidos.

$$\Rightarrow\quad \sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}+1}=\sqrt[-2]{\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{2\sqrt{mn}}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{mn}}{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2}} \quad \text{.....................} \ (1)$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt[-2]{\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}-1}=\sqrt[-2]{\frac{m+n-2\sqrt{mn}}{2\sqrt{mn}}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{mn}}{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2}} \quad \text{.....................} \ (2)$$

(2°) De (1) y (2) sustittuyendo en "γ":

$$y=\frac{n\left(\dfrac{\sqrt{2\sqrt{mn}}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{mn}}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{2\sqrt{mn}}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{mn}}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)}=$$

(3°) Extrayendo el factor:

$\sqrt{2\sqrt{mn}}$

$$\Rightarrow y=\frac{n\cancel{\sqrt{2\sqrt{mn}}}\left(\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)}{\cancel{\sqrt{2\sqrt{mn}}}\left(\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)}=n\frac{\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}+\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\cancel{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}}}{\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\cancel{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{n\left(\cancel{2}\sqrt{m}\right)}{\cancel{2}\sqrt{n}}=\frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}^{\cancel{2}}\sqrt{m}}{\cancel{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore\ \boxed{y=\sqrt{mn}}$$

11.7.19 **Ejercicio Explicativo**

Si: $U_m=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right]$

Efectuar:

$V=U_m{}^2+U_{m-1}{}^2 \qquad m\in\mathbb{Z}^+.$

Solución:

(1°) **Haciendo el cambio**:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=p\ ;\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}=q;\quad \Rightarrow\quad p+q=1;\quad p-q=\sqrt{5};\quad pq=-1$$

$$\Rightarrow U_m=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[p^m-q^m\right]\ ;$$

Considerando "m" par ; "m - 1" **impar**

(2°) **Sustituyendo sobre "V":**

$$\Rightarrow V=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[p^m-q^m\right]\right\}^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[p^{m-1}-q^{m-1}\right]\right\}^2;$$

(3°) **Efectuando:**

$$\Rightarrow V=\frac{1}{5}\left[p^{2m}+q^{2m}-2\underbrace{(pq)^m}_{-1}+p^{2m-2}+q^{2m-2}-2\underbrace{(pq)^{m-1}}_{-1}\right];$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{5}\left[\underbrace{p^{2m}+p^{2m-2}}+\underbrace{q^{2m}+q^{2m-2}}-2+2\right];$$

(4°) **Como: pq = - 1**

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{q}\ ;\ q = -\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{5}\left[p^{2m-1} + \underbrace{\left(p+\frac{1}{p}\right)}_{-q} + q^{2m-1}\underbrace{\left(q+\frac{1}{q}\right)}_{-p}\right];$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{5}\left[p^{2m-1}(p-q) - q^{2m-1}(p-q)\right];$$

$$\Rightarrow V = \frac{p-q}{5}\left[p^{2m-1} - q^{2m-1}\right];$$

(5°) **Como $p - q = \sqrt{5}$**

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[p^{2m-1} - q^{2m-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[p^{2m-1} - q^{2m-1}\right]$$

$$\therefore \boxed{V = U_{2m-1}}$$

11.7.20 **Ejercicio Explicativo**

Si : $a_m = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m$

$b_m = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m - \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m$

Efectuar:

$$K = a_m\, b_n + \frac{1}{2^n}\, b_{m-n}$$

$m, n \in \mathbb{Z}^+$

Solución:

(1°) **Haciendo el cambio:**

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}} = p\ ;\quad 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = q\ ;\quad \Rightarrow\quad p+q = 2\ ;\ pq = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ a_m = p^m + q^m$ .... (1)

$\quad\ \ b_m = p^m - q^m$ .... (2)

(2°) $$\Rightarrow k = \left(p^m + q^m\right)\left(p^n - q^n\right) + \frac{1}{2^n}\left(p^{m-n} - q^{m-n}\right);$$

$$\Rightarrow k = p^{m+n} - q^{m+n} - p^m q^n + p^n q^m + p^n q^n\left(p^{m-n} - q^{m-n}\right) \text{ ; pues: } \quad pq = \frac{1}{2}$$

implica $(pq)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow k = p^{m+n} - q^{m+n} - \underbrace{\overbrace{p^m q^n - p^n q^m + p^m q^n}^{\text{son opuestos}}}_{\text{son opuestos}} - p^n q^m$$

$$\Rightarrow k = p^{m+n} - q^{m+n}$$

$$\therefore \boxed{k = b_{m+n}}$$

11.7.21 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$E = \left[\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-3\right)\left(\sqrt{45}+9\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}\right]\times 5$$

Recuerde:

que la siguiente identidad es igual:

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Solución:

(1°) $$E = \left[\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-3\right)\left(\sqrt{45}+9\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}\right]\times 5$$

dividiendo la igualdad entre 5 se tiene:

$$\frac{E}{5} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-3\right)\left(\sqrt{45}+9\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}$$

(2°) **Además:** $\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = 3\sqrt{5}$

Reemplazando:

$$\frac{E}{5} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-3\right)\left(3\sqrt{5}+9\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{E}{5} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}-3\right)3\left[\left(\sqrt{5}+3\right)\right]}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}$$

(3°) **De la expresión se tiene que:** $\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}-3\right)=5-9$

es una diferencia de cuadrados.

$$\Rightarrow\ \frac{E}{5}=\frac{3\left(\sqrt{5}-2\right)\left(5-9\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\frac{-12\left(\sqrt{5}-2\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}$$

$$\frac{E}{5}=\frac{-12\left(\sqrt{5}-2\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}=\frac{-12\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{5\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}$$

$$E=\frac{-12\left(\sqrt{10}+5\right)5}{5\left(2-5\right)}$$

(4°) **Racionalizando y multiplicando por las conjugadas correspondientes:**

$$\therefore\quad \boxed{E=4\left(5+\sqrt{10}\right)}$$

11.7.22 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$E=\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}}{\sqrt{5}}\right]^{1/2}$$

Recuerde:

i) q' $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

es una equivalencia algebraica usual.

Solución:

(1°) $$E=\left[\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{3}}{\sqrt{5}}\right]^{1/2}\qquad\text{......................}\ (\text{I})$$

Haciendo que: $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(2°) **Reemplazando en (I) se tiene:**

$$E=\left[\frac{a^3-b^3}{\sqrt{5}}\right]^{1/2}$$

(3°) **Además:**

$$E=\left[\frac{[\,a-b\,][\,a^2+ab+b^2\,]}{\sqrt{5}}\right]^{1/2}$$

pero: $a-b=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{5}$

(4°) **Reemplazando y simplificando se tiene:**

$$E^2=\frac{\cancel{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]}{\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$E^2=\frac{1}{4}\left[\,[2(1+5)]+(-4)\,\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{E^2=2\quad\Rightarrow\quad E=\sqrt{2}}$$

11.2.23 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular:

$$H=\left[\!\left[-\frac{[\![8.45]\!]}{\sqrt{8+\sqrt{8}}}-\frac{[\![8.55]\!]}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}-\frac{\sqrt{[\![8.65]\!]}}{\sqrt{8+\sqrt{8}}}+\frac{\sqrt{[\![8.75]\!]}}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}\right]\!\right]$$

donde: $[\![\ \ ]\!]$ es la simbología del máximo entero.

Recuerde:

La siguiente equivalencia es usual.

i) $\sqrt{a+\sqrt{a}}+\sqrt{a-\sqrt{a}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a(a-1)}}$

El máximo entero de un número real se define por:

ii) $[\![x]\!]=n \iff n\leq x<n+1$

Solución:

(1°) **Realizamos el análisis de la expresión contenida en el máximo entero: (I)**

$$I=-\frac{8}{\sqrt{8+\sqrt{8}}}-\frac{8}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8+\sqrt{8}}}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

(2°) **Realizando las asociaciones necesarias tendremos:**

$$I=\frac{-8-\sqrt{8}}{\sqrt{8+\sqrt{8}}}+\frac{-8+\sqrt{8}}{\sqrt{8-\sqrt{8}}}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

(3°) **Simplificando en 2, luego de la ordenación:**

$$I=-\frac{\sqrt{8+\sqrt{8}}^{\,\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{8+\sqrt{8}}}}-\frac{\sqrt{8-\sqrt{8}}^{\,\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{8-\sqrt{8}}}}=-\sqrt{8+\sqrt{8}}-\sqrt{8-\sqrt{8}}\quad\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

(4°) **En la expresión obtenida en (39 apliquemos la conocida identidad si a = 8)**

$$I=-\left(\sqrt{8+\sqrt{8}}+\sqrt{8-\sqrt{8}}\right)$$

$$I=-\left(\sqrt{16+2\sqrt{56}}\right);\ \text{asumiendo } \sqrt{56}=7.ab \text{ con } a<5$$

$$I=-\left(\sqrt{30.\overline{mn}}\right)$$

$$I=-5.\overline{pq}$$

(5°) **Podemos calcular H, debido a que:**

$$H=[\![I]\!]$$

$$H=[\![-5.pq]\!]$$

$$\therefore\quad \boxed{H=-6}$$

11.7.24 **Ejercicio Explicativo:**

Ejecutar:

$$E=\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\frac{\sqrt[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1]{3}}{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{\dfrac{\sqrt[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1]{3}}{\sqrt[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1]{3}}}}}$$

Solución:

(1°) **De examinar la sentencia, convengamos en el cambio siguiente:**

$$\sqrt[\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1]{3}=x\quad\Rightarrow\quad x^{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=3$$

$$\sqrt[3]{3}=y\quad\Rightarrow\quad y^{3}=3$$

(2°) **La expresión será:**

$$E=\sqrt[y]{\dfrac{x}{\sqrt[y]{\dfrac{x}{\sqrt[y]{x}}}}}=\dfrac{\sqrt[y]{x}}{\dfrac{\sqrt[y^2]{x}}{\sqrt[y^3]{x}}}=x^{\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^3}}$$

$$E=x^{\frac{y^2-y+1}{y^3}}$$

(3°) **Sustituyendo y por su equivalente:**

$$E=\left(x^{\left(x^{\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)}\right)}\right)^{1/3}\quad ;\quad x^{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=3$$

$$E=(3)^{1/3}$$

$$\therefore\quad \boxed{E=\sqrt[3]{3}}$$

11.7.25 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar:

$$K=\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-\sqrt[7]{a}}}}{\sqrt{a+\sqrt[14]{a}}+\sqrt{a-\sqrt[14]{a}}}\qquad a\neq 0$$

Recuerde:

a) Sea: $x\geq 0$

$$\Rightarrow\ x=\left(\sqrt{x^2}\right)$$

b) Sea: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$$\Rightarrow\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=\left(\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\right)$$

$$=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

Solución:

(1°) **Al ordenar el denominador como:**

$$\sqrt{a+\sqrt[14]{a}}+\sqrt{a-\sqrt[14]{a}}=\left(\left(\sqrt{a+\sqrt[14]{a}}+\sqrt{a-\sqrt[14]{a}}\right)^2\right)^{1/2}$$

(2°) **Ejecutando el cuadrado del binomio:**

$$= \left(a + \cancel{\sqrt[14]{a}} + a - \cancel{\sqrt[14]{2}} + 2\sqrt{a^2 - \sqrt[14]{a}^{\,2}} \right)^{1/2}$$

$$= \left(2a + 2\sqrt{a^2 - \sqrt[7]{a}} \right)^{1/2}$$

(3°) **La expresión K será:**

$$K = \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - \sqrt[7]{a}}}}{\sqrt{2\left(a + \sqrt{a^2 - \sqrt[7]{a}} \right)}}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{K = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

11.7.26 **Ejercicio Explicativo:**

Ejecutar:

$$E = \sqrt{5 + \sqrt{23}} \left(\sqrt{47 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \right)$$

Recuerde:

a) El axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma:
$a (b + c) = ab + ac$

b) Los radicales dobles:
$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Solución:

(1°) **Por el axioma de distribución:**

$$E = \sqrt{\left(5 + 2\sqrt{3} \right)\left(47 - 2\sqrt{3} \right)} - \sqrt{\left(5 + 2\sqrt{3} \right)\left(8 - 2\sqrt{3} \right)}$$

(2°) **Ejecutando las multiplicaciones:**

$$E = \sqrt{235 - 10\sqrt{3} + 94\sqrt{3} - 12} - \sqrt{40 - 10\sqrt{3} + 16\sqrt{3} - 12}$$

simplificando:

$$E = \sqrt{243 + 84\sqrt{3}} - \sqrt{28 + 6\sqrt{3}} \quad \text{.................................} \quad (A)$$

(3°) **La diferencia esta compuesta por radicales dobles:**

$$\sqrt{243+84\sqrt{3}} = \sqrt{27}+1$$

$$\sqrt{243+2\sqrt{3\times 42^2}} = \sqrt{27}+\sqrt{196}$$

(4°) **La expresión E será:**

$$E = \sqrt{27}+\sqrt{196}-\sqrt{27}-1$$

$$E = \sqrt{196}-1$$

$$\therefore \quad \boxed{E = 13}$$

11.8 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: LA RADICACION

(1) Considere que:

$$X = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Calcular: $E = 10x^2 - 18xy + 10y^2$

Rpta: $E = 962$

(2) Simplificar:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\llbracket 7.20 \rrbracket}{\sqrt{7+\sqrt{7}}}+\frac{\llbracket 7.35 \rrbracket}{\sqrt{7+\sqrt{7}}}+\frac{\sqrt{\llbracket 7.60 \rrbracket}}{\sqrt{7+\sqrt{7}}}-\frac{\sqrt{\llbracket 7.75 \rrbracket}}{\sqrt{7-\sqrt{7}}}\right]$$

Rpta: $K = \sqrt{7+\sqrt{42}}$

(3) Simplificar:

$$E = \frac{1}{2}\left\llbracket\frac{\llbracket 10.30 \rrbracket}{\sqrt{10+\sqrt{10}}}+\frac{\llbracket 10.40 \rrbracket}{\sqrt{10-\sqrt{10}}}+\frac{\sqrt{\llbracket 10.50 \rrbracket}}{\sqrt{10+\sqrt{10}}}-\frac{\sqrt{\llbracket 10.60 \rrbracket}}{\sqrt{10-\sqrt{10}}}\right\rrbracket^2$$

Rpta: $E = 16$

(4) Si:

$$F_{(x)} = \frac{\sqrt[x]{\sqrt[3x]{x}-1}\;\sqrt[\sqrt[3]{x^2}]{\left(\sqrt[3x]{x}+1\right)\left(\sqrt[3x-12]{x}-1\right)}}{\sqrt[x]{\left(\sqrt[x]{2}+1\right)\left(2\sqrt[x]{2}-2\right)}\;\sqrt{\left(\sqrt[x]{2}+1\right)^2\left(\sqrt[x]{2}-1\right)^2}}$$

Calcular: $F(8)$

Rpta: 1

(5) Simplificar:

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$$

Rpta: $\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}$

(6) Simplificar:

$$\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$$

Rpta: $\sqrt{2}+1$

(7) Simplificar:

$$\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$$

Rpta: $\sqrt{3}-1$

(8) Simplificar:

$$\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$$

Rpta: $\sqrt{5}-2$

(9) Simplificar:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Rpta: $2\sqrt{2}$

(10) Simplificar:

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

Rpta: $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(11) Simplificar:

$$\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$$

Rpta: -2

(12) Simplificar:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\frac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{[\![5\sqrt{8}-6]\!]}$$

Rpta: 256

(13) Evaluar

$$4x^3+2x^2-8x+7$$

Para $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

Rpta: 10

(14) Evaluar

$$3x^2+4xy-3y^2$$

Para $x=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $y=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Rpta: $\frac{1}{3}\left(56\sqrt{10}+12\right)$

(15) Simplificar:

$$\left[\frac{(a+2)^2(a-3)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-9}}{(a-2)^2(a+3)+\left(a^2-4\right)\sqrt{a^2-9}}\right]\left[\frac{(a-2)}{(a+2)}\right]\sqrt{a+3}$$

Rpta: $\sqrt{a-3}$

(16) Simplificar:

$$\frac{1-mz}{1+mz}\sqrt{\frac{1+nz}{1-nz}} \quad ; \quad z=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n}-1}$$

Rpta: -1 ; si $m>n$
1 ; si $m<n$

(17) Simplificar:

$$\left(\frac{m-\sqrt{y}}{m+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{m+\sqrt{y}}{m-\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{\sqrt{m^2-y}}$$

Si: $y = 4(m-1)$

Rpta: 2 si $m>2$
-2 ; $1\leq m<2$

(18) Simplificar:

$$\frac{\left(5-\sqrt{24}\right)\left(\sqrt{75}+\sqrt{50}\right)}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$$

Rpta: 1

(19) Simplificar:

$$\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{\left(3-2\sqrt[4]{5}\right)\left(3+2\sqrt[4]{5}\right)}$$

Rpta: $14+6\sqrt{5}$

(20) Simplificar:

$$\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3\left(\sqrt{3}-1\right)^2-2}$$

Rpta: -2

CAPITULO 12

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS "C"

12.1 **EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS "ℂ"**

Definición.- Al conjunto de elementos de la forma: $z = a + bi = (a ; b)$; a y $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ se denomina conjunto de los números complejos "C".

$\Rightarrow \mathbb{C} = \{ a + bi = (a ; b) / a \wedge b \in \mathbb{R} ; i^2 = -1 \}$

12.2 **PROPIEDADES DEL SISTEMA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS "ℂ".**

El sistema de los números complejos es el conjunto "ℂ" y dos operaciones que están regidas por las siguientes propiedades análogas a las del sistema de los Números Reales:

(1°) **Propiedad de Clausura, Estabilidad o de "Cerradura" de la Adición en ℂ.**

Si: $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \Rightarrow a + b \in \mathbb{C}$

"La suma de números complejos es otro complejo".

(2°) **Ley Conmutativa de la Adición en ℂ.**

Si: $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \Rightarrow a + b = b + a$

(3°) **Ley Asociativa de la Adición en ℂ.**

Si: a, b y $c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$

(4°) **Modulativa o Existencia de elemento neutro aditivo.**

Existe el complejo: $0 = (0 ; 0)$, tal que:

para todo $z \in \mathbb{C}$: $z + 0 = 0 + z = z$

(5°) **Existencia del elemento opuesto, o invertiva.**

Si: $z = (a , b)$, entonces existe otro número complejo $z^* = (-a, -b)$; tal que:

$z + z^* = (0 ; 0) = 0$

(6°) **Propiedad de Clausura, Estabilidad o de Cerradura de la multiplicación en $\mathbb{C}$.**

Si: $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \Rightarrow ab \in \mathbb{C}$

"El producto de números complejos es otro complejo".

(7°) **Ley Conmutativa de la multiplicación.**

Si: $a \in \mathbb{C}$ y $b \in \mathbb{C} \Rightarrow ab = ba$

(8°) **Ley asociativa de la multiplicación.**

Si: $a, b, c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow abc = a(bc) = (ab)c$

(9°) **Modulativa o Existencia del elemento neutro multiplicativo.**

Existe el número complejo ([illegible] ; 1)

tal que $z \times 1 = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$

(10°) **Existencia del elemento recíproco o invertiva.**

Si: $z \in \mathbb{C}$; $z \neq (0, 0)$ existe otro número complejo denotado por z^{-1}, tal que:

$zz^{-1} = 1$

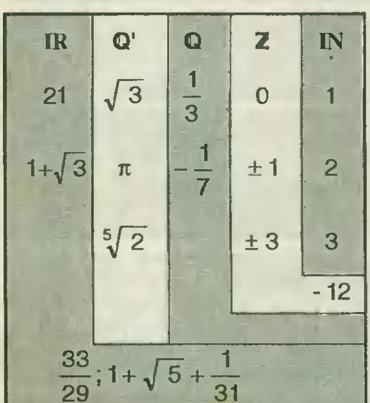
(11°) **Ley distributiva del producto respecto a la suma.**

Si: $a, b, c \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow a(b + c) = ab + ac$

12.2 AMPLIACION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES $\mathbb{R}$

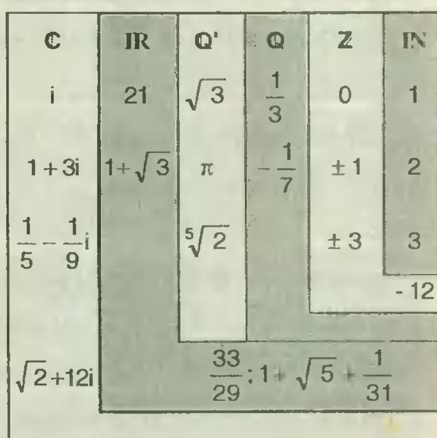
CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES:



Relación:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

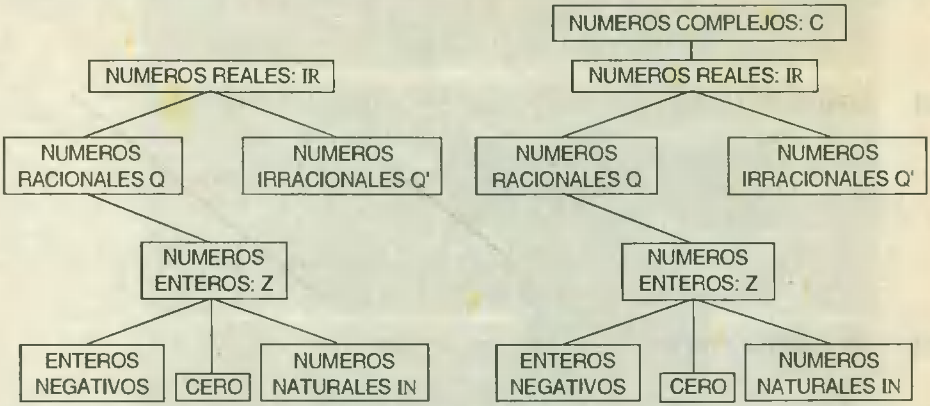
CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS:



Relación:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

12.3 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS ES UNA AMPLIACION DEL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES.



12.4 EN TODO NUMERO COMPLEJO: $z = a + bi = (a ; b)$

$\Rightarrow$ "a" es la componente real.

$\Rightarrow$ "b" es la componente imaginaria.

$\Rightarrow$ "i" es la unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$

$\Rightarrow$ "z" es una variable compleja.

$\Rightarrow$ $a^2 + b^2 = \rho^2$, es la norma del complejo.

$\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$; es el **módulo** del complejo.

$\Rightarrow$ $\rho = |a + bi| = |(a ; b)| = \text{Mod}(a + bi) = \text{Mod}(a ; b) = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow$ $z = (a - bi) = (a ; -b)$ es el complejo **CONJUGADO** de $a + bi$

$\Rightarrow$ $z^* = (-a - bi) = (-a , -b)$ es el complejo **OPUESTO** de $a + bi$

$\Rightarrow$ $\rho = \text{Mod}(a + bi) = \text{Mod}(a - bi) = \text{Mod}(-a - bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow$ $z_1 = a + 0i = (a ; 0)$; z_1 es un # real.

$\Rightarrow$ $z_2 = 0 + bi = (0 ; b)$; z_2 es un # imaginario puro.

12.5. ALGEBRA DEL NUMERO COMPLEJO $z = a + bi = (a ; b)$

(1°) Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a ; b) + (c ; d) = (a + c ; b + d)$

(2°) Diferencia: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

ó $(a ; b) - (c ; d) = (a - c ; b - d)$

(3°) Producto: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

ó $(a ; b)(c ; d) = (ac - bd ; bc + ad)$

(4°) **Cociente:** $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$ $\quad c + di \neq 0$

ó $\quad \dfrac{(a;b)}{(c;d)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} ; \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$

(5°) **Raíz Cuadrada:** (Mediante la regla de los radicales dobles)

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{a+\rho}{2}} \pm \sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\, i \;;\; \rho = \sqrt{a^2+b^2} = \text{Módulo}$$

$$\sqrt{(a;\pm b)} = \left(\sqrt{\frac{a+\rho}{2}} ; \pm \sqrt{\frac{\rho-a}{2}} \right) ; \rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

(6°) **Potenciación:** (Según el Binomio de Newton)

$$(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} (bi)^k \;;\; n \in \mathbb{N}$$

12.6. MODULO Y ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO "z" $z = a + bi = (a;b)$

(1°) **Módulo.-** El valor absoluto o módulo de un número complejo $Z = (a;b)$ es la longitud del "vector" $(a;b)$; es decir: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

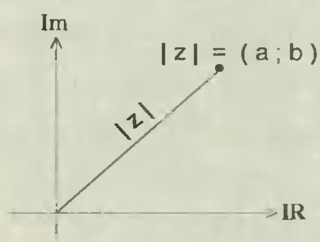
$|z| = \rho$

$|z| = \text{Mod}(a+bi)$

$|z| = |a+bi|$

$|z| = |(a,b)|$

$z^2 = a^2 + b^2$ **(Norma)**

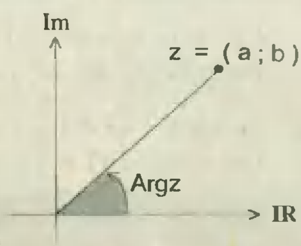


(2°) **Argumento.-** El argumento o amplitud de un número complejo distinto de cero $z = (a;b)$, es escrito como Argz ó Ampz es una medida en radianes del ángulo de inclinación del "vector" $(a;b)$.

$\text{Argz} = tg^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$\text{Argz} = \text{Ampz}$

$\text{Arg}(a+bi) = tg^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$



(3°) **Propiedades del Módulo $|Z|$**

$|z| \geq 0$ .... (I)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } |z| = 0 \\ \Rightarrow z = 0 \end{array}\right\}$ .... (II)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } z_1 ; z_2 \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \end{array}\right\}$ .... (III)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \;;\; z_2 \neq 0 \\ \Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \end{array}\right\}$ .... (IV)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } r \in \mathbb{R} \;;\; z \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow |rz| = |r||z| \end{array}\right\}$ .... (V)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } z \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow |z^n| = |z|^n \end{array}\right\}$ .... (VI)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si: } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \end{array}\right\}$ .... (VII)

$\left\{\begin{array}{l} \text{si } z \text{ y } \overline{z} \text{ son complejos conjugados} \\ z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \end{array}\right\}$ .... (VIII)

(4°) La representación geométrica de los números complejos permiten otras notaciones:

Par Cartesiano : $(a ; b)$ — a: Componente Real; b: Componente Imaginaria

Par Polar : $(|z| ; \text{Arg}z)$ — $|z|$: Módulo; $\text{Arg}z$: Argumento

Donde: $a = |z| \cos(\text{Arg}z)$

$b = |z| \text{ sen}(\text{Arg } z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z = (a ; b) &= (|z| ; \text{Arg}z) \\ &= |z| (\cos \text{Arg}z ; \text{sen Arg}z) \\ &= |z| (\cos \text{Arg}z + i \text{ sen Arg } z) \\ &= |z| \text{ cis}(\text{Arg } z) \end{aligned}$$

12.7. ESTUDIO GRAFICO DE UN Nº COMPLEJO: MODULO : $\rho = \sqrt{a^2+b^2}\ ;\ |\rho > 0$

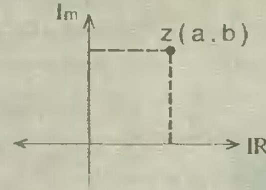
ARGUMENTO : $\alpha = \text{Arc tg}\, b/a;\ {}^{-}\infty < \infty < {}^{+}\infty$

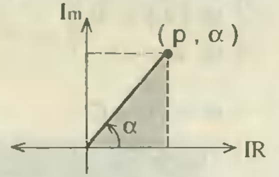
12.7.1 $z = (a\,;b)$

$a > 0$

$b > 0$

($z \in$ 1° cuadrante)





$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |\,a+bi\,|$

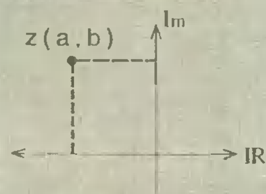
$\alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

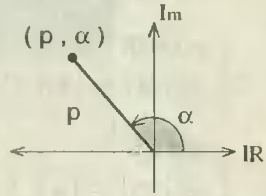
12.7.2 $z = (a\,;b)$

$a < 0$

$b > 0$

($z \in$ 2° cuadrante)





$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |\,a+bi\,|$

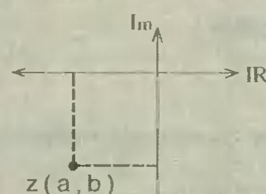
$\alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

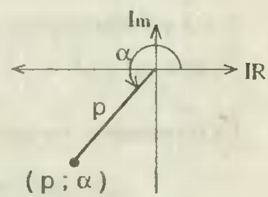
12.7.3 $z = (a\,;b)$

$a < 0$

$b < 0$

($z \in$ 3° cuadrante)





$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |\,a+bi\,|$

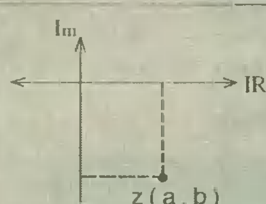
$\alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

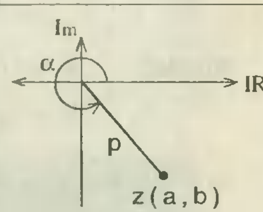
12.7.4 $z = (a\,;b)$

$a > 0$

$b < 0$

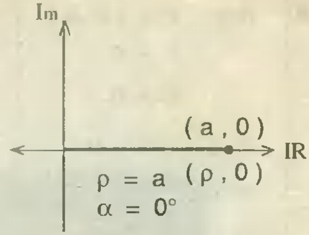
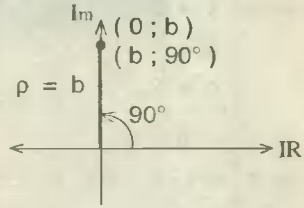
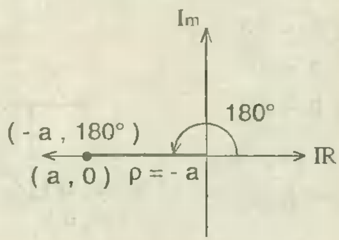
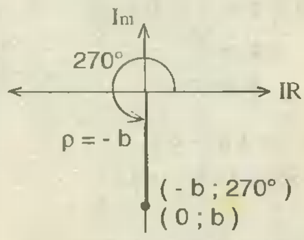
($z \in$ 4° cuadrante)





$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |\,a+bi\,|$

$\alpha = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

12.7.5	$z = a$ (# Real positivo) $= (a ; 0)$ $a > 0$ $b = 0$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + 0^2} = a \\ \alpha = 0^0 \\ z = a = a \text{ cis } 0^0 \end{array}\right\}$ **$z \in \mathbb{R}^+$**	
12.7.6	$z = bi$ (# imaginario puro) $z = (0 ; b)$ $\left\{\begin{array}{l} a = 0 ; b > 0 \\ \rho = \sqrt{0^2 + b^2} = b \\ \alpha = 90^\circ \\ z = bi = b \text{ cis } 90^\circ \end{array}\right\}$ **$z \in \text{Im}^+$**	
12.7.7	$z = a$ (# Real negativo) $z = (a ; 0)$ $a < 0$ $b = 0$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{a^2 + 0^2} = -a \\ \alpha = 180^\circ \\ z = a = -a \text{ cis } 180^\circ \end{array}\right\}$ **$z \in \mathbb{R}^-$**	
12.7.8	$z = bi$ (# imaginario puro) $z = (o ; b)$ $a = 0$ $b < 0$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{0^2 + b^2} = -b \\ \alpha = 270^\circ \\ z = -b \text{ cis } 270^\circ \end{array}\right\}$ **$z \in \text{Im}^-$**	

Estudio Gráfico del Conjugado ($\overline{Z}$) y Opuesto de un # Complejo (Z^*)

12.7.9 Sea: $z = (a, b)$

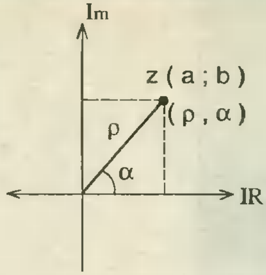
$a > 0$

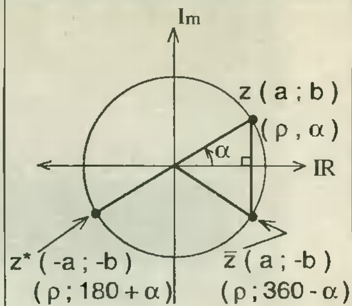
$b > 0$

$\Rightarrow \overline{z} = (a; -b)$

$\Rightarrow z^* = (-a; -b)$

(z ∈ 1° cuadrante)





12.7.10 Sea: $z = (a, b)$

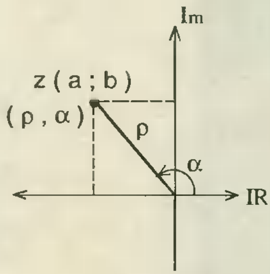
$a < 0$

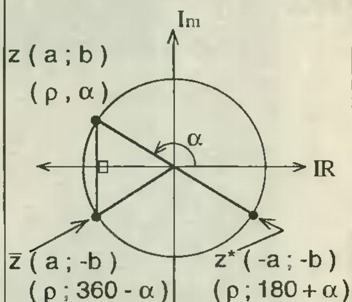
$b > 0$

$\Rightarrow \overline{z} = (a; -b)$

$\Rightarrow z^* = (-a; -b)$

(z ∈ 2° cuadrante)





12.7.11 Sea: $z = (a; b)$

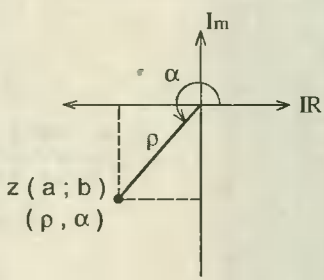
$a < 0$

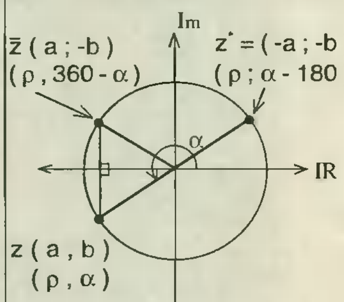
$b < 0$

$\Rightarrow \overline{z} = (a; -b)$

$\Rightarrow z^* = (-a; -b)$

(z ∈ 3° cuadrante)





12.7.12 Sea: $z = (a; b)$

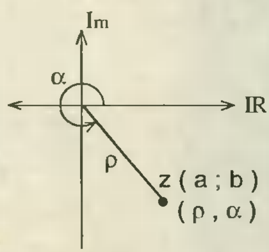
$a > 0$

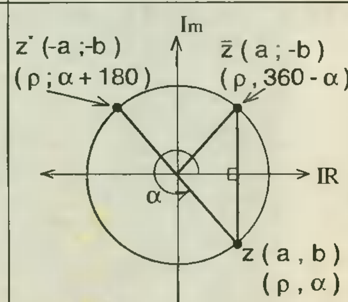
$b < 0$

$\Rightarrow \overline{z} = (a; -b)$

$\Rightarrow z^* = (-a; -b)$

(z ∈ 4° cuadrante)





12.8 **NOTACIONES DEL NUMERO COMPLEJO:**

$z = a + bi$; $a + bi$ Es la forma cartesiana o canónica.

$$z = \underbrace{(\underset{\text{Componente Real}}{a} ; \underset{\text{Componente Imaginaria}}{b})}_{\text{Par ordenado o par cartesiano}} = \underbrace{(\underset{\text{Módulo}}{\rho} ; \underset{\text{Argumento}}{\alpha})}_{\text{Par ordenado Polar}} = \underbrace{\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}_{\text{Forma Trigonométrica}} = \underbrace{\rho\,\text{cis}\,\alpha}_{\text{Notación cis}} = \underbrace{\rho \angle\alpha}_{\text{Notación Fasorial ó Electrónica}} = \underbrace{\boxed{\rho e^{\underset{\text{En Rad.}}{i\alpha}}}}_{\text{Forma exponencial ó Forma de Euler}}$$

Sea: $z = a + bi = (a ; b)$; $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z = a + bi = \rho\,\text{cis}\,a = \rho\angle\alpha = e^{i\alpha}$

12.9 **ALGEBRA DEL NUMERO COMPLEJO EN LA FORMA CIS α**
$(z = a + bi = \rho\,\text{cis}\,\alpha)$

12.9.1	**MULTIPLICACION**	Sean: $z_1 = \rho_1 \text{ cis } \alpha$ $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \beta$ $\Rightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \text{ cis }(\alpha + \beta)$	$\text{Mod}\,\lvert z_1 z_2 \rvert = \rho_1\rho_2$ $\text{Arg}(z_1 z_2) = \alpha + \beta$
12.9.2	**DIVISION**	Sean: $z_1 = \rho_1 \text{ cis } \alpha$ $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \beta$ $\Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) \text{cis}(\alpha - \beta)$	$\text{Mod}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ $\text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \alpha - \beta$
12.9.3	**POTENCIACION**	Sea: $z^n = (\rho \text{ cis } \alpha)^n$ $\Rightarrow z^n = \rho^n \text{ cis }(n\alpha)$	$\text{Mod}(z^n) = \rho^n$ $\text{Arg}(z^n) = n\alpha$
12.9.4	**RADICACION**	Sea: $\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\rho \text{ cis } \alpha}$ $\Rightarrow \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\rho} \text{ cis}\left(\dfrac{\alpha}{m}\right)$	$\text{Mod}\left(\sqrt[m]{z}\right) = \sqrt[m]{\rho}$ $\text{Arg}\left(\sqrt[m]{z}\right) = \dfrac{\alpha}{m}$
12.9.5	**LOGARITMACION**	Sea: $z = a + bi = \rho e^{i\alpha}$; α en radianes. $\Rightarrow \log z = \log(a + bi) = \log\rho + i\,\alpha \log e$	
12.9.6	**EQUIVALENCIAS**	Sea: $z = \text{cis}\,\alpha$ $\Rightarrow \text{cis}\,\alpha = \text{cis}(\alpha + 360\,k)$; $k \in \mathbb{Z}$	
12.9.7	**LA IGUALDAD**	Sea: $\text{cis}\,\alpha = \text{cis}\,\beta$ $\Rightarrow \alpha = \beta + 360\,k$; $k \in \mathbb{Z}$	
12.9.8	**TEOREMA DE ABRAHAM DE MOIVRE**	Sea: $\sqrt[m]{a + bi}$; $m \in \mathbb{N} \geq 2$ $\Rightarrow \sqrt[m]{a + bi} = \rho^{1/m} \text{ cis}\left(\dfrac{\alpha + 360\,k}{m}\right)$ $(k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots ; (m - 1))$	

12.10 POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA (i ; $i^2 = -1$)

12.10.1	i^n ; $n \in \mathbb{N}$ ($i^2 = -1$)	$i^0 = 1$ $i^1 = i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = 1$	$i^5 = i^4\, i = i = i$ $i^6 = i^4\, i^2 = i^2 = -1$ $i^7 = i^4\, i^3 = i^3 = -i$ $i^8 = i^4\, i^4 = i^4 = 1$	$i^{4n} = 1$ $i^{4n+1} = i^1$ $i^{4n+2} = i^2$ $i^{4n+3} = i^3$ $i^{4n+r} = i^r$
12.10.2	i^n ; $n \in \mathbb{Z}^-$ $\left(i^{-1} = \frac{1}{i}\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{i}{i^2} \quad i^{-1} = -i \right)$	$i^{-1} = -i$ $i^{-2} = -1$ $i^{-3} = i$ $i^{-4} = 1$	$i^{-5} = i^{-4}\, i^{-1} = i^{-1} = -i$ $i^{-6} = i^{-4}\, i^{-2} = i^{-2} = -1$ $i^{-7} = i^{-4}\, i^{-3} = i^{-3} = i$ $i^{-8} = i^{-4}\, i^{-4} = i^{-4} = 1$ $i^{-9} = \left(i^{-4}\right)^2 i^{-1} = i^{-1} = -i$	$i^{\pm 4n} = 1$ $i^{\pm 4n \pm r} = i^{\pm r}$
12.10.3	i^n ; $n \in \mathbb{Q} - \{ \mathbb{Z} \}$ ($i = \operatorname{cis} 90^\circ$)	$i^{1/2} = (\operatorname{cis} 90^\circ)^{1/2} = \operatorname{cis} 45^\circ$ $i^{1/3} = (\operatorname{cis} 90^\circ)^{1/3} = \operatorname{cis} 30^\circ$ $i^{1/4} = (\operatorname{cis} 90^\circ)^{1/4} = \operatorname{cis} 22.5^\circ$ $i^{3/5} = (\operatorname{cis} 90^\circ)^{3/5} = \operatorname{cis} 54^\circ$ $i^{-2/9} = (\operatorname{cis} 90^\circ)^{-2/9} = \operatorname{cis}(-20^\circ)$		$i^n = \operatorname{cis}(90^\circ \times n)$ (Valor Principal) $i^n = \operatorname{cis}(90^\circ + 360k)\, n$ $0 \leq k \leq n - 1$ (En General)
12.10.4	i^n ; $n \in \mathbb{C} - \{ \mathbb{R} \}$ $\left(i = e^{i\frac{\pi}{2}} \right)$	$i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ $i^{-i} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$ $i^{3+i} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{3+i} = e^{-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}i} = e^{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)}$ $i^{-2-5i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{-2-5i} = e^{\frac{5\pi}{2}-\pi i} = e^{\left(\frac{5\pi}{2};-\pi\right)}$		$i^{a+bi} = \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{a+bi}$ $= e^{\left(-b\frac{\pi}{2};\, a\frac{\pi}{2}\right)}$

12.11 LAS RAICES ALGEBRAICAS DE LA UNIDAD

12.11.1	$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{1} = \{ 1 ; w ; w^2 \}$; $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$; $\boxed{1 + w + w^2 = 0}$
12.11.2	$\sqrt[3]{b^3}$	$\sqrt[3]{b^3} = \{ b ; bw ; bw^2 \}$
12.11.3	$\sqrt[3]{-1}$	$\sqrt[3]{-1} = \{ -1 , -w ; -w^2 \}$

12.11.4	**POTENCIAS** $w^n ; n \in \mathbb{N}$	$w^0 = 1$ $w^3 = 1$ $w^{3k} = 1$	$w^{3k+1} = w$ $w^{3k+2} = w^2$ $\boxed{1 + w + w^2 = 0}$ $w^{3k+\alpha} = w^\alpha$
12.11.5	**POTENCIAS** $w^n ; n \in \mathbb{Z}^-$ $w^{-1} = \frac{1}{w}\left(\frac{w^2}{w^2}\right) = w^2$	$w^{-1} = w^2$ $w^{-3} = 1$ $w^{-4} = w^{-1} = w^2$ $w^{-5} = w^{-2} = w$	$w^{-3k} = 1$ $w^{-3k-1} = w^{-1} = w^2$ $w^{-3k-2} = w^{-2} = w$
12.11.6	$\sqrt[6]{1}$	$\sqrt[6]{1} = \{ 1 ; w ; w^2 ; -1 ; -w ; -w^2 \}$	
12.11.7	$\sqrt[6]{b^6}$; $b > 0$	$\sqrt[6]{b^6} = \{ b , bw ; bw^2 ; -b ; -bw ; -bw^2 \}$	
12.11.8	$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[4]{1} = \{ 1 ; -1 ; i ; -i \}$	
12.11.9	$\sqrt[4]{-1}$	$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i); \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i); \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i); \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \right\}$	
12.11.10	$\sqrt[5]{1}$	$\sqrt[5]{1} = \{ 1; Cis72: Cis144°: Cis216°; Cis288° \}$	
12.11.11	$\sqrt[5]{-1}$	$\sqrt[5]{-1} = \{ -1; -Cis72; -Cis144°; -Cis276°; -Cis288° \}$	
12.11.12	$\sqrt[6]{-1}$	$\sqrt[6]{-1} = \{ Cis30; Cis90; Cis150°; Cis210°; Cis270°; Cis330° \}$	

12.12 EJERCICIOS PROBLEMAS RESUELTOS

12.12.1 Ejemplo Explicativo

Hallar el producto de los pares ordenados que representan a elementos del conjunto C

$$E = (a ; b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} ; \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

$a, b \in \mathbb{R}$; a y b no son simultáneamente ceros.

***Recuerde*:**

El producto de un par de números complejos se realiza por la regla:

$$(p ; q) (s ; t) = (ps - qt ; pt + qs)$$

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo a la regla del producto de complejos en la forma de pares ordenados tendremos:**

$$E = (a;b)\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\underbrace{\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}}_{\text{Parte Real}};\underbrace{\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}}_{\text{Parte Imaginaria}}\right)$$

(2°) **Ordenando:** $= \left(\overbrace{\cancel{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}};\frac{0}{a^2+b^2}\right)$

(3°) **Finalmente:** $= (1;0)$

$\therefore$ $\boxed{E = 1 \ : \ \text{\# Real exclusivamente}}$

12.12.2 **Ejemplo Explicativo**

Obtener el par ordenado que represente al cociente de: $\dfrac{(2;3)}{(5;6)}$

sabiendo que los mismos son elementos del conjunto C.

Recuerde:

La división de dos números complejos:

$$\frac{p+qi}{m+ni} = \frac{(p,q)}{(m,n)} = \left(\frac{pm+nq}{m^2+n^2};\frac{-pn+qm}{m^2+n^2}\right)$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la regla de división de pares ordenados, tendremos:**

$$\Rightarrow \frac{(2;3)}{(5;6)} = \left(\frac{2\times5+3\times6}{\underbrace{5^2+6^2}_{\text{Norma}}};\frac{-2\times6+5\times3}{\underbrace{5^2+6^2}_{\text{Norma}}}\right);$$

(2°) **Recordar que la Norma es el cuadrado del módulo, es decir** $\rho^2 = a^2+b^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{10+18}{61};\frac{-12+15}{61}\right)$$

$$\therefore \boxed{\frac{(2;3)}{(5;6)} = \left(\frac{28}{61};\frac{3}{61}\right)}$$

12.12.3 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar: $\dfrac{(a^2+ab+a)\sqrt{-1}-a-b-1}{(a+b+1)\sqrt{-1}}$

Recuerde:

$i^{-1} = -i \;;\; \dfrac{1}{i} = -i$

$i^2 = -1$

Solución:

(1°) **Al ordenar las componentes correspondientes**

$\Rightarrow \dfrac{-(a+b+1)+a(a+b+1)i}{(a+b+1)i}$; se observan factores comunes

(2°) $\dfrac{\cancel{(a+b+1)}}{\cancel{(a+b+1)}}\left[\dfrac{-1+ai}{i}\right]$; luego de simplificar

$\Rightarrow (-1+ai)(-i)$

(3°) $\Rightarrow i - ai^2$

$\Rightarrow i + a$

$$\therefore \boxed{\dfrac{(a^2+ab+a)\sqrt{-1}-a-b-1}{(a+b+1)\sqrt{-1}} = a+\sqrt{-1}}$$

12.12.4 Ejemplo Explicativo:

Efectuar la división de números complejos siguiente:

$$y = \dfrac{b(r+i)+a(1-ri)}{-ri+1};\; a, b, r \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

La división de números complejos

$$\dfrac{m+ni}{s+ri} = \dfrac{(m.n)}{(s;r)}\left(\dfrac{ms+nr}{s^2+r^2};\dfrac{mr-ns}{s^2+r^2}\right)$$

Solución:

(1°) **Escribiendo el # complejo en forma de par ordenado, en cada caso nos proporciona lo siguiente:**

(2°) $y = \dfrac{br+bi+a-ari}{1-ri}$; efectuando lo indicado.

$y = \dfrac{(a+br;-ar+b)}{(1;-r)}$; ubicando los componentes correspondientes.

(3°) $y = \dfrac{(a+\cancel{br}+ar^2-\cancel{br}\;;\;\cancel{ar}+br^2-\cancel{ar}+b)}{1+r^2}$; simplificando luego de usar la regla de división de pares ordenados complejos.

$$y = \left(\frac{a(1+r^2)}{1+r^2} ; \frac{b(1+r^2)}{1+r^2} \right)$$

$y = (a ; b)$

$\therefore \boxed{y = a + bi}$

12.12.5 Ejemplo Explicativo

Hallar "a" y "b" si se verifica la igualdad siguiente:

$$\frac{ai}{1+bi} = \frac{3a+4i}{a+3b} \quad ; \ a, b \in \mathbb{R}$$

***Recuerde*:**

El producto de números complejos:

$$(a ; b)(c ; d) = (ac - bd ; ad + bc)$$

***Solución*:**

(1°) **De la igualdad propuesta y en términos de pares ordenados:**

$\Rightarrow (ai)(a+3b) = (3a+4i)(1+bi)$

$\Rightarrow (0 ; a)(a+3b ; 0) = (3a ; 4)(1 ; b)$

$\Rightarrow (0 ; a^2+3ab) = (3a - 4b ; 4+3ab)$

(2°) **De igualar los componentes correspondientes**

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 4b = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ a^2 + 3ab = 4 + 3ab \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(3°) **Resolviendo el sistema**

$\Rightarrow$ De (2): $a^2 = 4 \qquad \therefore\ a = \pm 2$

$\Rightarrow$ En (2): $3(\pm 2) = 4b \qquad \therefore\ b = \pm \frac{3}{2}$

$\therefore \boxed{(a = 2 \text{ y } b = 3/2) \text{ ó } (a = -2 \text{ y } b = -3/2)}$

12.12.6 Ejemplo Explicativo

Si: $$\frac{\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{3}-\frac{a}{3i}\right)(i+3+a)}{\left(-1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3i}\right)+\frac{a^2}{9}}$$

Calcular: $A^4 + 1 ; i = \sqrt{-1} ; a \in \mathbb{R}$

Comentario:

En este ejercicio se observará las ventajas que trae consigo el hecho de efectuar el producto y división de números complejos como pares ordenados.

Recuerde:

$$(a;b)\times(m;n) = (am-bn\,;\,an+mb)$$

$$(a;b)\div(m;n) = \left(\frac{am+bn}{m^2+n^2}\,;\,\frac{bm-an}{m^2+n^2}\right)$$

Solución:

(1°) **Debido que: $\frac{1}{i} = -i$; la igualdad "A" se podrá escribir como una expresión en pares ordenados de acuerdo a la secuencia siguiente:**

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\Rightarrow A = \frac{\left(-i+\frac{1}{3}+\frac{ai}{3}\right)(i+3+a)}{\left(-1+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}i\right)+\frac{a^2}{9}}$$

(2°) $A = \dfrac{\left(\frac{1}{3};\frac{a-3}{3}\right)(3+a;1)}{\left(\frac{a^2-8}{9};-\frac{2}{3}\right)}$; Efectuando el producto a continuación;

$$\Rightarrow A = \frac{\left(\frac{3+a}{3}-\frac{a-3}{3};\frac{1}{3}+\frac{a^2-9}{3}\right)}{\left(\frac{a^2-8}{9};-\frac{6}{9}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}\,\frac{(6;a^2-8)}{(a^2-8;-6)}$$

(3°) $A = 3\left(\dfrac{6a^2-48-6a^2+48}{(a^2-8)^2+36};\dfrac{36+(a^2-8)^2}{(a^2-8)^2+36}\right)$; Realizando las simplificaciones

$$\Rightarrow A = 3(0;1) = 3(0+i)$$

$$\Rightarrow A = 3i$$

$$\Rightarrow A^4 = (3i)^4 = 81i^4 = 81$$

$$\therefore \boxed{A^4+2 = 82}$$

12.12.7 **Ejemplo Explicativo**

Si en el conjunto de los números complejos se verifica:

$$\frac{\sqrt{(8;6)}}{(1;-1)} = \left(\frac{a}{3};\frac{b}{5}\right)$$

Calcular a y b.

Comentario:

El presente ejercicio permitirá revisar el concepto de raíz cuadrada, división e igualdad de complejos.

Recuerde:

$$\sqrt{a+bi} = \sqrt{\frac{\rho+a}{2}} + \sqrt{\frac{-\rho+a}{2}} = \left(\sqrt{\frac{\rho+a}{2}};\sqrt{\frac{\rho-a}{2}}\right)$$

Solución:

(1°) **Efectuando en términos de pares ordenados:**

$\Rightarrow \sqrt{(8;6)} = \sqrt{\frac{8+10}{2}} + \sqrt{\frac{8-10}{2}}$; de acuerdo a la regla de la raíz cuadrada del par ordenado complejo.

$= \sqrt{9} + \sqrt{-1}$;

$= 3 + i$;

$\therefore \boxed{\sqrt{(8;6)} = (3;1)}$

(2°) **Realizando la división entre pares ordenados:**

$$\Rightarrow \frac{(3;1)}{(1;-1)} = \frac{(3;1)}{(1;-1)} = \frac{(3-1;3+1)}{1+1} = \left(\frac{2}{2};\frac{4}{2}\right) = (1;2)$$

(3°) **Finalmente**

$$\therefore \frac{\sqrt{(8;6)}}{(1;1)} = (1;2)$$

(4°) **Igualando los pares:**

$\Rightarrow (1;2) = \left(\frac{a}{3};\frac{b}{5}\right)$; podemos utilizar el postulado de igualdad

$\Rightarrow \frac{a}{3} = 1$; $a = 3$

$\frac{b}{5} = 2$; $b = 10$

$\therefore \boxed{a = 3 \; ; \; b = 10}$

12.12.8 Ejemplo Explicativo

Si "z" es un número complejo, tal que verifica: $|z| = 10$

Calcular: $E = |1+z|^2 + |1-z|^2$

Recuerde:

Este caso trata de afianzar el concepto de módulo dado por:

$|z| = \sqrt{m^2+n^2}$ si: $z = m + ni$

Solución:

(1°) **Consideremos que:**

$z = a + bi$ tal que se cumpla:

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = 10$; $a^2+b^2 = 100$ ....(α)

$\Rightarrow E = |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2$

$\Rightarrow E = |(1+a)+bi|^2 + |(1-a)-bi|^2$

(2°) **Aplicando el concepto de módulo a cada sumando tendremos que:**

$$\Rightarrow E = \left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-a)^2+b^2}\right)^2$$

$\Rightarrow E = (1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + b^2$

(3°) $\Rightarrow E = \underbrace{(1+a)^2 + (1-a)^2}_{\text{Por Legendre}} + 2b^2$

$\Rightarrow E = 2(1+a^2) + 2b^2$

$\Rightarrow E = 2 + 2a^2 + 2b^2$

$\Rightarrow E = 2 + 2\,(\underbrace{a^2 + 2b^2}_{100})$

$\therefore$ $\boxed{E = 202}$

12.12.9 Ejemplo Explicativo

Si: $A = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i-a} + \dfrac{2ai}{i-a}}$; $A \in \mathbb{C}$; $a \in \mathbb{R}$

Calcular: $E = \left|A - \dfrac{3}{4}i\right|^{-5}$

Recuerde:

La división de 2 números complejos viene dado por:

Producto con signo contrario

$$\frac{(m,n)}{(a,b)} = \left(\frac{am+bn}{a^2+b^2};\frac{-mb+an}{a^2+b^2}\right)$$

El módulo de un número complejo viene dado por:

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \;;\; \text{siempre } \rho>0$$

Solución:

(1°) **Efectuando las operaciones indicadas en A:**

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\dfrac{1}{i-a}+\dfrac{2ai}{i-a}} = \frac{1}{\dfrac{1+2ai}{i-a}} = \frac{i-a}{1+2ai} = \frac{-a+i}{1+2ai}$$

(2°) **Procediendo a la división en forma de pares ordenados**

$$\Rightarrow A = \frac{(-a;1)}{(1;2a)} = \left(\frac{-a+2a}{1+4a^2};\frac{2a^2+1}{1+4a^2}\right)$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{a}{1+4a^2};\frac{1+2a^2}{1+4a^2}\right)$$

(3°) **Restando componentes respectivas**

$$\Rightarrow A-\frac{3}{4}i = \left(\frac{a}{1+4a^2};\frac{1+2a^2}{1+4a^2}\right)-\left(0;-\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow A-\frac{3}{4}i = \left(\frac{a}{1+4a^2};\frac{4+8a^2-3-12a^2}{4(1+4a^2)}\right);$$

(4°) **Se obtiene el par:**

$$\Rightarrow A-\frac{3}{4}i = \left(\frac{a}{1+4a^2};\frac{1-4a^2}{4(1+4a^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \left|A-\frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(1+4a^2)^2}+\frac{(1-4a^2)^2}{16(1+4a^2)}} = \sqrt{\frac{1+8a^2+16a^4}{(1+4a^2)^2\times 16}}$$

$$\Rightarrow \left|A-\frac{3}{4}i\right| = \sqrt{\frac{(1+4a^2)^2}{16(1+4a^2)^2}} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$\therefore \boxed{\left|A-\frac{3}{4}i\right|^{-5} = 1024}$$

12.12.10 **Ejemplo Explicativo**

Simplificar: $$E = \frac{|z|^2+|w|^2}{\left|\dfrac{z^2+w^2}{2}+zw\right|+\left|\dfrac{z^2+w^2}{2}-zw\right|}$$

$z, w \in \mathbb{C}$

Recuerde:

(a) $|x| = \sqrt{a^2+b^2}$ si $x = a+bi$

$\Rightarrow |x|^2 = a^2+b^2$

(b) $|x/y| = |x|/|y|$

Solución:

(1°) **En relación al denominador:**

$$\Rightarrow \frac{z^2+w^2}{2}+zw = \frac{z^2+w^2+2zw}{2} = \frac{(z+w)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2+w^2}{2}-zw = \frac{z^2+w^2-2zw}{2} = \frac{(z-w)^2}{2}$$

(2°) **La *expresión* "E" será:**

$$\Rightarrow E = \frac{|z|^2+|w|^2}{\left|\dfrac{(z+w)^2}{2}\right|+\left|\dfrac{(z-w)^2}{2}\right|} = \frac{|z|^2+|w|^2}{\dfrac{|z+w|^2+|z-w|^2}{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\left(|z|^2+|w|^2\right)}{|z+w|^2+|z-w|^2} \quad \text{.......... (1)}$$

(3°) **Asumiendo que:** $z = (a;b)$; $|z|^2 = a^2+b^2$ .... (2)

$w = (m;n)$; $|w|^2 = m^2+n^2$ .... (3)

$\Rightarrow z+w = (a+m;b+n) \Rightarrow |z+w|^2 = (a+m)^2+(b+n)^2$ .... (4)

$\Rightarrow z-w = (a-m;b-n) \Rightarrow |z-w|^2 = (a-m)^2+(b-n)^2$ .... (5)

(4°) **Reemplazando (2), (3), (4) y (5) *en* (1)**

$$\Rightarrow E = \frac{2\left(a^2+b^2+m^2+n^2\right)}{(a+m)^2+(b+n)^2+(a-m)^2+(b-n)^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\left(a^2+b^2+m^2+n^2\right)}{2\left(a^2+b^2+m^2+n^2\right)}$$

$\therefore \boxed{E = 1}$

2.12.11 **Ejemplo Explicativo**

Sean los números complejos tales que:

$m = (1 ; y)$ .... (1)

$n = (u ; v)$ .... (2)

$m + n = (a , 7)$ .... (3)

$mn = (-7 ; 11)$ .... (4)

Calcular: $a^2 + y^2 + u^2 + v^2$

$(a, y, u, v \in \mathbb{N};\ \ 2 < a < 8)$

Recuerde:

$$\left.\begin{cases} \text{Si: } (\alpha , \beta) = (r , s) \\ \Rightarrow \alpha = r \\ \quad \beta = s \end{cases}\right\} \text{Postulado de Igualdad}$$

Solución:

1°) **Las condiciones (1) y (2) reemplazadas *en* (3) y (4) permiten:**

$\Rightarrow (1 ; y) + (u ; v) = (a ; 7)$ .... (5)

$\Rightarrow (1 ; y)(u ; v) = (-7 ; 11)$ .... (6)

$\Rightarrow$ de (5): $(1 + u ; y + v) = (a ; 7)$ .... (7)

$\Rightarrow$ de (6): $(u - yv ; v + yu) = (-7 ; 11)$ .... (8)

2°) **Resolviendo el sistema obtenido**

$\Rightarrow$ de (7) y (8):

$$\left.\begin{cases} 1 + u = a ;\ \ 2 < a < 8 \ldots\ldots (\text{I}) \\ y + v = 7 \ldots\ldots (\text{II}) \\ u - yv = -7 \ldots\ldots (\text{III}) \\ v + yu = 11 \ldots\ldots (\text{IV}) \end{cases}\right\} \text{De acuerdo a la igualdad de los pares ordenados (7) y (8)}$$

3°) $\Rightarrow$ **Reduciendo el sistema en función a "y"; para ello**

De (II): $v = 7 - y$ .... (V)

De (III): $u = yv - 7 = -y^2 + 7y - 7$ .... (VI)

De (V) y (VI) en (IV): $y^3 - 7y^2 + 8y = -4$; por selección: $(y = 2)$

De (V): $(v = 5)$

De (VI): $(u = 3)$

De (I): $(a = 4)$

$\Rightarrow 4^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2$

$\therefore \boxed{a^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 54}$

12.12.12 **Ejemplo Explicativo**

Obtener un gráfico que limite al número complejo "z".

Sabiendo que:

$$\begin{cases} 3 \leq \ |z| \ < 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 200° \leq \ \text{Arg } z \ \leq 270° \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

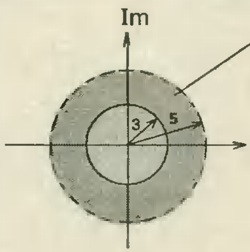
***Recuerde*:**

I z I es la medida de un segmento.

Arg z es la medida de un ángulo siendo z el complejo en referencia.

***Solución*:**

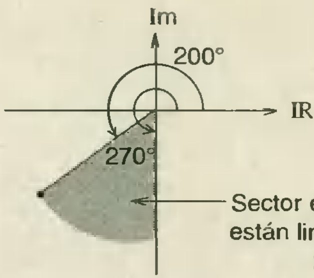
(1°)



Sector en el cual los módulos son mayores o iguales a 3 y menores que 5 unidades

$3 \leq |z| < 5$

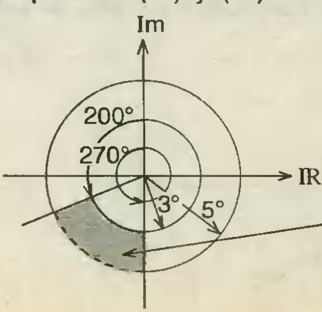
(2°)



Sector en el cual los argumentos están limitados entre 200° y 270°

$200° \leq \text{Arg} \leq 270°$

(3°) Superponiendo (1) y (2)



Sector en el cual se cumple:

$$\begin{cases} 3 \leq |z| < 5 \\ 200° \leq \text{Arg} < 270° \end{cases}$$

12.12.13 Ejercicio Explicativo

Escribir en forma trigonométrica el número complejo siguiente:

$$Z = \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^2 - \left(e^{\frac{\pi}{6}i} - 2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2$$

Recuerde:

Las equivalencias de Legendre.

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

Si: $(y - x)^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$(a + bi) = p\, e^{i\alpha}$

Solución:

(1°) $Z = \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^2 - \left(2e^{\frac{2\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^2$

$\Rightarrow Z = 4\left(2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)$ según Legendre

$\Rightarrow Z = 8e^{\frac{2\pi}{3}i + \frac{\pi}{6}i}$

(2°) $Z = 8e^{\frac{5\pi}{6}i}$; En ésta el módulo: $p = 8$

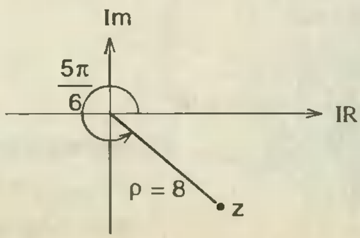
el argumento: $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

(3°) **Finalmente**

$$\therefore \boxed{Z = 8\left(\text{Cos}\,\frac{5\pi}{6} + i\,\text{Sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Comentario:

Este número complejo se encuentra en el 4° cuadrante y se ubica de acuerdo al diagrama siguiente:



12.12.14 Ejercicio Explicativo

Simplificar:
$$E = \cfrac{1-i}{1+\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1+\cfrac{1-i}{1+\cfrac{1+i}{1-i}}}}}}$$

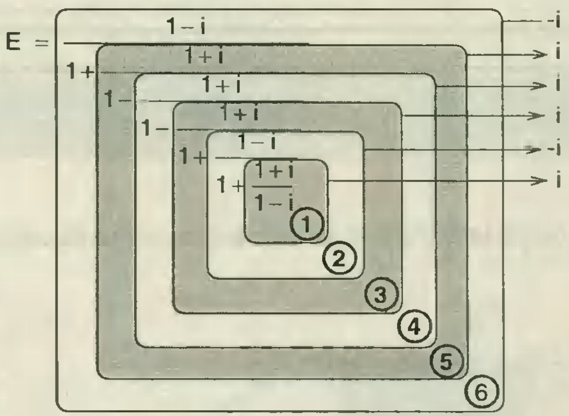
Señalando asimismo el argumento.

***Observe*:**

Es una oportunidad de utilizar las equivalencias: $\dfrac{1+i}{1-i} = i \; ; \; i^{-1} = -i$

***Solución*:**

(1°) Reiterando la expresión propuesta:



(2°) En cada caso se ha identificado:

① $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

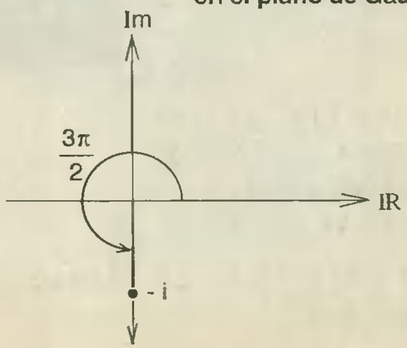
② $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

③ $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

④ $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

⑤ $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

(3°) Ubicado el complejo en el plano de Gauss.

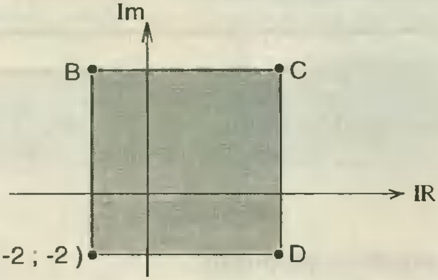


⑥ $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

$\therefore$ $\boxed{E = -i \; ; \; \alpha = \dfrac{3\pi}{2}}$

12.12.15 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el módulo y argumento del producto de los correspondientes números complejos que coinciden con los vértices del cuadrado de lado 6m que se muestran en el gráfico adjunto:

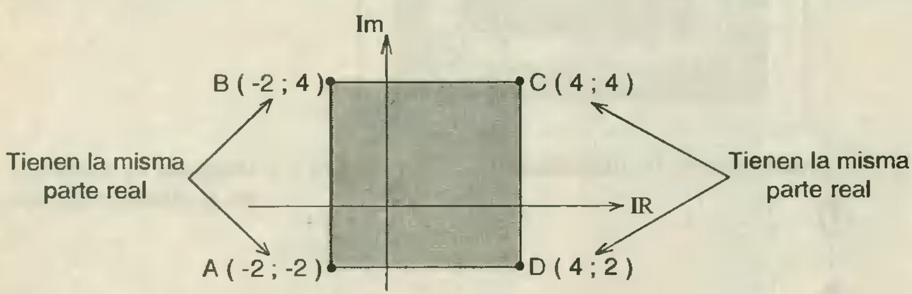


***Recuerde*:**

Que el Isomorfismo es el comportamiento análogo a las propiedades entre sistemas. Existe Isomorfismo entre el Plano Cartesiano y el Plano de Gauss o Plano Complejo.

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo a los datos es posible ubicar los afijos de los otros números complejos:**



(2°) $A = (-2;-2) = -2(1;1)$

$B = (-2;4) = -2(1;-2)$

$C = (4;4) = 4(1;1)$

$D = (4;-2) = 2(2;-1)$

$\Rightarrow AB = 4(1;1)(1;-2) = 4(1+2;-2+1)$

$\therefore$ $AB = 4(3;-1)$ .... (1)

(4°) $\Rightarrow CD = 8(1;1)(2;-1) = 8(2+1;2-1)$

$\Rightarrow CD = 8(3;1)$ .... (2)

(5°) $\Rightarrow (AB)(CD) = 32(3;-1)(3;1)$

$= 32(3^2+1) =$ $\quad\therefore\ ABCD = (320;0)$

$\therefore$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Módulo} = 320\\ \text{Argumento} = 0\end{array}}$

12.12.16 Ejemplo Explicativo

Sean "m" y "n" dos números complejos, determinar "m" si se conoce lo siguiente:

$$\begin{cases} 10\,\text{Mod}(n) = \text{Mod}(m) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \text{Arg}(m) + \text{Arg}(n) = 270° \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

$\text{Arg}(m) > 0$; $\text{Arg}(n) > 0$; $n = \left(3;3\sqrt{3}\right)$

Señalar m en la forma canónica.

Recuerde:

$\text{Mod}\,z = \sqrt{a^2+b^2}$

$\text{Arg}\,z = \text{arc tg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Siendo $z = (a, b)$ un # complejo

Solución:

(1°) **De los datos proporcionados:**

$\Rightarrow$ En (1): $10\,\text{Mod}\left(3;3\sqrt{3}\right) = \text{Mod}(m)$ .... (1)

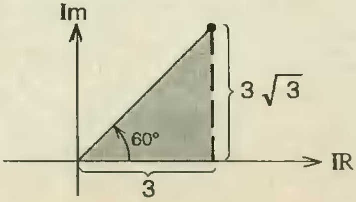
$\Rightarrow 10\sqrt{\underbrace{3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}_{36}} = \text{Mod}(m)$

$\Rightarrow \text{Mod}(m) = 60$

(2°) **Para determinar "m" faltaría determinar el argumento correspondiente.**

En (2): $\text{Arg}(m) + \text{Arg}\left(3;3\sqrt{3}\right) = 270°$ .... (2)

$\Rightarrow$ Como $\left(3;3\sqrt{3}\right)$ está en el 1er cuadrante y de acuerdo al esquema siguiente:



$\text{tg}\left(\text{Arg}\left(3;3\sqrt{3}\right)\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Arg}\left(3;3\sqrt{3}\right) = 60°}$

(3°) De (2): $\text{Arg}(m) + 60° = 270°$

$\Rightarrow \quad \text{Arg}(m) = 210°$

(4°) **El complejo m será:** $m = \overset{\text{módulo}}{60}\ \text{Cis}\ \overset{\text{argumento}}{210°}$

$m = 60\,(\text{Cos}210° + i\ \text{Sen}\ 210°)$

$m = 60\,(-0.866, -0.5)$

$\therefore \boxed{m = -51.96 - 30i}$

12.12.17 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = i$

indicando la solución general y principal.

***Recuerde*:**

Si: $z = (a\,;\,b)$ es un # complejo

$\Rightarrow$ Módulo $= \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento $= \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)$

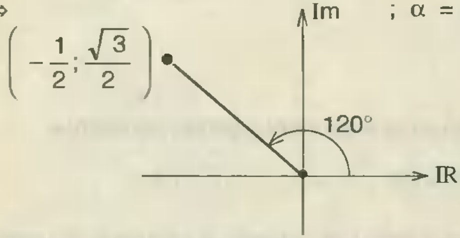
$\text{cis } x = \text{cis } b \Rightarrow x = b \pm 360\,K$

***Solución*:**

(1°) **Escribiendo los números complejos en la forma "cis".**

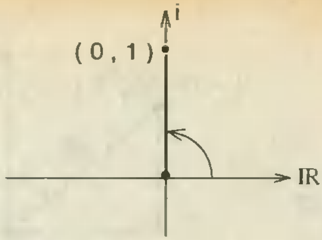
$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ \rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\Rightarrow$; $\alpha = 120°$



$\Rightarrow \boxed{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1\,\text{cis}\,120°}$

(2°) A su vez : $i = (0\,;\,1)$; $\rho = \sqrt{0+1} = 1$

$\Rightarrow$  ; $\alpha = 90°$

$\Rightarrow$ $\boxed{i = \text{Cis } 90°}$

(3°) $\Rightarrow$ $(\text{Cis } 120)^n = \text{Cis}90$

$\Rightarrow$ $\text{Cis}(120n) = \text{Cis}(90 + 360k)$

$\Rightarrow$ $120n = 90 + 360k$

$\therefore$ $\boxed{n = \frac{3}{4} + 3k \ ; \ n_p = \frac{3}{4} \ ; \ k \in \mathbb{Z}}$

12.12.18 Ejercicio Explicativo

Resolver: $i^n = -i \ ; n \in \mathbb{Z}^+$

indicando la solución general.

Recuerde:

Sea $\text{Cis}x = \text{Cis}y$

$\Rightarrow x = y \pm 360k$

Solución:

(1°) **Poniendo en la forma cis ambos miembros de la igualdad:**

$\Rightarrow i = (0 ; 1) = \text{Cis } 90°$; pues: $\rho_1 = 1 \ ; \ \alpha_1 = 90°$

$\Rightarrow -i = (0 ; -1) = \text{Cis } 270°$; pues: $\rho_2 = 1 \ ; \ \alpha_2 = 270°$

(2°) $\mathbf{(\text{Cis } 90)^n = \text{Cis } 270°}$

$\Rightarrow \text{Cis } 90n = \text{Cis}(270 + 360k)$

(3°) $\mathbf{90n = 270 \pm 360k}$

$\Rightarrow n = 3 \pm 4k$

$\therefore$ $\boxed{n = 3 \pm 4k \ ; \ k \in \mathbb{Z}^+}$

12.12.19 Ejercicio Explicativo

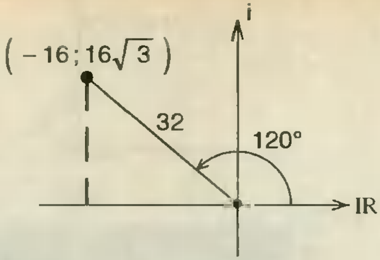
Obtener las 5 raíces quintas del siguiente número complejo.

$$z = -16 + 16\sqrt{3}\,i$$

Solución:

(1°) **De acuerdo al trámite usado:**

$z = -16 + 16\sqrt{3}\,i = \left(-16; 16\sqrt{3}\right)$

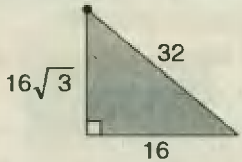


$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Mod } z = \sqrt{(-16)^2 + \left(16\sqrt{3}\right)^2} = 32 \\ \text{Arg } z = 120° \;;\; \text{pues se tiene} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad z = 32 \text{ cis } 120°$

(2°) $\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32 \text{ cis}(120 + 360k)}$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{z} = 2 \text{ cis}\left(\frac{120 + 360k}{5}\right)$$



$\Rightarrow \boxed{\sqrt[5]{z} = 2 \text{ cis}(24 + 72k)°;\; k = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$ ....(1)

(3°) **Generamos las raíces en la forma siguiente:**

Dando los valores ordenados a "k" en (1):

$\Rightarrow k = 0 \;;\; r_1 = 2 \text{ cis}(24 + 0)° = 2 \text{ cis } 24°$

$k = 1 \;;\; r_2 = 2 \text{ cis}(24 + 72)° = 2 \text{ cis } 96°$

$k = 2 \;;\; r_3 = 2 \text{ cis}(24 + 144)° = 2 \text{ cis } 168°$

$k = 3 \;;\; r_4 = 2 \text{ cis}(24 + 216)° = 2 \text{ cis } 240°$

$k = 4 \;;\; r_5 = 2 \text{ cis}(24 + 288)° = 2 \text{ cis } 312°$

12.12.20 Ejercicio Explicativo

Hállense los puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la condición:

$$|z - 1| = |z - 2| = |z - i|$$

Recuerde:

Si: $z = a + bi = (a, b)$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Solución:

(1°) **Asumiendo $z = a + bi$** ....(0)

$\Rightarrow |z - 1| = |a - 1 + bi| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$

$\Rightarrow |z - 2| = |a - 2 + bi| = \sqrt{(a-2)^2 + b^2}$

$\Rightarrow |z - i| = |a + (b - 1)i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$

(2°) **Por condición:**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{(a-1)^2+b^2} = \sqrt{(a-2)^2+b^2}}_{(1)} = \sqrt{a^2+(b-1)^2}$$

$$\sqrt{(a-2)^2+b^2} = \sqrt{a^2+(b-1)^2} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ de (1): $(a-1)^2+b^2 = (a-2)^2+b^2$

$\Rightarrow (a-1)^2-(a-2)^2 = 0$

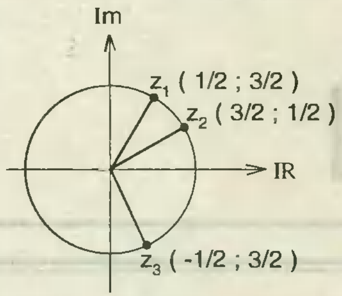
$\Rightarrow (a-1+a-2)(a-1-a+2) = 0 \qquad \therefore\ a = 3/2$

$\Rightarrow$ De (2): $\cancel{a^2}+4-4a+\cancel{b^2} = \cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2b+1$

$\Rightarrow 4-4(3/2) = -2b+1 \qquad \therefore\ b = 3/2$

(3°) **Se logra identificar al complejo z:**

$\Rightarrow$ de (0): $z = \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i \quad ; \quad z-1 = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$



$$z-2 = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$z-i = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \rho_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

z_1; z_2, z_3 son los afijos que verifican la condición propuesta de tener módulo común e igual a $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

12.12.21 Ejercicio Explicativo

Calcular: $\left(-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}-\dfrac{\sqrt[4]{18}}{2}i\right)^{25}$

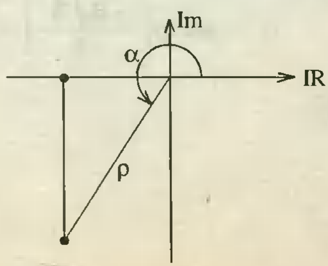
***Recuerde*:**

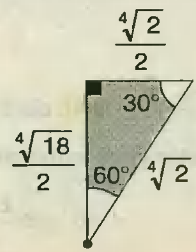
$$(\operatorname{cis} x)^m = \operatorname{cis}(mx)$$

***Solución*:**

(1°) **Escribiendo la base de la potenciación en forma trigonométrica, de los datos que se consignan.**

$\Rightarrow$





(2°) En base a los datos obtenidos.

$$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{2};-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \propto = 240° \; ; \; \rho = \sqrt[4]{2} \; ; \; \left(\frac{-\sqrt[4]{2}}{2};\frac{\sqrt[4]{18}}{2}\right) = \sqrt[4]{2} \;\; \text{cis } 240°$$

(3°) Se tendrá:

$$\Rightarrow \left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{2};-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}\right)^{25} = \left(\sqrt[4]{2}\,\text{cis } 240°\right)^{25} = \sqrt[4]{2}^{25} \;\text{cis } 6000$$

$\Rightarrow \quad = 64\sqrt[4]{2}$ cis 240° ; luego de reducir al 1^er^ cuadrante

$$= 64\sqrt[4]{2}\;(\cos 240° \; ; \text{sen } 240°)$$

$$= 64\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(4°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{\left(-\frac{\sqrt[4]{2}}{2};-\frac{\sqrt[4]{18}}{2}\right)^{25} = \left(-32\sqrt[4]{36}\;;-32\sqrt[4]{2}\right)}$$

12.12.22 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\left(-8-8\sqrt{3}\,i\right)^{\frac{1}{4}}$

indicando la raíz principal.

***Recuerde*:**

Sea: $\sqrt[m]{\text{cis } x} \qquad \Rightarrow \sqrt[m]{\text{cis } x} = \text{cis}\left(\frac{x}{m}\right)$

***Solución*:**

(1°) **Escribiendo la potenciación en la forma cis, para ello atendemos los datos de la base.**

$$\Rightarrow \left(-8;-8\sqrt{3}\right) = 16\,\text{cis } 210° \; ; \text{ pues: } \rho = \sqrt{(-8)^2+\left(-8\sqrt{3}\right)^2} = 16$$

$$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right) = 210°$$

$$\Rightarrow \left(-8;-8\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(16\,\text{cis } 210°\right)^{\frac{1}{4}}$$

(2°) **Luego de ejecutar la potenciación**

$$= 16^{\frac{1}{4}}\,\text{cis}\,\frac{210°}{4}$$

$= 2 \text{ cis } 52.5°$

(4°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{\left(-8-8\sqrt{3}\,i\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left(\cos 52.5° + i \operatorname{sen} 52.5°\right)}$$

12.12.23 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el valor de "x" si: $\text{cis } x = \text{cis } 40°$; $x \in \mathbb{Z}^+$;

"x" es el menor valor de 3 cifras que verifica la igualdad señalada.

Recuerde:

Si: $\text{cis } a = \text{cis } b \quad \Rightarrow a = b + 360\,k$

Solución:

(1°) **Como $\text{cis } x = \text{cis } 40°$**

$\Rightarrow \boxed{x = 40 + 360\,k \,;\, 100 < x < 999}$ ....(1)

$\Rightarrow 100 < 40 + 360\,k < 999$

(2°) **Aislando "k"**

$\Rightarrow \quad 60 < 360\,k < 959$

$$\Rightarrow \frac{60}{360} < k < \frac{959}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} < k < 2\frac{239}{360}$$

(3°) **Seleccionamos:**

$\Rightarrow k = 1 \,;\, 2$

$\Rightarrow$ Si $k = 1$ determina el menor x

$\Rightarrow$ En (1):

$\Rightarrow x = 40 + 360\,(1)$

$\therefore \boxed{x = 400}$

12.12.24 **Ejercicio Explicativo**

Si: $z = a + bi$; $i = \sqrt{-1}$

La solución principal de: $z^9 = -\,i$ será:

Recuerde:

$i = \text{cis } 0°$

$-\,i = \text{cis } 270°$

Solución:

(1°) **Escribiendo el 2° miembro de la ecuación en función de cis.**

$\Rightarrow\ -i = (0; -1) = 1 \text{ cis } 270°$

(2°) **Planteando la potenciación**

$\Rightarrow\ z^9 = \text{cis } 270°$

$\Rightarrow\ z = \sqrt[9]{\text{cis } 270°}$

$\Rightarrow\ z = \text{cis}\left(\dfrac{270°}{9}\right)$

$\Rightarrow\ z = \text{cis } 30°$

(3°) **Transformando a la forma trigonométrica:**

$\Rightarrow\ z = \cos 30° + i \text{ sen } 30°$

$$\therefore\ \boxed{z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

12.12.25 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{\text{cis}^5(x)}{\text{cis}^3(10)} + \frac{\text{cis}^{\frac{2}{3}}\left(\frac{15x}{2}\right)}{\text{cis}^5(6)} = \frac{2 \text{ cis}^{\frac{1}{4}}(36)\sqrt[9]{\text{cis } 45°}}{(\text{cis } 14)^{-3}\left(\text{cis} - \frac{7}{5}\right)^{10}}\ ;\ x \in Z^+$$

Recuerde:

$\text{cis}^m x = \text{cis } mx$; $\text{cis } x \cdot \text{cis } z = \text{cis}(x + z)$

$\text{cis } x/\text{cis } y = \text{cis}(x - y)$

Solución:

(1°) **Ordenando la expresión y efectuando las operaciones indicadas.**

$$\Rightarrow\ \frac{\text{cis } 5x}{\text{cis } 30} + \frac{\text{cis } 5x}{\text{cis } 30} = \frac{2 \text{ cis } 9 \text{ cis } 5}{\text{cis}(-42) \times \text{cis}(-14)}$$

$\Rightarrow\ \text{cis}(5x - 30) + \text{cis}(5x - 30) = 2 \text{ cis}(9 + 5 + 42 + 14)$

$\Rightarrow\ 2 \text{ cis}(5x - 30) = 2 \text{ cis}(70)$

(2°) **Por la igualdad en términos de cis**

$\Rightarrow\ \text{cis}(5x - 30) = \text{cis}(70 + 360k)$

$\Rightarrow\ 5x - 30 = 70 + 360k$

$\Rightarrow 5x = 100 + 360k$

$\Rightarrow x = 20 + 72k$

$\therefore \boxed{x = 20 + 72k \ ; \ k \in \mathbb{Z}^+}$

12.12.26 **Ejemplo Explicativo**

Si: $F(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

Calcular: $F(1 + 2i) + F(1 - 2i)$

***Recuerde*:**

Si $F(a + bi) = p + qi$

$\Rightarrow F(a - bi) = p - qi$

$\Leftrightarrow$ $F(x)$ Es una regla polinomial de coeficientes $\in$ Q.

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo a lo solicitado:**

$F(x) = x^4 + 2x^3 + 1 \ ; \ F(1 + 2i)$

Mediante la Regla de Ruffini:

	1	2	0	0	1
$x = 1 + 2i$	$\downarrow$	$1 + 2i$	$-1 + 8i$	$-17 + 6i$	$-29 - 28i$
	1	$3 + 2i$	$-1 + 8i$	$-17 + 6i$	$-28 - 28i$

Calculos:

* $(3 + 2i)(1 + 2i) = (-1 ; 8)$

$(1 + 2i)(-1 + 8i) = (-17 ; 6)$

$(1 + 2i)(-17 + 6i) = (-29 ; -28)$

(2°) **Se obtiene:**

$\Rightarrow F(1 + 2i) = -28 - 28i$

Por Teorema:

$\Rightarrow F(1 - 2i) = -28 + 28i$

(3°) **Finalmente:**

$\Rightarrow F(1 + 2i) + F(1 - 2i) = -28 - 28i - 28 + 28i$

$\therefore \boxed{F(1 + 2i) + F(1 - 2i) = -56}$

12.12.27 **Ejemplo Explicativo**

Calcular: $\left(\sqrt{3} + i\right)^8$

***Recuerde*:**

$(\text{cis } x)^m = \text{cis}(mx)$

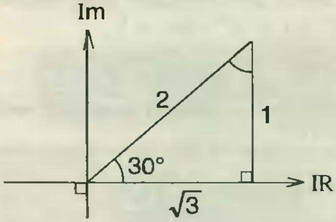
***Solución*:**

(1°) **Utilizando la regla de MOIVRE; para ello expresemos trigonométricamente el complejo consignado:**

$$\Rightarrow \sqrt{3} + i = \left(\sqrt{3}\,;1\right) = 2\,(\,\text{Cis } 30°\,)$$

(2°) **Realizando la gráfica:**

pues: $\rho = \sqrt{\sqrt{3}^{2} + 1^{2}} = 2$



(3°) **Planteando la potenciación:**

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3} + i\right)^{8} = (\,2 \text{ Cis } 30°\,)^{8} = 2^{8} \text{ Cis}^{8}\, 30 = 256 \text{ Cis } 240$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3} + i\right)^{8} = 256\,(\,\text{Cos } 240° + i \text{ Sen } 240°\,)$$

$$= 256\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore \boxed{\left(\sqrt{3} + i\right)^{8} = -128 - 128\sqrt{3}\,i}$$

12.12.28 Ejercicio Explicativo

Calcular: $$E = \left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}i\right)^{15} + \left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}i\right)^{15}$$

***Recuerde*:**

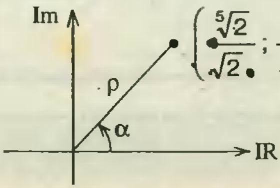
Si: $(\,a + bi\,)^{m} = p + qi$

$\Rightarrow (\,a - bi\,)^{m} = p - qi$

***Solución*:**

(1°) **El número complejo:** $\left(\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt[5]{2}}{2}\right) = \sqrt[5]{2}\text{ Cis } 45°$

pues:



$\left(\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}\right)$

$\rho = \sqrt[5]{2}$

$\alpha = 45°$

(2°) **Planteando la potenciación:**

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}\right)^{15} = \left(\sqrt[5]{2}\,\text{Cis}\,45°\right)^{15} = \sqrt[5]{2}^{15}\,\text{Cis}\,675° \;;$$ Reduciendo al primer cuadrante

$$= 8\,\text{Cis}\,315° = 8(\,\text{Cos}\,315°;\text{Sen}\,315°\,)$$

(3°) **Ejecutando:** $$= 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(4\sqrt{2};-4\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}i\right)^{15} = 4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i} \quad \text{..............................} \;(\alpha)$$

(4°) **Por Teorema:**

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{2}}i\right)^{15} = 4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i} \quad \text{..............................} \;(\beta)$$

(5°) **Luego de sumar "α" y "β"**

$$\therefore \boxed{E = 8\sqrt{2}}$$

12.12.29 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el conjunto solución de la ecuación no algebraica.

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 1 \;;\; n \in \mathbf{Z}^+$$

***Recuerde*:**

$$(\,\text{cis}\,x\,)^m = \text{cis}\,(\,mx\,)$$

***Solución*:**

(1°) **Escribiendo en la forma cis.**

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = (\,1\,\text{Cis}\,120°\,)^n \;;\; 1 = \text{Cis}\,0°$$

pues: $$p = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\alpha = \text{arc tg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = 120°$$

$(\text{Cis } 120)^n = \text{Cis } 0° = \text{Cis}(0 + 360\,k)\,;\ k \in \mathbb{Z}$

(2°) **Luego de ejecutar la potenciación:**

$\Rightarrow \text{cis } 120\,n = \text{cis } 360\,k \quad ;\ k \in \mathbb{Z}$

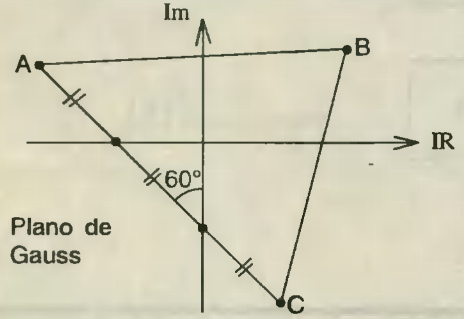
$\Rightarrow \cancel{120}\,n = \cancel{360}\,k \quad ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 3\,k \quad ;\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore \boxed{n = \{0\,;3\,;6\,;9\,;\ldots\}}$

12.12.30 Ejercicio Explicativo

"A", "B", "C" son los afijos de 3 números complejos que coinciden con los vértices de un triángulo equilátero de medida 6 en cada lado y de acuerdo al gráfico adjunto:



Calcular el par ordenado que corresponde a:

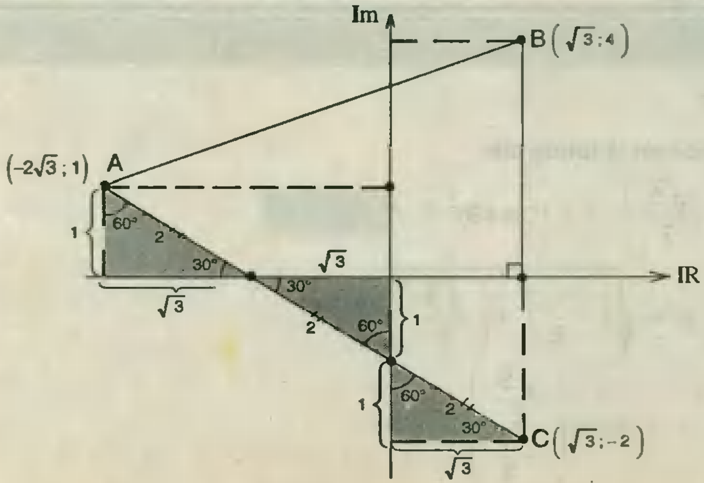
A + B + C + ABC

***Recuerde*:**

$$(a, b)(p, q) = (ap - bq\,;\,aq + bp)$$

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo a los datos consignados.**



(2°) **Identificamos los afijos A, B, C.**

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow A = \left(-2\sqrt{3},1\right)\\ &\Rightarrow B = \left(\sqrt{3};4\right)\end{aligned}\right\} \quad AB = \left(-6-4\,;-8\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = \left(-10\,;-7\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow C = \left(\sqrt{3}\,;-2\right)$$

$$\Rightarrow A+B+C = (0,3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

(3°) **Realizamos la multiplicación.**

$$\Rightarrow ABC = \left(-10\,;-7\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{3},-2\right) = -10\sqrt{3}-14\sqrt{3}$$

$$ABC = \left(-24\sqrt{3},-1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(4°) **Sumando (α) + (β)**

$$\therefore \boxed{A+B+C+ABC = \left(-24\sqrt{3}\,;2\right)}$$

12.31.31 **Ejercicio Explicativo**

Calcular las raíces algebraicas de: $\sqrt[11]{2\,048}$

Recuerde:

El teorema de Moivre establece que si : $\sqrt[n]{a+b_i}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a+bi} = \rho\,\text{Cis}\left(\frac{\alpha+360k}{n}\right)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Además: $\boxed{\text{Cis}\,\alpha = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema de Moivre**

$\Rightarrow 2\,048 = (2048\,,0) = (2048\,,0°)$, (par cartesiano y par polar)

$\Rightarrow 2\,048 = 2\,048\ \text{Cis}\,(360\,k)$

(2°) **De acuerdo a lo solicitado:**

$$\sqrt[11]{2\,048} = \sqrt[11]{2\,048\,\text{Cis}\,360k} = 2\,\text{Cis}\left(\frac{360k}{11}\right)$$

(3°) **Haciendo k = 0 , k = 1 , k = 2 , ... , k = 10**

$k = 0,\ r_1 = 2\,\text{Cis}\,0 \Rightarrow r_1 = 2$

$k = 1,\ r_2 = 2\,\text{Cis}\left(\dfrac{360}{11}\right) \quad \Rightarrow r_2 = 2\,\text{Cis}\,(32{,}7272°)$

$k = 2,\ r_3 = 2\,\text{Cis}\left(\dfrac{720}{11}\right) \quad \Rightarrow r_3 = 2\,\text{Cis}\,(65{,}4545°)$

$k = 3,\ r_4 = 2\,\text{Cis}\left(\dfrac{1080}{11}\right) \quad \Rightarrow r_4 = 2\,\text{Cis}\,(98{,}1818°)$

$$k = 4,\ r_5 = 2\ \text{Cis}\left(\frac{1440}{11}\right) \Rightarrow r_5 = 2\ \text{Cis}\ (130{,}9090°)$$

$$k = 5,\ r_6 = 2\ \text{Cis}\left(\frac{1800}{11}\right) \Rightarrow r_6 = 2\ \text{Cis}\ (163{,}6363°)$$

$$k = 6,\ r_7 = 2\ \text{Cis}\left(\frac{2\,160}{11}\right) \Rightarrow r_7 = 2\ \text{Cis}\ (196{,}3636°)$$

$$k = 7,\ r_8 = 2\ \text{Cis}\left(\frac{2\,520}{11}\right) \Rightarrow r_8 = 2\ \text{Cis}\ (229{,}0909°)$$

$$k = 8,\ r_9 = 2\ \text{Cis}\left(\frac{2\,880}{11}\right) \Rightarrow r_9 = 2\ \text{Cis}\ (261{,}8181°)$$

$$k = 9,\ r_{10} = 2\ \text{Cis}\left(\frac{3\,240}{11}\right) \Rightarrow r_{10} = 2\ \text{Cis}\ (294{,}5454°)$$

$$k = 10,\ r_{11} = 2\ \text{Cis}\left(\frac{3\,600}{11}\right) \Rightarrow r_{11} = 2\ \text{Cis}\ (327{,}2727°)$$

12.12.32 **Ejercicio Explicativo**

Calcular las raíces algebraicas de: $\sqrt[15]{14\,348\,907^{-1}}$

Recuerde:

El teorema de Moivre si: $\sqrt[n]{a+bi}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a+bi} = \rho\ \text{Cis}\left(\frac{\alpha + 360k}{n}\right)\ ;\ n \in [\,0, n-1\,]\ /\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Además: $\boxed{\text{Cis}\ \alpha = \text{Cos}\ \alpha + i\ \text{Sen}\ \alpha}$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema de Moivre:**

$$14348907^{-1} = 3^{-15}\ \text{cis}\ 0° = 3^{-15}\ \text{cis}\ (0 + 360\ k)$$

(2°) $$\sqrt[15]{14348907^{-1}} = \sqrt[15]{3^{-15}\ \text{Cis}\ (360k)}$$

$$= \frac{1}{3}\ \text{Cis}\left(\frac{360k}{15}\right) = \frac{1}{3}\ \text{Cis}\ (24k) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

(3°) **Asignando los valores enteros en (I)**

$k = 0 \Rightarrow r_1 = 1/3\ \text{cis}\ 0 = 1/3\ (\cos 0° + i\ \text{sen}\ 0°)$

$k = 1 \Rightarrow r_2 = 1/3\ \text{cis}\ 24° = 1/3\ (\cos 24° + i\ \text{sen}\ 24°)$

$k = 2 \Rightarrow r_3 = 1/3\ \text{cis}\ 48° = 1/3\ (\cos 48° + i\ \text{sen}\ 48°)$

$k = 3 \Rightarrow r_4 = 1/3\ \text{cis}\ 72° = 1/3\ (\cos 72° + i\ \text{sen}\ 72°)$

$k = 4 \Rightarrow r_5 = 1/3\ \text{cis}\ 96° = 1/3\ (\cos 96° + i\ \text{sen}\ 96°)$

$k = 5 \Rightarrow r_6 = 1/3\ \text{cis}\ 120° = 1/3\ (\cos 120° + i\ \text{sen}\ 120°)$

$k = 6 \Rightarrow r_7 = 1/3 \text{ cis } 144° = 1/3 (\cos 144° + i \text{ sen } 144°)$

$k = 7 \Rightarrow r_8 = 1/3 \text{ cis } 168° = 1/3 (\cos 168° + i \text{ sen } 168°)$

$k = 8 \Rightarrow r_9 = 1/3 \text{ cis } 192° = 1/3 (\cos 192° + i \text{ sen } 192°)$

$k = 9 \Rightarrow r_{10} = 1/3 \text{ cis } 216° = 1/3 (\cos 216° + i \text{ sen } 216°)$

$k = 10 \Rightarrow r_{11} = 1/3 \text{ cis } 240° = 1/3 (\cos 240° + i \text{ sen } 240°)$

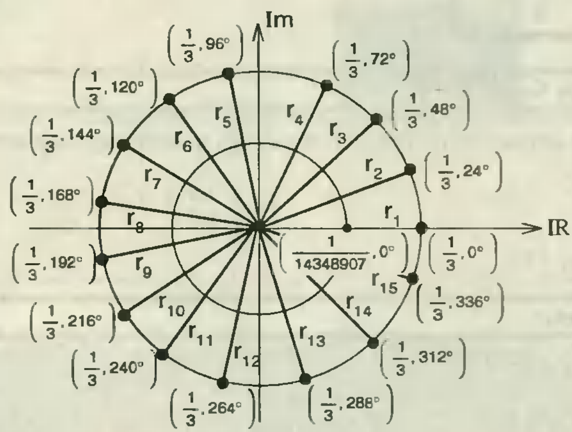
$k = 11 \Rightarrow r_{12} = 1/3 \text{ cis } 264° = 1/3 (\cos 264° + i \text{ sen } 264°)$

$k = 12 \Rightarrow r_{13} = 1/3 \text{ cis } 288° = 1/3 (\cos 288° + i \text{ sen } 288°)$

$k = 13 \Rightarrow r_{14} = 1/3 \text{ cis } 312° = 1/3 (\cos 312° + i \text{ sen } 312°)$

$k = 14 \Rightarrow r_{15} = 1/3 \text{ cis } 336° = 1/3 (\cos 336° + i \text{ sen } 336°)$

(4°) Graficando en el plano complejo en términos de coordenadas polares.



Comentario:

* Observe que el módulo de la raíz de índice quince creció de $\dfrac{1}{14348907}$ hasta el módulo $\dfrac{1}{3}$; es decir 4782969 veces más.

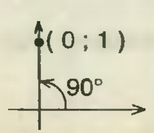
12.12.33 Ejercicio Explicativo:

Calcular $i^{37/90}$

Proporcionando el valor principal.

***Recuerde*:**

i = cis90° ; pues:



Solución:

(1°) **Como:** $i = \text{cis } 90°$

$\Rightarrow i^{37/90} = (\text{cis}90°)^{37/90}$

(2°) **Según álgebra de cis**

$$= \text{cis}\left(90 \times \frac{37}{90}\right)$$

$$= \text{cis } 37°$$

$$= \text{cis } 37 + i \text{ sen } 37°$$

$$\therefore \boxed{i^{37/90} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i}$$

12.12.34 Ejercicio Explicativo

Si z es el número complejo que verifica la condición siguiente:

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = 1$$

Calcular: $|z|_{max}$

Recuerde:

(1°) Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$

$$\Rightarrow \left| z + \frac{1}{z} \right| = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\cos 2\theta}$$

(2°) Sea: $x + \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Solución:

(1°) **De la condición y asumiendo que ρ y θ son el módulo y argumento: $|z| = \rho$**

$$\Rightarrow \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\cos 2\theta} = 1 \quad \text{.......................... (I)}$$

(2°) **Hacemos el análisis de la expresión que se transforma en:**

$$\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} = 1 - 2\cos 2\theta \quad \text{.......................... (II)}$$

En esta expresión es válido establecer que:

$$\boxed{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} = 1 - 2\cos 2\theta \geq 2} \quad \text{.......................... (III)}$$

(3°) En la expresión (III), se logra el mínimo si. $1 - 2\cos 2\theta = 2$ ó $\cos\theta = -1/2$

a su vez: $-1 \le \cos 2\theta \le -\dfrac{1}{2}$ ← permite el mínimo (II)

↑ permite el máximo (III)

(4°) de (3) y haciendo que $\cos 2\theta = -1$

$$\Rightarrow \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} = 1 - 2(-1) = 3 \text{ ; al resolver:}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

$$\therefore \boxed{|z|_{máx} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}}$$

12.12.35 Ejercicio Explicativo

Si: $z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostrar que: $\left| z + \dfrac{1}{z} \right| = \sqrt{\rho^2 + \dfrac{1}{\rho^2} + 2\cos 2\theta}$

Siendo ρ y θ el módulo y argumento de z.

Recuerde:

(1°) $z = \rho \operatorname{cis}\theta$

(2°) $|z| = \rho$

(3°) Si $z = a + bi$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(1°) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

(2°) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$

Solución:

(I) **A partir de la notación cis:**

$z = \rho \operatorname{cis}\theta$ .... (1)

$\Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho \operatorname{cis}\theta}$ .... (2)

$$\Rightarrow z + \frac{1}{z} = \rho \operatorname{cis}\theta + \frac{\operatorname{cis}(-\theta)}{\rho}$$

(II) **Escribiendo en forma trigonométrica:**

$$z + \frac{1}{z} = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$$

$$z + \frac{1}{z} = \underbrace{\rho\cos\theta + \frac{1}{\rho}\cos\theta}_{\text{Parte Real}} + i\underbrace{\left(\rho\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{p}\operatorname{sen}\theta\right)}_{\text{Parte Imaginaria}}$$

$$z + \frac{1}{z} = \cos\theta\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)i$$

(III) **Oteniendo el módulo de $z + \frac{1}{z}$**

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{\cos^2\theta\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + \operatorname{sen}\theta^2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\rho^2 + \cos^2\frac{1}{\rho^2} + 2\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\,\rho^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2} - 2\operatorname{sen}^2\theta}$$

(IV) **Luego de asociar y de acuerdo a las fórmulas usuales de trigonometría.**

$$\therefore\ \boxed{\left|z + \frac{1}{z}\right| = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\cos 2\theta}}$$

12.12.36 **Ejemplo Explicativo**

Hallar el argumento del número complejo cuyo módulo es 5 y que verifica la siguiente condición:

$$\left|z + \frac{15}{z}\right| = 2\sqrt{13}$$

Recuerde:

En relación al módulo

Si $z = a + bi$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Solución:

(1°) **En términos de la notación cis:**

Sea: $z = r\operatorname{cis}\theta$; nos interesa "θ"; $\rho = 5$

$$\Rightarrow z + \frac{15}{z} = 5\operatorname{cis}\theta + \frac{15}{5\operatorname{cis}\theta} = 5\operatorname{cis}\theta + 3\operatorname{cis}(-\theta)$$

(2°) **En la condición propuesta:**

$$\Rightarrow \left|z + \frac{15}{2}\right| = \left|8\cos\theta + (2\operatorname{sen}\theta)\right| = 2\sqrt{13}$$

(3°) **De acuerdo a la definición de módulo**

$$\sqrt{(8\cos\theta)^2 + (2\operatorname{sen}\theta)^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow 64\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta = 52$$

(4°) **Resolvemos esta ecuación:**

$$60\cos^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\theta = 52$$

$$60\cos^2\theta + 4(\text{sen}^2 + \cos^2\theta) = 52$$

$$60\cos^2\theta = 48$$

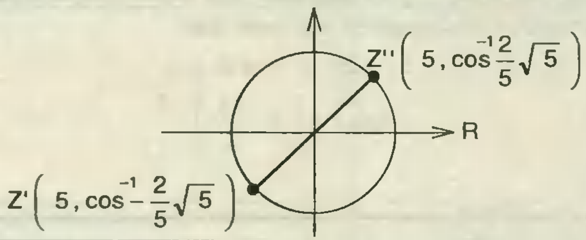
$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$\therefore \boxed{\theta = \text{arc}\cos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \text{ ó } \text{arc}\cos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}$$

Comentario:

Existen 2 soluciones que se pueden visualizar como:



12.12.37 **Ejemplo Explicativo**

Simplificar:

$$k(x) = \frac{x^3 + 11ix^2 - 38x - 40i}{x^2 + 6ix - 8} + \frac{x^3 + 5ix^2 + 36x + 120i}{x^2 + 10ix - 24} \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

La regla de división algebraica, determinan los correspondientes elementos cociente y residuo, independientes de la naturaleza de sus coeficientes.

Solución:

(1°) **Efectuando la división en la 1ra fracción impropia:**

1	1	11i	- 38	- 40i
		- 6i	8	
- 6i			30	40i
8				
	1	5i	0	0

$\underbrace{0 \quad 0}_{\text{Exacta}}$

(2°) **Efectuando la división en la fracción impropia siguiente**

$$\begin{array}{c|cc|cc}
1 & 1 & 5i & 36 & 120i \\
 & & -10i & 24 & \\
\left\{\begin{array}{l} -10i \\ 24 \end{array}\right. & & & -50 & -120i \\ \hline
 & 1 & -5i & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{0 \qquad 0}_{\text{Exacta}}}
\end{array}$$

(3°) **En la expresión k (x) se tendrá:**

$\Rightarrow k(x) = \underbrace{x + 5i} + \underbrace{x - 5i}$

$\therefore \boxed{k(x) = 2x}$

12.12.38 Ejercicio Explicativo

Un número complejo y su conjugado son tales que:

$$z\,\bar{z} + 2\bar{z} = 12 + 4i \quad , \; y$$

$$\text{Arg } z \in \left[\; \pi , \frac{3\pi}{2} \;\right]$$

Calcular: $|\,\bar{z}\,|$

Recuerde:

z: Es el complejo z

$\bar{z}$: Es el conjugado de z

z^*: Es el opuesto de z

Solución:

(1°) Sea $z = a + bi$ .... (1)

$\Rightarrow \quad \bar{z} = a - bi$ .... (2)

$\Rightarrow \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$ .... (3)

$\Rightarrow \quad 2\bar{z} = 2a - 2bi$ .... (4)

(2°) De (3) y (4):

$(a^2 + b^2 + 2a) - 2bi = 12 + 4i$ .... (5)

Por el postulado de igualdad

$$\left\{\begin{array}{rl} a^2 + b^2 + 2a = 12 & y \; \text{.................................... (6)} \\ -2b = 4 & \text{.................................... (7)} \end{array}\right.$$

(3°) **Resolviendo el sistema obtenido**

de (7): $b = -2$

de (6): $a^2 + 2a - 8 = 0 \;;\; a = -4 \text{ y } a = 2$

(4°) **Tenemos por elegir a:** $z_1 = -4-2i$ y $z_2 = 2+2i$

Elegimos z_1 por estar en el 3er cuadrante pues $\arg(z) \in \left[\pi, 3\dfrac{\pi}{2}\right]$

(5°) Como $z = -4-2i$

$$\Rightarrow \bar{z} = -4+2i\ ,\ |\bar{z}| = \sqrt{(4)^2+(2)^2}$$

$$\therefore\ \boxed{|z| = 2\sqrt{5}}$$

12.13 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

(1) Simplificar: $k = \dfrac{30}{1+i} - \dfrac{40}{4-2i} + \dfrac{2}{1-i}$

Rpta: $k = 17-9i$

(2) Si x e $y \in \mathbb{C} - \{0\}$

Calcular: $E = \dfrac{|x|^2+|y|^2}{|x+y|^2+|x-y|^2}$

Rpta: 1/2

(3) Calcular: $E = \sqrt{\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}}$

Rpta: i

(4) Simplificar: $k = \dfrac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}} + \dfrac{\left[\sqrt{3}\right]\sqrt{-1}}{\sqrt{|-1|}}$

Rpta: $\dfrac{1}{2}i$

(5) Calcular las 4 raíces correspondientes a: $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$

Rpta: $1+\sqrt{3}\,i$

$-\sqrt{3}+i$

$-1-\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{3}-i$

(6) Expresar trigonométricamente: $\sqrt[4]{-16}$

Rpta: $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right]$

(7) Hallar el opuesto de z si:

$$z = i^{1!} + i^{3!} + i^{5!} + i^{7!} \ldots + i^{59!} \;;\; i = \sqrt{-1}$$

Rpta: $-27 - i$

(8) Si: m y $n \in \mathbb{R}$

Hallar la condición para que la división siguiente: $\frac{m + ni}{n + mi}$; $i = \sqrt{-1}$

sea un número real

Rpta: $|m| = |n| \neq 0$

(9) Efectuar: $E = \left|\frac{b + ai}{a - bi} - \frac{b - ai}{a + bi}\right|$; $i = \sqrt{-i}$

Rpta: 2

(10) Calcular:

$$E = \left(\frac{i + 1}{-i + 1}\right)^3 + \left(\frac{2i + 1}{-i + 2}\right)^3 + \left(\frac{3i + 1}{-i + 3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{40i + 1}{-i + 40}\right)^3 + \left(\frac{41i + 1}{-i + 41}\right)^3$$

Rpta: $E = -41i$

(11) Calcular: $H = (1 + 2i) + (3 + 4i^3) + (5 + 6i^5) + \ldots$ n términos

$$n > 300$$

Rpta: $n^2 - ni$

(12) Calcular el módulo de "k" si:

$$k = \sqrt[1-i^6]{1 - \frac{i^2}{2}\left(1 + \frac{1 + i}{1 + i^{-1}}\right)^{3i^4}} \;;\; i = \sqrt{-1}$$

Rpta: $|k| = 1$

(13) Calcular a y b si se verifica la igualdad siguiente:

$$\frac{3ai}{1 + \frac{b}{4}i} = \frac{9a + 4i}{3a + \frac{3}{4}b}$$

Rpta: $(a = 2/3\,,\ b = 6)$ ó $(a = -1\,,\ b = -6)$

(14) Simplificar:

$$k = \frac{\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{3}-\frac{10a}{i}\right)(i+3+30a)}{\left(-1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3i}\right)+100a^2}$$

Rpta: $k = 3i$

(15) Considerando que $[\![x]\!]$ es el máximo entero, calcular:

$$E_{(x)} = \sqrt[\left[\!\left[\frac{\frac{x}{2}[\![x]\!]+6}{\frac{[\![7x]\!]+2}{[\![x]\!]}}\right]\!\right]]{\left[\frac{3[\![x^{-1}]\!]+1}{1995[\![x^{-2}]\!]-1}\right]^{[\![x]\!]-6}}$$

Asumiendo: $x = 5$

Rpta: $E = i$

(16) Si cada par ordenado es un elemento de $\mathbb{C}$, calcular **a** y **b**

Si: $\dfrac{\sqrt{(72;54)}}{(1,-1)} = \left(a-1;\dfrac{3}{5}(b+1)\right)$

Rpta: $a = 4$; $b = 9$

(17) Si "z" es un número complejo tal que el módulo: $|z| = 5\sqrt{5}$

Calcular: $k = |5+z|^2 + |5-z|^2$

Rpta: 350

(18) Si: $z = 12 + 1\,213i$

$w = 13 + 1\,415i$

Calcular:

$$E = \frac{\left|\frac{z^2+w^2}{2}+zw\right| + \left|\frac{z^2+w^2}{2}-zw\right|}{|z|^2+|w|^2}$$

Rpta: 1

(19) Sea los números complejos tales que:

$m = (1, y)$

$n = (u, v)$

$m + n = (a, 10)$

$m\,n = (-19, 13)$

Calcular: $a^2 + y^2 + u^2 + v^2$; ($a , y, u, v \in \mathbb{N} , 2 < a < 6$)

Rpta: 78

(20) Calcular los afijos de "z" $\in \mathbb{C}$ sabiendo que verifica la siguiente condición:

$$|z - 3| = |z - 4| = |z - 5i|$$

Rpta: $\left(\frac{7}{2}, \frac{37}{10} \right)$

CAPITULO 13

TEORIA ELEMENTAL DEL LIMITE

13.1. REFERENCIAS ACERCA DEL LIMITE:

13.1.1. El límite es el algoritmo algebraico que permite **aproximar el valor de una regla funcional F (x)** cuando la variable del dominio se aproxima a un valor predeterminado.

13.1.2. **Sean "a" , "L" constantes $\in \mathbb{R}$ y sea F (x) una regla funcional.**

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} F(x) = L$$

Se traduce que: cuando "x" esté **"cerca de"** "a", F(x), estará **"cerca de" L**; ó recíprocamente F(x) estará cerca de L siempre que x este cerca de "a" **pero sin ser igual que "a"**.

13.1.2.1. La Notación " $\to$ "

Indica que la variable se **acerca a cierto valor real** pero que de **ningun modo adopta dicho valor**.

Es decir: $(x \to 3) \neq (x = 3)$

13.1.3. Consideremos la regla funcional: $F(x) = 7x - 1$
y analicemos el comportamiento de la misma para valores de x **muy próximos a 4**; es decir:

$$\lim_{x \to 4} (7x - 1)$$

Para ello tabulamos dos cuadros:

x	3.70	3.80	3.90	3.95	3.98	3.990	3.995	3.9995
f(x)	24.90	25.60	26.30	26.65	26.86	26.930	26.965	26.9965

Este primer cuadro muestra como nos aproximamos a 4 (por la izquierda) con valores menores a ella; obsérvese que dicha aproximación para F (x) duraría indefinidamente como se desee a 27.

x	4.30	4.20	4.10	4.05	4.02	4.01	4.005	4.0005
f(x)	29.10	28.40	27.70	27.35	27.14	27.07	27.035	27.0035

En este segundo cuadro se muestra como nos aproximamos a 4 (por la derecha) con valores mayores a ella; de igual manera que en el caso anterior dicha aproximación para F (x) duraría indefinidamente como uno lo desee a 27.

Concluimos que sin importar porque lado nos acerquemos, F(x) se aproxima a 27, el cual es el límite intuitivamente.

Es decir: $\lim\limits_{x \to 4} (7x - 1) = 27$

Se lee: "El límite de la regla funcional 7x - 1 cuando x tiende a 4 es 27".

Asimismo: $\boxed{\lim\limits_{x \to {}^{+}4} (7x - 1) = 27}$

Se lee: "El límite de la regla (7x - 1) cuando x tiende a 4 por la **derecha** es 27".

$\boxed{\lim\limits_{x \to {}^{-}4} (7x - 1) = 27}$

Se lee: "El límite lateral de la regla 7x-1 cuando x tiende a 4 por la **izquierda** es 27".

13.2 INTRODUCCION A LA DEFINICION DE LÍMITE

Reordenando los cuadros anteriores y haciendo una correspondencia entre valores de x que equidistan de por ambos lados nos damos cuenta de:

	x	F (x)	
	3.70	24.90	1
	3.80	25.60	2
	3.90	26.30	3
	3.95	26.65	4
	3.98	26.86	5
	3.99	26.93	6
	3.995	26.965	7
	3.9995	26.9965	8
4 ⇒			⇐ 27
	4.0005	27.0035	
	4.005	27.035	
	4.01	27.07	
	4.02	27.14	
	4.05	27.35	
	4.10	27.70	
	4.20	28.40	
	4.30	29.10	

de (1): si $3.70 < x < 4.30 \Rightarrow$ **$24.90 < F(x) < 29.10$** .... (A)

de (2): si $3.80 < x < 4.20 \Rightarrow$ **$25.60 < F(x) < 28.40$** .... (B)

de (3): si $3.90 < x < 4.10 \Rightarrow$ **$26.30 < F(x) < 27.70$** .... (C)

de (4): si $3.95 < x < 4.05 \Rightarrow$ **$26.65 < F(x) < 27.35$** .... (D)

de (5): si $3.98 < x < 4.02 \Rightarrow$ **$26.86 < F(x) < 27.14$** .... (E)

de (6): si $3.99 < x < 4.01 \Rightarrow$ **$26.93 < F(x) < 27.07$** .... (F)

de (7): si $3.995 < x < 4.005 \Rightarrow$ **$26.965 < F(x) < 27.035$** .... (G)

de (8): si $3.9995 < x < 4.0005 \Rightarrow$ **$26.9965 < F(x) < 27.0035$** .... (H)

de (A); (B); (C); (D); (E); (F); (H) restando 4 y 27 a cada una de las limitaciones, obtenemos la otras siguientes limitaciones:

Si: $-0.30 < x - 4 < 0.30 \Rightarrow$ **$-2.10 < F(x) - 27 < 2.10$** .... (J)

Si: $-0.20 < x - 4 < 0.20 \Rightarrow$ **$-1.40 < F(x) - 27 < 1.40$** .... (K)

Si: $-0.10 < x - 4 < 0.10 \Rightarrow$ **$-0.70 < F(x) - 27 < 0.70$** .... (L)

Si: $-0.05 < x - 4 < 0.05 \Rightarrow$ **$-0.35 < F(x) - 27 < 0.35$** .... (M)

Si: $-0.02 < x - 4 < 0.02 \Rightarrow$ **$-0.14 < F(x) - 27 < 0.14$** .... (N)

Si: $-0.01 < x - 4 < 0.01 \Rightarrow$ **$-0.07 < F(x) - 27 < 0.07$** .... (O)

Si: $-0.005 < x - 4 < 0.005 \Rightarrow$ **$-0.35 < F(x) - 27 < 0.035$** .... (P)

Si: $-0.0005 < x - 4 < 0.0005 \Rightarrow$ **$-0.0035 < F(x) - 27 < 0.0035$** .... (Q)

Utilizando la notación del valor absoluto en J, K, L, M, N, O, P, Q.

Si: $|x - 4| < 0.30 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 2.10$** .... (R)

Si: $|x - 4| < 0.20 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 1.40$** .... (S)

Si: $|x - 4| < 0.10 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.70$** .... (T)

Si: $|x - 4| < 0.05 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.35$** .... (U)

Si: $|x - 4| < 0.02 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.14$** .... (V)

Si: $|x - 4| < 0.01 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.07$** .... (W)

Si: $|x - 4| < 0.005 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.35$** .... (X)

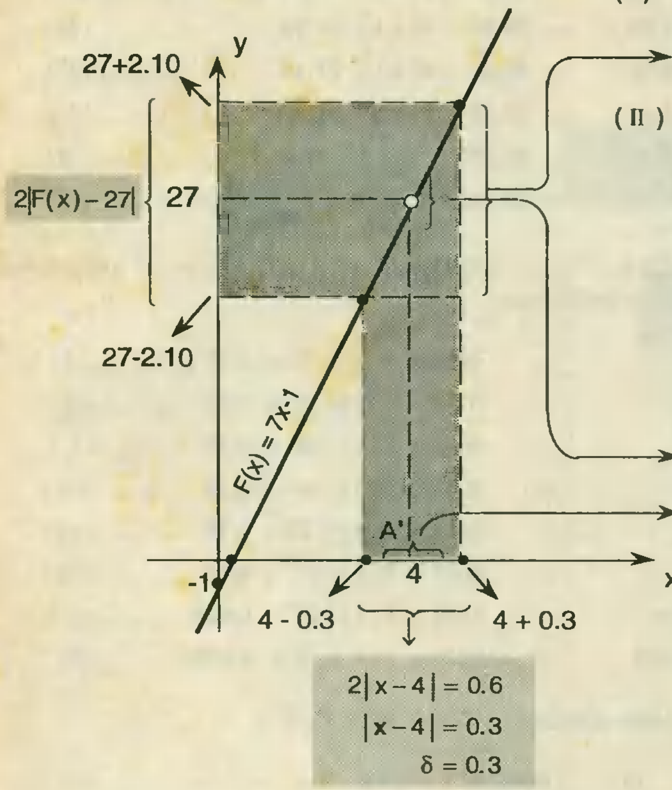
Si: $|x - 4| < 0.0005 \Rightarrow$ **$|F(x) - 27| < 0.035$** .... (Y)

Recordar que nuestro propósito es calcular $\lim\limits_{x \to 4} F(x) = 27$

donde $F(x) = 7x - 1$; en dicha determinación notamos que siempre aparecen: **$|x - 4|$** y **$|F(x) - 27|$** en cada aproximación y que los lados derechos de las limitaciones desde A. . . H y de J. . . Q son proporcionales entre sí.

13.2.1. *Ejemplo:*

Hagamos una ilustración geométrica y típica del límite hallado de los cuadros: establecidos; se desprende:



(I)

$2\,|F(x) - 27| = 4.20$
$|F(x) - 27| = 2.10$

(II)

Observemos que el límite se podrá determinar tomando la diferencia.

$\varepsilon = |F(x) - 27|$ lo más pequeño posible en forma prefijada, haciendo intervenir para ello la diferencia en el dominio:

$\delta = |x - 4|$; de acuerdo a la definición de límite.

$|F(x) - 27| = \varepsilon = 0.0035$

$|x - 4| = \delta = 0.0005$

(III)

La definición de límite asegura que la gráfica de F (x) para puntos en el intervalo del dominio < 4 - 0.3 ; 4 + 0.3 >, contiene a dicho límite.

(IV) Recuérdese que:

ε y δ son números reales positivos, que se estableceran en la definición de límite.

13.3 NOTACION " ε " (Epsilon) y " δ " (Delta)

ε **y** δ **son números reales positivos** y vienen a ser la representación de las aproximaciones deseadas en la definición del límite.

Además: δ depende de ε;

δ se halla en el dominio de la función (eje x)
ε se halla en el rango de la función (eje y)

Ejemplo:

En el caso estudiado y de acuerdo al gráfico:

$$\lim_{x \to 4} (7x - 1) = 27 \quad ; F(x) = 7x - 1$$

$$|x - 4| < 0.0005 \; ; \; \delta = 0.0005$$

$$|F(x) - 27| < 0.0035 \; ; \; \varepsilon = 0.0035$$

Es simple darse cuenta: $\dfrac{\delta}{\varepsilon} = \dfrac{0.0035}{0.0005} = 7$

$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = 7\varepsilon}$ ó $\boxed{\varepsilon = \delta/7}$

Las referencias intuitivas tales como **x cerca de "a"; permitirá a F(x) estar cerca de "L"** y todas otras sinónimas no proporcionan una definición adecuada, nos obliga a tener una definición precisa del límite; dentro de este comentario podríamos incluir al desarrollo tabular anterior.

13.4 DEFINICION DE LIMITE:

El número real "L" se dice que es el límite de la regla funcional F(x) en "a" si para cada "ε" existe el correspondiente "δ", que verifica:

$$\lim_{x \to a} F(x) = L \quad \Rightarrow \quad |F(x) - L| < \varepsilon$$

Siempre que $0 < |x - a| < \delta$; $x \in$ Dominio de $F(x)$

13.4.1 Observaciones:

(1°) La definición anterior es la estrictamente necesaria para la demostración de la existencia de los límites, por lo que distinguimos el esquema siguiente:

- **Cálculo de un límite.**
- **Demostración de la existencia del límite calculado mediante la definición.**

(2°) Cuando hablemos de $\lim_{x \to a} F(x)$ es necesario que $F(x)$ esté definida en las cercanías de "a" sin interesar si está o no definida en $x = a$.

13.5 LIMITES LATERALES

13.5.1 Límite Lateral Izquierdo

Definición.- Es el límite de F(x) en "a" restringido al intervalo $\langle -\infty ; a \rangle$, cuya notación es:

$$\text{es: } \lim_{x \to a^-} F(x) = L$$

Lectura: **"Límite de F(x) cuando x tiende hacia "a" por la izquierda es L".**

13.5.2 Límite Lateral Derecho

Definición.- Es el límite de $F(x)$ en "a" restringido al intervalo $< a ; \infty >$, cuya notación es:

$$\boxed{\lim_{x \to {}^{+}a} F(x) = L}$$

Lectura: **"Límite de $F(x)$ cuando x tiende hacia a por la derecha es L".**

13.6 TEOREMA DE UNICIDAD

El límite ordinario, $\lim_{x \to a} F(x) = L$, **existe**

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to {}^{+}a} F(x) = \lim_{x \to {}^{-}a} F(x) = L$$

Se lee: "El límite existe si los límites laterales son iguales".

13.6.1 Corolario:

Sea: $\lim_{x \to {}^{+}b} F(x) \neq \lim_{x \to {}^{-}b} F(x)$

$\Rightarrow \quad \lim_{x \to b} F(x) \in \phi$; **"Si los límites laterales son diferentes, el límite vulgar no existe".**

13.7 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO DEL DOMINIO

Definición.- Sea $F(x)$ una función y "a" número real; $F(x)$ será continua en $x = a$

$$\Leftrightarrow \exists\left(\lim_{x \to a} F(x) = F(a)\right); \; F(a) \neq \infty$$

Definido más brevemente.- Una función es continua en un punto si el límite de la función coincide con el valor de la función en el límite. En caso contrario la función será discontinua.

13.7.1 Teorema (Algebra de Reglas Funcionales)

Sean $F(x)$ y $G(x)$ reglas funcionales contínuas sobre un intervalo "I".

$$\Rightarrow F(x) + G(x) ; F(x)\,G(x) \text{ y } \frac{F(x)}{G(x)}, \; G(x) \neq 0$$

son continuas sobre el intervalo "I".

13.7.1.1 **Corolarios:**

(a) $F(x) = k$; es continua para todo el dominio de f.

(b) La función polinomial es continua en todo su dominio.

(c) $P(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$, es continua si $F(x)$ y $G(x)$ son reglas funcionales polinomiales; tal $G(x) \neq 0$.

13.8 CALCULO DE LIMITES : Se realiza mediante las reglas:

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a) \; ; \text{ si } F(x) \text{ es continua en } x = a$$

$$\lim_{x\to a} F(x) \neq F(a) = \frac{0}{0} \; ; \; \frac{\infty}{\infty} \, , \; 0\times\infty \, , \; 1^{\infty} \, , \; 0^{0} \; ;$$

Si $F(x)$ es discontinua en $x = a$

1° *Ejemplo:*

$$\lim_{x\to 10} (3x+1) = 3(10)+1 = 31 \qquad \therefore \lim_{x\to 10} (3x+1) = 31$$

Se lee: "La regla funcional "$F(x) = 3x+1$" tiende a 31 **cuando la variable x tiende a 10**; la función es continua en $x = 10$.

2° *Ejemplo:*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (8\text{Sen}x + 11\sqrt{2}) = 8\text{Sen}\frac{\pi}{4} + 11\sqrt{2} = 8\frac{\sqrt{2}}{2} + 11\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (8\text{Sen}x + 11\sqrt{2}) = 15\sqrt{2}$$

Se lee: "La regla funcional $F(x) = 8\,\text{sen}\,x + 11\sqrt{2}$ tiene por límite a $15\sqrt{2}$ **cuando la variable tiende a** $\frac{\pi}{4}$".

3° *Ejemplo:*

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{5x-4} = \left(1+\frac{3}{-1}\right)^{-4} = (-2)^{-4} = \frac{1}{16} \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{5x-4} = \frac{1}{16}$$

Se lee: "La regla funcional $F(x) = \left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{5x-4}$ tiene por límite 1/16 **cuando la variable tiende a cero".** La función es continua en $x = 0$.

4° *Ejemplo:*

$$\lim_{x\to -3} \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right) = \frac{9}{-27-1} = -\frac{9}{28} \qquad \therefore \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{x^3+1}\right) = \frac{-9}{28}$$

Se lee: "La regla funcional $F(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$ tiene por límite a - 9/28 cuando la variable tiende a - 3".

5°

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)=\frac{0}{0}$$

Interpretación: La regla funcional $F(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$;

- Es indeterminada en $x = 1$.
- Es discontinua en $x = 1$.
- No está definida en $x = 1$.

Podemos aceptar las tres referencias como sinónimos; por ello procedemos a eliminar el factor de indeterminación (x - 1):

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}(12)=12$$

Se lee: El límite de una constante es la misma constante.

13.9 LAS FORMAS SINGULARES O INDETERMINADAS Y LOS LIMITES INDETERMINADOS.

13.9.1 ***Concepto.-*** Son aquellas formas simbólicas que resultan de evaluar una regla funcional para un valor del dominio, en el cual es discontinua dicha función; **la misma situación puede ocurrir al tratar de obtener un límite.**

13.9.2 Usualmente las formas indeterminadas son:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\times\infty$ que provienen de la evaluación de reglas funcionales racionales fraccionarias discontinuas, o algunas expresiones irracionales.

13.9.3 Sin embargo otras funciones permiten las siguientes: 0^0 ; 0^∞ ; 1^∞

13.9.4 **Eliminación de la Indeterminación:**

Siempre que se tenga una indeterminación al realizar una sustitución, antes de afirmar que el límite no existe, se realiza un estudio de la expresión con el objeto de eliminar la indeterminación. Pueden ocurrir los siguientes casos; los que se resumen:

RESUMEN PARA LA ELIMINACIÓN DE LA INDETERMINACIÓN

CARACTERISTICAS DE LA REGLA FUNCIONAL Y DE LA VARIABLE	FORMA DE LA INDETERMINACIÓN	ALTERNATIVAS Y METODOLOGIA DE ELIMINACION DE LA INDETERMINACION
1.0 Regla Funcional racional o irracional de variable "x" de tendencia finita "a": Ej: $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$ Dentro de este grupo, se pueden admitir los casos, trigonométricos y logarítmicos. Ej: $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{x^2 \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$ Ej: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x-1)}{1-\log\left(\dfrac{e}{x}\right)}$	1.a) $\dfrac{0}{0}$	1.a) el factor de indeterminación "x - a".
	1.b) $\dfrac{\infty}{\infty}$	1.b) Mediante factorización y por el teorema del factor o racionalización de los términos se puede simplificar (x - a).
	1.c) $0 \times \infty$	1.c) Puede usarse el Método de L'hopital sólo si hubiera forma: $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$
	1.d) $\infty - \infty$	1.d) Se pueden usar desarrollos en serie limitado como el Binomio de Newton. 1.e) Se usan infinitésimos equivalentes.
2.1 Regla Funcional racional fraccionaria o irracional con **variable que tiende al infinito**.	2.a) $\dfrac{\infty}{\infty}$	2.a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \pm\infty$ si $F^\circ > ^\circ G$
2.2 Regla Funcional racional irracional de grados iguales de **variable con tendencia al infinito**.	2.b) $\dfrac{\infty}{\infty}$	2.b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{a_0}{b_0}$ si : $F^\circ = G^\circ$
2.3 Función irracional de **variable con tendencia al infinito**. 2.4 Regla Funcional racional propia o irracional de **variable con tendencia al infinito**.	2.c) $\infty - \infty$ $\dfrac{\infty}{\infty}$	2.c) Se le transforma mediante racionalización, en esta situación se obtiene , $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{F(x)}{G(x)} = 0$; si $F^\circ < G^\circ$
3.0 Funciones exponenciales, logarítmicas o tracendentes con **variable de tendencia finita o infinita**.	3.a) 0^0	3.a) Se asocia a los límites análogos a los que inducen a fuciones de "e".
	3.b) ∞^0 3.c) 1^∞	3.b) Mediante logarítmos se le transforma a la forma: $\dfrac{0}{0}$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$ en estas circunstancias es posible usar. 1.a , 1.b, 1.c, 1.d, 1.e.

13.10. TEOREMA DE L'HOPITAL

Sea $\lim_{x\to a}\left\{\frac{F(x)}{G(x)}\right\}$ indeterminado en "a" $\left(\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left\{\frac{F(x)}{G(x)}\right\} = \lim_{x\to a}\left\{\frac{F'(x)}{G'(x)}\right\}$; **a es finita** ; $F'(x)$ derivada de $F(x)$

$G'(x)$ derivada de $G(x)$

13.11. TEOREMA DEL NUMERO e

Sea $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; (indeterminado 1^∞)

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\ldots = e \quad ; \quad (e = 2.71828)}$$

13.12. COROLARIO

Sea: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y$

$$\Rightarrow e^y = 1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}\ldots\infty$$

$$\Rightarrow e^{-1} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\pm\frac{1}{n!}\ldots\infty$$

13.13. TEOREMAS Y PROPIEDADES DEL LIMITE DE LA FUNCION DE VARIABLE REAL

13.13.1 $\lim_{x\to a} c = c = L$; **(Límite de una función constante)**

13.13.2 $\lim_{x\to a} F(x) = F(a) = L$; **si $F(x)$ es continua en "a"**

13.13.3 $\lim_{x\to a} x = a = L$; **(Límite de la función diagonal Identidad)**

13.13.4 $\lim_{x\to a} (f \pm g)_{(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ **Límite de la adición**

13.13.5 $\lim_{x\to a} (f \times g)_{(x)} = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$ **Límite de la multiplicación**

13.13.6 $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$; $L_2 \neq 0$ **Límite de la división**

13.13.7 Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$; y $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

13.13.8 $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[m]{L}$; $m \in \mathbb{R}$ **Límite de una radicación**

13.13.9 $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$; $n \in \mathbb{R}$ **Límite de una potenciación**

13.14. TEOREMAS Y PROPIEDADES DE LIMITES TRIGONOMETRICOS

13.14.1 $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$; $a \in \mathbb{R}$

13.14.2 $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$; $a \in \mathbb{R}$

13.14.3 $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$; $a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

13.14.4 $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$; $a \neq \frac{\pi}{2} n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

13.14.5 $\lim\limits_{x \to a} \sec x = \sec a$; $a \neq \frac{\pi}{2} n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$

13.14.6 $\lim\limits_{x \to a} \csc x = \csc a$; $a \neq n\pi \, (n \in \mathbb{Z})$

13.14.7 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sen} bx}{x} = b$

13.14.8 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Tg} bx}{x} = b$

13.14.9 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arc\,sen} x}{x} = 1$

13.14.10 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x} = 1$

13.15 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

13.15.1 Ejercicio Explicativo

Calcular: $$\lim_{x\to 7}\left\{\frac{x^2-1}{x-1}-2^{x-7}\right\}$$

Recuerde:

Al calcular límites, estos pueden ser determinados o indeterminados, en este último caso se realizan las operaciones necesarias a fin de obtener el valor límite correspondiente.

Solución:

(1°) **Evaluando de acuerdo a:** $\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$

(2°) **Realizando las sustituciones:**

$$\lim_{x\to 7}\left\{\frac{x^2-1}{x-1}+2^{x-7}\right\}^2=\left\{\frac{49-1}{7-1}+2^{7-7}\right\}^2$$

(3°) **Ejecutando:**

$$=\{8-1\}^2$$
$$=49$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to 7}\left\{\frac{x^2-1}{x-1}-2^{x-7}\right\}=49}$$

13.15.2 Ejercicio Explicativo

Calcular: $$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log\left(4+x+x^2\right)+\text{antilog}\ x}{1-x^2}\right\}$$

Recuerde:

Si $F(x)$ es contínua:

$\Rightarrow \lim_{x\to m} F(x) = F(m) \wedge F(m)\in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) **Evaluando:**

$$\Rightarrow\left\{\frac{\log\left(4+0+0^2\right)+\text{antilog}\ 0}{1-0^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\log 4 + 10^0}{1}\right\}$$

(2°) **Realizando las sentencias**

$$\Rightarrow \{\log 4 + 1\}$$

$$\Rightarrow 2\log 2 + 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log\left(4 + x + x^2\right) + \text{antilog}\,x}{1 - x^2}\right\} = 2\log 2 + 1}$$

13.15.3 Ejercicio Explicativo

Calcular: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 + \operatorname{Sen} x}{4 - 3\operatorname{Cos}(x + \pi)}\right)$

Recuerde:

Si $F(x)$ es continua en b

$$\lim_{x\to b} F(x) = F(b) \wedge F(b) \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) **Evaluando:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{4 - 3\cos(x + \pi)}\right) = \frac{1 + \operatorname{sen} 0}{4 - 3\cos\pi}$$

(2°) **Realizando las sentencias:**

$$= \frac{1 + 0}{4 - 3(-1)}$$

$$= \frac{1}{4 + 3}$$

$$= \frac{1}{7}$$

(3°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{4 - \cos(x + \pi)}\right) = \frac{1}{7}}$$

13.15.4 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x!-3!}{x-3}\right)$$

Recuerde:

La determinación de un límite indeterminado requiere cancelar como el presente caso un factor indeterminante.

Solución:

(1°) **Si hacemos $x = 3$**

$$\left(\frac{3!-3!}{3-3}\right)=\frac{0}{0}$$; es un límite indeterminado o la función es discontinua en $x = 3$.

(2°) **El factor de indeterminación por eliminar será (x - 3) ; en la regla funcional.**

$$\Rightarrow \left\{\frac{x(x-1)(x-2)-3!}{x-3}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{x^3-3x^2+2x-6}{x-3}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{x^2(x-3)+2(x-3)}{x-3}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+2)}{\cancel{(x-3)}}\right\}$$

(3°) **Tomando límites:**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\{x^2+2\} = 3^2+2$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 3}\left\{\frac{x!-3!}{x-3}\right\}=11}$$

13.15.5 **Ejercicio Explicativo**

Simplificar el valor de la expresión siguiente:

$$y=\left[\frac{x-\dfrac{\sqrt{x}}{16}}{x+\dfrac{\sqrt{x}}{256}}\right]^{\frac{\sqrt[3]{x^{-4}}+\sqrt[3]{x}}{9\sqrt[3]{x^{-4}}-\sqrt[3]{x}}}$$

Para: $x = 0$

Solución:

(1°) El valor $x = 0$; ocasiona indeterminaciones en la base y en el exponente; **para ello cancelemos el factor indeterminante x mediante factorizaciones:**

(2°) **Se obtendrá:**

$$\Rightarrow\ y = \left[\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{16}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{256}\right)}\right]^{\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}^{3}+1\right)}{\sqrt[3]{x}\left(9\sqrt[3]{x}^{3}-1\right)}}$$

(3°) **Simplificando:**

$$\Rightarrow\ y = \left[\frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{16}}{\sqrt{x} + \dfrac{1}{256}}\right]^{\frac{x+1}{x-1}}$$

(4°) **Reemplazando:** $x = 0$

$$\Rightarrow\ y = \left[\frac{-1/16}{1/256}\right]^{1/-1} = \left[-\frac{256}{16}\right]^{-1} = [-16]^{-1}$$

$$\therefore\ \boxed{y = -\frac{1}{16}}$$

13.15.6 Ejercicio Explicativo

Calcular el valor de: $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x+3} - 2\sqrt{x+6}}{1+\sqrt[3]{1+x}}$

Para: $x = -2$.

Recuerde:

(1°) Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{0}{0}\,;\ \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} F(x)}{\lim\limits_{x\to a} G(x)}$

(2°) Si: $y = F(G(x)) \Rightarrow y' = (F'(x)).G'(x)$ (Derivación Compuesta)

Solución:

(1°) **La expresión carece de sentido en $x = -2$.**

pues: $\dfrac{4\sqrt[3]{1} - 2\sqrt{4}}{1+\sqrt[3]{-1}} = \dfrac{4-4}{1-1} = \dfrac{0}{0}$

(2°) **Aplicando el Teorema de L'Hopital o de la derivación.**

$$\Rightarrow \frac{(2x)\sqrt[3]{x+3}+x^2\left(\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}\right)-2\left(\frac{1}{2}(x+6)^{\frac{-1}{2}}\right)}{\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{-2}{3}}}$$

(3°) **Realizando las sustituciones.**

$$\Rightarrow \frac{(-4)\sqrt[3]{1}+4\left(\frac{1}{3}(1)^{\frac{-2}{3}}\right)-2\left(\frac{1}{2}(4)^{\frac{-1}{2}}\right)}{\frac{1}{3}(-1)^{\frac{-2}{3}}}$$

(4°) **Ejecutando sentencias.**

$$\Rightarrow \frac{-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow -12+4-\frac{3}{2}$$

$$\therefore \boxed{-\frac{19}{2}}$$

Comentario:

El cálculo de valores límites y de formas indeterminadas coinciden, por ello que en este caso se realizó bajo el esquema de L'hopital.

13.15.7 **Ejercicio Explicativo**

Si "x" se aproxima a 1, ¿a qué valor se aproxima L?, siendo:

$$L=\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^3$$

Solución:

(1°) **El enunciado se puede traducir a la notación de límite:**

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^3=\frac{\sqrt{1}-\sqrt[3]{1}}{1-1}=\frac{0}{0}$$

(2°) **Aplicando el Teorema de L'hopital.**

$$\Rightarrow L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}(2)-\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}{-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}}\right)^3$$

(3°) **Luego de sustituir.**

$$\Rightarrow L = \left(\frac{(1)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}(1)}{-\frac{1}{2}}\right)^3$$

(4°) **Ejecutando sentencias.**

$$\Rightarrow L = \left(\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$\therefore \boxed{L = -\frac{64}{27}}$$

13.15.8 Ejercicio Explicativo

Calcular: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{(1+\cos x)^{\sec x}+(1-3\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}\right\}$

Recuerde:

1°) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ 2°) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=e^{-1}$

Solución:

(1°) **Evaluando:**

$\left\{(1+0)^{\infty}+(1-0)^{\infty}\right\}=1^{\infty}+1^{\infty}$, se tiene una indeterminación

(2°) **Ordenando:**

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right\}+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{3}\right)}\right)^{\operatorname{tg} x}\right\}$$

(3°) **Asociando con lo indicado.**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left\{\left[\left(1-\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{3}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x}{3}}\right]\right\}^{-3} = (e)^{-3}$$

(4°) **Luego de sustituir.**

$$\Rightarrow \quad e \div e^{-3} = e^{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left\{(1+\cos x)^{\operatorname{sen} x} \div (1-3\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}\right\} = e^{4}}$$

13.15.9 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $$y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{4+x}$$

Recuerde:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} mx}{x}\right) = m$$

Solución:

(1°) **Se tendrá:**

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right)^{\lim_{x\to 0}(4+x)}$$

(2°) **Por partes:**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (4+x) = 4$$

$$\Rightarrow 3\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)}_{1} = 3(1) = 3$$

(3°) **Realizando**

$$\Rightarrow \quad y = (3)^{4} = 81$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^{4+x} = 81}$$

13.15.10 **Ejercicio Explicativo**

Si: $x = 7$ Calcular: $E = \dfrac{\left(49 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} + (7 - x)^{\frac{3}{2}}}{\left(343 - x^3\right)^{\frac{1}{2}} + (7 - x)^{\frac{1}{2}}}$

Solución:

(1°) **Si se reemplaza $x = 7$, la expresión carece de sentido, pues se tiene una indeterminación de la forma 0/0.**

(2°) **Cancelemos (7 - x) que produce la indeterminación**

$$\Rightarrow E = \frac{\left[(7 + x)(7 - x)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[7 - x\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[(7 - x)\left(49 + 7x + x^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \left[7 - x\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{(7 + x)^{\frac{1}{2}} (7 - x)^{\frac{1}{2}} + (7 - x)^{\frac{1}{2}} (7 - x)^1}{(7 - x)^{\frac{1}{2}} \left(49 + 7x + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + (7 - x)^{\frac{1}{2}}}$$

(3°) **Extrayendo (7 - x)$^{1/2}$ como factor:**

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{(7 - x)}^{\frac{1}{2}}\left[(7 + x)^{\frac{1}{2}} + 7 - x\right]}{\cancel{(7 - x)}^{\frac{1}{2}}\left[\left(49 + 7x + x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right]} \; ; \qquad \text{hacemos } x = 7$$

(4°) **Sustituyendo:**

$$\Rightarrow E = \frac{(7 + 7)^{\frac{1}{2}} + 7 - 7}{(49 + 49 + 49)^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{14^{\frac{1}{2}}}{(3 \times 49)^{\frac{1}{2}} + 1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{14}}{7\sqrt{3} + 1} \; ; \quad E = \frac{\sqrt{14}}{\left(7\sqrt{3} + 1\right)} \times \frac{\left(7\sqrt{3} - 1\right)}{\left(7\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{\sqrt{14}\left(7\sqrt{3} - 1\right)}{\left(7\sqrt{3}\right)^2 - 1}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sqrt{14}\left(7\sqrt{3} - 1\right)}{146}}$$

13.15.11 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log(1+19x)}{5x}\right]$$

Recuerde:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x} = e^{a}$$

Solución:

(1°) $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log(1+19x)}{5x}\right] = \frac{\log(1)}{5(0)} = \frac{0}{0}$$

(2°) **Efectuando transformaciones orientadas a obtener:** $(1+b)^{1/b}$

$$\Rightarrow \frac{1}{5x}\log(1+19x) = \log(1+19x)^{\frac{1}{5x}}$$

(3°) **Ordenando:**

$$\Rightarrow \log\left\{\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{(1+19x)^{\frac{1}{19x}}}\right]^{\frac{19}{5}}\right\}$$

$$\Rightarrow \log\left\{[e]^{\frac{19}{5}}\right\} = \frac{19}{5}\log e$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+19x)}{5x}\right\} = \frac{19}{5}\log e}$$

13.15.12 **Ejercicio Explicativo**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{20x}-e^{7x}}{x}\right)$$

Recuerde:

$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)}\,.\,f'(x)$ y' es la derivada de y.

Solución:

(1°) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{20x}-e^{7x}}{x}\right) = \frac{e^{0}-e^{0}}{0} = \frac{0}{0}$$

(2°) **Aplicando el Teorema de L'hopital.**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{20x}.20-e^{7x}.7}{1}\right)$$

(3°) **Evaluando nuevamente.**

$$\Rightarrow \frac{e^{0}.20-e^{0}.7}{1}=20-7=13$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{20x}-e^{7x}}{x}\right)=13}$$

13.15.13 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{arc sen}\,x}{3x}\right)$

Recuerde:

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\text{arc sen}\,\theta}{\theta}\right)=1$$

Solución:

(1°) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{arc sen}\,x}{3x}\right)=\dfrac{\text{arc sen}\,0}{3(0)}=\dfrac{0}{0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{arc sen}\,x}{x}\right)$$

(2°) $\dfrac{1}{3}(1)$; pues $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{arc sen}\,x}{x}\right)=1$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{arc sen}\,x}{3x}\right)=\frac{1}{3}}$$

13.15.14 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)$

Recuerde:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{mx+n}\right)=\frac{a}{b}\ ;\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+b}{mx+n}\right)=\infty,\ a>0\ ;\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{mx^2+n}\right)=0$$

Solución:

(1°) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)=\frac{\sqrt{\infty}+\sqrt[3]{\infty}+\sqrt{\infty}}{\sqrt{2(\infty)+1}}=\frac{\infty}{\infty}$$

(2°) **Ordenando:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x+1}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)$$; homogenizando en cada término.

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{x^2}{2x+1}}+\sqrt[4]{\frac{x}{(2x+1)^2}}\right);$$

(3°) **Evaluando en cada sumando:** $x\to\infty$

$$\Rightarrow\ =\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[6]{0}+\sqrt[4]{0}$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

13.15.15 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

Recuerde:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{px+q}{ax^2+b}\right)=0$$

Solución:

(1°) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\sqrt{\infty+\sqrt{\infty+\sqrt{\infty}}}-\sqrt{\infty}$$

$$=\infty-\infty$$

(2°) **Buscamos el límite; racionalizando:**

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\right)\right\}$$

(3°) **Luego de ejecutar:**

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\right\}=\frac{\infty}{\infty}\text{ ; prosigue indeterminado}$$

(4°) **Extrayendo $\sqrt{x}$ y cancelando:**

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}+1\right)}\right\}\text{ ; pues: } x+\sqrt{x}=x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

(5°) **Calculando el límite:**

$$\Rightarrow \left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+1}\right\}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}}$$

13.15.16 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^x-26}-1}{x^{2x}-729}\right)$

Recuerde:

El factor indeterminante es aquel que permite que una expresión adopte la forma indeterminada (0/0) ó, (∞/∞) ó ($\infty-\infty$) ó ($0\ \infty$) .

Solución:

(1°) Si evaluamos la regla funcional en $x = 3$ se obtiene 0/0.

$\Rightarrow$ La función debe contener a $(x^x - 27)$ que es el factor indeterminante.

(2°) Racionalizando el "numerador" y factorizando el "denominador" de la regla funcional:

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{x^x-26}-1\right)\frac{\left(\sqrt{x^x-26}+1\right)}{\left(\sqrt{x^x-26}+1\right)}}_{\text{Del "numerador"}}\times\underbrace{\frac{1}{\left(x^x+27\right)\left(x^x-27\right)}}_{\text{Del "denominador"}}$$

(3°) Simplificando.

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\left(x^x-27\right)}}{\left(\sqrt{x^x-26}+1\right)}\times\frac{1}{\left(x^x+27\right)\cancel{\left(x^x-27\right)}}$$

(4°) Evaluando en x = 3.

$$\frac{1}{\left(\sqrt{27-26}+1\right)(27+27)}=\frac{1}{(2)(54)}$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^x-26}-1}{x^{2x}-729}\right)=\frac{1}{108}}$$

13.15.17 Ejercicio Explicativo

Si: $x = 1$

Calcular: $y=\dfrac{1-x+\log x}{x-\sqrt{2x-x^2}}$; $x \in \mathbb{R}-\left\{1;\left\{2x-x^2<0\right\}\right\}$

Recuerde:

(1) $\log 1 = 0$

(2) Si: $y = \log x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\log e$

(3) $\log x = (\log e)(\ln x)$

Solución:

(1°) Al reemplazar el valor consignado:

$$\Rightarrow y=\frac{1-1+\log 1}{1-\sqrt{2-1}}=\frac{0+0}{1-1}=\frac{0}{0}$$

(2°) Aplicando la regla de L'hopital.

$$\Rightarrow y=\frac{1-x+(\log e)\ln x}{x-\sqrt{2x-x^2}}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{-1+\log e\times\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2}\left(2x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2-2x)}$$

(3°) **Sustituyendo $x=1$**

$$\Rightarrow\ y=\frac{-1+\log e}{1-\frac{1}{2}(2-1)^{-\frac{1}{2}}(2-2)}\ ;\ \nexists\ \text{indeterminación}$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{\log e-1}{1}$$

$$\therefore\ \boxed{y=\log e-1}$$

13.15.18 **Ejercicio Explicativo**

Si: $x=22$.

Calcular: $$E=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{22}+\sqrt{x-22}}{\sqrt{x^2-484}}\ ;$$

$x\in \mathbb{R}^{+}-\{22\,;\{x^2-484>0\}\,;\{x>0\}\,;\{x-22>0\}\}$

Recuerde:

La regla o Teorema de L'hopital le permite calcular indeterminaciones de la forma 0/0 ó ∞/∞

Solución:

(1°) **De acuerdo al valor consignado:**

$$E=\frac{\sqrt{22}-\sqrt{22}-\sqrt{0}}{\sqrt{484-484}}=\frac{0}{0}$$ **; factor de indeterminación: (x - 22)**

(2°) **Aplicando el Teorema de L'hopital a la expresión E;**

$$\Rightarrow\ E=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-0+\frac{1}{2}(x-22)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{2}\left(x^2-484\right)^{\frac{-1}{2}}(2x)}$$

$$\Rightarrow\ E=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-22}}}{\frac{2x}{\sqrt{x^2-484}}}\ ;\ \text{prosigue indeterminado y cambia a la forma }\frac{\infty}{\infty}$$

(3°) **Efectuando las sentencias.**

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{x^2-484}}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-22}}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{x^2-484}}{2x}+\frac{\sqrt{x+22}\,\cancel{\sqrt{x-22}}}{4x\cancel{\sqrt{x-22}}}\quad ;\ \text{se canceló el factor indeterminante}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{484-484}}{(2)(22)}+\frac{\sqrt{22+22}}{(4)(22)} = 0+\frac{\sqrt{44}}{(4)(2)}$$

$$\therefore\ \boxed{E = \frac{\sqrt{11}}{4}}$$

13.15.19 **Ejercicio Explicativo**

Si: $x \to \infty$

Calcular: $E = \sqrt[x]{\dfrac{20+x}{20-x}}$; $x \in \mathrm{IR} - \left\{\dfrac{20+x}{20-x} < 0\right\}$

Recuerde:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

Solución:

(1°) **Escribiendo en la notación de límites:**

$$E = \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{20+x}{20-x}} = \left(\frac{\infty}{-\infty}\right)^{\frac{1}{\infty}}\quad ;\ \text{se tiene un límite indeterminado}$$

(2°) **Ordenando:**

$$\Rightarrow E = \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{20+x}{20-x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{20\left(1+\frac{x}{20}\right)}{20\left(1-\frac{x}{20}\right)}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{20}\right)^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{x}{20}\right)^{\frac{1}{x}}}$$

(3°) Ejecutando:

$$\Rightarrow E = \frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{20}\right)^{\frac{20}{x}}\right]^{\frac{1}{20}}}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{x}{20}\right)^{\frac{20}{x}}\right]^{\frac{1}{20}}} = \frac{(e)^{\frac{1}{20}}}{(e)^{-\frac{1}{20}}} = e^{\frac{1}{20}+\frac{1}{20}} = e^{\frac{1}{10}}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \sqrt[10]{e}}$$

Comentario:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{20}\right)^{\frac{1}{x}} \neq e \quad ; \text{ pues no tiene la forma del teorema.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{20}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{20}\right)^{\frac{20}{x}}\right)^{\frac{1}{20}} = \left[\, e \,\right]^{\frac{1}{20}}$$

Deben ser recíprocos son recíprocos

13.15.20 **Ejercicio Explicativo**

Si: $x = 0$

Calcular: $E = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\log(1+x)}$; $x \in \mathrm{IR} - \{(1+x) < 0\}$

Recuerde:

Si: $y = e^{x}$	Si: $y = e^{f(x)}$
$\Rightarrow y' = e^{x}$	$\Rightarrow y' = e^{f(x)} f'(x)$

Solución:

(1°) **Escribiendo en la notación de límites:**

$$E = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{\log(1+x)}\right) = \frac{e^{0} - e^{-0}}{\log 1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

(2°) **Se trata de un límite indeterminado, para ello apliquemos el Teorema de L'hopital.**

$$\Rightarrow E = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{\log e\ \ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\log e\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right)$$

(3°) **Realizando las sustituciones:**

$$\Rightarrow E = \frac{1+1}{\log e \times \frac{1}{1}} = \frac{2}{\log e}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{2}{\log e}}$$

13.15.21 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{12}{x^2-2x-3}\right)$

Recuerde:

$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} F(x) = F(a) \text{ si} \\ F(x) \text{ es continua en } x = a\end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} F(x) = \text{Indeterminado} \\ \text{si } F(x) \text{ es discontinua en} \\ x = a\end{array}\right\}$

Solución:

(1°) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{12}{x^2-2x-3}\right) = \frac{3}{9-15+6} - \frac{12}{9-6-3} = \infty - \infty$, indeterminado.

(2°) **Procedemos a cancelar el factor de indeterminación: (x - 3)**

$\Rightarrow$ En la regla funcional: $\frac{x}{(x-2)(x-3)} - \frac{12}{(x-3)(x+1)}$

$$= \frac{x^2 - 11x + 24}{(x-2)(x-3)(x+1)}, \text{ factorizando}$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)}(x-8)}{(x-2)\cancel{(x-3)}(x+1)};$$ se está cancelando el factor de indeterminación $(x-3)$.

(3°) $\Rightarrow \lim_{x\to 3}\left(\frac{x-8}{(x-2)(x+1)}\right) = \frac{3-8}{(1)(4)} = -\frac{5}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{12}{x^2-2x-3}\right)=-\frac{5}{4}}$$

13.15.22 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}\right)^{\left(\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}\right)}$

Solución:

(1°) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}\right)^{\left(\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}\right)}=\left(\frac{\sqrt[3]{27}-3}{0}\right)^{\left(\frac{1-\sqrt[3]{1}}{0}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)}$

(2°) **Aplicando el Teorema de L'hopital por partes:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{3}(x+27)^{\frac{-2}{3}}}{1}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{-1}{3}(1-x)^{\frac{-2}{3}}}{1}\right)}$$

(La derivada de x es 1)

(3°) **Evaluando:**

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(27)^{\frac{-2}{3}}\right]^{\left(\frac{-1}{3}(1)\right)}=\left[\frac{1}{3}\times(3)^{-2}\right]^{\frac{-1}{3}}=\left(\frac{1}{3^3}\right)^{\frac{-1}{3}}=\left(3^{-3}\right)^{\frac{-1}{3}}=3$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{x}\right)^{\left(\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{x}\right)}=3}$$

13.15.23 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x+a}+b\sqrt{x+b}+c\sqrt{x+c}\right)$ Sabiendo que: $a+b+c=0$

Solución:

(1°) **Al llevar al límite se obtiene:** $\infty-\infty$;

pues: $\underbrace{a\sqrt{\infty+a}+b\sqrt{\infty+b}}_{\infty}+\underset{\substack{\uparrow\\ -a-b}}{c}\underbrace{\sqrt{\infty+c}}_{\infty}=\infty-\infty$

En la expresión por llevarse al límite, reemplazamos la condición: $c = -a - b$.

$\Rightarrow \; a\sqrt{x+a} + b\sqrt{x+b} - (a+b)\sqrt{x+c}$;

$\Rightarrow \; a\sqrt{x+a} - a\sqrt{x+c} + b\sqrt{x+b} - b\sqrt{x+c}$;

$\Rightarrow \; a\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+c}\right) + b\left(\sqrt{x+b} - \sqrt{x+c}\right)$;

(2°) **Observar que la expresión sigue adoptando la forma $\infty - \infty$; por ello racionalizamos cada sumando.**

$$\Rightarrow \; a\left(\frac{x+a-x-c}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+c}}\right) + b\left(\frac{x+b-x-c}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}}\right)$$

$$\Rightarrow \; a\left(\frac{a-c}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+c}}\right) + b\left(\frac{b-c}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}}\right)$$

(3°) Llevando al límite:

$$\Rightarrow \; a\left(\frac{a-c}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}}\right) + b\left(\frac{b-c}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}}\right)$$

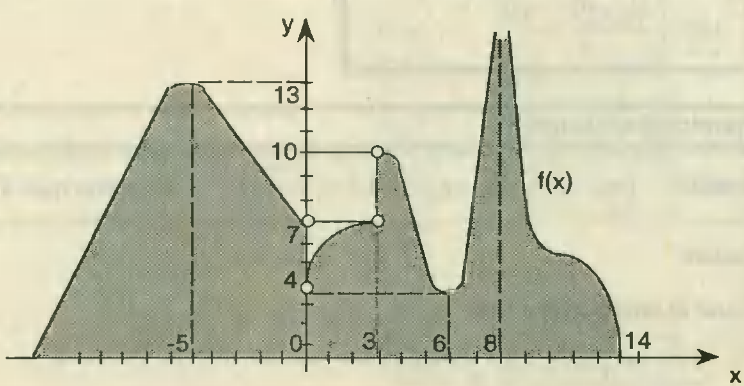
$$\Rightarrow \; a\left(\frac{a-c}{\infty}\right) + b\left(\frac{b-c}{\infty}\right)$$

$\Rightarrow \; 0 + 0$

$$\therefore \; \boxed{\begin{array}{l} \text{Lim} \left(a\sqrt{x+a} + b\sqrt{x+b} + c\sqrt{x+c}\right) = 0 \\ \text{con:} \qquad a + b + c = 0 \end{array}}$$

13.15.24 **Ejercicio Explicativo**

Si la gráfica de $f(x)$ es:



Señalar las afirmaciones falsas y verdaderas.

(1) $\lim\limits_{x \to {}^{-}5} F(x) = 0$

(2) $\lim\limits_{x \to {}^{-}5} F(x) = 13$

(3) $\lim\limits_{x \to {}^{+}5} F(x) = 13$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 5{,}5$

(5) $\lim\limits_{x \to {}^{+}0} F(x) = 7$

(6) $\lim\limits_{x \to {}^{-}0} F(x) = 4$

(7) $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \phi$

(8) $\lim\limits_{x \to 3} F(x) = \phi$

(9) $\lim\limits_{x \to 8} F(x) = \infty$

(10) $\lim\limits_{x \to {}^{-}8} F(x) = \infty$

(11) $\lim\limits_{x \to {}^{+}8} F(x) = \infty$

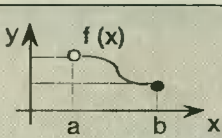
(12) $\lim\limits_{x \to 8} F(x) = \infty$

(13) $\lim\limits_{x \to 14} F(x) = 0$

(14) $\lim\limits_{x \to 6} F(x) = 3$

Recuerde:

En la gráfica:



a $\notin$ Dominio de f(x)

b $\in$ Dominio de f(x)

Solución:

De acuerdo a la gráfica:

(1) $\lim\limits_{x \to {}^{-}5} F(x) = 0$; (Falso) ; pues $F(-5) = 13$

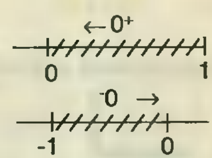
(2) $\lim\limits_{x \to {}^{-}5} F(x) = 13$; (Verdadero) ; pues $F({}^{-}5) = 13$

(3) $\lim\limits_{x \to {}^{+}5} F(x) = 13$; (Verdadero) ; pues $F({}^{+}5) = 13$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 5{,}5$; (Falso) ; pues $F(0) = \phi$

(5) $\lim\limits_{x \to {}^{+}0} F(x) = 7$; (Falso) ; pues $F({}^{+}0) = 4$

(6) $\lim\limits_{x \to {}^{-}0} F(x) = 4$; (Falso) ; pues $F({}^{-}0) = 7$



(7) $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \phi$; (Verdadero) ; pues $F(0^{+}) \neq F(0^{-})$ **no cumplen con el Teorema de Unicidad**

(8) $\lim\limits_{x \to 3} F(x) = \phi$; (Verdadero) ; pues $F({}^{+}3) \neq F({}^{-}3)$

(9) $\lim\limits_{x \to 8} F(x) = \infty$; (Verdadero) ; pues $F({}^{-}8) = F(8)$

(10) $\lim\limits_{x \to {}^{-}8} F(x) = \infty$; (Verdadero) ; pues $F({}^{-}8) = \infty$

(11) $\lim\limits_{x \to {}^{+}8} F(x) = \infty$; (Verdadero) ; pues $F({}^{+}8) = \infty$

(12) $\lim\limits_{x \to 8} F(x) = \infty$; (Verdadero) ; pues $F({}^{+}8) = F({}^{-}8) = \infty$

(13) $\lim\limits_{x \to 14} F(x) = 0$; (Verdadero) ; pues $F(14) = 0$

(14) $\lim\limits_{x \to 6} F(x) = 3$; (Verdadero) ; pues $F(6) = 3$

13.15.25 **Ejercicio Explicativo**

Demostrar que: $\lim\limits_{x \to 4} (7x - 1) = 27$

Utilizando la definición de límite.

Recuerde:

La definición de límite:

"$\lim\limits_{x \to b} f(x) = L$, si existe un $\varepsilon > 0$ y un $\delta > 0$

Tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$

Siempre que: $0 < |x - b| < \delta$; $x \in D\,F(x)$"

Solución:

(1°) **Datos:**

Regla Funcional : $F(x) = 7x - 1$

Variable : $x \to 4$

Límite : $L = 27$

(2°) **Aplicando la definición:**

$\Rightarrow |F(x) - \text{límite}| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 4| < \delta$

$\Rightarrow |(7x - 1) - 27| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 4| < \delta$

$\Rightarrow |7x - 28| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 4| < \delta$

$\Rightarrow 7|x - 4| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 4| < \delta$

$\Rightarrow |x - 4| < \dfrac{\varepsilon}{7} \quad \wedge \quad 0 < |x - 4| < \delta$

(3°) **Observamos una correspondencia entre lo hallado; tomando:**

$\therefore \boxed{\delta = \dfrac{\varepsilon}{7}}$; deberá satisfacerse la definición.

(4°) ***Comentario:***

Si asumimos: $\varepsilon = 10^{-6}$

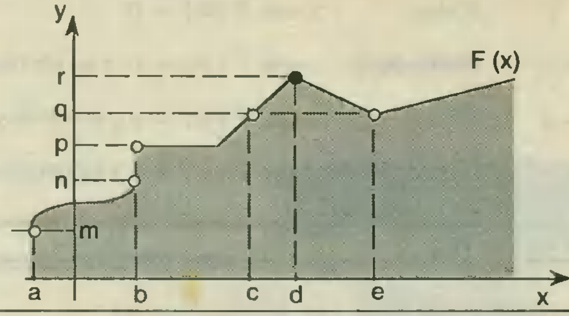
$\Rightarrow$; $\delta = \dfrac{10^{-6}}{7}$; $\delta = 14.3 \times 10^{-8}$; los lados del rectángulo que encierra al límite son pequeños.

$\Rightarrow |F(x) - 27| < 10^{-6}$; $0 < |x - 4| < 4.3 \times 10^{-8}$

$\therefore \boxed{\lim\limits_{x \to 4} (7x - 1) = 27}$

13.15.26 **Ejercicio Explicativo**

Si la gráfica de F (x) esta dada por:



Señalar las afirmaciones falsas y verdaderas.

(1) $\lim\limits_{x \to a} F(x) = m$

(2) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = n$

(3) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = p$

(4) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = \phi$

(5) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = \phi$

(6) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = 0$

(7) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = q$

(8) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = \phi$

(9) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = r$

(10) $\lim\limits_{x \to e} F(x) = \phi$

(11) $\lim\limits_{x \to e} F(x) = p$

Recuerde:

Si necesita calcular límites, prescindir de la definición y actuar con:

(I) $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$ si $F(x)$ es continua en a ;

(II) $\lim\limits_{x \to a} F(x) = L$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x) = L$
(T. de Unicidad)

Solución:

(1°) De acuerdo al gráfico establecido:

(1) $\lim\limits_{x \to a} F(x) = m$ (Verdadero) ; pues $F(a) = m$

(2) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = n$ (Falso) ; pues $\lim\limits_{x \to ^-b} F(x) \neq \lim\limits_{x \to ^+b} F(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = p$ (Falso) ; $\lim\limits_{x \to b} F(x) = \phi$ por lo anterior.

(4) $\lim\limits_{x \to b} F(x) = \phi$ (Verdadero) ; por lo anterior y además es discontinua.

(5) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = \phi$ (Falso) ; pues $F(c) = q$

(6) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = 0$ (Falso) ; pues $F(c) = q$

(7) $\lim\limits_{x \to c} F(x) = q$ (Verdadero) ; pues $F(c) = q$

(8) $\lim\limits_{x \to d} F(x) = \phi$ (Falso) ; pues $F(d) = R$

(9) $\lim\limits_{x \to d} F(x) = r$ (Verdadero) ; pues $F(d) = r$ y es continua.

(10) $\lim\limits_{x \to e} F(x) = \phi$ (Falso) ; pues $F(e) = p$ y es continua

(11) $\lim\limits_{x \to e} F(x) = p$ (Verdadero) ; pues $F(e) = p$ y es continua.

13.15.27 **Ejercicio Explicativo**

Demuestre que: $$\lim_{x \to 3} \left(\frac{4x^2 - 36}{x - 3} \right) = 24$$

Recuerde:

La solicitud del ejercicio es verificar la validez y existencia del límite hallado mediante la definición:

$$\lim_{x \to m} F(x) = L$$

Si: $\forall\ \varepsilon > 0\ ;\ \exists\ \delta > 0$,
tal que $|F(x) - L| < \varepsilon$,
siempre que: $0 < |x - m| < \delta$

Solución:

(1°) **Debemos mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$; $\exists$, $\delta > 0$ que depende de ε, tal que:**
$|F(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - m| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \frac{4x^2 - 36}{x - 3} - 24 \right| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - 3| < \delta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{4(x^2 - 9)}{(x - 3)} - 24 \right| < \varepsilon \qquad ; \qquad \left| \frac{4(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} - 24 \right| < \varepsilon$$

(2°) **Simplificando:**

$$\Rightarrow |4(x + 3) - 24| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

$$\Rightarrow |4x + 12 - 24| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

$$\Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

$$\Rightarrow 4|x - 3| < \varepsilon \quad \wedge \quad 0 < |x - 3| < \delta$$

$$\Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \wedge \quad 0 < |x - 3| < \delta \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

De (1) y (2) por ser la misma condición:

$$\therefore \boxed{\frac{\varepsilon}{4} = \delta \ ; \ \varepsilon = 4\delta}$$

13.15.28 **Ejemplo Explicativo**

Calcular los límites laterales de:

$$\lim_{x \to 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{[\![x]\!]} \right]\!\right]$$

Recuerde:

a) $[\![x]\!]$ es el máximo entero de "x"

$|x|$ es el valor absoluto de "x"

Solución:

(1°) Calculemos el límite lateral izquierdo:

$$\lim_{x \to^- 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{[\![x]\!]} \right]\!\right]$$

En el cual: $x \to^- 2 \Rightarrow [\![x]\!] = [\![^- 2]\!] = 1$, es una constante

$$\Rightarrow \lim_{x \to^- 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{1} \right]\!\right]$$

$= -2 + 2 = [\![-4]\!] = 3$ pues $(^- 2 + 2)$ se acerca a 4 por la izquierda.

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to^+ 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{[\![x]\!]} \right]\!\right] = 3}$$

(2°) Calculamos el límite lateral derecho:

$\lim_{x \to^+ 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{[\![x]\!]} \right]\!\right]$, en el cual: $x \to 2 \Rightarrow [\![x]\!] = [\![^+2]\!] = 2$ es una constante.

$$\Rightarrow \lim_{x \to^+ 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{2} \right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{^+2+2}{2} \right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{^+4}{2} \right]\!\right] = [\![^+ 2]\!] = 2$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to^+ 2} \left[\!\left[\frac{|x|+2}{[\![x]\!]} \right]\!\right] = 2}$$

13.15.29 **Ejercicio Explicativo**

Calcular k y b si:

$$\lim_{x \to \infty} \left(Kx + b + \frac{x^3+4}{x^2+7x+1} \right) = 16$$

Solución:

(1°) Al ordenar mediante el cociente mixto de la división se tendrá:

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
 & & -7 & -1 & \\
-7 & & & 49 & 7 \\
-1 & & & & \\
\hline
 & 1 & -7 & 48 & 11
\end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left[kx + b + x - 7 + \frac{48x + 11}{x^2 + 7x + 1} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left[(k+7)x + (b-7) + \frac{48x + 11}{x^2 + 7x + 1} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

(2°) El análisis del límite de la expresión (1) deberá ser 16 para ello es necesario que:

$$k + 7 = 0 \ ; \ k = -7$$

(3°) Se tendrá luego que:

$$\lim_{x \to \infty} \left[(b-7) + \frac{48x + 11}{x^2 + 7x + 1} \right] = b - 7 + 0 = 16 \ ; \ \text{pues} \ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{48x + 11}{x^2 + 7x + 1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow b - 7 = 16 \quad ; \quad b = 23$$

$$\therefore \boxed{k = -7 \ \text{ y } \ b = 23}$$

13.15.30 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$y = \sum_{K=1}^{n} \lim_{x \to \frac{-1}{k}} \left(\frac{K^2x^2 - 1}{K^2x^2 + 3Kx + 2} \right)$$

Recuerde:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Es la sumatoria con límites y se lee como: "La sumatoria de los a_i, desde $i = 1$ hasta $i = n$"

Solución:

(1°) **Podremos simplificar la expresión entre paréntesis.**

$$\frac{\cancel{(Kx+1)}(Kx-1)}{(Kx+2)\cancel{(Kx+1)}}$$

(2°) **La expresión propuesta sería:**

$$y = \sum_{K=1}^{n} \lim_{x \to \frac{-1}{K}} \left(\frac{Kx-1}{Kx+2} \right)$$

(3°) **Al desarrollar la sumatoria tendremos:**

$$y = \underbrace{\lim_{x \to -1} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)}_{K=1} + \underbrace{\lim_{x \to \frac{-1}{2}} \left(\frac{2x-1}{2x+2} \right)}_{K=2} + \underbrace{\lim_{x \to \frac{-1}{3}} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)}_{K=3} \ldots$$

(4°) **Calculando cada límite.**

$$y = \underbrace{\frac{-1-1}{-1+2}}_{\substack{K=1 \\ x \to -1}} + \underbrace{\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)+2}}_{\substack{K=2 \\ x \to \frac{-1}{2}}} + \underbrace{\frac{3\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{3\left(-\frac{1}{3}\right)+2}}_{\substack{K=3 \\ x \to \frac{-1}{3}}} + \ldots\ldots + \underbrace{\frac{n\left(-\frac{1}{n}\right)-1}{n\left(-\frac{1}{n}\right)+2}}_{\substack{K=n \\ x \to \frac{-1}{n}}}$$

(5°) **Luego de efectuar cada sentencia**

$$y = \underbrace{-2}_{1°} + \underbrace{-2}_{2°} + \underbrace{-2}_{3°} + \ldots\ldots\ldots + \underbrace{-2}_{n°}$$

$$\therefore \boxed{y = -2n}$$

13.15.31 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$E = \prod_{K=1}^{n} \lim_{x \to \frac{1}{K}} \left(\frac{K^3x^3 - 3Kx + 2}{K^4x^4 - 4Kx + 3} \right)$$

Recuerde:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\, a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n$$

Es la productoria con límites y se lee como: "La productoria de los a_i desde $i=1$ hasta $i = n$"

Solución:

(1°) **Simplificando la expresión entre paréntesis, mediante la factorización.**

$$\frac{\cancel{(Kx-1)^2}\,(Kx+2)}{\cancel{(Kx-1)^2}\left(K^2x^2+2Kx+3\right)} = \frac{Kx+2}{K^2x^2+2Kx+3}$$

(2°) **La expresión propuesta sería:**

$$\Rightarrow E = \prod_{K=1}^{n}\left(\frac{Kx+2}{K^2x^2+2Kx+3}\right)$$

(3°) **Desarrollando la productoria tendremos:**

$$\Rightarrow E = \underbrace{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+3}\right)}_{K=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{2x+2}{4x^2+4x+3}\right)}_{K=2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to \frac{1}{3}}\left(\frac{3x+2}{9x^2+6x+3}\right)}_{K=3} \cdots$$

(4°) **Calculando cada límite.**

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{1+2}{1+2+3}}_{\substack{K=1\\x\to 1}} \cdot \underbrace{\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)+2}{4\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)+3}}_{\substack{K=2\\x\to \frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)+2}{9\left(\frac{1}{9}\right)+6\left(\frac{1}{3}\right)+3}}_{\substack{K=3\\x\to \frac{1}{3}}} \cdots \underbrace{\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)+2}{n^2\left(\frac{1}{n^2}\right)+2n\left(\frac{1}{n}\right)+3}}_{\substack{K=n\\x\to \frac{1}{n}}}$$

(5°) Luego de efectuar cada sentencia:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}}_{1°} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{2°} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{3°} \cdots\cdots \underbrace{\frac{1}{2}}_{n°}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{1}{2^n}}$$

13.15.32 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$E = \lim_{n\to\infty} \prod_{K=2}^{n}\left(\frac{K^2+K-2}{K^2+3K+2}\right)$$

Recuerde:

$\prod_{K=1}^{m} a_i$ es "La productoria de los a_i desde i igual a uno hasta i igual a m".

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{m} a_i = a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_m$$

Solución:

(1°) Luego de simplificar

$$E = \lim_{n\to\infty} \prod_{K=2}^{n} \frac{(K-1)\cancel{(K+2)}}{(K+1)\cancel{(K+2)}}$$

$$\Rightarrow E = \lim_{n\to\infty} \prod_{K=2}^{n} \frac{(K-1)\cancel{(K+2)}}{(K+1)\cancel{(K+2)}} \qquad \text{.......................} \quad (A)$$

(2°) **Desarrollando la productoria**

$$\Rightarrow \prod_{K=2}^{n} \frac{(K-1)}{(K+1)} = \frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times....\times\frac{n-1}{n+1}$$

que simplificado quedaría como:

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{4}}{6}\times\frac{\cancel{5}}{7}....\times\frac{n-2}{n}\times\frac{\cancel{n-1}}{(n+1)}$$

$$\Rightarrow \prod_{K=2}^{n} \frac{(K-1)}{(K+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{.......................} \quad (B)$$

(3°) **De reemplazar (B) en (A)**

$$\Rightarrow \quad E = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

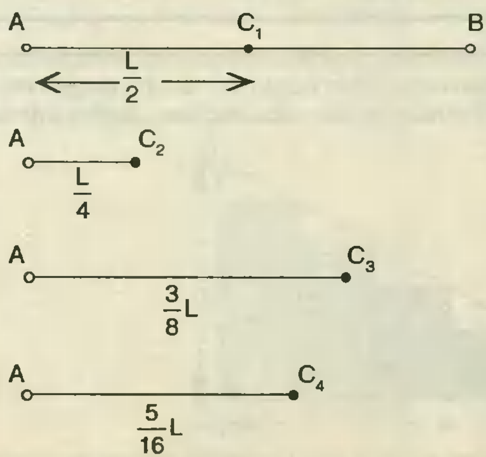
$$\therefore \boxed{E = 0}$$

13.15.33 **Ejemplo Explicativo**

El punto C_1 divide al segmento $\overline{AB}$ de medida "L" en dos partes iguales; el punto C_2 divide al segmento $\overline{AC_1}$ en dos partes también iguales; el punto C_3 divide a su vez al segmento $\overline{C_2C_1}$ en dos partes iguales; el punto C_4 hace lo propio con el segmento $\overline{C_2C_3}$ y así sucesivamente.
Determinar la posición límite del punto C_n. Cuando $n \to \infty$

Solución:

(1°) La descripción del evento conduce al esquema siguiente:



(2º) Es decir que la posición de los puntos "C" respecto al punto A, será:

$$\overline{AC_1} = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}.$$

$$\overline{AC_2} = \frac{L}{2} - \frac{L}{2^2} = \frac{(2-1)L}{2^2}$$

$$\overline{AC_3} = \left(\frac{2-1}{2^2}\right)L + \frac{L}{2^3} = \frac{\left(2^2 - 2 + 1\right)L}{2^3}$$

$$\overline{AC_4} = \left(\frac{2^2-2+1}{2^3}\right)L - \frac{L}{2^4} = \frac{\left(2^3 - 2^2 + 2 - 1\right)L}{2^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\overline{AC_n} = \frac{\left(2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - 2^{n-4} \ldots \pm 1\right)L}{2^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{AC_n} = \frac{\left(2^n \pm 1\right)L}{(2+1)2^n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(3º) **Tomando límites en la expresión para $\overline{AC_n}$ (es decir (α))**

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{AC}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^n \pm 1\right)L}{(3)2^n} = \frac{\infty}{\infty}$$

(4º) **Eliminando la indeterminación:**

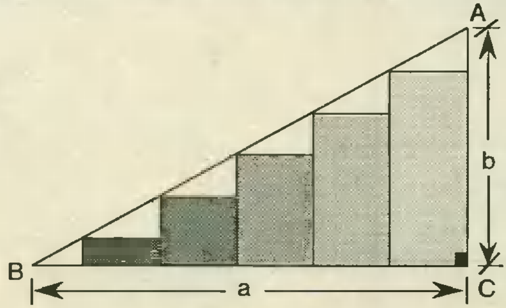
$$\lim_{n\to\infty} \overline{AC}_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3\times 2^n}\right)L = \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3\times 2^\infty}\right)L = \left(\frac{1}{3} \pm 0\right)L$$

$$\therefore \boxed{\lim_{n\to\infty} \overline{AC_n} = \left(\frac{1}{3}\right)L}$$

"De proseguir el proceso indefinidamente, dicho punto tenderá a ubicarse a 1/3 de "L" a partir de A".

13.15.34 **Ejercicio Explicativo**

Sobre los segmentos obtenidos al dividir el cateto "a" de un triángulo rectángulo en "n" partes iguales, se han construido rectángulos inscritos, según se muestra:



Determinar el límite del área de la figura escalonada asi construida cuando $n \to \infty$

Recuerde:

El área de un rectángulo es $A = b \cdot h$

donde : "b" es la base y
"h" es la altura.

Solución:

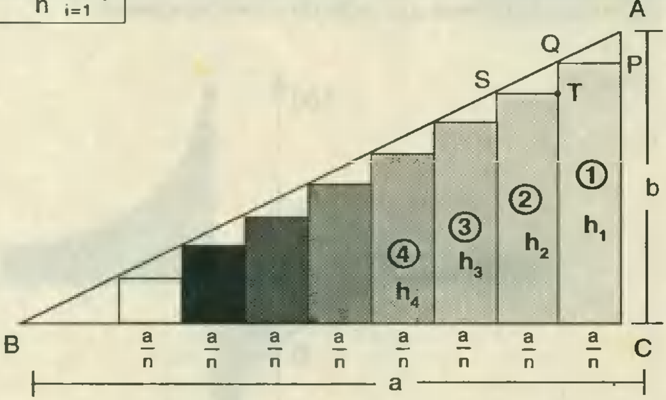
(1°) **El área de la figura escalonada será:**

$$A = \left(\frac{a}{n}\right)h_1 + \left(\frac{a}{n}\right)h_2 + \left(\frac{a}{n}\right)h_3 + \left(\frac{a}{n}\right)h_4 + \ldots + \left(\frac{a}{n}\right)h_n$$

Donde h_1, h_2, h_3, ..., h_n son las alturas de los rectángulos correspondientes.

$$A = \frac{a}{n}\left(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n\right)$$

(2°) $\Rightarrow \boxed{A = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i}$ .... (1)

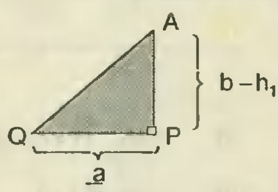


(3°) **La relación de "b" y "h" se obtiene de la semejanza de triángulos AQP y ABC:**

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b - h_1}{\frac{a}{n}}$$

$$\Rightarrow b = bn - nh_1$$

$$\therefore \boxed{h_1 = \frac{b}{n}(n-1)}$$



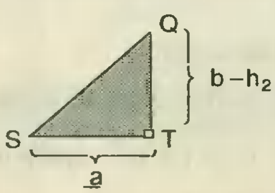
(4°) **La relación de "b" y "h_2" se obtiene de la semejanza de triángulos AQP y SQT:**

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{h_1 - h_2}{\frac{a}{n}}$$

$$\Rightarrow b = n\,h_1 - n\,h_2$$

$$\Rightarrow b = bn - b - n\,h_2$$

$$\therefore \boxed{h_2 = \frac{b}{n}(n-2)}$$



De modo análogo:

$$\Rightarrow h_3 = \frac{b}{n}(n-3)$$

$$\Rightarrow h_{n-1} = \frac{b}{n}[\,1\,] \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} h_i = \frac{b}{n}\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]}$$

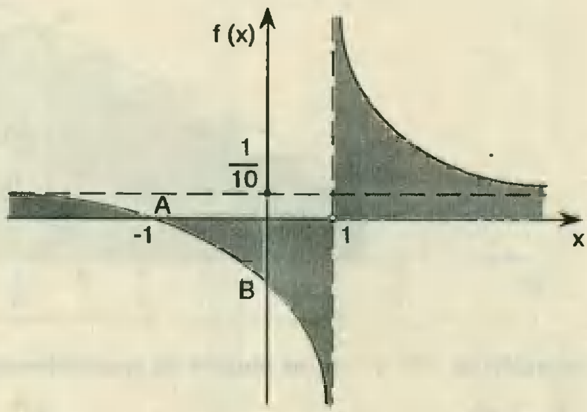
(5°) En (1): $A = \frac{a}{n}\,\frac{b}{n}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$, cuando $n \to \infty$: $\boxed{A = \text{Lim}\ \frac{ab}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}$

$\therefore\ \boxed{A = \frac{ab}{2}}$ Si $n \to \infty$ el límite es el área del rectángulo ABC.

13.15.35 **Ejercicio Explicativo**

A partir del gráfico que pertenece a la regla de correspondencia:

$$f(x) = \frac{x+1}{10(x-1)}$$



Obtener:

i) $\lim\limits_{x \to^{-} 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to^{-} 1} f(x)$

iv) $\lim\limits_{x \to^{+} 1} f(x)$ v) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Solución:

(1°) Por la definición establecida:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{si } f(a) \text{ existe}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to^{-} 1} f(x) = f(-1) = 0$ (pto A del gráfico)

$\therefore\ \boxed{\lim\limits_{x \to^{-} 1} f(x) = 0}$

(2°) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{0+1}{10(0-1)} = -\dfrac{1}{10}$ (Punto B del gráfico)

$\therefore \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{10}}$

(3°) $\lim\limits_{x\to {}^{-}1} f(x) = f(-1) = -\infty$ (Límite lateral izquierdo)

$\therefore \quad \boxed{\lim\limits_{x\to {}^{-}1} f(x) = -\infty}$

(4°) $\lim\limits_{x\to {}^{+}1} f(x) = f(+1) = \infty$ (Límite lateral derecho)

$\therefore \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(x) = \infty}$

(5°) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{1+1}{10(1-1)} = \dfrac{2}{0}$

$\therefore \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \phi}$

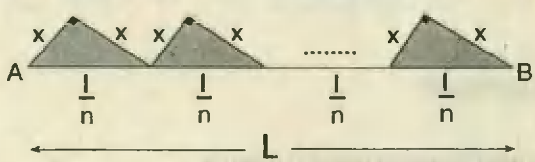
13.15.36 Ejemplo Explicativo

El segmento AB de medida "L" está dividido en "n" partes iguales. Sobre cada una de ellas tomándola como base, se han construido triángulo isósceles cuyos ángulos en la base son iguales a 45°.

Calcular el límite del perímetro de la línea quebrada cuando $n \to \infty$

Solución:

(1°) **Hagamos un esquema del evento en mención:**



En cada triángulo los catetos miden de acuerdo a: $x^2 + x^2 = \dfrac{L^2}{2n^2} \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{L}{n}}$

(2°) **En relación a la longitud de la línea quebrada**

$y_{(n)} = (2x)\,n$ ....(1)

$\Rightarrow y_{(n)} = \left(2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;\dfrac{L}{n}\right)n$, que al simplificarse

$y_{(n)} = \sqrt{2}\,L$

(3°) **Tomando límites a cada miembro, se tendrá:**

$\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}L\right)$

Obsérvese que en el 2° miembro es independiente de n

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{2}\,L$$; La línea quebrada no se confunde con la línea horizontal.

13.15.37 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $y = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\!\left[\dfrac{12x+55}{x} \right]\!\right]$

Recuerde:

$[\![m]\!]$ es la notación del máximo entero de un número real.

Solución:

(1°) **Al examinar la expresión contenida en el símbolo : $[\![\ \ ]\!]$**

$$\left[\!\left[\frac{12x+55}{x} \right]\!\right] = \left[\!\left[12 + \frac{55}{x} \right]\!\right]$$

$$\Rightarrow y = \lim_{x\to-\infty} \left[\!\left[12 + \left(\frac{1}{x}\right)55 \right]\!\right]$$

$$\Rightarrow y = \lim_{x\to-\infty} \left[\!\left[12 + \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right)55 \right]\!\right] \text{.......................................} (1)$$

(2°) **Obsérvese que:**

$\lim\limits_{x\to-\infty} 12 = 12$ es una constante

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)55 = {}^{-}0$; se acerca a cero por la izquierda.

(3°) **La expresión en (1)**
nos revela un evento importante pues:

$y = [\![12 + {}^{-}0]\!]$

$y = [\![{}^{-}12]\!]$; la suma contenida en el máximo entero se acerca a 12 por la izquierda es decir ${}^{-}12 < 12$

$\Rightarrow y = 11$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty} \left[\!\left[\frac{12x+5}{x} \right]\!\right] = 11$$

13.15.38 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $\lim\limits_{x \to 10} \left(\dfrac{[\![x]\!]^2 - 100}{x^2 - 100} \right)$

Recuerde:

$[\![x]\!]$ es la notación para el máximo entero y está definido como:

Si: $[\![x]\!] = k \;,\; k \in \mathbb{Z}$

$k \leq x < k + 1$

Solución:

(1°) Hacemos el análisis lateral

a) Si $x \to^{-} 10$ (x tiende a 10 por la izquierda)

$\Rightarrow x < 10 \wedge [\![x]\!] = 9$, es además constante.

$$\Rightarrow L_1 = \lim_{x \to^{-} 10} \left(\frac{[\![x]\!]^2 - 100}{x^2 - 100} \right) = \lim_{x \to^{-} 10} \left(\frac{9^2 - 100}{x^2 - 100} \right)$$

$$\Rightarrow L_1 = \lim_{x \to^{-} 10} \left(\frac{9}{x^2 - 100} \right) = \frac{9}{\underset{\uparrow}{0}} = 9(-\infty) = \infty$$

$\therefore \boxed{L_1 = \infty}$ se acerca a 0 por la izquierda

b) Si $x \to^{+} 10$ (x tiende a 10 por la derecha)

$\Rightarrow x > 10 \wedge [\![x]\!] = 10$

$$\Rightarrow L_2 = \lim_{x \to^{+} 10} \left(\frac{10^2 - 100}{x^2 - 100} \right)$$

$$\Rightarrow L_2 = \lim_{x \to^{+} 10} \left(\frac{0}{x^2 - 100} \right)$$

$\therefore \boxed{L_2 = 0}$ Es mayor que cero

(2°) De acuerdo al teorema de unicidad $L_1 \neq L_2$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 10} \left(\frac{[\![x]\!]^2 - 100}{x^2 - 100} \right) \in \phi}$$

13.16 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO : LIMITES

(1) Calcular:

$$\lim_{x\to 2} (4x+3)$$

Rpta: 11

(2) Calcular:

$$\lim_{x\to -2} (3x^4 - 3x^2 + 5x - 1)$$

Rpta: 25

(3) Calcular:

$$\lim_{x\to -2} \left(5x^2 - 2x + \frac{14}{x}\right)$$

Rpta: 23

(4) Calcular:

$$\lim_{x\to 6} \log\left(x + \sqrt{x^2 - 20}\right)$$

Rpta: 1

(5) Calcular:

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} \arccos\left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2}}\right)$$

Rpta: $\frac{5\pi}{6}$

(6) Calcular:

$$\lim_{x\to ^{+}1} \left(\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}}{2}\right)$$

(Léase: "Límite lateral cuando x tiende a uno por la derecha")

Rpta: $\frac{\pi}{3}$

(7) Calcular:

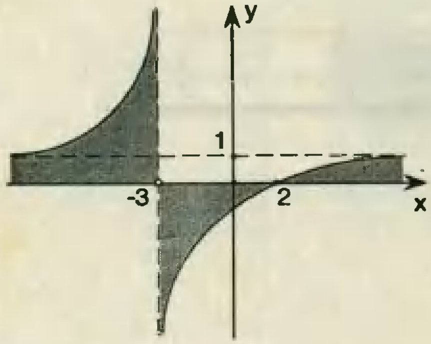
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{|x+1|}{x+1}$$

(Léase: "Límite lateral cuando x tiende a menos uno por la izquierda")

Rpta: - 1

(8) Del gráfico adjunto, que corresponde a la función de regla:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$



Calcular:

$$A = \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$B = \lim_{x \to -3} f(x)$$

$$C = \lim_{x \to -3^+} f(x)$$

$$D = \lim_{x \to -3^-} f(x)$$

$$E = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Rpta: $A = 0$; $B \in$ vacío
$C: -\infty$; $D: \infty$; $E = 1$

(9) Del gráfico adjunto correspondiente a la función cuya regla de correspondencia es:

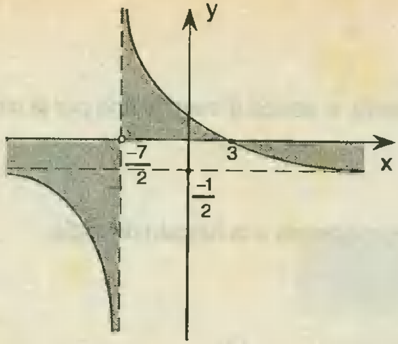
$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{-2x^2 - x + 21}$$

Calcular:

$$E = \lim_{x \to 3} f(x) \quad , \quad F = \lim_{x \to \frac{-7}{2}} f(x)$$

$$G = \lim_{x \to -\frac{7}{2}^+} f(x) \quad , \quad H = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Siendo:



Rpta: $E = 0$, $F \in$ vacío , $G: \infty$, $H = -\frac{1}{2}$

(10) Calcular:

$$\lim_{x\to 5} \left(\frac{2x^2 - 11x + 5}{4x^2 - 16x - 20} \right)$$

Rpta: $\frac{3}{8}$

(11) Calcular:

$$\lim_{x\to -3} \left(\frac{x^3 + 27}{2x^2 - 3x - 27} \right)$$

Rpta: $-\frac{9}{5}$

(12) Calcular:

$$\lim_{x\to -2} \left(\frac{x^5 + 2x^4 + x^2 + 3x + 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 22} \right)$$

Rpta: - 4

(13) Calcular:

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen}^3 x} \right)$$

Rpta: Vacío

(14) Calcular:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6x+9}{2x^2+x-21}\right)$$

Rpta: 0

(15) Calcular:

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}}\left(\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}\right)$$

Rpta: $\frac{1}{3}$

(16) Calcular: a y b de modo que:

$$\lim_{x\to 2}\left(ax+\frac{b}{4}+\frac{2x^3+5}{x^2-1}\right)=33$$

Rpta: $a = -2$, $b = 132$

(17) Calcular m y n de modo que:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(mx^2+nx+\frac{3x^4+1}{x^2+3x-1}\right)=30$$

Rpta: $m = -3$, $n = 9$

(18) Calcular:

$$E=\lim_{n\to\infty}\prod_{K=2}^{n}\left(\frac{K-1}{K+1}\right)$$

Rpta: 0

(19) Calcular:

$$H=\lim_{n\to\infty}\prod_{K=2}^{n}\left(\frac{K^2+K+1}{K^2-K+1}\right)$$

Rpta: ∞

(20) Calcular:

$$Y = \lim_{n \to \infty} \prod_{K=2}^{n} \left(\frac{K^3 - 1}{K^3 + 1} \right)$$

Rpta: $\frac{2}{3}$

(21) Si: $X_0 = \sqrt{a}$

$$X_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$$

$$X_2 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$$

Calcular:

$$E = \lim_{x \to \infty} X_n$$

Rpta: $\frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$

(22) Sobre un segmento AB de medida "L" dividida en "n" partes iguales, se describen semicircunferencias de modo que el diámetro esté sobre dicho segmento.
Calcular el límite del perímetro de la línea cuando $n \to \infty$.

Rpta: $\frac{1}{2}\pi L$

(23) Calcular:

$$\lim_{x \to -8} \left(\frac{|x| - 8}{\sqrt[3]{|x|} - 2} \right)$$

Rpta: 12

(24) Calcular:

$$\lim_{x \to 11} \left(\frac{121 - x^2}{[\![x]\!]^2 - 121} \right)$$

Rpta: Vacio

CAPITULO 14

LA FUNCION DERIVADA

14.1. LA FUNCION DERIVADA

Definición.- Sea la regla funcional $F(x)$ de variable real, la regla funcional derivada, denotada por $F'(x)$, es aquella tal que su valor en cualquier "x" del dominio se establece por la existencia del límite:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right)$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $F(x) = 7x + 5$ mediante la definición.

Solución:

(1°) **Como $F(x) = 7x + 5$**

$\Rightarrow F(x+h) = 7(x+h)+5$

(2°) **De acuerdo a la definición**

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{7(x+h)+5-7x-5}{h}\right)$$

(3°) **Ejecutando:**

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{7x+7h+5-7x-5}{h}\right)$$

(4°) **Finalmente:**

$$\Rightarrow F(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{7h}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(7) = 7$$

$$\therefore \boxed{F'(x) = 7}$$

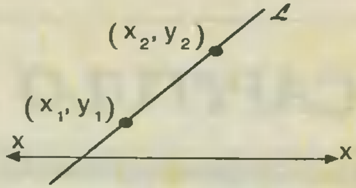
14.2 LA PENDIENTE "m"

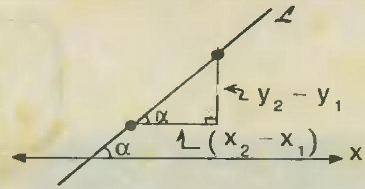
Definición.- Es la característica geométrica asociada a la inclinación de una recta respecto a una línea horizontal coplanar.

14.2.1. Medida de la Pendiente:

Si: (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) \in$ a una recta L

Es decir:





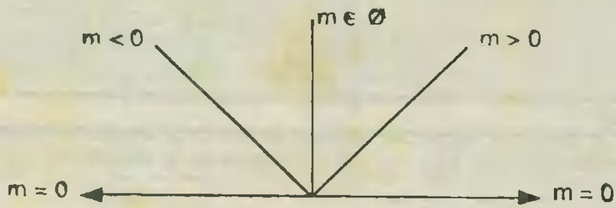
$$\Rightarrow \quad \boxed{m = tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ;\ x_2 \neq x_1}$$

" La pendiente **m** es equivalente a la medida de la tangente trigonómetrica del ángulo medido respecto al semieje positivo "

Limitación: $-\infty < m < \infty$ ó $0° \leq \alpha \leq 180° - \{90°\}$ $\alpha \neq 90°$

14.2.1.1 *Observaciones*

a)



En el 1er cuadrante las pendientes son positivas. En el 2do cuadrante las pendientes son negativas.

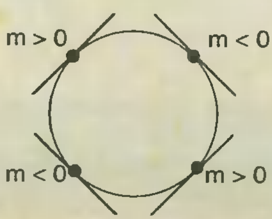
b) **La recta perpendicular al eje horizontal x, carece de pendiente.**

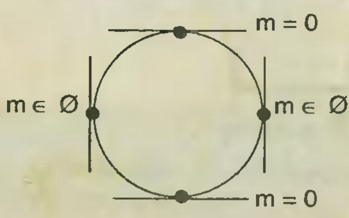
c) **Una pendiente positiva está asociada al crecimiento; una pendiente negativa implica decrecimiento.**

d) **Una pendiente igual a cero implica una recta paralela al eje horizontal o superpuesta a dicho eje.**

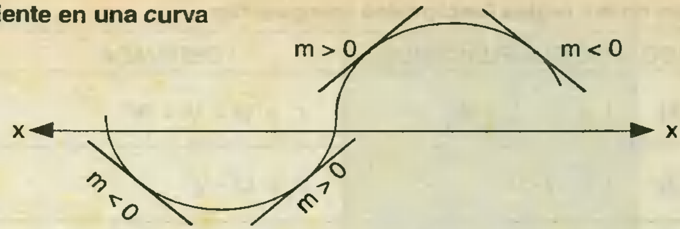
e) **Pendientes de las rectas tangentes con relación a las figuras geométricas.**

e_1) **Pendientes en círculo**





e_2) **Pendiente en una curva**



14.3 EL ALGORITMO DE LA DERIVADA

En base a la definición establecida se logra los corolarios para derivar las reglas funcionales.

I. Derivadas de las reglas funcionales simples

CASO	REGLA FUNCIONAL	DERIVADA
(1)	$f(x) = x^m$	$f'(x) = m\,x^{m-1}$
(2)	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(3)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
(4)	$f(x) = \log x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}\log e$
(5)	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
(6)	$f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$	$f'(x) = a^x \ln a$
(7)	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(8)	$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
(9)	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
(10)	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
(11)	$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
(12)	$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(13)	$f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(14)	$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
(15)	$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
(16)	$f(x) = x^{1/m}$	$f'(x) = \dfrac{1}{m} x^{(1/m)-1}$

II. Derivadas de las reglas funcionales compuestas

CASO	REGLA FUNCIONAL	DERIVADA
(1)	$f = U + V + W$	$f' = U' + V' + W'$
(2)	$f = U - V$	$f' = U' - V'$
(3)	$f = UV$	$f' = UV' + U'V$
(4)	$f = \dfrac{U}{V}$	$f = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$
(5)	$f = z^u$	$f' = u \,.\, z^{u-1} \,.\, z' + z^u \times u' \ln z$
(6)	$F(x) = \operatorname{sen} h\, A(x)$	$F'(x) = \cos h\, A(x) - A'(x)$
(7)	$F(x) = \cos h\, B(x)$	$F'(x) = \operatorname{sen} h\, B(x) - B'(x)$
(8)	$F(x) = \log U(x)$	$F' = \dfrac{1}{U(x)} U'(x) \log e$

III. Derivada de una regla funcional ímplicita:

Sea: $F(x, y) = 0$

$$\Rightarrow F'(x, y) = -\frac{F'(x)}{F'(y)}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la siguiente regla funcional.

$F(x) = x^4 \; ; \; x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla para la derivación (# 1)

Si: $F(x) = x^4 \Leftrightarrow F'(x) = 4x^3$

(2°) A modo de comentario:

$F'(x) = \sqrt{x}^4$

(3°) El exponente se escribió como el coeficiente y se resta la unidad al exponente original para obtener el nuevo exponente.

$\Rightarrow F'(x) = 4x^{4-1}$

$\therefore \boxed{F'(x) = 4x^3}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la siguiente regla funcional

$F(x) = \sqrt[5]{x} \quad ; x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) De acuerdo al corolario N° 15

$F(x) = x^{1/5}$

$\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{1}{5}\right)x^{\frac{1}{5}-1}$

(2°) A modo de comentario el exponente 1/5 se le traslada al coeficiente y se disminuye la unidad.

$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$\therefore \quad \boxed{F'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la siguiente regla funcional:

$F(x) = 12x^{3/4}$

Solución:

(1°) De acuerdo a las reglas establecidas en el cuadro de los casos simples.

$F'(x) = 12 \times \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$

(2°) El exponente 3/4 se trasladó a la ubicación de los coeficientes restando luego la unidad al mismo.

$F'(x) = 12 \times \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$

$\therefore \quad \boxed{F'(x) = 9x^{-1/4}}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la regla funcional:

$F(x) = 11 + x^2 + 31x^4 \ , \ x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Por ser una suma de términos, la aplicación de la derivada implica la distribución.

$\Rightarrow F'(x) = (11)' + (x^2)' + (31x^4)'$

(2°) Es decir es necesario derivar cada sumando.

$\Rightarrow F'(x) = 0 + 2x^{2-1} + 31(4)x^{4-1}$

$\therefore \boxed{F'(x) = 2x + 124x^3, \ x \in \mathbb{R}}$

Ejemplo:

Hallar la derivada de la siguiente regla funcional.

$F(x) = (x^3 + 4x^2 + x)^8, \ x \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) De acuerdo a las reglas establecidas para el caso de las reglas funcionales compuestas:

$F = U(v) \Rightarrow F' = U'(v)V'$

$$\Rightarrow F'(x) = \left[\left(x^3 + 4x^2 + x\right)^8\right]' . \left(x^3 + 4x^2 + x\right)'$$

(2°) Luego de realizar

$$F(x) = 8\left(x^3 + 4x^2 + x\right)^{8-1} . \underbrace{\left(x^3 + 8x + 1\right)}$$

$\boxed{\Rightarrow F'(x) = 8(x^3 + 4x^2 + x)^7 . (3x^2 + 8x + 1)}$

(3°) A modo de comentario:

$F = U(v) \Rightarrow F' = \underbrace{U'(v).V'}$

Semánticamente:

"La derivada de una regla funcional compuesta es la derivada de la expresión externa multiplicado por la derivada de la regla funcional interna."

Ejemplo:

Si: $F(x) = 1 + x^3 + (x^2 + x^5)^3$

Calcular: $F(1) + F'(1) + F''(1)$

Solución:

(1°) $F(x) = 1 + x^3 + (x^2 + x^5)^3$

$\Rightarrow F(1) = 1 + 1^3 + (1^2 + 1^5)^3$

$\Rightarrow F(1) = 1 + 1 + 8$

$\boxed{F(1) = 10}$

(2°) **Obtenemos la 1ra derivada: F' (x)**

$\Rightarrow$ $F'(x) = (1)' + (x^3)' + [(x^2 + x^5)^3]'$

$\Rightarrow$ $F'(x) = 0 + 3x^2 + 3\underbrace{\left(x^2 + x^5\right)^2}_{\text{Derivada de la regla funcional}} . \underbrace{\left(2x + 5x^4\right)}_{\text{Derivada de la base.}}$

$\Rightarrow$ $F'(1) = 0 + 3(1)^2 + 3(1^2 + 1^5)^2 . (2 . 1 + 5 . 1^4)$

$\Rightarrow$ $F'(1) = 0 + 3 + 3(4)(7)$

$F'(1) = 0 + 3 + 84$

$\boxed{F'(1) = 87}$

(3°) **Obtenemos la 2da derivada: F' (x) a partir de:**

$F'(x) = 3x^2 + 3(x^2 + x^5)^2(2x + 5x^4)$

$\Rightarrow$ $F''(x) = 6x + \underbrace{6(x^2 + x^5)(2x + 5x^4)(3x + 5x^4) + 3(x^2 + x^5)(2 + 20x^3)}_{\text{De acuerdo a la regla: } (UV)' = UV' + U'V}$

(4°) **Sustituyendo** el valor de x = 1

$\Rightarrow$ $F''(1) = 6 + 6(1^2 + 1^5)(2 . 1 + 5 . 1^4)(2 . 1 + 5 . 1^4) + 3(1^2 + 1^5)(2 + 20 . 1^3)$

$\Rightarrow$ $F''(1) = 6 + 6(2)(7)(7) + 3(2)(22)$

$\Rightarrow$ $F''(1) = 6 + 588 + 132$

$\boxed{F''(1) = 726}$

(5°) **Finalmente:**

$F(1) + F'(1) + F''(1) = 10 + 87 + 726$

$\therefore$ $\boxed{F(1) + F'(1) + F''(1) = 823}$

Ejemplo:

Calcular la derivada de la regla funcional:

$$f(x) = \log(13x^2 + 24x + 39)$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la derivada de la regla funcional logaritmica compuesta :**

$\boxed{f(x) = \log U \Rightarrow f'(x) = \frac{U'}{U} . \log e}$

(2°) **Para el caso solicitado:**

$\Rightarrow$ $f(x) = \log(13x^2 + 24x + 39)$

$$f'(x)=\frac{1}{13x^2+24x+39}.\left(13x^2+24x+39\right)\log e$$

$$\therefore \boxed{f'(x)=\frac{(26x+24)}{\left(13x^2+24x+39\right)}\log e}$$

Ejemplo:

Obtener la derivada de la siguiente regla funcional:

$$F(x) = \cos(3x^5 - 6x^2)$$

Recuerde:

Si $F(x) = \cos G(x) \Rightarrow F'(x) = -\{\operatorname{sen} G(x)\}.G'(x)$

Solución:

(1°) **De acuerdo a lo establecido para las reglas funcionales compuestas:**

$\Rightarrow F(x) = \cos(3x^5 - 6x^2)$

$\Rightarrow F'(x) = -\operatorname{sen}(3x^5 - 6x^2)\underbrace{.(3x^5 - 6x^2)'}_{\text{Derivada del argumento}}$

(2°) **Realizando las sentencias en la llave.**

$\Rightarrow F'(x) = -\operatorname{sen}(3x^5 - 6x^2).(15x^4 - 12x)$

$\therefore \boxed{F'(x) = -[\operatorname{sen}(3x^5 - 6x^2)](15x^4 - 12x),\ x \in \mathbb{R}}$

Ejemplo:

Obtener la derivada de la siguiente regla funcional.

$$E(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 5x + 8)\ ;\ x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

Sea: $F(x) = \operatorname{sen} B(x) \Rightarrow F'(x) = [\cos B(x)]B'(x)$

Solución:

(1°) **Según lo establecido para las reglas funcionales compuestas:**

$\Rightarrow E'(x) = \cos(3x^2 + 5x + 8)\left\{3x^2+5x+8\right\}'$

(2°) **Realizando las sentencias de la llave.**

$\Rightarrow E'(x) = \cos(3x^2 + 5x + 8).(6x + 5)$

$\therefore \boxed{E'(x) = (6x + 5)\cos(3x^2 + 5x + 8)\ ;\ x \in \mathbb{R}}$

Ejemplo:

Obtener la derivada de la siguiente regla funcional:

$$F(x) = e^{x^3+2x-8} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

Sea $\quad F(x) = e^{B(x)} \Rightarrow F'(x) = e^{B(x)} . B'(x)$

Solución:

(1°) **Según lo establecido para las reglas funcionales compuestas.**

$$\Rightarrow \; F'(x) = \underbrace{(x^3 + 2x - 8)'}_{\text{Derivada de la regla funcional del exponente}} e^{x^3+2x-8}$$

(2°) **Reduciendo lo indicado en la llave**

$$\therefore \quad \boxed{F'(x) = \left(3x^2 + 2\right).e^{x^3+2x-8}}$$

Ejemplo:

Obtener la derivada de la siguiente regla funcional:

$$F(x) = 2^{9x^2+12x+52} \quad ; \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

$F(x) = b^{G(x)} \Rightarrow F'(x) = b^{G(x)}\, G'(x)\, \ln b$ ó $F'(x) = F(x)\, G(x)'\, \ln b$

Solución:

(1°) **De acuerdo a lo establecido en las reglas para la derivación de reglas funcionales.**

$$\Rightarrow F(x) = 2^{9x^2+12x+52} \quad G(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \underbrace{2^{\left(9x^2+12x+52\right)}}_{F(x)} . \underbrace{\left(9x^2 + 12x + 52\right)'}_{G'(x)} . \ln 2$$

(2°) **Realizando lo indicado en la llave para G'(x)**

$$F'(x) = 2^{9x^2+12x+52} . (18x + 12) \ln 2$$

(3°) **Ordenando:**

$$\therefore \quad \boxed{F'(x) = .(18x + 12) \ln 2 \; 2^{9x^2+12x+52} \quad ; \; x \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo:

Obtener la derivada de la siguiente regla funcional.

$$F(x) = \sqrt[4]{2+3x^7} \; ; \; x \geq -\sqrt[7]{\frac{2}{3}}$$

Recuerde :

Si $F(x) = G^{1/m}(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{m} G^{(1/m)-1}(x)$

Solución:

(1°) **De acuerdo a lo establecido para las reglas funcionales compuestas.**

$$F(x) = (2+3x^7)^{1/4}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{4}\left(2+3x^7\right)^{\frac{1}{4}-1} \underbrace{x\left(2+3x^7\right)}_{\text{Derivada de la base}}$$

(2°) **Realizando lo señalado en la llave.**

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{4}\left(2+3x^7\right)^{-\frac{3}{4}} x\left(0+21x^6\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{F'(x) = \frac{21x^6}{4\sqrt[4]{\left(2+3x^7\right)^3}} \; ; \; x \geq -\sqrt[7]{\frac{2}{3}}}$$

.14.4 VALOR CRITICO (x_o)

Definición.- Es el cero de la regla funcional derivada; si este valor crítico es real, indica la abscisa en cual la pendiente de la función es nula.

Ejemplo:

Hallar los valores críticos de la función cuya regla es:

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x$

Solución:

(1°) **Hallamos la regla funcional derivada**

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 72$

(2°) **Igualamos a cero dicha derivada.**

$6x^2 + 6x - 72 = 0$; que resuelto nos proporciona.

$6(x^2 + x - 12) = 0$

$6(x-4)(x+3) = 0$

$x = 4$ y $x = -3$

$\therefore$ $\boxed{x_0 = 4 \text{ y } x_0 = -3 \text{ son los valores críticos de la regla funcional.}}$

(1ra) ***Observación:*** Una regla funcional puede carecer de valor crítico.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x + 10$

$\Rightarrow f'(x) = 2$; pendiente constante

$f'(x) = 2 = 0$

$x_0 \in \varnothing$

"En ningún lugar del dominio de esta función la pendiente se hace cero".

(2da) ***Observacion:*** Una función puede tener infinitos valores críticos.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x = 0$

$$\Rightarrow x'_0 = \frac{\pi}{2}\,;\; x''_0 = \frac{3\pi}{2}\,;\; x'''_0 = \frac{5\pi}{2},\ldots$$

"En todos aquellos lugares de abscisa $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ la pendiente se hace cero $k \in Z$".

14.5 **TEOREMA (DEL VALOR CRITICO)**

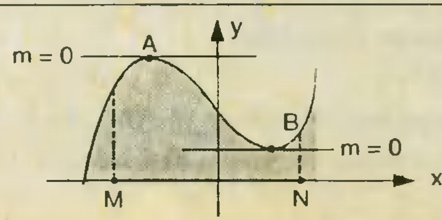
Sea $F(x)$ la regla de correspondencia de una función continua y derivable en el intervalo I y sea $F'(x)$ la correspondiente a su derivada.

Si: $F'(x) = 0 \Rightarrow x = x_0$ es el valor crítico $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Comentario:

El valor crítico puede ocurrir para un extremo relativo máximo o un extremo relativo mínimo.

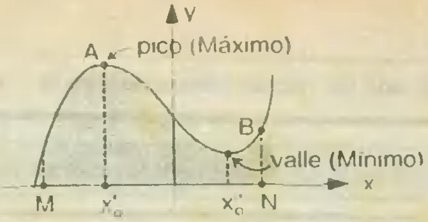
1ra Ilustración:



En A: la pendiente es cero

En B: la pendiente es cero

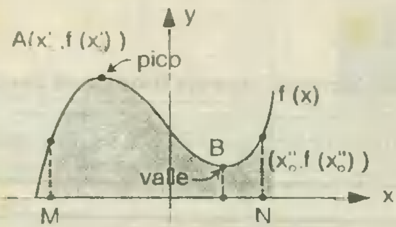
2da Ilustración:



En A: Ocurre un valor crítico x'_0 que determina un extremo máximo relativo.

En B: Ocurre otro valor crítico x''_0 que determina un extremo mínimo relativo.

3ra Ilustración



14.6 **TEOREMA DE LA 2DA DERIVADA REFERIDA A LOS VALORES EXTREMOS**

Sea x_0 un valor crítico en el intervalo I de una función f continua derivable es decir:

$f'(x_0) = 0$

Si: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es un máximo relativo

$f''(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0)$ es ambiguo

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ es un mínimo relativo

Ejemplo:

Mediante el teorema de la 2da derivada, hallar el valor extremo de la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = x^2 + 8x + 11$$

Solución:

De acuerdo al teorema:

(1°) $f(x) = x^2 + 8x + 11$ es la r.c. de la función .... (0)

(2°) **Obtenemos la 1ra derivada**

$f'(x) = 2x + 8$ .... (1)

(3°) **Igualamos a cero la derivada $f'(x) = 2x + 8 = 0$**

El valor que resuelve esta condición es el valor crítico.

$\Rightarrow$ $2x = -8$

$\therefore$ $\boxed{x_0 = -4}$ (valor crítico)

(4°) **Obtenemos la segunda derivada a partir de (1)**

$\Rightarrow f''(x) = 2$ ....(2)

(5°) **En (2) reemplazamos el valor crítico tal como establece el teorema.**

$\Rightarrow f''(-4) = 2 > 0$

$\Rightarrow x = -4 \in f(x)$ mínimo ("$x = -4$ corresponde a un mínimo en $f(x)$")

(6°) **Obtenemos dicho valor mínimo al reemplazar $x_0 = -4$ en (0)**

$\Rightarrow f(-4) = 16 - 32 + 11 = -1$

$\therefore$ $\boxed{\text{El valor extremo es mínimo e igual a } -1}$

14.6.1. Síntesis de la Metodología para calcular Máximos y Mínimos (Optimización)

(1°) Se debe obtener una expresión de la magnitud o cantidad que se desea maximizar o minimizar; de modo que dicha expresión contenga **una sola variable.**

(2°) Si al principio se necesitan dos o más variables, será necesario complementar con otras que se emplearán para eliminarse entre sí de modo **que se tenga siempre una sola variable.**

(3°) Determinar el dominio de la función, es decir el conjunto de valores admisibles.

(4°) Hallar los valores para el cual la derivada es cero, (cero de la derivada).

(5°) Hallar la segunda derivada, para efectos de utilizar el teorema correspondiente.

14.7 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

14.7.1 Ejercicio Explicativo

Maximizar o minimizar, la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Solución:

(1°) **Obtenemos la 1ra derivada y la 2da derivada.**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \text{ .... } (\alpha)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \text{ .... } (\beta)$$

(2°) **Resolvemos $f'(x) = 0$**

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \; ; \; \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \; ; \; x \neq 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \qquad \therefore \; x_0 = 1 \; , \; x_0 = -1$$

(3°) **De acuerdo al teorema de la segunda derivada**

Si $x_0 = 1 \Rightarrow$ En (β): $f''(1) = \dfrac{1}{1^3} > 0$

Significa que $x_0 = 1$ le corresponde un mínimo relativo.

$\therefore$ $\boxed{f_{mín}(x) = 2}$

Si $x_0 = -1 \Rightarrow$ En (β): $f''(-1) = \dfrac{1}{(-1)^3} < 0$

Significa que a $x_0 = -1$ le corresponde un máximo relativo.

$\therefore$ $\boxed{f_{máx}(x) = -2}$

14.7.2 **Ejercicio Explicativo**

Hallar dos números que sumen 18 y que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.

Recuerde:

El análisis del valor extremo requiere de una función específica que detalle el fenómeno por estudiarse.

Solución:

(1°) **Hagamos una designación apropiada de variables.**

Sea el 1° : " x "

el 2° : " 18 - x "

(2°) **El producto en mención será:**

$P(x) = x(18 - x)^2$ .... (1)

(3°) **Obtengamos $P'(x)$ para realizar el estudio correspondiente.**

$P(x) = x^3 - 36x^2 + 324x$ .... (2)

$\Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 72x + 324$; luego de igualar a cero .... (3)

$\Rightarrow x = 6 \; ; \; x = 18$

(4°) **Obtengamos $P''(x)$, de (3)**

$P''(x) = 6x - 72$ .... (4)

$\Rightarrow P''(6) = 36 - 72 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \in P(x)$ máximo

$P''(18) = 108 - 72 > 0 \Rightarrow x = 18 \in P(x)$ mínimo

(5°) **En consecuencia los números serán:**

El 1° será: 6
El 2° será: 12

14.7.3 Ejemplo Explicativo

Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 36 m² de área, de modo que al colocar el cerco perimetral, éste sea de la mínima longitud.

Recuerde:

El teorema del valor extremo establece que

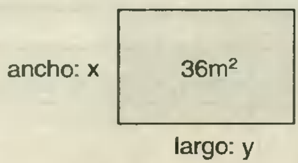
Si $F'(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ si $F''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in F_{min}$

$F''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \in F_{max}$

Solución:

(1°) **Hagamos un esquema en el cual se observe los parámetros del problema.**



(2°) **Busquemos una función del perímetro, para ello:**

$P = 2x + 2y$ .... (1)

$36 = xy$ .... (2)

de (1) en (2):

$P''(x) = 2x + \dfrac{72}{x}$ .... (3)

(3°) **Obtengamos P' (x) y P'' (x)**

$P'(x) = 2 - \dfrac{72}{x^2}$ .... (4)

$P''(x) = \dfrac{144}{x^3}$ .... (5)

de (4): $x_0 = 6$; $x_0 = -6$

de (5): $P''(6) = \dfrac{144}{6^3} > 0 \Rightarrow x_0 = 6 \in P_{min}(x)$

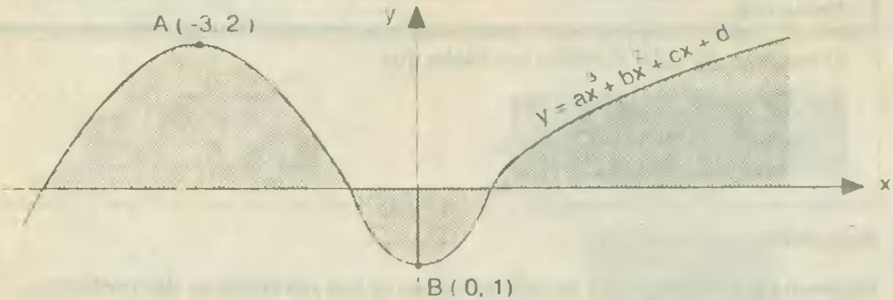
(4°) **Las dimensiones del rectángulo serán:**

$\therefore$

ancho: 6m
largo: 6m

14.7.4 Ejemplo Explicativo

Calcular $a+b+c+d$ a partir del gráfico, en el cual se dan como datos las coordenadas de los puntos críticos.



Recuerde:

El punto crítico es aquel en el cual la derivada se hace igual a cero.

Solución:

(1°) **En A y B por ser pares correspondientes a los puntos definidos por la regla de correspondencia:**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{.......... (0)}$$

Si: $x = -3$: $-27a + 9b - 3c + d = 2$ .... (1)

Si: $x = 0$: $0a + 0b + 0c + d = -1$ .... (2)

(2°) La regla de correspondencia de la derivada será:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad \text{.......... (3)}$$

(3°) En A y B por ser puntos críticos

Si: $x = -3$: $27a - 6b + c = 0$ .... (4)

$x = 0$: $0a + 0b + c = 0$ .... (5)

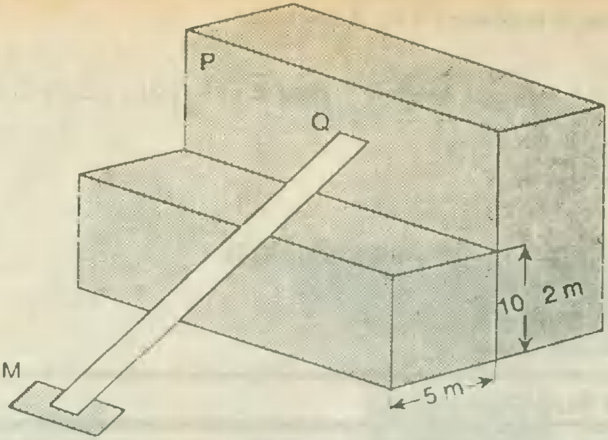
(4°) Resolviendo el sistema (1), (2), (4) y (5)

$a = 2/9$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$

$\therefore$ $\boxed{a + b + c + d = 2/9}$

14.7.5 Ejemplo Explicativo

Se desea apuntalar el muro $\overline{PQ}$ mediante la viga $\overline{MQ}$ que se apoya sobre el contromuro de $10\sqrt{2}$ m de alto y un ancho de 5m (véase el gráfico adjunto). ¿cuál es la longitud de la viga más corta que puede usarse?

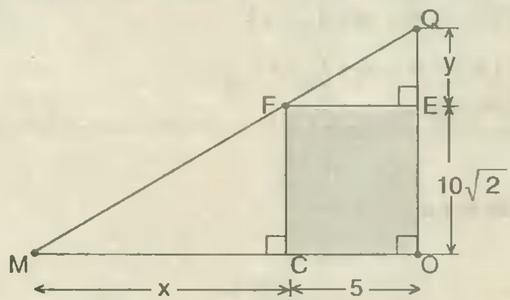


Recuerde:

Si $f(x)$ es continua $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ permite $x_0 =$ valor crítico.

Solución:

(1°) **Del gráfico podemos obtener la sección siguiente.**



$\overline{MQ} =$ L (longitud de la viga)

$\overline{MC} = x$

$\overline{EQ} = y$

(2°) **Obtenemos una función de $\overline{MQ}$ en términos de los parámetros que ofrece la sección elegida.**

$$\Rightarrow L^2 = (x+5)^2 + \left(y + 10\sqrt{2}\right)^2 \quad \text{.................. (1)}$$

De la semejanza de $\triangle$ MCF y $\triangle$ FEQ

$$\frac{y}{5} = \frac{10\sqrt{2}}{x} \quad \text{.................. (2)}$$

De (2) en (1):

$$L = \sqrt{(x+5)^2 + \left(\frac{50\sqrt{2}}{x} + 10\sqrt{2}\right)^2} \quad \text{.................. (3)}$$

(3°) **Para obtener el mínimo:** $L'(x) = 0$

$$\Rightarrow L' = \frac{1}{2}\left[(x+5)^2 + \left(\frac{50\sqrt{2}}{x} + 10\sqrt{2}\right)\right]^{-1/2}\left[2(x+5) + 2\left(\frac{50\sqrt{2}}{x} + 10\sqrt{2}\right)\left(-\frac{50\sqrt{2}}{x^2}\right)\right] = 0$$

Resolviendo: $x = 10$, **reemplazando en (3)**

$$\therefore \boxed{L_{min} = 15\sqrt{3}}$$

14.7.6 Ejemplo Explicativo

Obtener los valores extremos relativos de la función cuya regla de correspondencia viene dado por:

$$f(x) = x + \frac{500}{x^2}$$

Recuerde:

Si $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) > 0 \; ; \; x_0 \in f_{max}(x)$

$f''(x_0) < 0 \; ; \; x_0 \in f_{min}(x)$

(Teorema de la 2^{da} derivada)

Solución:

(1°) **Hallamos la derivada de la r.c**

$f(x) = x + 500\,x^{-2}$

$f'(x) = 1 - 1\,000\,x^{-3}$ ....(1)

(2°) **Hallamos x_0 , que resulta de resolver**

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1000}{x^3} = 0$$

$\Rightarrow \; x^3 - 1000 = 0$

$\Rightarrow \; x^3 = 1\,000$

$\Rightarrow \; x = 10$

(3°) **Deseamos saber si $x = 10$ produce un máximo o un mínimo; para ello utilizamos el teorema de la 2^{da}derivada:**

$\Rightarrow \; f(x) = 1 - 1\,000\,x^{-3}$

$\Rightarrow \; f''(x) = 3\,000\,x^{-4}$

$\Rightarrow$ Lo evaluamos en $x = 10$

$$\Rightarrow \quad f''(10) = 3\,000\left(\frac{1}{10}\right)^4 > 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 10 \in f_{min}(x)$$

$$\therefore \quad \boxed{f_{min}(x) = 15 \quad (10, 15)_{min}}$$

14.7.7 Ejemplo Explicativo

Sea $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$ la r. c. de una función.
Esbozar la gráfica correspondiente indicando la ubicación de sus valles y sus picos.

Recuerde:

Si $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \in y_{max}$ o y_{pico}

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in y_{min}$ o y_{valle}

(Teorema de la 2^{da} derivada)

Solución:

(1°) **La r.c es factorizable**

$f(x) = x(x^2 - 9x + 24)$

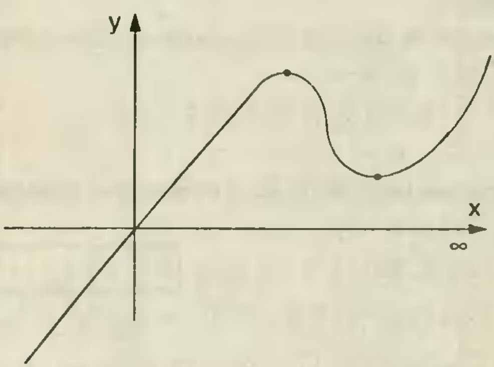
ceros: $x = 0$, $x = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-15}$; $x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-15}$

(2°) **Obtención de los extremos**

Si $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

(3°) **Un primer esbozo es:**



(4°) **Hallamos x_0 a partir de la derivada:**

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0$

$= 3(x^2 - 6x + 8)$

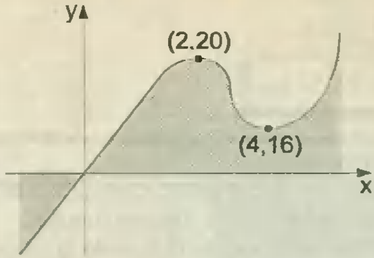
$\Rightarrow x = 2,\ x = 4$

(5°) **Mediante el teorema de la 2^{da} derivada**

$f''(x) = 6x - 18$

Si $x = 2 \Rightarrow f''(2) = 12 - 18 = -6 < 0$, $x = 2 \in f_{max}$

Si $x = 4 \Rightarrow f''(4) = 24 - 18 = 6 > 0$, $x = 4 \in f_{min}$



14.7.8 **Ejemplo Explicativo**

Sobre la gráfica de la r. c. siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$

Obtener los máximos y mínimos relativos.

Recuerde:

$f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \in y_{max}$ o y_{pico}

Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in y_{min}$ o y_{valle}

(Teorema de la 2^{da} derivada)

Solución:

(1°) Obtenemos la derivada correspondiente para obtener x_0

$\Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 2$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$; $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 2$, $x = -1$

(2°) **Obtenemos la 2^{da} derivada y hacemos el análisis de acuerdo al teorema.**

$f''(x) = 2x - 1$

$\Rightarrow f''(2) = 2(2) - 1 = 3 > 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 \in f_{min}(x)}$

$\Rightarrow f''(-1) = 2(-1) - 1 = -3 < 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \in f_{max}(x)}$

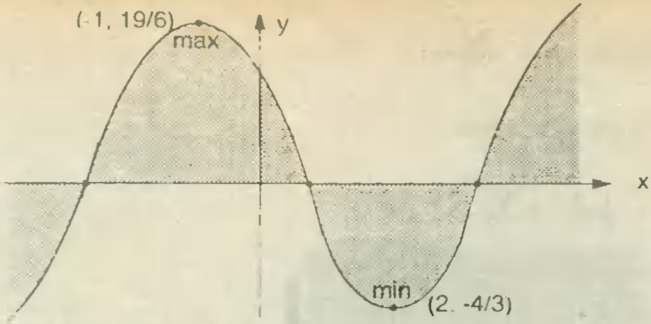
$$\Rightarrow x = 2;\ f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = -4/3 \quad \therefore \boxed{(2, -4/3)_{min}}$$

$$x = -1;\ f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2 = 19/6 \quad \therefore \boxed{(-1, 19/6)_{max}}$$

(3°) **Obtenemos un esbozo del gráfico:**

Si $x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$



14.7.9 **Ejercicio Explicativo**

Para fabricar un filtro cónico, se pliega un papel circular, siendo "r" el radio de dicho círculo. Hallar la altura del cono si el volumen es máximo.

Recuerde:

Si: $f'(x_0) = 0$

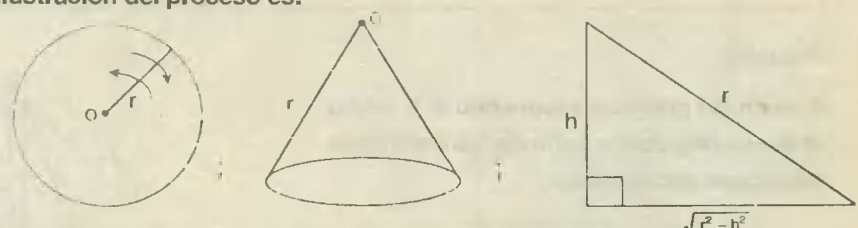
$f''(x_0) < 0, \quad x_0 \in f_{max}(x)$

$f''(x_0) > 0, \quad x_0 \in f_{min}(x)$

Teorema de la 2^{da} derivada

Solución:

(1°) **Una ilustración del proceso es:**



(2°) **Se desea obtener la altura del cono de volumen máximo.**

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} A_B\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$A_B = \pi\left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

de (2) en (1)

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(r^2 h - h^3\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(3°) **De analizar la expresión del volumen en términos de la altura h (variable)**

$$\Rightarrow \quad V'(h) = \frac{1}{3}\pi\,(r^2 - 3h^2) = 0$$

$$r^2 - 3h^2 = 0 \ , \quad h = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$

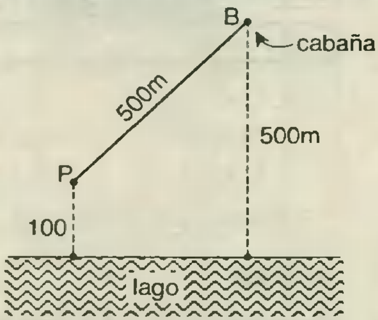
$$\Rightarrow \quad V''(h) = \frac{1}{3}\pi(-6h)$$

$$V''(h) = \frac{1}{3}\pi\left(-6\frac{\sqrt{3}}{3} r\right) < 0$$

$$\therefore \quad \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{3} r \text{ , corresponde a } V_{max}.}$$

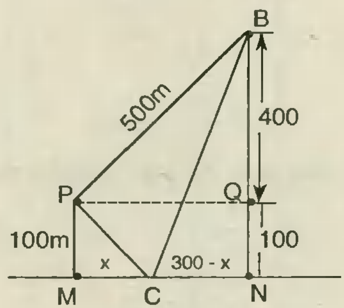
14.7.10 Ejemplo Explicativo:

Cierta persona está en "P" a 100 m de la porción rectilínea de un lago y a 500 m de una cabaña "B" a la cual se dirige, que dista 500 m del lago; el terreno es llano y desea bañarse. ¿En qué punto de dicha porción rectilínea deberá bañarse para que el camino recorrido en total para ir a la cabaña sea el mínimo?



Solución:

(1°) **A partir del gráfico y asumiendo a C como el punto elegido y a partir de las conocidas relaciones geométricas.**



$$\overline{PQ} = \overline{MN} = \sqrt{500^2 - 400^2}$$

$$\Rightarrow \ \overline{PQ} = \overline{MN} = 300 \text{ m}$$

(2°) **Obtengamos la expresión por analizarse:**

$$\text{RECORRIDO} = \overline{PC} + \overline{CB} \quad \text{.........................} \ (1)$$

$$\Rightarrow \ \text{REC}(x) = \underbrace{\sqrt{x^2 + 100^2}}_{\overline{PC}} + \underbrace{\sqrt{(300 - x)^2 + 500^2}}_{\overline{CB}}$$

(3°) **Resolviendo :**

$$\text{REC}'_{(x)} = 0$$

$$REC'_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{300-x}{\sqrt{(300-x)^2+500^2}} = 0$$

$\Rightarrow \; x'_0 = 50 \;;\; x''_0 = -75$ (descartado)

(4°) Si $x'_0 < 50 \Rightarrow REC'_{(x)} < 0$ decreciente

$x_0 > 50 \Rightarrow REC''_{(x)} > 0$ creciente

$x = 50 \Rightarrow REC'_{(x)}$ es mínimo

$\therefore$ Deberá bañarse a 50 m del pie de la perpendicular al río por P.

14.7.11 Ejemplo Explicativo

Qué valores deben de tener los coeficientes de la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

de modo que:

i) $f(x)$ tenga por cero a 8

ii) $f(x)$ se haga mínimo en (6, - 12)

Solución:

(1°) **De acuerdo a las condiciones**

Si: $x = 8 \Rightarrow f(8) = 0$

$\Rightarrow 64a + 8b + c = 0$ .... (1)

(2°) Si: $x = 6 \Rightarrow f(6) = -12$

$\Rightarrow 36a + 6b + c = -12$ .... (2)

(3°) Si: $x = 6 \Rightarrow f'(6) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

$f'(6) = 12a + b = 0$ .... (3)

(4°) **Resolviendo el sistema conformado por (1), (2) y (3):**

$\therefore$ $a = 3, \; b = -36, \; c = 96$

14.7.12 Ejemplo Explicativo

Que valor deberá de tener los coeficientes "a" y "b" de manera que la siguiente regla de correspondencia.

$$y = x + \frac{a}{x} + b$$

Tenga por mínimo a 22 en el intervalo $\langle 0, \infty \rangle$ y por máximo a - 2 en el intervalo $\langle -\infty, 0 \rangle$

Solución:

(1°) Obtenemos la derivada:

$$y' = 1 - \frac{a}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_o = \sqrt{a} \ , \ x_o = -\sqrt{a}$$

(2°) Obtenemos la 2da derivada

$$y'' = \frac{2a}{x^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(3°) Aplicando el teorema de la 2da derivada.

$$\text{Si: } x_o = \sqrt{a} \Rightarrow y'' = \frac{2a}{\sqrt{a^3}} > 0 \ , \ \sqrt{a} > 0$$

$$\Rightarrow \text{ El mínimo: } \sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a^3}} + b = 22 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{Si: } x_o = -\sqrt{a} \Rightarrow y'' = \frac{2a}{-\sqrt{a}} > 0 \ , \ -\sqrt{a} < 0$$

$$\Rightarrow \text{ El máximo: } -\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}} + b = -2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(4°) Resolviendo (3) y (4):

$$\therefore \ \boxed{a = 36 \ ; \ b = 10}$$

14.7.13 **Ejemplo Explicativo**

Calcular el volumen del cono de revolución de máximo volumen inscrito en una esfera de 30 m de diámetro.

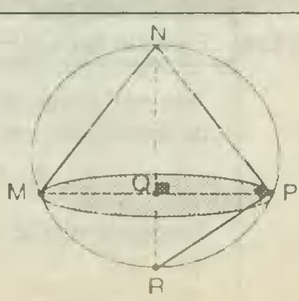
Recuerde:

El volumen del cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \text{(Area de la base) (altura)}$$

Solución:

(1°) Hallamos el volumen del cono de acuerdo a la descripción



$$V_{cono} = \underbrace{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\overline{MP}}{2}\right)^2}_{\text{Area dela base}} \times \underbrace{\overline{NQ}}_{\text{Altura}}$$

(2°) De tener: $\overline{NQ} = h \ ; \ \left(\frac{\overline{MP}}{2}\right)^2 = h(D-h) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$

de la relación (2) en (1) se tendrá:

$$\Rightarrow \quad V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2 (D - h) \; ; \text{ variable única "h".}$$

(2°) **Resolvemos: V' = 0**

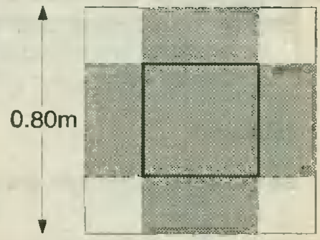
$$\Rightarrow \frac{\pi}{3}\left(2hD - 3h^2\right) = 0 \; ; \; \underbrace{h'_0 = 0,}_{\text{para el mínimo}} \; \underbrace{h''_0 = \frac{2}{3}D}_{\text{para el máximo}}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} D^2 \left(D - \frac{2D}{3} \right) = \frac{4\pi}{3\times9\times3}(30)^3$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Volumen máximo} = \frac{400\pi}{3}\ m^3}$$

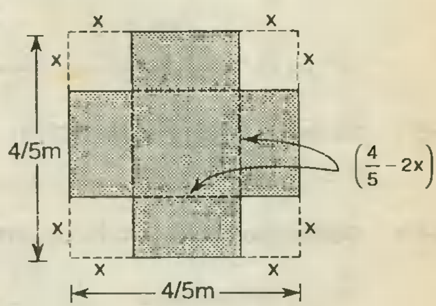
14.7.14 Ejercicio Explicativo

Se desea construir una caja abierta de volumen máximo, con una lámina cuadrada cuyo lado es 0.80 m, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando dicha lámina por las líneas punteadas. ¿cuál será la longitud del lado de los cuadrados recortadas?



Solución:

(1°) **Obtengamos la regla funcional de volumen para realizar el análisis necesario; para ello designemos por "x" al lado de cada cuadrado.**



V = (Area de la base) altura

$$V = \left(\frac{4}{5} - 2x\right)^2 x$$

$$\Rightarrow \quad V(x) = 4x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{16}{25}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) **Obtenemos la derivada:** $V'(x) = 0$

$$V'(x) = 12x^2 - \frac{32}{5}x + \frac{16}{25}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Rightarrow \quad x'_0 = 2/5 \;\; y \;\; x''_0 = 2/15$$

(3°) **Deseamos saber cual de estos V. Críticos permite el máximo volumen.**

$$\Rightarrow \quad V''(x) = 24x - \frac{32}{5}$$

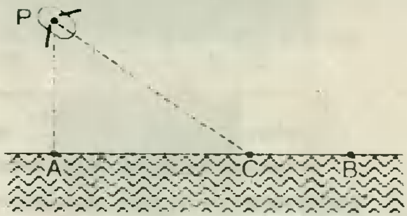
$$V''(2/5) = \frac{48}{5} - \frac{32}{5} > 0 \Rightarrow 2/5 \in V_{min}$$

$$V''(2/15) = \frac{16}{5} - \frac{32}{5} < 0 \Rightarrow 2/15 \in V_{max}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{La longitud del cuadrado deberá ser } 2/15 \text{ m.}}$

14.7.15 **Ejemplo Explicativo**

Una persona que se encuentra en un bote en "P" que dista 5 km del punto "A" más próximo de una costa recta $\overline{AB}$. Dicha persona desea ir a "B" que dista 6 km de A, en el menor tiempo posible. ¿Qué dirección llevará si puede navegar a 2 km/hr y caminar a 4 km/hr?



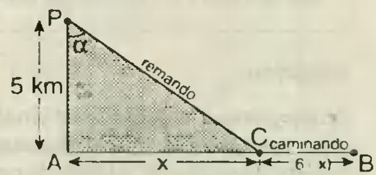
Recuerde:

La dirección de una trayectoria rectilínea está referida generalmente a un sistema de referencia rectangular y de acuerdo a un sentido de rotación angular horario.

Solución:

(1°) Se busca una función del tiempo : $T = T_{remando} + T_{caminando}$

$$\Rightarrow T = T_{\overline{PC}} + T_{\overline{CB}}$$



(2°) Además del gráfico, y luego de asignar a

$\overline{AC} = x$

$$\Rightarrow T(x) = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{2} + \frac{6 - x}{4} \quad \text{.......................} (1)$$

(3°) Se desea obtener la dirección:

$$D = -90 + \alpha \quad \text{...} (2)$$

(4°) Obtenemos valores críticos, previamente obtenemos:

$$T'(x) = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} - \frac{1}{4} \quad \text{....................................} (3)$$

$$\Rightarrow T'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{5}{3}}}$$

(5°) **Obtenemos T"(x):**

$$T''(x) = \frac{1}{\sqrt{25+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{(25+x^2)^3}} \;;\; T''\left(\sqrt{5}/3\right) = \frac{80\sqrt{3}-5}{80\sqrt{80}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ produce el mínimo}$$

(6°) **Del triángulo PAC y de acuerdo al sistema de referencia dado en (2).**

$$\therefore \quad \boxed{\text{Direcc.} = -90 + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) = -75°31'\,20.96''}$$

14.7.16 **Ejemplo Explicativo**

El metal usado para hacer la tapa y el fondo de un tanque cilíndrico cuesta $3\$/m^2$, mientras que el metal usado para hacer los lados cuesta $1.50\ \$/m^2$.

Si el volumen del tanque es $216\ m^3$. ¿cuáles debieran ser las dimensiones del material para minimizar el costo del metal usado en su manufactura?.

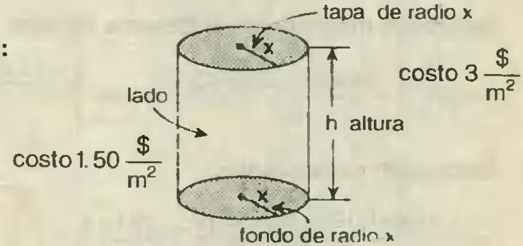
Recuerde:

El área lateral de un cilindro es: $A = (\pi D) \times h$

donde D : Diámetro de la base
h : altura del cilindro

Solución:

(1°) **Hacemos un esquema del cilindro:**



(2°) **Area de metal utilizado**

$$A = \underbrace{\pi x^2}_{\text{Area de la tapa}} + \underbrace{\pi x^2}_{\text{Area del fondo}} + \underbrace{\pi(2x)\,h}_{\text{Area del lado}}$$

(3°) Costo del metal utilizado

$$\text{Costo} = \underbrace{2\pi x^2 (3)}_{\text{costo de tapa y fondo}} + \underbrace{(2\pi \times h)(1.5)}_{\text{costo de lados}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

(4°) A fin de tener el costo en términos de una variable, podemos utilizar el dato siguiente:

$$(\pi x^2)h = 216 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

de (2) en (1):

$$\text{Costo} = 6\pi x^2 + 3\pi x\left(\frac{216}{\pi x^2}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

(4°) **Al resolver**: costo = 0 y aplicar el teorema de la 2[da] derivada:

$\therefore$ Dimensiones: altura: $24\sqrt[3]{\dfrac{1}{4\pi}}$, radio de base: $3\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}$ m

14.7.17 **Ejercico Explicativo**

Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 9x-\cos 2x}{x^2}\right)$

Recuerde:

El teorema de L'hopital para límites indeterminados de la forma 0/0 o ∞/∞ establece:

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{F(x)}{G(x)}\right\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{F'(x)}{G'(x)}\right\}.$$

Solución:

(1°) **Por la definición de límite:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 9x-2x}{x^2}\right)=\frac{\cos 0-\cos 0}{0}=\frac{0}{0}$$

(2°) **Aplicando el teorema de L'hospital**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(-\operatorname{sen} 9x)(9)-(-\operatorname{sen} 2x)2}{2x}\right\}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0}$$

(3°) **Aplicando nuevamente el teorema anterior**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{-9\operatorname{sen} 9x+2\operatorname{sen} 2x}{2x}\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(-9\cos 9x)9+(2\cos 2x)(2)}{2}\right\}$$

(4°) **Evaluando nuevamente:**

$$\Rightarrow \frac{(-9\cos 0)9+(2\cos 0)2}{2}=\frac{-81+4}{2}=-\frac{77}{2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos 9x-\cos 2x}{x^2}\right)=-38{,}50$$

14.7.18 **Ejercicio Explicativo**

Calcular : $y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{14x^3}\right)$

Recuerde:

El teorema de L'hospital para límites indeterminados de la forma 0/0 ó ∞/∞ establece que:

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{F(x)}{G(x)}\right\} = \lim_{x\to a}\left\{\frac{F'(x)}{G'(x)}\right\}$$

Solución:

(1°) **Aplicando la definición de límite.**

$$y = \text{Lim}\left(\frac{\text{tg}\,x - \text{sen}\,x}{14x^3}\right) = \frac{\text{tg}\,0 - \text{sen}\,0}{14(0)^3} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminado)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} - \text{sen}\,x}{14x^3}\right) = \text{Lim}\left(\frac{\text{sen}\,x - \text{sen}\,x\cos x}{14x^3\cos x}\right)$$

(2°) **Ordenando**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right).\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{14x^2\cos x}\right) = (1)\left(\frac{1-1}{0}\right) = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminado)}$$

(3°) **Aplicando L'hospital en el segundo factor**

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)}_{1}.\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{\left(28x\cos x - 14x^2\,\text{sen}\,x\right)} = 1\times\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{(Indeterminado)}$$

(4°) Aplicando nuevamente L'hospital en el segundo factor

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right).\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{28\cos x - 28x\,\text{sen}\,x - 28x\,\text{sen}\,x - 4x^2\cos x}\right)$$

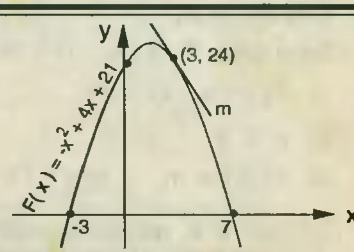
(5°) Llevando el límite.

$$\Rightarrow (1).\left(\frac{\cos 0}{28\cos 0 - 0 - 0}\right) = 1\left(\frac{1}{28-0-0}\right) = \frac{1}{28}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg}\,x - \text{sen}\,x}{14x^3}\right) = \frac{1}{28}}$$

14.7.19 Ejercicio Explicativo

Hallar la pendiente "m" de la recta tangente al punto (3,24).



Recuerde:

Si $F(x)$ es una regla de correspondencia de una función derivable y continua.
$\Rightarrow$ $F'(x) = m$ la derivada equivale a la pendiente genérica.

Solución:

(1°) **A partir de la regla:**

$F(x) = -x^2 + 4x + 21$

$\Rightarrow$ $F'(x) = m = -2x + 4$ .... (I)

(2°) **Deseamos obtener la pendiente de la recta tangente al punto cuya abscisa es 3.**

$\Rightarrow$ asignando $x = 3$

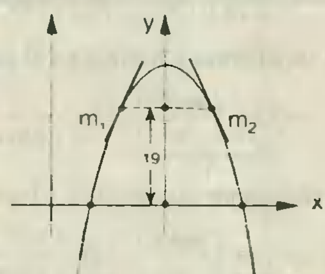
$\Rightarrow$ $m = F'(3) = -2(3) + 4 = -2$

$\therefore$ $\boxed{m = -2 \text{ (pendiente decreciente)}}$

14.7.20 **Ejemplo Explicativo**

A partir del gráfico de
$F(x) = -x^2 + 15x - 27$
adjunto:

Hallar las pendientes m_1 y m_2



Solución

(1°) **Por condición**

$F(x) = -x^2 + 15x - 27 = 19$

Podremos averiguar que abcisas poseen dicha ordenada

$\Rightarrow$ $x^2 - 15x + 36 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 3$, $x = 12$

(2°) **Cálculo de m_1**

De la regla: $F(x) = -x^2 + 15x - 27$

$\Rightarrow$ $F'(x) = -2x + 15$ .... (A)

Si: $x = 3$

$\Rightarrow$ $F'(3) = m_1 = -2(3) + 15 = 9$

$\therefore$ $\boxed{m_1 = 9 \text{ (pendiente positiva)}}$

(3°) Cálculo de m_2

Si: $x = 12$ y de A

$\Rightarrow F'(12) = -2(12) + 15 = m_2$

$\therefore$ $\boxed{m_2 = -9 \text{ (pendiente negativa)}}$

14.7.21 Ejercicio explicativo

Sea la función cuya regla es :

$f(x) = -x^2 - 6x + 16$

Hallar las coordenadas del punto en el cual la pendiente adopte el valor 4 ; realice un esbozo del gráfico y el evento correspondiente.

Solución

(1°) **De la regla:**

$F'(x) = -2x - 6 = m$ .... (1)

Por condición: $m = 4$ (pendiente creciente)

$\Rightarrow -2x - 6 = 4$

$\Rightarrow x = -5$ (abscisa del punto)

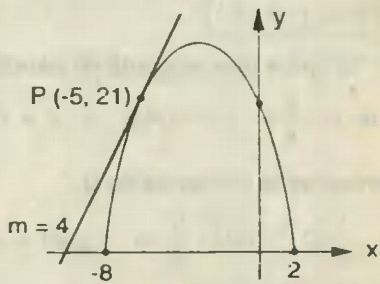
(2°) **Sustituyendo el valor - 5 sobre la regla:**

$F(-5) = -(-5)^2 - 6(-5) + 16$

$F(-5) = -25 + 30 + 16 = 21$ $\therefore$ $\boxed{P(-5, 21)}$

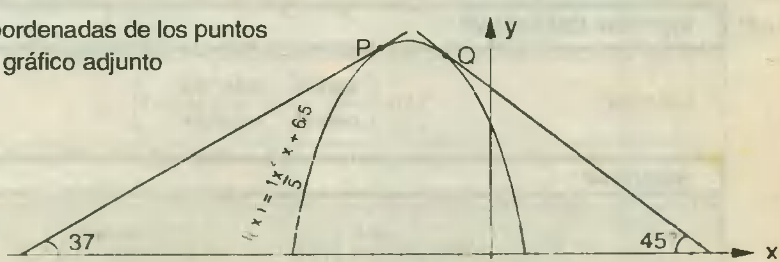
(3°) **El gráfico será:**

Donde P es el punto por el cual la tangente trazada posee pendiente 4.



14.7.22 Ejercicio Explicativo

Hallar las coordenadas de los puntos P y Q, del gráfico adjunto



Recuerde:

Sea $f(x)$ una función derivable y continua
$\Rightarrow$ $f'(x) = m$ es la pendiente genérica de las tangentes a la curva representativa.

Solución:

(1°) **A partir de la regla:**

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{5}x - 1 = m \text{ .... } (1)$$

(2°) **Además por "P" se tiene trazada una tangente de pendiente positiva.**

$$\Rightarrow m = \text{tg}\,37° = -\frac{2}{5}x - 1 \;;\; \text{tg}\,37° = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}x - 1$$

$\Rightarrow$ $x = -4$ **(abcisa de P)**

(3°) **Obtenemos la ordenada de P.**

$$\Rightarrow f(-4) = -\frac{1}{5}(-4)^2 - (-4) + \frac{6}{5}$$

$\Rightarrow$ $f(-4) = 2$ (ordenada de P)

$\therefore$ $\boxed{P = (-4, 2)}$

(4°) **Por "Q" para una tangente de pendiente negativa.**

$\Rightarrow$ $m = -\frac{2}{5}x - 1 = -\text{tg}\,45° \Rightarrow x = 0$ (abscisa de Q)

(5°) **Obtenemos la ordenada de Q.**

$\Rightarrow$ $-\frac{1}{5}(0)^2 - (0) + \frac{6}{5} \Rightarrow$ $f(0) = 6/5$ (ordenada de Q)

$\therefore$ $\boxed{Q = (0, 6/5)}$

14.7.23 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:
$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,3x} + \frac{\text{sen}^2 5x}{\text{sen}^2 9x} + 1\right)$$

Recuerde:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen}\,kx}{x}\right) = k$$

1^ra Solución:

(1°) **Por la definición del límite**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}3x}+\frac{\operatorname{sen}^2 5x}{\operatorname{sen}^2 7x}+1\right)=\frac{0}{0}+\frac{0}{0}+1$$

(2°) **Ordenando**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\left(\dfrac{\operatorname{sen}4x}{4x}\right)}{3\left(\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}\right)}+\frac{5^2\left(\dfrac{\operatorname{sen}5x}{5x}\right)^2}{9^2\left(\dfrac{\operatorname{sen}9x}{9x}\right)^2}+1\right)=\frac{4}{3}+\frac{5^2}{9^2}+1$$

(3°) **Ejecutando**

$$\Rightarrow \qquad \frac{108+25+81}{81}=\frac{214}{81}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}3x}+\frac{\operatorname{sen}^2 5x}{\operatorname{sen}^2 9x}+1\right)=\frac{214}{81}}$$

2^da Solución:

Mediante el teorema de L'hospital

(A) **Distribuyendo el límite**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}3x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 5x}{\operatorname{sen}^2 9x}\right)+\lim_{x\to 0}(1)$$

(B) **Aplicando L'hospital a cada sumando** (luego de tener 0/0 en cada caso)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 4x)4}{(\cos 3x)3}+\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}5x(\cos 5x)5}{2\operatorname{sen}9x(\cos 9x)9}+1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{0}{0}+1 \ ; \text{ prosigue la indeterminación}$$

(C) **Aplicando L'hospital al caso indeterminado.**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{5\operatorname{sen}(10x)}{9\operatorname{sen}(18x)}\right\}+\frac{7}{3} \ ; \text{ aplicando el Teorema}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{5(\cos 10x)}{9\operatorname{sen}(18x)}\right\}+\frac{7}{3}=\frac{5}{3}\times\cancel{\frac{\cos 0}{\cos 0}}\times\frac{10}{18}+\frac{7}{3}=\frac{25}{81}+\frac{7}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}4x}{\operatorname{sen}3x}+\frac{\operatorname{sen}^2 5x}{\operatorname{sen}^2 9x}+1\right)=\frac{214}{81}}$$

14.8 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS.

CAPITULO: La Función Derivada.

(1) Hallar el valor máximo que puede adquirir: $f(x) = 3 + 6x - x^2$

Rpta: $f_{max} = 12$

(2) Hallar la segunda derivada de la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{x}$$

Rpta: $f''(x) = 6x + 2 + \dfrac{2}{x^3}$

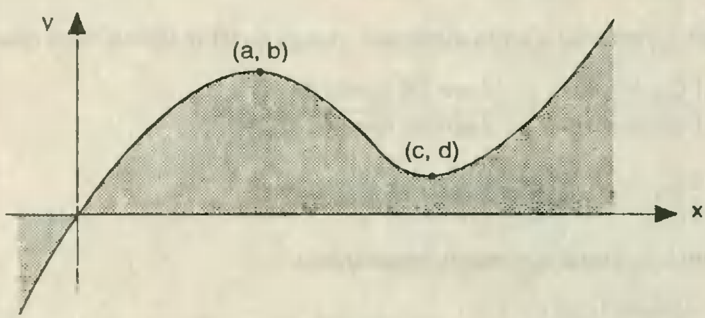
(3) Hallar los extremos relativos si existen, en la función cuya regla viene dado por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Rpta: $f_{min} = -1$
$f_{max} = 5/3$

(4) Sea g una función definida por: $g(x) = x^3 + 24x - 9x^2$, tales que $0 \leq x \leq 5$

Calcular $a + b + c + d$, considerando a su vez el gráfico siguiente:



Rpta: 42

(5) Hallar las coordenadas de los extremos relativos de la función cuya regla viene dada por:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

Rpta: $(-2, 20)$ máximo
$(1, -7)$ mínimo

(6) Calcular "a", "b", "c" y "d" de modo que la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga sus extremos relativos en: (0,4) y (2,0)

Rpta: $a = -1$, $b = 3/2$, $c = 0$, $d = 4$

(7) Una pelota se dispara verticalmente hacia arriba, "S" pies del punto de partida. En el instante "t" (segundos) donde:

$$S = 64t - 16t^2$$

¿Cuál es la máxima altura alcanzada?

Rpta: 64 pies

(8) Hallar los máximos y mínimos relativos de: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

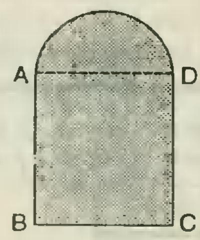
Rpta: Max (1,4), Min (5, - 28)

(9) Hallar las dimensiones del cilindro recto circular de máximo volumen que puede ser inscrito en un cono circular de diámetro 10m y altura 12m.

Rpta: altura : 4m

base: $\frac{10}{3}$ m

(10) Una ventana tiene la forma mostrada en el gráfico adjunto: cuáles serán las dimensiones de la misma sabiendo que el perímetro máximo deberá ser de 12m.

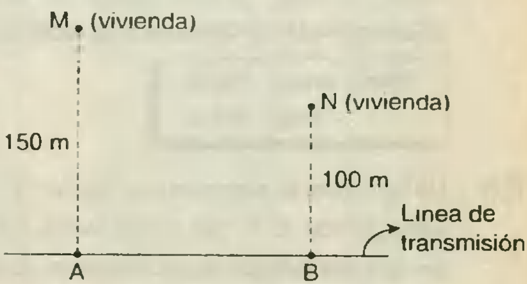


Rpta: $BC = AD = \frac{20}{4 + \pi}$ m

$AB = DC = \frac{10}{4 + \pi}$ m

(11) Dos viviendas M y N están separadas por 150 m y 100m respectivamente de una línea de transmisión eléctrica $\overline{AB}$ de 200 mts de acuerdo al gráfico adjunto.

Las dos viviendas se van a conectar a un mismo punto de la línea de transmisión. ¿Cuál es la distancia de dicho punto a los pies de las perpendiculares, de modo que se utilice el mínimo de cable?.



Rpta: Distancia al punto A = 120 m

(12) Un alambre de longitud "L" se va a cortar en dos, una de ellas se doblará para formar un cuadrado y el otro para formar un círculo. ¿Cuál debe de ser la longitud de cada porción de modo que la suma de las áreas sea mínima?.

Rpta: $\dfrac{\pi L}{\pi + 4}$ y $\dfrac{4L}{\pi + 4}$ para el cuadrado.

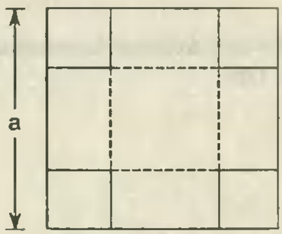
(13) Si: $x^2 + y^2 - 16 = 0$

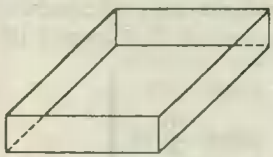
Obtener: y'

Rpta: $y' = \dfrac{x}{y}$

(14) Con una hoja cuadrada de "a" mts de lado se desea hacer una caja abierta, del máximo volumen, recortando un cuadrado en cada uno de sus cuatro vértices. Determinar las dimensiones de dichos cuadrados.

Esquema:





Rpta: Lado de cada cuadrado: $\dfrac{a}{6}$

(15) Calcular el área del mayor rectángulo que tiene su base sobre el eje x y sus otros dos vértices en la curva $f(x) = 12 - x^2$

Rpta: $32\ m^2$

(16) Un campo está atravesado por un tramo recto de río y se desea cercar en forma rectangular y de máxima área, de modo que uno de sus lados coincida con la orilla del agua, de libre acceso, disponiendo para dicho cerco de 600 mts de material de cerco.

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Rpta: ancho 150 m
largo 300 m

(17) Un fabricante de pernos puede vender "x" de ellos por semana al precio: $P = 200 - \dfrac{x}{100}$ soles; siendo $C = 50x + 2000$ soles el costo total de producción. Hallar la cantidad de tornillos que deberán de producirse de manera que la utilidad que se obtenga sea máxima.

Rpta: 7 500

(18) Una etiqueta impresa debe de contener 50 cm^2 de texto con un margen de 4 cm en la parte superior e inferior y de 2 cm a los lados. hallar las dimensiones de la hoja de papel de modo que el área sea mínima.

Rpta: 18 cm. de altura, 9 cm. de ancho.

(19) Si la suma de las superficies de un cubo y de una esfera es una constante. Determinar la relación del diámetro de la esfera a la arista del cubo, de tal modo que la suma de los cubos sea mínima.

Rpta: 1

(20) Dos estaciones ganaderas situadas a un mismo lado de un río rectilíneo,acuerdan construir en la orilla una estación de bombeo y filtrado para el suministro de agua a los mismos. Sabiendo que las distancias de las ciudades al río son "m" y "n";"p"la distancia que las separa.

Calcular la mínima suma de las longitudes de tubería necesaria para unirlas con la estación de bombeo.

Rpta: $\sqrt{p^2 + 4mn}$

CAPITULO 15

LAS SUCESIONES

15.1 ***Definición.-*** Una sucesión es una función cuyo dominio consta de los números naturales y los miembros del rango se llaman elementos de la sucesión.

Notación.- La regla de correspondencia que define la sucesión se le representa mediante subíndices, es decir:

Si F_n es la regla de correspondencia
$\Rightarrow$ $\{F_n\}$ es la representación de la sucesión

15.2 DETERMINACION Y REPRESENTACION DE UNA SUCESION

Existen tres maneras distintas:

I.- Mediante una regla de correspondencia

Ejemplo:

Sea $F_n = 3n + 7$

$$\{F_n\} = \{\underset{n=1}{\underset{\uparrow}{10}}, \underset{n=2}{\underset{\uparrow}{13}}, \underset{n=3}{\underset{\uparrow}{16}}, \underset{n=4}{\underset{\uparrow}{19}}, \underset{n=5}{\underset{\uparrow}{22}}, \underset{n=6}{\underset{\uparrow}{25}}, \ldots\}$$

II.- Por una ley de recurrencia

Ejemplo:

Si: $F_1 = 7$ y $F_{n+1} = 3F_n - 10$

Obtener la sucesión.

Solución:

(1°) La ley de recurrencia dada establece que:

El primer término de la sucesión es 7: F_1

(2°) El segundo término de la sucesión se obtiene de restar 10 al resultado de triplicar el primer término; de esta forma se obtendrán todos y cada uno de los términos siguientes.

$\Rightarrow F_2 = 3F_1 - 10 = 3(7) - 10 = 11$

$\Rightarrow F_3 = 3F_2 - 10 = 3(11) - 10 = 23$

$\Rightarrow F_4 = 3F_3 - 10 = 3(23) - 10 = 59$

$\Rightarrow F_5 = 3F_4 - 10 = 3(59) - 10 = 167$

$\therefore \boxed{\{F_n\} = \{7, 11, 23, 59, 167, \ldots\}}$

III.- POR UNA PROPIEDAD CARACTERISTICA

Ejemplo:

Escribir la sucesión de los números primos.

$$\{a_n\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

Ejemplo:

La sucesión de los números pares

$$\{F_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$

15.3 LA IGUALDAD DE SUCESIONES

Definición: Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

Si: $\{a_n\} = \{b_n\}$

$\Rightarrow a_i = b_i \quad i = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Ejemplo:

Las sucesiones:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n^2 + 3n}{n + 3}\right\} \quad ; \quad \{y_n\} = n$$

Son iguales pues:

$\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
$\{y_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

15.4 ALGEBRA DE LAS SUCESIONES

A) Suma de sucesiones

Definición.- Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, denominaremos **sucesión suma** a la sucesión $\{a_n + b_n\}$ cuyo término enésimo es la suma de los términos enésimos de las dos sucesiones.

$$\boxed{\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}}$$

B) Multiplicación de sucesiones

Definición.- La multiplicación de dos sucesiones origina otra sucesión cuyo término enésimo es el producto de los términos enésimos de los mismos.

$$\boxed{\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}}$$

Ejemplo:

Sean:

$$\{x_n\} = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{4}{3}\right), \left(3, \frac{9}{4}\right), \left(4, \frac{16}{5}\right) \ldots \left(m; \frac{m^2}{m+1}\right)\right\}$$

$$\{y_n\} = \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(2, \frac{2}{3}\right), \left(3, \frac{3}{4}\right), \left(4, \frac{4}{5}\right) \ldots \left(m, \frac{m}{m+1}\right)\right\}$$

$$\downarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \quad \downarrow \frac{4}{3}+\frac{2}{3} \quad \downarrow \frac{9}{4}+\frac{3}{4} \quad \downarrow \frac{16}{5}+\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \{x_m + y_m\} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \ldots (m, m)\}$$

"Para la suma de funciones bastará sumar los segundos componentes de la sucesión; la regla de correspondencia será también la suma de las reglas de correspondencia."

Así mismo:

$$\{x_m - y_m\} = \left\{(1, 0), \left(2, \frac{2}{3}\right), \left(3, \frac{6}{4}\right), \left(4, \frac{12}{5}\right) \ldots \left(m, \frac{m^2 - m}{m+1}\right)\right\}$$

Para la diferencia el algoritmo es análogo al de la suma.

Ejemplo:

Sean:

$$\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \frac{n}{n+1}\right\}$$

$$\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \ldots \frac{1}{2^n}\right\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow \{\alpha_n \beta_n\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{32}, \frac{1}{20}, \frac{5}{192}, \ldots \frac{n}{2^n(n+1)}\right\}$$

Es decir que para multiplicar dos sucesiones bastará ejecutar el producto de los segundos componentes y la regla de correspondencia resulta también de multiplicar los que corresponden a cada sucesión.

C) División de sucesiones

***Definición*:** El cociente de dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ siendo los términos de $\{b_n\}$ distintos de cero es la sucesión cuyos términos resulten de dividir los términos correspondientes a los segundos componentes de las sucesiones dadas:

$$\boxed{\{a_n\} \div \{b_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, \; b_n \neq 0}$$

Ejemplo:

Sea:

$$\{K_m\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}\right\}$$

$$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\{Q_m\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}\right\}$$

$$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{K_m}{Q_m}\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \dots, \frac{(n+1)}{2n+1}\right\}$$

15.5 RELACION DE ORDEN ENTRE LAS SUCESIONES

15.5.1 ***Definición.-*** Sean: $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

Se dice que $\{a_n\} < \{b_n\}$

$\Leftrightarrow a_n < b_n \;, \; \forall n$

Es decir: $a_n - b_n < 0$

(La diferencia de dos términos correspondientes es positivo)

Ejemplo:

$$\left\{\frac{n^2-1}{n+1}\right\} < \{2n+3\}$$

pues: $\dfrac{n^2-1}{n+1} < 2n+3$

$$\frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)} < 2n+3 \rightarrow n-1-(2n+3) < 0$$

$\therefore \boxed{-n-4 < 0 \quad \forall n}$

15.5.2 Sucesión Creciente

Definición.- $\{a_n\}$ es creciente

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n$ y

$a_{n+1} < a_n$ si es decreciente

Ejemplo:

La sucesión : $\left\{\dfrac{2n-7}{4}\right\}$, es creciente pues por la definición debe cumplir:

$$\frac{2(n+1)-7}{4} > \frac{2n-7}{4} \quad \Rightarrow \quad 2n-5 > 2n-7 \text{ , cancelando}$$

$-5 > -7 \quad \forall n$

Ejemplo:

La sucesión $\{ 2^{-n+9} \}$ es decreciente pues por la definición:

$\Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow \quad 2^{-(n+1)+9} < 2^{-n+9}$

$\Rightarrow \quad -(n+1)+9 < -n+9$

$\Rightarrow \quad -n-10 < n+9$ cancelando:

$\therefore \quad \boxed{-10 < 9 \quad \forall\, n}$

15.5.3 La Sucesión Constante

Definición.- $\{ a_n \}$ es constante

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n \quad \forall\, n$

Semánticamente: "cualquier término es igual que su antecesor."

Ejemplo:

La sucesión:

$\left\{ \operatorname{tg}\left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$ es constante pues de acuerdo a la definición : $a_{n+1} = a_n$

$$\operatorname{tg}\left(2(n+1)\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{tg}\left(2(n+1)\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg}\left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

La sucesión:

$\left\{ \frac{3n^2 + 6n + 3}{(n+1)^2} \right\}$ Es constante pues por la definición : $a_{n+1} = a_n \quad \forall\, n$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(n+1)^2 + 6(n+1) + 3}{(n+1+1)^2} = \frac{3n^2 + 6n + 3}{(n+1)^2} \quad \forall\, n$$

$$\Rightarrow \quad 3\frac{\left[(n+1+1)^2 \right]}{(n+1+1)^2} = 3\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} \quad \forall\, n \quad \Rightarrow \quad \boxed{3 = 3 \quad \forall\, n}$$

15.6 LIMITE DE UNA SUCESION

Definición.- La sucesión $\{ a_n \}$ tiene por límite al número real "L".
Cuando n tiende a infinito y simultaneamente a_n tiende a "L".

Simbólicamente:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \{ a_n \} = L \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = L}$$

Ejemplo:

Verificar: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{4n+3}{n}\right\}=4$

Solución: Mediante la definición

(1°) Si : $n\to\infty$

$$\Rightarrow\ a_n=\frac{4n+3}{n}=\frac{4n}{n}+\frac{3}{n}$$

(2°) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4+\dfrac{3}{\infty}=4+0=4$

$\therefore\ \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{4n+3}{n}\right\}=4}$ L.q.q.v.

15.7 **SUCESION CONVERGENTE**

Definición.- La sucesión $\{a_n\}$ es **:**
CONVERGENTE si y sólo si tiene límite.

Ejemplo:

La sucesión:

$\left\{\dfrac{4n+3}{n}\right\}$ es CONVERGENTE pues $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{4n+3}{n}\right\}=4$

15.8 **SUCESION DIVERGENTE**

Definición.- La sucesión $\{a_n\}$ es :
DIVERGENTE si y sólo si no tiene límite.

Ejemplo:

La sucesión $\{n^2+1\}$ es **DIVERGENTE** pues $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n^2+1\right\}=\infty$; $\left(\begin{array}{c}\text{no existe}\\ \text{límite}\end{array}\right)$.

15.9 **SUCESION OSCILANTE**

Definición.- La sucesión $\{a_n\}$ es oscilante $\Leftrightarrow$ sus términos son de signos alternados.

Ejemplo:

La sucesión: $\{2(-1)^n n\}$ es oscilante pues:

$$\{2(-1)^n n\}=\{-2\,;4\,;-6\,;8\,;-10\,;12\,;\ldots\}$$

observar que los elementos de la sucesión poseen signos alternados.

15.10 LIMITES FUNDAMENTALES DE LAS SUCESIONES

Teorema.- El límite de una sucesión si existe es único.

Teorema.-

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a^n\right\}=\begin{cases}\infty & \text{si } a>1\\ 1 & \text{si } a=1\\ 0 & \text{si } -1<a<1\\ \phi & \text{si } a<-1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^p\right\}=\begin{cases}\infty & \text{si } p>0\\ 1 & \text{si } p=0\\ 0 & \text{si } p<0\end{cases}$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{10^n\right\}=\infty$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1^n\right\}=1$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}=0$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(-3)^n\right\}=\phi$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^0\right\}=1$$

Ejemplo:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^{-6}\right\}=0$$

15.11 ALGEBRA DE LOS LIMITES DE UNA SUCESION

15.11.1.- Límite de la suma de sucesiones

$$\begin{aligned}\text{Si: } & \lim\{a_n\}=L_a \wedge\\ & \lim\{b_n\}=L_b\\ \Rightarrow\ & \lim\{a_n+b_n\}=L_a+L_b\end{aligned}$$

15.11.2.- **Límite del producto de sucesiones**

$$\text{Si: } \quad \text{Lim } \{a_n\} = L_a \wedge$$
$$\text{Lim } \{b_n\} = L_b$$
$$\Rightarrow \quad \text{Lim } \{a_n b_n\} = L_a L_b$$

15.11.3.- **Límite del cociente de sucesiones**

$$\text{Si: } \quad \text{Lim } \{a_n\} = L_a \wedge$$
$$\text{Lim } \{b_n\} = L_b \,;\, L \neq 0$$
$$\text{Lim } \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{L_a}{L_b}$$

15.11.4.- **Límite de una sucesión constante**

$$\text{Si: } \quad \{a_n\} = \{c, c, c, \ldots\}$$
$$\Rightarrow \quad \text{Lim } \{a_n\} = c$$

15.11.5.- **Límite de la potencia de una sucesión**

$$\text{Si: } \quad \text{Lim } \{a_n\} = L$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left\{a_n^m\right\} = L^m$$

15.11.6.- **Límite del subconjunto de una sucesión**

$$\text{Si: } \quad \text{Lim } \{a_n\} = L \wedge \{b_n\} \subset \{a_n\}$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \{b_n\} = L$$

15.11.7.- **Límite del logaritmo de una sucesión**

$$\text{Si: } \quad \lim_{n \to \infty} \{a_n\} = L \quad ; \quad L \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \{\log a_n\} = \log L$$

15.11.8.-

$$\text{Si: } \quad \lim_{n \to \infty} \{a_n\} = L \wedge$$
$$\lim_{n \to \infty} \{b_n\} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = 0$$

15.11.9.-

$$\text{Si: } \quad \lim_{n \to \infty} \{a_n\} = L \wedge$$
$$\lim_{n \to \infty} \{b_n\} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \infty$$

15.11.10.- Si : $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = L \wedge$

$\lim\limits_{n\to\infty} \{c_n\} = L \wedge$

$\{a_n\} < \{b_n\} < \{c_n\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \{b_n\} = L$

15.11.11.- Si : $\{a_n\} = \{b_n\}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} \{b_n\}$

15.12 LAS SUCESIONES NOTABLES

Son las siguientes:

I) Sucesiones Aritméticas.

II) Sucesiones Geométricas.

III) Sucesiones Armónicas.

IV) Sucesiones Aritméticas de Orden Superior.

V) Sucesiones Hipergeométricas.

15.12.1- Las sucesiones aritméticas o progresiones aritméticas (P.A.).

Definición.- Se denomina sucesión aritmética o progresión aritmética a la sucesión $\{a_n\}$ en lo cual sus elementos se establecen de acuerdo a:

$$a_n = r + a_{n-1} \quad n > 1$$

"un término cualquiera es el anterior incrementado en la razón r".

Teorema # 1.- Es una P.A. un elemento cualquiera es igual al primero más la razón por el número de términos que le precede.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Simbología:

a_1 = Primer elemento ; $a_1 \in IR$

a_n = Elemento de lugar n ; $a_n \in IR$

a_c = Elemento central ; $a_c \in IR$

n = Número de elementos ; $n \in IN$

r = Razón de la progresión ; $r \in IR - \{0\}$

S_n = Suma de n elementos de la P.A. ; $S_n \in IR$

$\{a_n\} = \{a_1 ; a_{1+r} ; a_1+2r ; a_1 + 3r ; ... ; a_1 + (n-1)r\}$

Ejemplo:

Sean: $\{a_n\} = \{9 ; 14 , 19 , 24 , . . . 54 , 59 , ...\}$

$\{a_n\} = \{-10 ; -17 ; -24 ; -31 ; . . . -150 ; ...\}$

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \dots, \frac{101}{4}, \dots\right\}$

Demostración:

(1°) De acuerdo a la definición.

$$\{a_n\} = \{\underset{\substack{\uparrow\\ a_1}}{a_1}\,;\,\underset{\substack{\uparrow\\ a_2}}{r+a_1}\,;\,\underset{\substack{\uparrow\\ a_3}}{r+a_2}\,;\,\underset{\substack{\uparrow\\ a_4}}{r+a_3}\,;\,...\,;\,\underset{\substack{\uparrow\\ a_n}}{r+a_{n-1}}\}$$

(2°) Poniendo todos los términos en función de a_1 y r, tendremos:

$$a_2 = r + a_1$$

$$a_3 = r + a_2 = r + \underbrace{r + a_1} = 2r + a_1$$

$$a_4 = r + a_3 = r + \underbrace{2r + a_1} = 3r + a_1$$

$$\vdots$$

$$a_n = r + a_{n-1} = r + (n-2)r + a_1 = (n-1)r + a_1$$

(3°) Finalmente:

$\therefore \boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$ .... (I).

Corolario:

Si cualquier elemento de la progresión aritmética se da por : $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow$ $\boxed{n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1 \quad ; \text{ n° de elementos}}$ .... (II)

$\Rightarrow$ $\boxed{r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} \quad ; \text{ razón de la P.A.}}$ .... (III)

Ejemplo:

Hallar el enésimo elemento en la sucesión aritmética:
{ 3, 15, 27, ... }

Solución:

(1°) **Calculemos a_n, donde : $a_n = a_1 + (n-1)r$ .... (1).**

para ello:

$a_1 = 3$

$r = 12 ; (15 - 3 = 12 ; 27 - 15 = 12)$

(2°) $a_n = 3 + (n-1)12 \quad \Rightarrow \quad a_n = 3 + 12n - 12$

$\therefore \boxed{a_n = 12n - 9}$

Ejemplo:

En cierta P.A.: { ...., 270 , ..., 640 , ... }

los elementos mostrados están en lugar 10 y 20 respectivamente.

Obtener el 1er término y la razón.

Solución:

(1°) **Según los datos:**

$$a_{10} = 270 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a_{20} = 640 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(2°) De (1): $a_1 + 9r = 270 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

De (2): $a_1 + 19r = 640 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

(3°) **Resolviendo:** Restando (4) - (3) :

$10r = 370$

$\therefore \boxed{r = 37}$

(4°) **De la ecuación** (3) :

$a_1 + 9(37) = 270$

$\therefore \boxed{a_1 = -63}$

(5°) **Finalmente:**

Primer término	:	-63
Razón de la P.A.	:	37

15.12.2- **Teorema # 2.-** En toda P.A., la suma de dos elementos equidistantes es constante e igual a la suma de los extremos.

Demostración:

(1°) Al establecer una P.A.:

$$\{ a_1 , a_2 , \ldots , a_q \ldots\ldots\ \ a_Q \ldots\ a_{n-1} , a_n \} \ldots\ldots\ldots (1)$$

Equidistantes

Equidistantes

Extremos

(2°) **Debemos mostrar que si a_q y a_Q son equidistantes.**

$\Rightarrow$ $\boxed{a_q + a_Q = a_1 + a_n \text{ ;(suma de extremos) = suma de equidistantes}}$

(3°) **Convengamos en la distribución de los equidistantes a_q y a_Q**

$$\{ \underbrace{a_1 , \ldots a_q}_{\text{P.A. de "k" términos}} \ldots\ldots\ldots \underbrace{a_Q \ldots\ldots a_n}_{\text{P.A. de "k" términos}} \}$$

$\Rightarrow$ $a_q = a_1 + (k - 1)r$ y $a_n = a_Q + (k - 1)r$

Si restamos correspondientemente: $a_q - a_n = a_1 - a_Q$

Al ordenar en la igualdad

$\therefore$ $\boxed{a_q + a_Q = a_1 + a_n \text{ ; la suma de un par de equidistantes es igual a la suma de los extremos.}}$ .... L.q.q.d.

Ejemplo:

Sea la sucesión aritmética

$$\{-17\,;\,-7\,;\,3\,;\,13\,;\,23\,;\,33\,;\,43\,;\,53\,;\,63\}$$

La suma de términos equidistantes es constante e igual que la suma de los extremos; en efecto:

$$\{-17\,;\,-7\,;\,3\,;\,13\,;\,23\,;\,33\,;\,43\,;\,53\,;\,63\}$$

46

46

46

46

Comentario:

En la literatura antigua los autores consignan la siguiente notación para la progresión aritmética.

$$\div\ -17\,.\,-7\,.\,3\,.\,13\,.\,23\,.\,33\,.\,43\,.\,53\,.\,63$$

***Observación*:**

El recíproco del Teorema no necesariamente es verdadero.

Ejemplo:

En la sucesión:

$$\{39\,,\,14\,,\,-10\,,\,28\quad,\quad 16\,,\,54\,,\,30\,,\,5\}$$

44

44

44

44

Sus elementos equidistantes suman 44, pero la sucesión no es una P.A.

15.12.3- **Teorema # 3.-** En toda P.A. de **Número Impar de Elementos**, su elemento central es igual a la semisuma de los elementos extremos.

Demostración:

(1°) **Disponiendo una P.A. bajo las condiciones del teorema:** $\{a_1\ \ldots\ldots\ a_c\ \ldots\ldots\ a_n\}$

Debemos mostrar que : $a_c = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

(2°) **Por ser "n" impar es posible hacer la siguiente distribución.**

$$\overbrace{\text{P.A. de } \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ términos}}^{\text{II}}$$

$$\underbrace{\text{P.A. de } \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ términos}}_{\text{I}}$$

$$\{ \underbrace{a_1 \ldots\ldots a_c}\ \overbrace{\ldots\ldots a_n} \}$$

(3°) De (I): $a_c = a_1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) r$ .... (I)

De (II) : $a_n = a_c + \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) r$ .... (II)

Restando (I) - (II) :

$a_c - a_n = a_1 - a_c$; de esta última

$\therefore$ $\boxed{a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}}$; la semisuma de extremos es igual al elemento central .... L.q.q.d.

Ejemplo:

En la sucesión aritmética: { 12, ..., 976 }

Hallar el elemento central.

Solución:

(1°) Calculamos a_c de acuerdo al teorema correspondiente:

$\Rightarrow \quad a_c = \frac{a_1 + a_n}{2} \quad \rightarrow \quad a_c = \frac{12 + 976}{2} = \frac{988}{2}$

$\therefore$ $\boxed{a_c = 499}$

Ejemplo:

En la sucesión aritmética: { .... 943 ..... }

Se muestra el elemento central, que se halla en el lugar 67. ¿De cuántos elementos consta el conjunto?.

Solución:

(1°) **Sea "n" el número de elementos**

$\Rightarrow$ la ubicación del central será dado por ser n impar:

$\frac{n+1}{2}$, lo que podemos asociar como:

(2°) **De relacionar :** $\frac{n+1}{2} = 67 \quad \rightarrow \quad n + 1 = 134$

$\therefore$ $\boxed{n = 133}$

15.12.4- Teorema # 4.- En una P.A. la suma de los "n" primeros elementos S_n, viene dado por:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n$$

Demostración:

(1°) De acuerdo a la simbología:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (I)}$$

(2°) Conmutando esta suma:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots . + a_3 + a_2 + a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (II)}$$

(3°) Sumando y asociando correspondientemente obtendremos "n" parejas:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots . + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_n + a_1)}_{\text{"n" parejas}}$$

(4°) Cada pareja suma: $a_1 + a_n$

$$2Sn = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots . + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{\text{"n" parejas}}$$

$2S_n = (a_1 + a_n)\, n$; aislando S_n :

$$\therefore \quad \boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (IV).}$$

15.12.5- Corolario:

Si la suma de n elementos de una P.A. viene dado por:

$$\boxed{S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (V).}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = a_c\, n \text{ ; n Impar}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (VI).}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = \left(\frac{a_2 + a_{n-1}}{2}\right) n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (VII).}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_n = \left(\begin{array}{c}\text{semisuma de un par cualquiera}\\ \text{de elementos equidistantes.}\end{array}\right) \times n} \ldots . \text{ (VIII).}$$

Ejemplo:

Se da la sucesión aritmética, cuyos elementos son:

{ -3, 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97 }

Verificar mediante las fórmulas IV, V, VI, VII y VIII que la suma es 517.

Solución:

(1°) De la sucesión dada:

Razón de la P.A.	$r = 10$
Número de elementos,	$n = 11$
Primer elemento	$a_1 = -3$
Décimo primer elemento	$a_{11} = 97$
Elemento central	$a_c = a_6 = 47$
Suma de 11 elementos	$S_{11} = ??$

(2°) **Por la fórmula IV:**

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)11$$

$$S_{11} = \left(\frac{-3 + 97}{2}\right)11 \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \left(\frac{94}{2}\right)11 = 47 \times 11$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{11} = 517}$$

(3°) **Por la fórmula V:**

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right]n \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \left[\frac{2a_1 + 10r}{2}\right]11$$

$$S_{11} = \left[\frac{2 \times (-3) + 10 \times (10)}{2}\right]11 \quad \Rightarrow \quad S_{11} = \left(\frac{-6 + 100}{2}\right) \times 11$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{11} = 517}$$

(4°) **Por la fórmula (VI):**

$$S_n = a_c \times n$$

$$S_{11} = a_6 \times 11 \quad \Rightarrow \quad S_{11} = 47 \times 11$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{11} = 517}$$

(5°) **Por la fórmula (VII) :**

$$S_n = \left(\frac{a_2 + a_{n-1}}{2}\right)n \quad \rightarrow \quad S_{11} = \left(\frac{7 + 87}{2}\right) \times 11$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{11} = 517}$$

(6°) **Por la fórmula (VIII):**

$$S_n = \left(\begin{array}{c}\text{semisuma de}\\ \text{equidistantes}\end{array}\right) \times n \quad \rightarrow \quad S_{11} = \left(\begin{array}{c}\text{semisuma de 27 y}\\ \text{67 equidistantes}\end{array}\right) \times 11$$

$$s_{11} = \left(\frac{27 + 67}{2}\right) \times 11 \quad \rightarrow \quad s_{11} = \frac{94}{2} \times 11$$

$$\therefore \quad \boxed{S_{11} = 517}$$

15.12.6- Otras propiedades de la Progresión Aritmética

1.- Si se suman o restan a todos los elementos de una P.A. una misma cantidad, se tendrá otra P.A. cuya razón será la misma.

Ejemplo:

Sea la sucesión aritmética:

{ 5, 13, 21, 29, 37, 45, 53 } ; **razón** = **8**

$\Rightarrow$ Sumando **30 a cada elemento**

{ 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83 } ; **razón** = **8**

$\therefore$ En efecto varía la P.A. manteniendo la razón.

2.- Si se multiplica o se divide los elementos de una P.A. por un mismo factor (0), se obtendrá otra P.A. cuya razón será la original multiplicada o dividida por dicho factor.

Ejemplo:

Sea la sucesión aritmética:

{ 4.5; 7.5; 10.5; 13.5; 16.5 } ; **razón** = **3**

$\Rightarrow$ Multiplicando **por 12 a cada elemento**

{ 54; 90; 126; 162; 198} ; **razón** = **36**

$\therefore$ En efecto varía la P.A., estando la razón afectada por el factor.

3.- **Teorema # 5.-** Si, α, β y γ están relacionados por el promedio :

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$\Rightarrow$ α, β y γ son términos de una sucesión aritmética, donde γ es el central.

Þ La sucesión será : $\{ \alpha, \gamma, \beta \}$ ó $\{ \beta, \gamma, \alpha \}$

Ejemplo:

Sea la igualdad : $11 = \dfrac{-9 + 31}{2}$

$\Rightarrow$ podemos afirmar que las tres pertenecen a una sucesión:

{ -9, 11, 31 } de razón 20 ó { 31, 11, -9 } de razón -20

4.- **Teorema # 6.-** En ciertas sucesiones aritméticas el producto de los "n" términos "P_n" viene expresado por:

$$\boxed{P_n = \frac{\left(\dfrac{a_n}{r}\right)!\, r^n}{\left(\dfrac{a_1}{r} - 1\right)!} \; ; \; \frac{a_1}{r} \text{ y } \frac{a_n}{r} \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo:

Demostrar que si:

$\{ a^2 + ab + b^2 , c^2 + ac + a^2 , b^2 + bc + c^2 \}$; es una sucesión aritmética, también $\{ a, b, c \}$ es una sucesión aritmética.

Demostración:

(1°) De acuerdo al teorema # 5:

$$c^2 + ac + a^2 = \frac{1}{2}\left(\underbrace{a^2 + ab + b^2} + \underbrace{b^2 + bc + c^2} \right)$$

$$\Rightarrow 2c^2 + 2ac + 2a^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + ab + bc$$

$$\Rightarrow a^2 - 2b^2 + c^2 + 2ac - ab - bc = 0$$

$$(a + c)^2 - 2b^2 - b(a + c) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(1)$$

(2°) Aceptemos como valedera la 2ª proposición:

$$\Rightarrow b = \frac{a + c}{2} \; ; \; \boxed{a + c = 2b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(2)$$

De (2) en (1) :

$$\Rightarrow (2b)^2 - 2b^2 - b(2b) = 0 \; ; \; 4b^2 - 4b^2 = 0 \; ; \; O = O$$

$\therefore$ $\boxed{\{ a, b, c \} \text{ es una sucesión aritmética}}$

5.- **Teorema # 7.-** En todo sistema simultáneo de 2 ecuaciones de 1^er grado y 2 incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax + by = c \quad \ldots\ldots\ldots \;(1) \\ dx + ey = f \quad \ldots\ldots\ldots \;(2) \end{cases}$$

Si: $\{ a, b, c, d, e, f \}$ es una sucesión aritmética

$\Rightarrow$ $S = \{ (-1, 2) \}$ **Es el conjunto solución.**

Demostración:

(1°) **Obtengamos "x" por la regla de Kramer:**

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(3).$$

(2°) **Admitiendo la condición de la sucesión:**

$$\{ \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{a} \; ; \; \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{a + r} \; ; \; \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{a + 2r} \; ; \; \underset{\substack{\uparrow \\ d}}{a + 3r} \; ; \; \underset{\substack{\uparrow \\ e}}{a + 4r} \; ; \; \underset{\substack{\uparrow \\ f}}{a + 5r} \}$$

(3°) **Desarrollando (3) :**

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a + 2r & a + r \\ a + 5r & a + 4r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & a + r \\ a + 3r & a + 4r \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(a + 2r)(a + 4r) - (a + 5r)(a + r)}{a(a + 4r) - (a + 3r)(a + r)}$$

$(x = -1)$ luego de simplificar

(4°) En la ecuación (1): $(x = -1)$ 1ª componente

$\Rightarrow\ a(-1) + (a + r)y = a + 2r$

$\Rightarrow\ (a + r) y = 2a + 2r = 2(a + r)$

$\Rightarrow\ (y = 2)$ 2ª componente

$\therefore\ \boxed{S = \{ (-1, 2) \}}$

6.- **Interpolación de Medios Aritméticos**

Medios aritméticos o diferenciales:

Son aquellos elementos comprendidos entre los extremos de una sucesión aritmética.

$$\{ a_1 , \underbrace{a_2 , a_3 , ... a_{n-2} , a_{n-1}}_{\text{MEDIOS ARITMETICOS}} , a_n \}$$

Interpolación de "m" medios aritméticos

Consiste en definir una sucesión aritmética conociendo los extremos y el número de elementos a interpolarse.

La sucesión quedará definida si se conoce la razón de la misma mediante:

$$\boxed{r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}} \quad .... \ (II)$$

(No es necesario tener una fórmula particular de interpolación).

Ejemplo:

Interpolar medios aritméticos para que se tenga la sucesión aritmética de extremos 3 y 73.

Solución:

(1°)

$$\{ 3, \underbrace{.................................}_{\text{9 elementos medios}} 73 \}$$

(2°)

$$\underbrace{\{ 3, ... 73 \}}_{\text{11 elementos}}$$

(3°) Bastará conocer la razón de la P. A . ; $r = \dfrac{73 - 3}{11 - 1} = 7$

(4°) Finalmente:

$$\therefore \boxed{\{ 3, \underbrace{10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66}_{\text{9 medios interpolados}}, 73 \}}$$

15.13 LAS SUCESIONES O PROGRESIONES GEOMETRICAS

Definición.- Se denomina sucesión geométrica o progresión geométrica a la sucesión $\{u_n\}$ en la cual sus elementos se definen mediante:

$$\boxed{u_n = q\, u_{n-1} \quad \forall\ n > 1}$$

"Todo elemento es el resultado de multiplicar la razón por el antecesor".

15.13.1 **Teorema I .-** En una P.G. un elemento cualquiera m_n es igual al primer elemento ($u_1 \neq 0$) multiplicando por la potencia de base igual a la razón ($q \neq 0$, $q \neq 1$) y exponente el número de elementos que le preceden.

$$\boxed{u_n = u_1\, q^{n-1}} \quad \text{..................} \quad (\text{I})$$

Simbología:

u_1 = Primer elemento ; $u \in \mathbb{R} - \{0\}$
u_n = Elemento de lugar n; $m_n \in \mathbb{R}$
u_c = Elemento central; **si n es impar**
n = Número de elementos, $n \in \mathbb{N}$
q = Razón geométrica; $q \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$
S_n = Suma de "n" elementos en P.G.; $S_n \in \mathbb{R}$
S_∞ = Suma de "∞" elementos en P.G.; $S_\infty \in \mathbb{R}$
$\{U_1\}$ = $\{U_1 m_1, q\,U_1, q^2 U_1, q^3 U_1, \ldots\ q^{n-1} U_1 m_1\}$

Observaciones:

(1) **De la definición:**

La razón "q" de la progresión se obtiene del cociente de dividir un elemento entre el que le precede:

$$\boxed{q = \frac{u_n}{u_{n-1}} \ ; \ u_{n-1} \neq 0} \quad \text{............} \quad (\text{II})$$

(2) **Del teorema:**

$u_n = u_1 q^{n-1}$

Posee 4 variables; la que se definirá si se conocen tres de ellos.

(3) **Del teorema:**

Despejando "q", razón de la P.G.

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} \ ; \ u_1 \neq 0} \quad \text{............} \quad (\text{III})$$

(4) **Limitaciones de "q" considerando $u_1 > 0$**

(a) Si $q > 1$, **la P.G. es creciente**

Ejemplo:

$\{3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots\}$, $q = 2$ (razón).

(b) Si $0 < q < 1$ **la P.G. es decreciente**

Ejemplo:

$$\{ 160, 80, 40, 20, 10, 5, ... \} \; ; q = \frac{1}{2} \text{ (razón).}$$

(c) Si $q < 0$ **la P.G. es oscilante**

Ejemplo:

$$\{ 16, -24, 36, -54, 81, ... \} \; ; q = -\frac{3}{2} \text{ (razón)}$$

(d) Si $q = 0$ $\nexists$ P.G. ; "Si la razón es cero no existe progresión geométrica".

Ejemplo:

$$\{ 4, 0, 0, 0, ... \} \; , q = 0$$

(e) Si $q = 1$, $\nexists$ P.G. ; "Si la razón es la unidad no existe progresión geométrica".

Ejemplo:

$$\{ 9, 9, 9, 9, ... \}$$

(f) Si $q = -1$, P.G. ; oscilante.

Ejemplo:

$$\{ 6; -6; 6; -6; 6; .... \}$$

15.13.2 **Teorema II .-** En toda P.G. el producto de dos elementos equidistantes es constante e igual que el producto de sus extremos.

Demostración:

(1°) **Establecemos una P.G. con u_x , u_y equidistantes. Debemos de lograr mostrar que $u_x u_y = u_1 u_n$, para ello:**

$$\{ \underbrace{u_1 \; ...... \; u_x}_{\text{k elementos}} \; ..... \; \underbrace{u_y \; .... \; u_n}_{\text{k elementos}} \}$$

Es decir:

$$\{ \underbrace{u_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; u_x}_{\text{P.G. de k elementos}} \; . \; . \; . \; . \; . \; \underbrace{u_y \; . \; . \; . \; . \; . \; u_n}_{\text{P.G. de k elementos}} \}$$

(2°) **De la 1ª P.G.:** $u_x = u_1 q^{k-1}$ .... (3)

De la 2ª P.G.: $u_n = u_y q^{k-1}$ .... (4)

Dividiendo (3) ÷ (4): $\dfrac{u_x}{u_n} = \dfrac{u_1}{u_y}$

$\therefore$ $\boxed{u_x u_y = u_1 u_n}$ L.q.q.d. .... (IV)

Ejemplo:

En la sucesión:

$$\{ 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 \}$$

El producto de los equidistantes es constante e igual al producto de los extremos, en efecto:

$$\{ 5 \,,\, 10 \,,\, 20 \,,\, 40 \,,\, 80 \,,\, 160 \,,\, 320 \,,\, 640 \}$$

3200

3200

3200

3200

Comentario:

En la literatura antigua los autores consignan la notación de Progresión Geométrica.

$$\div\, 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : 32 : 640$$

15.13.3 **Teorema III.-** En toda P.G. de número de elementos impar, el elemento central es media geométrica entre los elementos extremos.

Demostración:

(1°) Estableciendo una P.G. con las condiciones dadas debemos mostrar que :

$$u_c^2 = u_1\, u_n$$

$$\{ u_1 \,\dots\dots\, u_c \,\dots\dots\, u_n \}$$

Al ser "u_c" central podemos observar lo siguiente :

P.G. de $\frac{n+1}{2}$ elementos

$$\{ \underbrace{u_1 \,\dots\dots\, u_c}\, \overbrace{\dots\dots\, u_n} \}$$

P.G. de $\frac{n+1}{2}$ elementos

(2°) De ambas P.G.:

$$u_c = u_1\, q^{\frac{n+1}{2}-1} \qquad \dots\dots\dots\dots (\text{I})$$

$$u_n = u_c\, q^{\frac{n+1}{2}-1} \qquad \dots\dots\dots\dots (\text{II})$$

(3°) Dividiendo (1) ÷ (2) :

$$\frac{u_c}{u_n} = \frac{u_1}{u_c} \quad \rightarrow \quad u_c^2 = u_1\, u_n$$

$$\therefore \quad \boxed{u_c = \sqrt{u_1\, u_n}} \quad \dots\dots\dots \text{ L.q.q.d.}$$

Ejemplo:

Sea la sucesión: $\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458\}$

En efecto el elemento central $u_c = 54$ verifica que los productos equidistantes son el cuadrado del central:

$$\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458\}$$

54^2

54^2

54^2

15.13.4 **Teorema IV.-** En toda P.G. de **número de elementos finito** el producto de sus elementos es la media geométrica entre las enésimas potencias de los extremos.

$$P_n = \sqrt{u_1^n\, u_n^n}$$

Demostración:

(1°) **Si escribimos el producto de los elementos:**

$$P = u_1 u_2 u_3 \ldots u_{n-2} u_{n-1} u_n \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

Debemos mostrar que : $P^2 = u_1^n u_n^n$

(2°) **Para ello conmutemos los factores:**

$$P = u_n u_{n-1} u_{n-2} \ldots u_3 u_2 u_n \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

Multiplicando (I) y (II)

$$P^2 = (u_1 u_n)(u_2 u_{n-1})(u_3 u_{n-2}) \ldots (u_{n-1} u_3)(u_{n-1} u_2)(u_n\ U_1)$$

(3°) Cada uno de los "n" pares es constante e igual a $U_1 U_n$, por lo que podremos tener :

$$P^2 = (u_1\ u_n)^n$$

$$\therefore\ P = \sqrt{u_1^n u_n^n} \qquad \text{l.q.q.d.} \quad \ldots\ldots \text{(VI)}$$

15.13.5 **Teorema V.-** La suma de los "n" elementos de una P.G. viene expresado por

$$s_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Demostración:

(1°) **De la sucesión:** $\{U_1, U_1 q, U_1 q^2, U_1 q^3 \ldots\ldots, U_1 q^{n-1}\}$

(2°) **La suma S_n será:** $S_n = U_1 + U_1 q + U_1 q^2 + U_1 q3 + \ldots\ldots + U_1 q^{n-1}$

(3°) **Al extraer U_1 :** $S_n = U_1(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1})$ .... (1).

(4°) **El factor en paréntesis es el polinomio geométrico:** $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

(5°) **Al usar dicho equivalente en (1) :** $\therefore \boxed{s_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)}$ l.q.q.d. .... (VII).

15.13.6 Corolarios:

(1) Si la P.G. tiene número infinito de términos ($n \to \infty$) ocurren dos casos:

(I) Si : $n \to \infty$ y $0 < |q| < 1$:

En la fórmula (VII):

$$s_\infty = u_1\left(\frac{q^\infty - 1}{q - 1}\right) \; ; \; q^\infty = 0 \quad \text{pues} \quad 0 < |q| < 1$$

$$s_\infty = u_1\left(\frac{-1}{q - 1}\right)$$; a buena cuenta s_∞ es el límite de la condición.

$$\therefore \boxed{s_\infty = \frac{u_1}{1 - q} \quad \text{Fórmula de la Suma Límite}} \quad .... \text{(VIII)}$$

(II) Si : $n > \infty$ y $q > 1$:

En la fórmula (VII)

$$\Rightarrow \; s_\infty = u_1\left(\frac{q^\infty - 1}{q - 1}\right) \; ; \; q^\infty \to \infty \quad \text{pues} \quad q > 1$$

$$\Rightarrow \; s_\infty = u_1(\infty)$$

$$\therefore \boxed{S_\infty = \infty}$$

(2) En la fórmula (VIII) efectuando el producto:

$$\Rightarrow \; s_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{u_1 q^n - u_1}{q - 1} \; ; \; u_1 q^n = u_{n+1}$$

$$\therefore \boxed{s_n = \frac{u_{n+1} - u_1}{q - 1}} \quad ....\text{(IX)}$$

15.13.7 Otras Propiedades de la P.G.

15.13.7.1 Si a los elementos de una P.G. se multiplican o dividen por un mismo factor ($\neq 0$) los elementos resultantes conforman otra P.G. pero de la misma razón.

Ejemplo:

Sea : $\left\{\frac{1}{16}; \frac{1}{4}; 1; 4; 16; 64\right\}; q = 4$

$\Rightarrow$ Al multiplicar cada elemento por -10.

$\left\{-\frac{5}{8}; -\frac{5}{2}; -10, -40, -160, -640\right\}$; $q = 4$ La razón no se altera.

15.13.7.2 Si a los elementos de una P.G. se potencian o radican; los elementos resultantes conforman otra P.G. cuya razón estará afectada por el algoritmo correspondiente.

Ejemplo:

Sea : $\{256, 128, 64, 32, 16, 8, 4\}$; $q = \frac{1}{2}$

Al elevar al cubo cada elemento de la P.G.

$$\{2^{24} ; 2^{21} ; 2^{18} ; 2^{15} ; 2^{12} ; 2^{9} ; 2^{6}\} \; ; q = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

La razón del último es el cubo del 1°.

15.13.7.3 Las recíprocas de los elementos de una P.G. conforman otra P.G. cuya razón es la recíproca de la anterior.

Ejemplo:

$$\left\{12\,,18\,,27\,;\frac{81}{2},\frac{243}{4},\frac{729}{8}\right\} ; \; q = \frac{3}{2}$$

$$\left\{\frac{1}{12};\frac{1}{18};\frac{1}{27};\frac{2}{81};\frac{4}{243};\frac{8}{729}\right\} ; \; q = \frac{2}{3}$$

15.13.7.4 **Teorema VI.-** Si: "α", "β" y "γ" están relacionados por la media geométrica:

$$\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ α, β y γ son términos de una sucesión geométrica, donde γ es el central:

$$\{\alpha, \gamma, \beta\} \text{ ó } \{\beta, \gamma, \alpha\}$$

Ejemplo:

Sea : $6 = \sqrt{12 \times 3}$

$\Rightarrow$ 12, 3 y 6 están en Progresión geométrica donde 6 es el elemento central.

$\{12, 6, 3\}$ de razón : $\frac{1}{2}$ ó $\{3, 6, 12\}$ de razón: 2

Ejemplo:

Sea $a^{10} = \sqrt{b^3\ c^{-7}}$

$\Rightarrow$ b^3, c^{-7} y a^{10} están en P.G. donde a^{10} es elemento central:

$\{b^3, a^{10}, c^{-7}\}$ ó $\{c^{-7}, a^{10}, b^3\}$

15.13.7.5 Interpolación de Medios Geométricos

Medios geométricos proporcionales.-

Son aquellos elementos comprendidos entre los extremos de una sucesión geométrica.

$$\{ \underbrace{u_1 , \overbrace{u_2 , u_3 , \ldots\ldots u_{n-2}}, u_{n-1}}, u_n \}$$

Medios Geométricos

Interpolación de "m" medios geométricos.-

Consiste en definir una sucesión geométrica conociendo los extremos y el número de elementos a interpolarse.

La sucesión geométrica quedará definida si se conoce la razón de la misma mediante:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

(No es necesario tener fórmula particular de interpolación).

Ejemplo:

Entre $\frac{1}{2}$ y 512 interpolar 9 medios geométricos.

Solución:

(1°) **Interpretando:**

$$\left\{ \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 512 \right\}$$

|← 9 elementos medios →|

$$\left\{ \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 512 \right\}$$

|← 11 elementos en P.G. →|

(2°) **Bastará conocer la razón de la P.G. para definirla:**

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}} \text{ ; Con } n = 11,\ U_n = 512,\ U_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt[11-1]{\frac{512}{\frac{1}{2}}} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 2}$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{2},\ \underbrace{1 ,\ 2 ,\ 4 ,\ 8 ,\ 16 ,\ 32 ,\ 64 ,\ 128}_{\text{9 medios Interpolados entre } \frac{1}{2} \text{ y } 512} ,\ 512 \right\}$$

15.14 LAS SUCESIONES ARMONICAS O PROGRESIONES ARMONICAS (P.H.)

Definición.- Se denomina sucesión armónica o progresión armónica a toda sucesión $\{h_n\}$ en la cual:

$$\{ h_n \} = \{ a_n \} = \left\{ \frac{1}{r + a_{n-1}} \right\} \ \forall\ n > 1$$

Ejemplo:

$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15} \right\}$ es una **sucesión armónica** debido a que las recíprocas de sus elementos están en progresión aritmética : { 3, 5, 7, 9. 11, 13, 15 }

15.14.1 Simbología:

h_1 : Primer elemento; h ∈ IR

h_n : Enésimo elemento; h_n ∈ IR

De acuerdo a la definición dada redundaremos en establecer que:

Una sucesión se denomina armónica si los recíprocos de sus elementos conforman una progresión aritmética.

15.14.2 Propiedades:

1.- Las recíprocas de los elementos de una sucesión armónica están en progresión aritmética, por lo que el tratamiento de sus variables se hace mediante las fórmulas correspondientes.

Ejemplo:

Entre 4 y 24 interpolar 7 medios armónicos.

Solución:

(1°) Interpretando:

$$\{4, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{7 medios armónicos}} 24\}$$

$$\left\{\frac{1}{4}, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{7 medios aritméticos}}, \frac{1}{24}\right\}$$

$$\underbrace{\left\{\frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{24}\right\}}_{\text{9 términos en P.A.}}$$

(2°) Por la fórmula para obtener la razón:

$$\Rightarrow \ r = \frac{\frac{1}{24} - \frac{1}{4}}{9 - 1} = \frac{\frac{1-6}{24}}{8} \ ; \ \boxed{r = \frac{-5}{192}}$$

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{43}{192}, \frac{38}{192}, \frac{33}{192}, \frac{28}{192}, \frac{23}{192}, \frac{18}{192}, \frac{13}{192}, \frac{8}{192}\right\}$$

La progresión armónica que contiene los 7 medios será:

$$\boxed{\left\{4, \underbrace{\frac{192}{43}, \frac{192}{38}, \frac{192}{33}, \frac{192}{28}, \frac{192}{23}, \frac{192}{18}, \frac{192}{13}}_{\text{7 medios armónicos}}, 24\right\}}$$

2.- **Teorema:**

Si α, β y γ están relacionados por:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$\Rightarrow$ α, β y γ son elementos de una sucesión armónica, siendo γ elemento central:

$$\{\alpha, \gamma, \beta\} \quad \text{ó}$$
$$\{\beta, \gamma, \alpha\}$$

3.- La sucesión armónica carece de fórmula para la suma de sus "n" elementos.

15.15 LAS SUCESIONES ARITMETICAS DE ORDEN SUPERIOR (S.O.S.)

Definición.- Se denomina sucesión aritmética de orden superior a toda sucesión $\{a_n\}$ en la cual:

$$a_n = a_1 + {}^1\Delta_1 \binom{n-1}{1} + {}^2\Delta_1 \binom{n-1}{2} + {}^3\Delta_1 \binom{n-1}{3} \ldots \ \forall n > 1$$

1.- **Teorema de Gregory:**

Sea la sucesión: $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \}$

Cuyas diferencias finitas son:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , & a_5 \ldots \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
& {}^1\Delta_1 & & {}^1\Delta_2 & & {}^1\Delta_3 & & {}^1\Delta_4 \ldots & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & {}^2\Delta_1 & & {}^2\Delta_2 & & {}^2\Delta_3 \ldots & & \\
& & & \vee & & \vee & & & \\
& & & {}^3\Delta_1 & & {}^3\Delta_2 \ldots & & &
\end{array}$$

....

$$\boxed{\Rightarrow \quad a_n = a_1 + {}^1\Delta_1 \binom{n-1}{1} + {}^2\Delta_1 \binom{n-1}{2} + {}^3\Delta_1 \binom{n-1}{3} \ldots\ldots}$$

$$\boxed{y \quad S_n = a_1 \binom{n}{1} + {}^1\Delta_1 \binom{n}{2} + {}^2\Delta_1 \binom{n}{3} + {}^3\Delta_1 \binom{n}{4} \ldots\ldots}$$

Simbología:

a_1	=	Primer elemento
a_n	=	Elemento de lugar n
S_n	=	Suma de los n primeros elementos de la S.O.S.
${}^1\Delta_1$	=	Primera diferencia de 1er orden.
${}^2\Delta_1$	=	Primera diferencia de 2° orden.
${}^3\Delta_1$	=	Primera diferencia de 3er orden.
${}^k\Delta_1$	=	Primera diferencia de k° orden.

15.15.1.2 DIFERENCIAS FINITAS

(1°) De una sucesión cualquiera de números

$$\{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots \} \ldots\ldots\ldots (1).$$

(2°) Se deduce otra llamada sucesión de las **diferencias finitas** primeras o de primer orden:

$$\{ {}^1\Delta_1, {}^1\Delta_2, {}^1\Delta_3, {}^1\Delta_4, \ldots\ldots {}^1\Delta_n \ldots\ldots \} \ldots\ldots\ldots (2).$$

(3°) de modo que:

$$\boxed{{}^1\Delta_1 = a_2 - a_1 \,;\, {}^1\Delta_2 = a_3 - a_2 \,;\, {}^1\Delta_3 = a_4 - a_3 \,, \ldots}$$

(4°) aplicando el mismo algoritmo a (2) se logra:

$$\{ {}^2\Delta_1, {}^2\Delta_2, {}^2\Delta_3, {}^2\Delta_4, \ldots\ldots {}^2\Delta_n, \ldots\ldots \} \ldots\ldots (3).$$

El cual es la sucesión de las **diferencias finitas de 2° orden**, de modo que:

$${}^2\Delta_1 = {}^1\Delta_2 - {}^1\Delta_1 \,;\, {}^2\Delta_2 = {}^1\Delta_3 - {}^1\Delta_2 \,;\, {}^2\Delta_3 = {}^1\Delta_4 - {}^1\Delta_3 \,, \ldots$$

Ejemplo:

Verificar que el enésimo término de la sucesión siguiente es n^2 mediante el teorema de Gregory. $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Solución:

(1°) **Obteniendo las diferencias finitas:**

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{1} & , & 4 & , & 9 & , & 16 & , & 25 \;, \ldots \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & \mathbf{3} & & 5 & & 7 & & 9 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & \mathbf{2} & & 2 & & 2 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

(2°) $a_1 = 1 \;,\; {}^1\Delta_1 = 3 \;,\; {}^2\Delta_1 = 2$

Aplicando el Teorema para el enésimo término: ${}^1\Delta_1 = b \;,\; {}^2\Delta_1 = c$

$$\Rightarrow \quad a_n = a_1 + b\binom{n-1}{1} + c\binom{n-1}{2}$$

$$a_n = 1 + 3\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2}$$

(3°) **Efectuando:**

$$a_n = 1 + 3(n-1) + 2\,\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$a_n = 1 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2$$

$$\therefore \quad \boxed{a_n = n^2} \quad \text{l.q.q.v}$$

Ejemplo:

Obtener el cuadro de las diferencias finitas de la sucesión:

$$\{ 1, 3, 19, 61, 141, 271, 463, 729, 1081 \}$$

Solución:

(1°) **Se desea establecer las diferencias finitas en la notación correspondiente:**

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1, & & 3, & & 19, & & 61, & & 141, & & 271, & & 463, & & 729, & & 1081 \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
& {}^1\Delta_1 & & {}^1\Delta_2 & & {}^1\Delta_3 & & {}^1\Delta_4 & & {}^1\Delta_5 & & {}^1\Delta_6 & & {}^1\Delta_7 & & {}^1\Delta_8 & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & {}^2\Delta_1 & & {}^2\Delta_2 & & {}^2\Delta_3 & & {}^2\Delta_4 & & {}^2\Delta_5 & & {}^2\Delta_6 & & {}^2\Delta_7 & & \\
& & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
& & & {}^3\Delta_1 & & {}^3\Delta_2 & & {}^3\Delta_3 & & {}^3\Delta_4 & & {}^3\Delta_5 & & {}^3\Delta_6 & & & \\
& & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & & \\
& & & & {}^4\Delta_1 & & {}^4\Delta_2 & & {}^4\Delta_1 & & {}^4\Delta_3 & & {}^4\Delta_4 & & & &
\end{array}$$

....

(2°) **Numéricamente:**

$$\begin{array}{lc ccccccccccccccccc}
 & & 1, & & 3, & & 19, & & 61, & & 141, & & 271, & & 463, & & 729, & & 1081 \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
\text{Dif. de 1° orden} & \rightarrow & & 2 & & 16 & & 42 & & 80 & & 130 & & 192 & & 266 & & 352 & \\
 & & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
\text{Dif. de 2° orden} & \rightarrow & & & 14 & & 26 & & 38 & & 50 & & 62 & & 74 & & 86 & & \\
 & & & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
\text{Dif. de 3° orden} & \rightarrow & & & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & & \\
 & & & & & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & & & \\
\text{Dif. de 4° orden} & \rightarrow & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Ejemplo:

Verificar que la suma de los n primeros elementos de la sucesión:

$\{ 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 \}$

Viene dado por : $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ mediante el Teorema de Gregory.

Solución:

(1°) **Obteniendo las diferencias finitas**

$$\begin{array}{ccccccccc}
1, & & 4, & & 9, & & 16, & & 25, \; .... \; n^2 \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow a = 1, b = 3, c = 2, d = 0$

(2°) **Aplicando el Teorema para la suma de n términos.**

$$\Rightarrow S_n = a_1\binom{n}{1} + b\binom{n}{2} + c\binom{n}{3} + d\binom{n}{4} + ... \qquad \Rightarrow \qquad S_n = 1\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}$$

$$S_n = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n\left(\frac{6 + 9n - 9 + 2n^2 - 6n + 4}{6}\right)$$

$$\therefore \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \qquad \text{l.q.q.v}$$

Ejemplo:

Hallar la suma de los n primeros elementos de la sucesion.

$\{\,1(1)\,;\,2(3)\,;\,3(5)\,;\,4(7)\,;\,\ldots\,\}$

Solución:

(1°) Obteniendo las diferencias finitas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & , & 6 & , & 15 & , & 28 & , & 45 & & 66 \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & 5 & & 9 & & 13 & & 17 & & 21 & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow a_1 = 1\ ,\ b = 5\ ,\ c = 4$

(2°) Aplicando el Teorema para la suma de n términos.

$$\Rightarrow\ S_n = a_1\binom{n}{1} + b\binom{n}{2} + c\binom{n}{3}$$

$$S_n = 1\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3}$$

$$S_n = n + \frac{5}{2}n(n-1) + \frac{4}{6}n(n-1)(n-2)$$

$$= n\left(\frac{6 + 15(n-1) + 4(n-1)(n-2)}{6}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$$

15.16 LAS SUCESIONES O PROGRESIONES HIPERGEOMETRICAS

Definición.- Se denomina sucesión o progresión hipergeométrica a toda sucesión $\{a_n\}$ en la cual:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

15.16.1 **Teorema.-** Sea $\{a_n\}$ una sucesión hipergeométrica la suma de los "n" primeros elementos viene dado por:

$$S_n = \frac{a_n(n\alpha + \beta) - a_1\gamma}{\alpha + \beta - \gamma},\quad \alpha + \beta - \gamma \neq 0$$

Ejemplo:

Verificar si la sucesión:

$\{\,1 \times 2\,,\,2 \times 3\,,\,3 \times 4\,,\,4 \times 5\,,\,\ldots,\,n(n+1)\,\}$; es hipergeométrica.

Solución:

(1°) De la sucesión:

$a_n = n(n+1)$ .... (I).

$a_{n+1} = (n+1)(n+2)$ .... (II).

(2°) De (I) ÷ (II):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}}$$ .... (III).

(3°) **Por representar una relación lineal exigida por la definición:**

$\{1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \ldots n(n+1)\}$ es hipergeométrica

(4°) **Observe además que la misma es una P.A. de orden superior.**

(5°) Cálculo de la suma; para ello identifiquemos : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1)n+(2)}{(1)n+0}$

$\Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 0$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)\left[n(1)+2\right]-(1\times 2)(0)}{1+2-0}$$

$$\therefore \boxed{S_n = n(n+1)(n+2)}$$

15.17 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

CAPITULO : SUCESIONES

15.17.1 **Ejemplo Explicativo:**

Calcular la suma de los n primeros elementos de la sucesión.

$\{1 \times 3 \times 5 ; 3 \times 5 \times 7 ; 5 \times 7 \times 9 ; 7 \times 9 \times 11 ; \ldots\}$

Solución:

(1°) **De los elementos de la sucesión podemos deducir:**

$a_n = (2n-1)(2n+1)(2n+3)$ .... (1).

y $a_{n+1} = (2n+1)(2n+3)(2n+5)$ .... (2).

(2°) Hallemos la razón $\frac{a_n + 1}{a_n}$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+5}{2n-1} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}$$ .... (3).

(3°) De la razón dada por (3) se identifica que:

$\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = -1$

(4°) Aplicando la fórmula de la suma: $S_n = \dfrac{a_n(n\alpha + \beta) - a_1\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\overbrace{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}^{a_n}(\overset{\substack{\alpha\\ \downarrow}}{2n} + \overset{\substack{\beta\\ \downarrow}}{5}) - \overset{\substack{a_1\\ \downarrow}}{15}(\overset{\substack{\gamma\\ \downarrow}}{-1})}{\alpha \leftarrow 2 + \underset{\substack{\downarrow\\ \beta}}{5} - (\underset{\substack{\downarrow\\ \gamma}}{-1})}$$

$$\therefore \quad \boxed{S_n = \frac{1}{8}[(4n^2 - 1)(2n+3)(2n+5) + 15]}$$

15.17.2 **Ejercicio Explicativo:**

Calcula la suma:

$$E = \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{2\times3\times4} + \frac{1}{3\times4\times5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Solución:

(1°) Es hipergeométrica pues:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}} = \frac{n}{n+3} \quad ; \ \exists \text{ Relación lineal.}$$

asimismo: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 3$

(2°) Aplicando la fórmula para la suma:

$$S_n = \frac{a_n(\alpha n + \beta) - a_1\gamma}{\alpha + \beta - \gamma} \text{ ; reemplazando datos: } \alpha + \beta - \gamma$$

$$S_n = \frac{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}(n) - \dfrac{1}{1\times2\times3}(3)}{-2}$$

(3°) Efectuando en S_n

$$S_n = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{1}{2}}{-2} \qquad \therefore \quad \boxed{S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}}$$

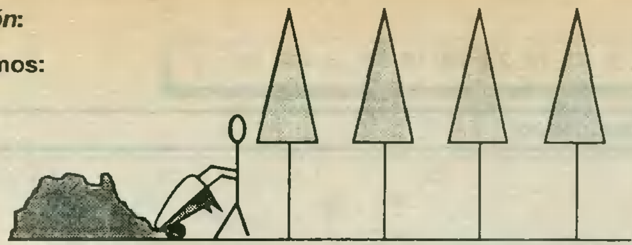
15.17.3 **Ejercicio Explicativo:**

Una persona debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 21 árboles que están al lado de una calzada.

Los árboles están a 4 m de distancia y la cantera de arena está a 10 m antes del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla a la cantera?

Solución:

(1°) Ilustremos:



(2°) Recorrido 1A : 10 + 10 = 20

Recorrido 2A : 14 + 14 = 28

Recorrido 3A : 18 + 18 = 36

....

(3°) Se tiene una P.A. $a_1 = 20$, $r = 8$

$\sum$ recorridos: $S_{21} = \dfrac{21}{2}(2a_1 + 20r)$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(40 + 160)$$

$\therefore$ $\boxed{S_{21} = 2100}$

15.17.4 **Ejercicio Explicativo:**

Escribir la sucesión cuya ley de recurrencia viene dado por :

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 5 \ ; \text{ si } 2 \le n \le 5 \\ -a_n + 2a_{n-1} \ ; \text{ si } 6 \le n \le 10 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Desarrollando la Ley de Recurrencia tendremos:**

$a_1 = 3$ (Primer elemento)

(2°) $\boxed{2 \le n \le 5 \ : \ a_{n+1} = a_n + 5}$

$n = 1 : a_2 = a_1 + 5 = 3 + 5 = 8$
$n = 2 : a_3 = a_2 + 5 = 8 + 5 = 13$
$n = 3 : a_4 = a_3 + 5 = 13 + 5 = 18$
$n = 4 : a_5 = a_4 + 5 = 18 + 5 = 23$
$n = 5 : a_6 = a_5 + 5 = 23 + 5 = 28$

(3°) $\boxed{6 \le n \le 10 \ : \ a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}}$

$n = 6 : a_7 = -a_6 + 2a_5 = -28 + 2(23) = 18$
$n = 7 : a_8 = -a_7 + 2a_6 = -18 + 2(28) = 38$
$n = 8 : a_9 = -a_8 + 2a_7 = -38 + 2(18) = -2$
$n = 9 : a_{10} = -a_9 + 2a_8 = -(-2) + 2(38) = 78$
$n = 10 : a_{11} = -a_{10} + 2a_9 = -78 + 2(-2) = -82$

(5°) Finalmente:

$$\{ a_n \} = \{ 3, 8, 13, 18, 23, 28, 18, 38, -2, 78, -82, ...\}$$

15.17.5 **Ejercicio Explicativo:**

Si:

$F_1 = 3$

$F_2 = 2$

$F_{n+1} = F_n^2 - 5 \;,\; F_n > 0$

Obtener la sucesión

Solución:

(1°) De acuerdo a la fórmula de recurrencia

$F_{n+1} = F_n^2$

(2°) Se obtendrá:

$\Rightarrow n = 1 \,,\, F_2 = F_1^2 - 5 \qquad F_2 = 3^2 - 5 = 4$

$\Rightarrow n = 2 \,,\, F_3 = F_2^2 - 5 \qquad ; F_3 = 4^2 - 5 = 11$

$\Rightarrow n = 3 \,;\, F_4 = F_3^2 - 5 \qquad ; F_4 = 11^2 - 5 = 116$

$\Rightarrow n = 4 \,;\, F_5 = F_4^2 - 5 \qquad ; F_5 = 116^2 - 5 = 13451$

....

$\therefore \quad \{ F_n \} = 3 \,;\, 4 \,;\, 11 \,;\, 116 \,;\, 13451 \,;\, ...$

15.17.6 **Ejercicio Explicativo:**

Sea $\{a_m\}$ la sucesión definida por la recurrencia:

$a_1 = 33$ y $a_{m+1} = 2a_m + 1$

Hallar la regla de correspondencia para que a_m sea independiente de los demás términos.

Solución:

(1°) Por la regla de recurrencia:

$$a_{m+1} = 2a_m + 1 \qquad \text{.................................. (1)}$$

$$\Rightarrow a_{m+1} = 2 (2a_{m-1} + 1) + 1 = 2^2a_{m-1} + 2 + 1$$

$$\Rightarrow a_{m+1} = 2^2(2a_{m-2} + 1) + 2 + 1 = 2^3a_{m-2} + 2^2 + 2 + 1$$

$$\Rightarrow a_{m+1} = 2^3(2a_{m-3} + 1) + 2^2 + 2 + 1 = 2^4a_{m-3} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

....

$$\Rightarrow a_{m+1} = 2^{m-1}a_{m-(m-1)} + \underbrace{2^{m-2} + 2^{m-3} + 2^{m-4} + ... + 2 + 1}_{\text{SERIE GEOMETRICA}}$$

(2°) De acuerdo con: $a_1 = 33$

$$a_{m+1} = 2^{m-1}(3) + \underbrace{2^{m-1} - 1}$$

$$a_{m+1} = 4(2^{m-1}) - 1 = 2^{m+1} - 1 \qquad \text{.................................. (2)}$$

$\Rightarrow$ De (2) en (1):

$\Rightarrow \quad 2^{m+1} - 1 = 2a_m + 1$

(3°) Despejando a_m:

$\Rightarrow \quad 2^{m+1} - 2 = 2a_m$

$\therefore \quad \boxed{a_m = 2^m - 1 \;,\; \forall\, m \in \mathbb{N}}$

15.17.7 **Ejercicio Explicativo:**

Describir la sucesión para el cual se verifica:

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = -5$$
$$a_{m+2} = 2a_{m+1} - 3a_m$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla de recurrencia:

$a_{m+2} = 2a_{m+1} - 3a_m$

(2°) Se tendrá:

$\Rightarrow m = 1 \;;\; a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2(-5) - 3(4) = -22 \;;\quad a_3 = -22$

$\Rightarrow m = 2 \;;\; a_4 = 2a_3 - 3a_2 = 2(-22) - 3(-5) = -29 \;;\quad a_4 = -29$

$\Rightarrow m = 3 \;;\; a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2(-29) - 3(-22) = 8 \;;\quad a_5 = 8$

$\Rightarrow m = 4 \;;\; a_6 = 2a_5 - 3a_4 = 2(8) - 3(-29) = 103 \;;\quad a_6 = 103$

$\Rightarrow m = 5 \;;\; a_7 = 2a_6 - 3a_5 = 2(103) - 3(8) = 182 \;;\quad a_7 = 182$

(3°) Finalmente

$\therefore \quad \boxed{\{a_m\} = \{-22 \;;\; -29 \;;\; 8 \;;\; 103 \;;\; 182 \;;\; \ldots\}}$

15.17.8 **Ejercicio Explicativo:**

Sea $\{P_n\}$ la sucesión definida por la recurrencia:

$P_1 = 1$ y $P_{n+1} = 10\,P_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Hallar una fórmula explícita para P_n que sea independiente de los demás términos.

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla de recurrencia:

$P_{n+1} = 10\,P_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$

$\Rightarrow P_{n+1} = 10(10P_{n-1})$

$P_{n+1} = 10(10(10P_{n-2}))$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2°) Se logra tener en términos de P_1:

$$P_{n+1} = \underbrace{10(10(10 \ldots 10(}_{\text{"n" veces}}P_1)\ldots)))$$

$P_{n+1} = 10^n P_1 \;;\; P_1 = 1$

$P_{n+1} = 10^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II})$

(3°) Sustituyendo (II) en (I):
De (2) en (1):

$$10^n = 10\,P_n$$

$$\therefore \boxed{P_n = 10^{n-1}}$$

15.17.9 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$(x + 3) + (x + 7) + (x + 11) \ldots + (x + 79) = 840$$

Recuerde:

La suma de términos en progresión aritmética S_n viene dado por:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} \quad \text{y} \quad \boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

Solución:

(1°) El primer miembro esta constituido por una P. Aritmética

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[(x + 3) + (x + 79)] = 840 \qquad \ldots\ldots\ldots (1).$$

(2°) El número de términos "n" viene dado por:

$$\Rightarrow \quad n = \frac{x + 79 - x - 3}{4} + 1 = 20 \qquad \ldots\ldots\ldots (2).$$

De (II) en (I):

$$\Rightarrow \frac{20}{2}[2x + 82] = 840$$

(3°) Resolviendo la ecuación:

$$10(2x + 82) = 840$$
$$2x + 82 = 84$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

$$\therefore \boxed{S = \{1\}}$$

15.17.10 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$1 + 7 + 13 + \ldots\ldots + x = 280$$

***Recuerde*:**

El n° de términos de una P.A. viene expresado como:

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$; la suma de "n" términos viene expresado como:

$$\boxed{S_n = n\left(\frac{a_n + a_1}{2}\right)}$$

***Solución*:**

(1°) El primer miembro es una P. aritmética; procediendo a sumar:

$$n \cdot \left(\frac{1 + x}{2}\right) = 280 \qquad \text{.. (I)}.$$

(2°) En (1), n es el número de términos de la P.A. ; luego:

$$n = \frac{x - 1}{6} + 1 \qquad \text{.. (II)}.$$

(3°) De (II) en (I):

$$\Rightarrow \left(\frac{x - 1}{6} + 1\right)\left(\frac{1 + x}{2}\right) = 280$$

(4°) Resolviendo esta ecuación:

$$\Rightarrow \left(\frac{x + 5}{6}\right)\left(\frac{x + 1}{2}\right) = 280$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x - 3355 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -55 \\ & \times & \\ x & & +61 \end{array}$$

(5°) Unico Valor Admisible:

$$x = 55$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{55\}}$$

15.17.11 **Ejercicio Explicativo:**

Si S_k es la suma de "k" términos en P. aritmética, calcular:

$$V = \frac{S_{3n}}{S_{2n} - S_n} \; ; n \in \mathbb{N}$$

***Solución*:**

(1°) Por ser una P.A. , se tendría que S_n, S_{2n}, S_{3n}

$$\Rightarrow \quad S_{3n} = \frac{3n}{2}\left[\,2a_1 + (3n - 1)r\,\right] \qquad \text{.................................... (I)}.$$

$$\Rightarrow \quad S_{2n} = \frac{2n}{2}\left[\,2a_1 + (2n-1)r\,\right] \quad \text{.......................} \ (\,II\,).$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2}\left[\,2a_1 + (n-1)r\,\right] \quad \text{.......................} \ (\,III\,).$$

(2°) **De (I) y (II) - (III) sobre "V" :**

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\frac{3n}{2}\left[2a_1 + (3n-1)r\right]}{2a_1n + \left(2n^2 - n\right)r - a_1n - \left(\frac{n^2 - n}{2}\right)r}$$

(3°) **Efectuando:**

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\frac{3n}{2}\left[2a_1 + (3n-1)r\right]}{\dfrac{2a_1n + \left(3n^2 - n\right)r}{2}} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\frac{3n}{2}\left[2a_1 + (3n-1)r\right]}{\frac{n}{2}\left[2a_1 + (3n-1)r\right]}$$

(4°) **Finalmente:**

$$\therefore \quad \boxed{V = 3}$$

15.17.12 **Ejercicio Explicativo:**

Los términos de lugares "p", "q" y "r" de una P.A. son "a", "b" y "c" correspondientemente; calcular:

$$E = (q-r)a + (r-p)b + (p-q)c$$

Solución:

(1°) **Según los datos:**

$a_p = a$ .... (1).

$a_q = b$ .... (2).

$a_r = c$ .... (3).

(2°) **De (1) :** $a_1 + (p-1)d = a$ .... (4).

De (2) : $a_1 + (q-1)d = b$ .... (5).

De (3) : $a_1 + (r-1)d = c$ .... (6).

(3°) **Eliminando a_1:**

De (4) - (5): $(p-q)d = a - b$ .... (7).

De (6) - (4): $(r-p)d = c - a$ .... (8).

De (5) - (6): $(q-r)d = b - c$ .... (9).

(4°) **De (7), (8) y (9) sobre "E":**

$$E = \left(\frac{b-c}{d}\right)a + \left(\frac{c-a}{d}\right)b + \left(\frac{a-b}{d}\right)c$$

(5°) **Efectuando las sentencias:**

$$E = \frac{ab - ac}{d} + \frac{bc - ab}{d} + \frac{ac - bc}{d}$$

$$E = \frac{\cancel{ab} - \cancel{ac} + \cancel{bc} - \cancel{ab} + \cancel{ac} - \cancel{bc}}{d} = \frac{0}{d}$$

$\therefore \boxed{E = 0}$

15.17.13 **Ejercicio Explicativo:**

x+y ; 4x - 3y ; 5y + 3x ; son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, la relación entre "x" e "y" será:

***Solución*:**

(1°) **De acuerdo al enunciado y según propiedad de las P.A.**

$$4x - 3y = \frac{1}{2}\ [\, x + y + 5y + 3x \,]$$

(2°) **Transformando:**

$$4x - 3y = \frac{1}{2}\ [\, 4x + 6y \,] \quad \rightarrow \quad 4x - 3y = 2x + 3y$$

$$2x = 6y \quad \rightarrow \quad x = 3y$$

$\therefore \boxed{\frac{x}{y} = 3}$

15.17.14 **Ejercicio Explicativo:**

Si la suma de los "n" primeros términos de una P.A. es $3n + 10n^2$; determinar el vigésimo primer término de dicha progresión.

***Solución*:**

(1°) Dato: $S_n = 3n + 10n^2$ .... (I).

$a_{21} = ?$ .... (II)

De (I) : $S_n = 3n + 10n^2 = \frac{n}{2}\ [\, 2a_1 + (\, n - 1 \,)r \,]$

$\Rightarrow 6n + 20n^2 = n^2r + n(2a_1 - r)$

(2°) **Esta última es una identidad en n, $n \in \mathbb{N}$**

$\Rightarrow r = 20 \,;\, 6 = 2a_1 - r$

$\Rightarrow r = 20 \,;\, a_1 = 13$

De (II) : $a_{21} = a_1 + 20r$

$a_{21} = 13 + 20(20)$

$\therefore \boxed{a_{21} = 413}$

15.17.15 **Ejercicio Explicativo:**

En las progresiones geométricas:

∷ 2 : 20 : 200 : ....

∷ $2 : 2\sqrt[5]{10} : 2\sqrt[5]{100}$: ....

Se toman 121 términos en cada uno de ellos. ¿Cuántos términos son iguales?

Solución:

(1°) Consideremos que U_m y U_n **son los términos generales de cada progresión:**

$$\Rightarrow \begin{cases} U_m = 2(10)^{m-1} & \text{.............................. (I).} \\ U_n = 2(10^{\frac{1}{5}})^{n-1} & \text{.............................. (II).} \\ 1 \le n \le 121 & \text{.............................. (III)} \\ U_m = U_n & \text{.............................. (IV).} \end{cases}$$

(2°) **Reemplazando (I) y (II) en (III):**

$$2(10)^{m-1} = 2(10^{\frac{1}{5}})^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 10^{m-1} = 10^{\frac{n-1}{5}}$$

(3°) **Resolviendo la ecuación diofántica resultante:**

$$m - 1 = \frac{n-1}{5} \quad \Rightarrow \quad 5m - 5 = n - 1 \; ; \; n = 5m - 4$$

(4°) **Asumiendo que:**

$$\left.\begin{array}{l} m = k \\ \Rightarrow \quad n = 5k - 4 \end{array}\right\} \text{.......... (V).}$$

De (V) en (III):

$$1 \le 5k - 4 \le 121 \quad \Rightarrow \quad 5 \le 5k \le 125 \quad \rightarrow \quad 1 \le k \le 25$$

(5°) **Esta última igualdad indica que K puede tomar 25 valores que hacen:** $U_m = U_n$

$\therefore$ $\boxed{\text{Existen 25 términos repetidos.}}$

15.17.16 **Ejercicio Explicativo:**

Se da una P.G. de 1000 términos. El primer término es 4 y el último es el número cuyo logaritmo decimal es 999 + log4. La suma de los 100 primeros términos de esta progresión será:

Solución:

(1°) **Por ser una P.G. y según los datos:**

$u_1 = 4$ .... (I).

$u_{1000} = 4 \times q^{999}$ .... (II).

$\log u_{1000} = 999 + \log 4$ .... (III).

$S_{100} = ??$ .... (IV).

(2°) De (II) y (III):

$$\log\left(4 \cdot q^{999}\right) = 999 + \log 4$$

(3°) Resolviendo en "q"

$$\log 4 + 999 \log q = 999 + \log 4$$
$$999 \log q = 999$$
$$\log q = 1 \quad \therefore \quad q = 10$$

(4°) De (IV) obtenemos S_{100}. **Luego de sustituir los datos requeridos :**

$$S_{100} = U_1\left(\frac{q^{100}-1}{q-1}\right) \; ; \; q = 10 \, , \; U_1 = \Delta$$

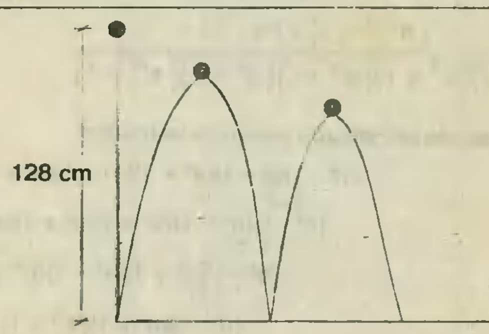
$$\therefore \boxed{S_{100} = \frac{4}{9}\left(10^{100} - 1\right)}$$

15.17.17 **Ejercicio Explicativo:**

Una pelota de hule cae desde una altura de 128 cm y rebota los 15/16 de la altura desde el cual cae. Si los rebotes continuan en esta forma, ¿cuál será la distancia recorrida hasta quedar en reposo?

Solución:

(1°) Grafiquemos:



(2°) **Se suelta los 128 cm.**

(3°) **El primer rebote será de** $\frac{15}{16} \times 128 = 120$ cm , **a este 1er. rebote le corresponde la caida de 120 cm.**

(4°) **El segundo rebote será de** $120 \times \frac{15}{16} = 112{,}50$ cm **a este 2do. rebote le corresponde la caida de 112,50 cm. Los rebotes constituyen una progresión geométrica de razón** $\frac{15}{16}$.

(5°) **Si d es la distancia de los recorridos**:

$$\Rightarrow \quad d = 128 + 2\,(\underbrace{120 + 112.50 + \ldots}_{S_\infty}) = 128 + 2\left(\frac{120}{1 - \frac{15}{16}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d = 128 + 2 \times 120 \times 16 \Rightarrow d = 128 + 3840$$

$$\therefore \boxed{d = 3968 \text{ cm}}$$

15.17.18 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\frac{1+a+a^2+a^3+\ldots\ldots+a^x}{(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})}=1$$

Recuerde:

La serie geométrica:

$$1+y+y^2+y^3+\ldots+y^{n-1}=\frac{y^n-1}{y-1},\ y\neq 1$$

Solución:

(1°) **Simplificando por partes:**

$$\Rightarrow\ 1+a+a^2+a^3+\ldots+a^x=\frac{a^{x+1}-1}{a-1}$$

Por ser una serie o progresión geométrica . Luego:

$$\frac{\left(a^{x+1}-1\right)+(a-1)}{(a+1)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)\left(a^8+1\right)\left(a^{16}+1\right)}$$

(2°) **Efectuando lo indicado en el denominador:**

$$(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$$

$$(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$$

$$(a^4-1)(a^4+1)(a^8+1)(a^{16}+1)$$

$$(a^8-1)(a^8+1)(a^{16}+1)$$

$$(a^{16}-1)(a^{16}+1)$$

$$\rightarrow\ a^{32}-1$$

(3°) **La ecuación equivalente será:**

$$\Rightarrow\ \frac{a^{x+1}-1}{a^{32}-1}=1\quad\Rightarrow\quad a^{x+1}-1=a^{32}-1$$

$$\Rightarrow\ a^{x+1}=a^{32}\quad\Rightarrow\quad x+1=32\quad\Rightarrow\quad x=31$$

$$\therefore\quad \boxed{S=\{31\}}$$

15.17.19 **Ejercicio Explicativo:**

Demostrar la igualdad siguiente:

$$\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{ak+b}{c^{mk+n}}\right)=\frac{(a+b)c^m-b}{c^n\left(c^m-1\right)^2}$$

Observe:

En la expresión consignada:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{ak+b}{o^{mk+n}}\right)$$

Es una P.A.

Es una P.G.

***Solución*:**

(1°) Desarrollando la sumatoria

$$\frac{a+b}{c^{m+n}}+\frac{2a+b}{c^{2m+n}}+\frac{3a+b}{c^{3m+n}}+\frac{4a+b}{c^{4m+n}}+\dots\dots\dots\infty$$

(2°) Ordenando:

$$\frac{b+a}{c^{m+n}}+\frac{b+a+a}{c^{2m+n}}+\frac{b+a+a+a}{c^{3m+n}}+\frac{b+a+a+a+a}{c^{4m+n}}+\dots\dots\dots\infty$$

(3°) Asociando obtenemos progresiones geométricas decrecientes ilimitadas:

$$\Rightarrow\left(\frac{b}{c^{m+n}}+\frac{b}{c^{2m+n}}+\frac{b}{c^{3m+n}}+\frac{b}{c^{4m+n}}+\dots\dots\dots\infty\right)=\frac{b}{c^{m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{c^{m+n}}+\frac{a}{c^{2m+n}}+\frac{a}{c^{3m+n}}+\frac{a}{c^{4m+n}}+\dots\dots\dots\infty\right)=\frac{a}{c^{m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{c^{2m+n}}+\frac{a}{c^{3m+n}}+\frac{a}{c^{4m+n}}+\frac{a}{c^{5m+n}}+\dots\dots\dots\infty\right)=\frac{a}{c^{2m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)$$

....

(4°) A partir del 2° término obtenemos una nueva P. Geométrica

$$\Rightarrow\frac{b}{c^{m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)+\underbrace{\frac{a}{c^{m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)+\frac{a}{c^{2m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)+\frac{a}{c^{3m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)+\frac{a}{c^{4m+n}}\left(\frac{c^m}{c^m-1}\right)\dots\infty}_{S_\infty}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{c^n}\left(\frac{1}{c^m-1}\right)+\frac{a}{c^{m+n}}\times\frac{c^m}{(c^m-1)}\left[\frac{c^m}{c^m-1}\right]=\frac{b}{c^n}\times\frac{1}{(c^m-1)}+\frac{ac^m}{c^n(c^m-1)^2}=\frac{b(c^m-1)+ac^m}{c^n(c^m-1)^2}$$

$$\therefore\ \boxed{\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{ak+b}{c^{mk+n}}\right)=\frac{(a+b)c^m-b}{c^n(c^m-1)^2}}$$

15.17.20 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular "z" si la P.G. tiene términos positivos.

∷ (x - 3) : x : (x + 12) .... (1).

∷ $y:\sqrt{x}:y+3$ .... (2).

∷ 2y : 2x : z .... (3).

Comentario:

Sea P.G. : $\frac{00}{00}$ $t_1 : t_2 : t_3 :$

$\Rightarrow \; x = \sqrt{t_1 \cdot t_3}$

Solución:

(1°) De la 1^{era} P.G.

$\Rightarrow \; x = \sqrt{(x-3)(x+12)}$

Elevando al cuadrado y efectuando:

$x^2 = x^2 + 9x - 36 \quad \rightarrow \quad 36 = 9x \quad \rightarrow \quad x = 4$

(2°) De la 2^{da} P.G.:

$\Rightarrow \; \sqrt{x} = \sqrt{y(y+3)}$

(3°) Elevando al cuadrado y sustituyendo x:

$4 = y^2 + 3y \quad \Rightarrow \quad y^2 + 3y - 4 = 0$

$(y+4)(y-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \;,\; y = -4 \;,\; y > 0$

(4°) De la 3^{ra} P.G.:

$2x = \sqrt{(2y)z}$

(5°) Elevando al cuadrado y sustituyendo valores:

$64 = 2(1)z \quad \rightarrow \quad 32 = z$

$\therefore \; \boxed{z = 32}$

15.17.21 **Ejercicio Explicativo:**

Sea la P.G.:

$a : b : c : d$, "y" además $a - d = 19$

Calcular:

$$E = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$$

Solución:

(1°) Por términos equidistantes, se tiene:

$\Rightarrow a \,.\, d = b \,.\, c$ .... (α).

(2°) Por media geométrica, se tendrá:

$b^2 = a \,.\, c$ .... (β).

$c^2 = b \,.\, d$ .... (γ).

(3°) Desarrollando la expresión propuesta:

$E = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + c^2 - 2bc + b^2 - 2bd + d^2$

(4°) **Sustituyendo (α), (β) y (γ) sobre "E":**

$$E = a^2 - 2b^2 + c^2 + b^2 + c^2 - 3ad + b^2 - 2c^2 + d^2$$

(5°) **Reduciendo términos semejantes:**

$$E = a^2 - 2ad + d^2 = (a - d)^2 = 19^2 = 361$$

$$\boxed{E = 361}$$

15.17.22 **Ejercicio Explicativo:**

Tres números reales distintos de cero forman una P.A. y los cuadrados de éstos números tomados en la misma sucesión conforman una progresión geométrica.

Hallar la razón de esta última progresión.

Solución:

(1°) **Por las condiciones dadas:**

$A = \{ x - r , x , x + r \}$ Es una P.A.

$\Rightarrow B = \{ (x - r)^2 , x^2 , (x + r)^2 \}$ Es una P.G.

(2°) **De la condición "B":**

$[x^2]^2 = (x - r)^2 (x + r)^2$ .... (1).

(3°) **Resolviendo en R la ecuación obtenida:**

$$x^4 - (x^2 - r^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + x^2 - r^2)(x^2 - x^2 + r^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{r^2}{2} \; ; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}r \; ; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}r$$

(4°) **La Progresión Geométrica será:**

$$\Rightarrow B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - r \right)^2 ; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r \right)^2 ; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r + r \right)^2 \right\}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \frac{r^2}{2}\left(3 - \sqrt{2} \right), \frac{1}{2}r^2 ; \frac{r^2}{2}\left(3 - \sqrt{2} \right) \right\}$$

$$\therefore \boxed{\text{razón} : \left(3 + \sqrt{2} \right) \text{ ó } \left(3 - \sqrt{2} \right)}$$

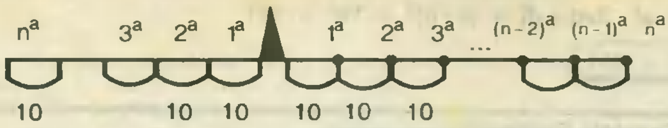
15.17.23 **Ejercicio Explicativo:**

A lo largo de un camino se encontraba un número impar de piedras, distantes 10 m una de la otra. Había que recoger estas piedras en el lugar donde se encontraba la piedra media. El encargado de hacer dicho trabajo puede llevar una sola piedra; las trasladaba sucesivamente empezando por uno de los extremos. Al recoger todas las piedras, el hombre caminó 3000 mt.

¿Cuántas piedras había en el camino?.

Solución:

(1°) Realizando un esquema del evento en meción donde el número de piedras es: $2n + 1$ el cual será distribuido en el modo siguiente:



(2°) La secuencia de los recorridos será:

lateral derecho	lateral izquierdo	(I) Sumando
2(n)10	(n)10	40n - 10n
2(n - 1)10	2(n - 1)10	40(n - 1)
2(n - 2)10	2(n - 2)10	40(n - 2)
2(n - 3)10	2(n - 3)10	40(n - 3)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
2(2)10	2(2)10	40(2)
2(1)10	2(1)10	40(1)

(3°) Sumando en la columna (I) :

$$\Rightarrow \ -10n + [40n + 40(n-1) + 40(n-2) \ldots + 40(1)] = 3000$$

$$\Rightarrow \ -10n + 40[n + (n-1) + (n-2) \ldots + 2 + 1] = 3000$$

$$\Rightarrow \ \frac{40n(n+1)}{2} - 10n = 3000 \ ; \ n(2n+1) = 300$$

$$\Rightarrow \ n = 12 \quad \therefore \quad \boxed{2n + 1 = 25 \text{ piedras.}}$$

15.17.24 **Ejercicios Explicativos:**

Sean las ecuaciones:

$$x^2 - 3x + M = 0 \text{ de } S = \{x_1, x_2\} \quad y \quad x^2 - 12x + N = 0 \text{ de } S = \{x_3, x_4\}$$

Tales que x_1, x_2, x_3, x_4 son términos sucesivos de una P.Geométrica.
Calcular M y N. $M > 0$, $N > 0$

Solución:

(1°) Por ser una P.G.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= aq \end{aligned}\right\} \quad x_1x_2 = a^2q = M \ .... \ (\alpha).$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= aq^2 \\ x_4 &= aq^3 \end{aligned}\right\} \quad x_3x_4 = a^2q^5 = N \ .... \ (\beta).$$

(2°) $a + aq = 3$ .... (I).

$aq^2 + aq^3 = 12$ .... (II).

(3°) Resolviendo el sistema, dividiendo (I) ÷ (II)

$$\frac{a(1+q)}{aq^2(1+q)} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}, \; q^2 = 4 \;\therefore\; \boxed{q = 2}, \quad q > 0$$

(4°) De I : $a + a(2) = 3 \;\therefore\; \boxed{a = 1}$

De (α): $1 \times 2 = M \;\therefore\; \boxed{M = 2}$

De (β): $1^2 \times 2^5 = N \;\therefore\; \boxed{N = 32}$

15.17.25 **Ejercicio Explicativo:**

De un depósito que contiene 4096 lts de ácido puro se extraen "x" lts y se reponen con agua. Luego de homogenizar la mezcla, se extraen nuevamente "x" lts reponiéndolo con agua; luego de repetir 6 veces la operación, el depósito contiene 729 lts de ácido puro.

Hallar el valor de "x".

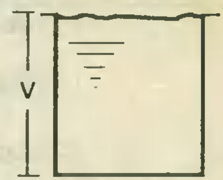
Recuerde:

En dos líquidos A y B que se mezclan sin reacción:

Las fracciones son:

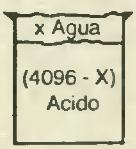
$$f_{\text{liquido A}} = \frac{\text{Volumen de A}}{V_{total}}; \quad \text{Vol A} = f_{\text{liquido A}} \times V_{total}$$

$$f_{\text{liquido B}} = \frac{\text{Volumen de B}}{V_{total}}; \quad \text{Vol B} = f_{\text{liquido B}} \times V_{total}$$



Solución

(1°) Luego de la 1ª extracción y en terminos del ácido se tendrá:



$$\Rightarrow f_1^{\text{Acido}} = \frac{4096 - x}{4096}$$

(2°) Luego de la 2ª extracción:

$$\Rightarrow f_2^{\text{Acido}} = \left[4096\left(\frac{4096-x}{4096}\right) - x\left(\frac{4096-x}{4096}\right)\right] \div 4096 \;\rightarrow\; f_2^{\text{Acido}} = \left(\frac{4096-x}{4096}\right)^2$$

(3°) Luego de la 3ª extracción:

$$\Rightarrow f_3^{\text{Acido}} = \left[4096\left(\frac{4096-x}{4096}\right)^2 - x\left(\frac{4096-x}{4096}\right)^2\right] \div 4096 \;\rightarrow\; f_3^{\text{Acido}} = \left(\frac{4096-x}{4096}\right)^3$$

(4°) Luego de la 6^{a} extracción:

$$f_6^{Acido} = \left(\frac{4096 - x}{4096} \right)^6$$

(5°) Por condición:

$$\left(\frac{4096 - x}{4096} \right)^6 = \frac{729}{4096} = \frac{3^6}{4^6}$$

Al resolver : $\boxed{x = 1024 \text{ lts}}$

15.17.26 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} 2x^4 = 3y^4 + 29z^4 \text{ ....(A).} \\ xyz = 8 \text{ ....(B).} \end{cases}$$

Sabiendo que:

$\log_y x$; $\log_z y$; $\log_x z$

Son términos sucesivos de una Progresión Geométrica.

Recuerde:

(1) Sea: { a, b, c } en P.G. $\Rightarrow$ $b^2 = ac$

(2) $\log_b N = \dfrac{\log N}{\log b} = \dfrac{1}{\log_N^b}$

(3) $\log_b N = m \rightarrow N = b^m$

(4) Si : $\log_b N$, $N > 0$
$b > 0 - \{1\}$

Solución:

(1°) Por ser una P.G.

$\log_z^2 y = \log_y x \, . \, \log_x z$

Al simplificar:

$\Rightarrow \log_z^2 y = \log_y z$, $\log_z^2 y = \dfrac{1}{\log_z^y}$

$\Rightarrow \log_z^3 y = 1$, $\log_z y = 1$, $\boxed{y = z}$ .... (C).

(2°) Sustituyendo (C) sobre A

$\Rightarrow 2x^4 = 3y^4 + 29y^4 \rightarrow x^4 = 16y^4$

$\Rightarrow x = 2y$, $x = -2y$ (DESCARTADO)

(3°) Se dispone ahora de :

$$x = 2y = 2z$$

$$\Rightarrow y = z = \frac{x}{z} \text{ .... (D).}$$

(4°) Sustituyendo (D) sobre (B)

$$\Rightarrow x\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) = 8 \;\; , \;\; \frac{x^3}{4} = 8 \;\; ; \;\; x = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt[3]{4} \;\; , \;\; y = z = 4\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{\left(2\sqrt[3]{4} \;,\; 4\sqrt[3]{4} \;,\; 4\sqrt[3]{4}\right)\right\}}$$

15.17.27 **Ejercicio Explicativo:**

Hallar los valores de "x" que permite ser los términos sucesivos de una progresión aritmética a:

$$2x^2 \; ; \; x^4 \; ; \; 24$$

Recuerde:

En toda P.A. se verifica: **{ a, b, c }**

$$\Rightarrow \qquad b = \frac{1}{2}\,(a + c)$$

Solución:

(1°) Por ser una P.A.

$$\Rightarrow x^4 = \frac{1}{2}(\,2x^2 + 24\,)$$

(2°) Resolviendo la ecuación obtenida:

$$\Rightarrow x^4 = x^2 + 12$$

$$\Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\,x^2 - 4\,)(\,x^2 + 3\,) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \;,\; x^2 = -2$$

(3°) Finalmente

$$\therefore \boxed{x = 2 \;,\; x = -2}$$

15.17.28 **Ejercicio Explicativo:**

Hallar los valores de "x" que permiten a:

$$1 \;\; ; \;\; x^2 \;\; ; \;\; 6 - x^2$$

ser los términos sucesivos de una progresión geométrica de números reales.

Recuerde:

Si : $\{a, b, c\}$ en P.G.

$$\Rightarrow \quad b^2 = ac$$

Solución:

(1°) **Para estar en P.G.**

$(x^2)^2 = (1)(6 - x^2) \quad \Rightarrow \quad x^4 = 6 - x^2$

(2°) **Resolviendo la ecuación obtenida:**

$\Rightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 3)(x^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}\ ,\ x = -\sqrt{2}\ ,\ \underbrace{x = \pm\sqrt{3}\,i}_{\text{DESCARTADO}}$

(3°) **Finalmente**

$\therefore \boxed{x = \sqrt{2} \quad ó \quad x = -\sqrt{2}}$

15.17.29 **Ejercicio Explicativo:**

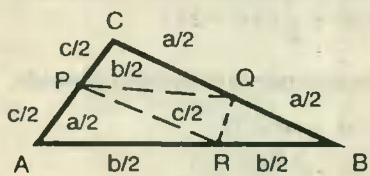
En un triángulo de área "S" se unen los puntos medios de sus 3 lados; sobre el nuevo triángulo se unen sus tres puntos medios; de este modo se prosigue sucesivamente con los siguientes.

Calcular la suma de las áreas de los triángulos así formados.

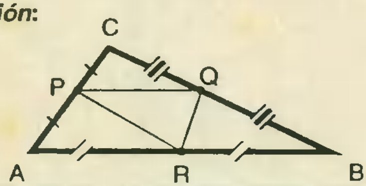
Recuerde:

Si se unen los puntos medios P, Q y R de un Δ ABC

Se generan **4** triángulos iguales por que la medida del área total esté dividida también en **4** partes iguales.



Solución:



(1°) **Del enunciado**

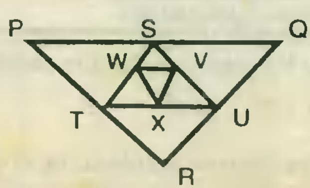
Sea " S " la medida del área del Δ ABC

" S/4 " es la medida del área del Δ PQR

(2°) **De acuerdo a la secuencia establecida, en el Δ PQR:**

"S/16" es la medida del Δ STU

"S/64" es la medida del Δ WVX



(3°) **Se solicita obtener la suma:**

$$\sum = S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \frac{S}{64} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(4°) **Por se una Sucesión Geométrica de razón $\frac{1}{4}$**

$$\Rightarrow \sum = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} \quad \therefore \quad \boxed{\sum = \frac{4}{3}S}$$

15.17.30 **Ejercicio Explicativo:**

Si: a, b, c y d son términos de una progresión geométrica creciente. Simplificar:

$$K = \frac{b - c}{\sqrt{(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d)}}$$

Solución:

(1°) **Por ser una P.G.: { a, b, c, d }**

$\Rightarrow$ ad = bc .... (I).

$\Rightarrow$ ac = b^2, bd = c^2 .... (II).

(2°) **Ejecutando en el subradical:**

$$(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d)$$

mediante el axioma de distribución de la multiplicación respecto a la suma:

$\Rightarrow$ ab + ac + bd + dc - ab - ad - bc - cd

$$\Rightarrow K = \frac{b \,.\, c}{\sqrt{ac + bd - ad - bc}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\,III\,).$$

(3°) **Sustituyendo (I) y (II) sobre (III)**

$$\Rightarrow K = \frac{b - c}{\sqrt{b^2 + c^2 - bc - bc}} = \frac{b - c}{\sqrt{(b - c)^2}} \quad , \quad c > b$$

$$\Rightarrow K = \frac{b - c}{c - b} = \frac{-(c - b)}{c - b} = -1 \quad \therefore \quad \boxed{K = -1}$$

15.17.31 **Ejercicio Explicativo:**

El primer término de una progresión geométrica es igual a (x - 2), el tercer término es igual a (x + 6), y la media aritmética de los términos primero y tercero se refiere al segundo en la relación 5 a 3.

Determinar "x".

Recuerde:

Si: $U_1, U_2, U_3 \ldots \in$ a una sucesión Geométrica

$$\Rightarrow U_2^2 = U_1 U_3 \qquad\qquad \Rightarrow U_3^2 = U_2 U_4$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

Si los U_k representa los términos de la P.G.

$\Rightarrow U_1 = x - 2$ .... (I).

$\Rightarrow U_3 = x + 6$ .... (II).

$$\Rightarrow \frac{\frac{U_1 + U_3}{2}}{U_2} = \frac{5}{3} \quad \text{.......... (III).}$$

(2°) Sustituyendo (I) y (II) sobre (III).

$$\Rightarrow \frac{\frac{x - 2 + x + 6}{2}}{\sqrt{(x-2)(x+6)}} = \frac{5}{3}$$

(3°) Resolviendo la ecuación:

$$\Rightarrow \frac{x + 2}{\sqrt{(x-2)(x+6)}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x + 2) = 5\sqrt{(x-2)(x+6)}$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \,,\, x = -2 \quad \therefore \quad \boxed{x = 3}$$

15.17.32 **Ejercicio Explicativo:**

Sean $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$ y $\frac{1}{c+a}$ tres términos consecutivos de una P.A., demostrar que: a^2, b^2, c^2 son términos de otra P.A.

Recuerde:

Si m, n y p $\in$ a una Progresión Aritmética.

$$n = \frac{1}{2}(m + p) \qquad \text{ó} \qquad 2n = m + p$$

Las afirmaciones recíprocas son ciertas, es decir :

$$\text{Si : } x = \frac{1}{2}(V + W) \quad \Rightarrow \quad V, X, W \in \text{a una P.A.}$$

Solución:

(1°) Por ser una P.A.

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a}\right]$$

(2°) Ejecutando las sentencias

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2}\left[\frac{a+c+a+b}{(a+b)(c+a)}\right]$$

$$\Rightarrow 2(a+b)(a+c) = (2a+b+c)(b+c)$$

$$\Rightarrow 2[a^2+(b+c)a+bc] = 2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2+2ab+2ac+2bc = 2ab+2ac+b^2+c^2+2bc$$

(3°) **Simplificando esta última igualdad:**

$$2a^2+\cancel{2ab}+\cancel{2ac}+\cancel{2bc} = \cancel{2ab}+\cancel{2ac}+b^2+c^2+\cancel{2bc}$$

$$\Rightarrow 2a^2 = b^2+c^2\,, \quad \text{ó} \quad a^2 = \frac{1}{2}(b^2+c^2)$$

$\therefore$ b^2, a^2, c^2 se encuentran en P.A.

ó $\boxed{a^2, b^2, c^2 \in \text{ a una P.A.}}$ .... L.q.q.d.

15.17.33 **Ejercicios Explicativos:**

Se da la sucesión:

$$\{1;(2+3);(3+4+5);(4+5+6+7);(5+6+7+8+9);\ldots\}$$

Determinar:

a) El término enésimo

b) La suma de los "n" primeros términos

Solución:

(1°) **De la sucesión consignada se desprende:**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & , & 5 & , & 12 & , & 22 & , & 35 & , & 51 \;,\ldots \\
 & 4 & & 7 & & 10 & & 13 & & 16 & \\
 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

(2°) **De acuerdo al Teorema de Grégory para a_n:**

$$\Rightarrow a_n = 1 + 4\left(\frac{n-1}{1}\right) + 3\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = 1+4n-4+\frac{3n^2-9n+6}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{a_n = \frac{n}{2}(3n-1)}$$

(3°) **De acuerdo al Teorema de Grégory para S_n:**

$$\Rightarrow Sn = 4n + 4\frac{n(n-1)}{2} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(4°) **Efectuando las sentencias:**

$$Sn = n+2n^2-2n+\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \qquad \therefore \quad \boxed{Sn = \frac{n^2}{2}(n+1)}$$

15.17.34 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular la suma

$$E = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots$$

" m " términos →

Mediante el Teorema de Gregory.

Solución:

(1°) Ordenando la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 9 & & 25 & & 49 & & 81 & & 121 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 8 & & 16 & & 24 & & 32 & & 40 & \\ & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\ & & 8 & & 8 & & 8 & & 8 & & \\ & & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\ & & & 0 & & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

(2°) De acuerdo al Teorema de Grégory para ser

$$\Rightarrow Sm = \underset{\uparrow}{1}\binom{m}{1} + \underset{\uparrow}{8}\binom{m}{2} + \underset{\uparrow}{8}\binom{m}{3}$$

(3°) Efectuando las sentencias

$$\Rightarrow Sm = m + 8\frac{m(m-1)}{2} + \frac{8}{6}m(m-1)(m-2)$$

$$\therefore \boxed{Sm = \frac{m}{3}(2m+1)(2m-1)}$$

15.17.35 **Ejercicios Explicativos:**

Calcular:

$$E = \left(\frac{y}{z}\right)^x$$

Sabiendo que:

$$x = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$y = 9 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$z = 4 - \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

Recuerde:

En toda sucesión geométrica decreciente e ilimitada:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots\ldots \infty = \frac{a}{1-q}$$

Solución:

(1°) Al examinar cada suma :

$$x = 1 + \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots\dots\dots \infty}$$

sucesión geométrica decreciente: $q = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow\ x = 1 + 2\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad x = 1 + 2\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right) = 1 + 1 = 2. \quad \dots\dots (\text{I}).$$

(2°) Así mismo :

$$y = 9 + \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots\dots\dots \infty}$$

sucesión geométrica decreciente, $q = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow\ y = 9 + \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad y = 9 + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 9 + 3 = 12 \qquad (\text{II}).$$

(3°) Finalmente:

$$z = 4 \underbrace{- \frac{8}{3} + \frac{16}{9} - \frac{32}{27} \dots\dots\dots \infty}$$

sucesión geométrica decreciente: $q = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow\ z = 4 + \frac{-\frac{8}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \qquad (\text{III})$$

(4°) Realizando la sentencia:

$$E = \left(\frac{y}{z}\right)^x = \left(\frac{12}{\left(\frac{12}{5}\right)}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{E = 25}$$

15.17.36 **Ejercicio Explicativo:**

Suponiendo que x^2, y^2, z^2 son términos sucesivos de una P.A. Demostrar que.

$$(y + z),\ (z + x),\ (x + y) ,$$

son términos sucesivos de una progresión armonica

Recuerde:

(1°) Si $\{a, b, c\} \in$ a una P.A.

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}(a+c)$$

(2°) Sea la igualdad:

$$p = \frac{1}{2}(r+q)$$

$\Rightarrow \{r, p, q\} \in$ a una sucesión o Progresión Aritmética

Solución:

(1°) Del enunciado:

$$y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + z^2) \quad \text{.................... (A).}$$

(2°) $$\frac{1}{z+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y}\right) \quad \text{.......... (B).}$$

Efectuando las sentencias:

$$\Rightarrow \frac{1}{z+x} = \frac{1}{2}\frac{(2y+x+z)}{(y+z)(x+y)}$$

$$\Rightarrow 2[y^2 + (z+x)y + zx] = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$$

(3°) Simplificando:

$$\Rightarrow 2y^2 + \underbrace{2yz + 2xy + 2xz} = x^2 + 2x\underbrace{y + 2xz + 2yz} + z^2$$

$$\Rightarrow 2y^2 = x^2 + z^2 \quad \text{.................................. (C)}$$

(4°) De (C) concluimos que en efecto la proposición relativa a x^2, y, z^2 es cierta, por lo que

es cierto tambiém que $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ es una P.A.

$\therefore$ $\boxed{(y+z), (z+x), (x+y) \text{ es una Progresión Armónica.}}$

15.17.37 **Ejercicio Explicativo:**

Hallar cuatro números positivos que componen una progresión geométrica.

Si: $U_1 + U_2 = 15$
$U_3 + U_4 = 60$

Solución:

(1°) Por ser una P.G.

$$\begin{cases} U_1(1+q) = 15 & \text{.......... (1).} \\ U_1q^2(1+q) = 60 & \text{.......... (2).} \end{cases}$$

(2°) **Resolviendo el sistema:**

$$\Rightarrow \quad U_1 + U_1q = 15 \qquad \text{.............................. (3).}$$

$$U_1q^2 + U_1q^3 = 60 \qquad \text{.............................. (4).}$$

(3°) De $\dfrac{(3)}{(4)}$: $\quad \dfrac{U_1(1+q)}{U_1q^2(1+q)} = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad q = 2 \text{ , } q = -2$$

(4°) **Si : q = 2, sustituyendo en (3)**

$$\Rightarrow \quad \mu_1(1+2) = 15 \text{ , } u_1 = 5$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_1 = 5 \text{ , } u_2 = 10 \text{ , } u_3 = 20 \text{ , } u_4 = 40}$$

(5°) Si: q = -2, en (3)

$$\Rightarrow \quad U_1(1-2) = 15 \text{ ; } U_1 = -15$$

$$\therefore \quad \boxed{U_1 = -15 \text{ , } U_2 = 30 \text{ ; } U_3 = -60 \text{ ; } U_4 = 120}$$

15.17.38 **Ejercicio Explicativo:**

La suma de tres números naturales que componen una progresión geométrica es 65. Si restamos del menor 1, del mayor 19, los números obtenidos componen una progresión aritmética.

Hallar estos números.

Solución:

(1°) **Sean U_1, U_2 y U_3 los números, al restar en P.G. los mismos serán:**

$$U_1 \text{ , } U_1q \text{ , } U_1q^2$$

$$\Rightarrow \quad U_1 + U_1q + U_1q^2 = 65 \qquad \text{.............. (A)}$$

$$\Rightarrow \quad U_1q = \frac{1}{2}[\,(U_1 - 1) + (U_1q^2 - 19)\,] \qquad \text{.............. (B)}$$

(2°) **Resolviendo el sistema cuadrático:**

$$\text{De (A) : } U_1(1 + q + q^2) = 65 \qquad \text{.............. (C)}$$

$$\text{De (B) : } U_1(1 - 2q + q^2) = 20 \qquad \text{.............. (D)}$$

(3°) **Dividiendo (C) ÷ (D)**

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 13q^2 - 26q + 13 = 4q^2 + 4q + 4$$

$$\Rightarrow \quad 9q^2 - 30q + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = 3 \text{ , } q = \frac{1}{3}$$

(4°) Si $q = 3$, sustituyendo sobre (C) resultará : $U_1(1+3+3^2) = 65$, $U_1(13) = 65$
$\Rightarrow U_1 = 5$

(5°) Finalmente:
$\therefore$ 5, 15, 45 serán los números buscados.

15.17.39 **Ejercicios Explicativos:**

Si a, b y c son términos consecutivos de una progresión geométrica. Simplificar.

$$E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 b^2 c^2 \left(a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} \right)}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

$b^2 = ac$ ó $b = \sqrt{ac}$ .... (Δ).

(2°) Sustituyendo (A) sobre la expresión propuesta E:

$$\Rightarrow E = \frac{a^3 + \left(\sqrt{ac}\right)^3 + c^3}{a^2 \left(\sqrt{ac}\right)^2 c^2 \left[a^{-3} + \left(\sqrt{ac}\right)^{-3} + c^{-3} \right]}$$

(3°) Ejecutando las sentencias en B:

$$E = \frac{a^3 + ac\sqrt{ac} + c^3}{a^3 c^3 \left[a^{-3} + a^{-\frac{3}{2}} c^{-\frac{3}{2}} + c^{-3} \right]}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a^3 + ac\sqrt{ac} + c^3}{c^3 + a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}} + a^3} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{a^3 + ac\sqrt{ac} + c^3}{a^3 + ac\sqrt{ac} + c^3}$$

(4°) Finalmente:

$\therefore$ $\boxed{E = 1}$

15.17.40 **Ejercicio Explicativo:**

Si los U_k son términos de una progresión geométrica de razón "q", calcular:

$$E = \sqrt{\frac{(U_{530} + U_{529})(U_{11} - U_{12} + U_{13})}{(U_{66} + 2U_{67} + U_{68})(U_{477} + U_{474})}}$$

Recuerde:

En toda P.G. el término enésimo U_n

$$U_n = U_1 q^{n-1}$$

Solución:

(1°) De acuerdo a lo consignado:

La expresión E será equivalente a:

$$E^2 = \frac{\left(U_1 q^{529} + U_1 q^{528}\right)\left(U_1 q^{10} - U_1 q^{11} + U_1 q^{12}\right)}{\left(U_1 q^{65} + 2U_1 q^{66} + U_1 q^{67}\right)\left(U_1 q^{476} + U_1 q^{473}\right)}$$

(2°) Ejecutando las factorizaciones en los paréntesis:

$$E^2 = \frac{U_1 q^{528}(q+1)U_1 q^{10}\left(1-q+q^2\right)}{U_1 q^{65}\left(1+2q+q^2\right)U_1 q^{473}\left(q^3+1\right)}$$

(3°) Simplificando lo que originan las sentencias:

$$E^2 = \frac{U_1^2 q^{538}\left(q^3+1\right)}{U_1^2 q^{538}\left(q^3+1\right)(1+q)^2} = \frac{1}{(1+q)^2} \quad \therefore \quad \boxed{E = (q+1)^{-1}}$$

15.17.41 **Ejercicio Explicativo:**

Simplificar

$$E = \frac{1 + 5 + 9 + \ldots\ldots\ldots \text{"n" terminos}}{3 + 7 + 11 + \ldots\ldots\ldots \text{"n" terminos}}$$

Recuerde:

En toda P.A. de m términos:

$$S_m = m\left(\frac{a_1 + a_m}{2}\right) \quad \text{ó} \quad S_m = \frac{m}{2}\left[2a_1 + (m-1)r\right]$$

Solucion:

(1°) De acuerdo a lo consignado y para cada progresión:

$$\Rightarrow E = \frac{\frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]}{\frac{n}{2}\left[2A_1 + (n-1)R\right]} = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2A_1 + (n-1)R}$$

(2°) En cada caso y correspondientemente:

$a_1 = 1$, $r = 4$ para el numerador

$A_1 = 3$, $R = 4$ para el denominador.

(3°) Sustituyendo los datos sobre "E"

$$\Rightarrow E = \frac{2(1) + (n-1)4}{2(3) + (n-1)4}$$

(4°) Ejecutando las sentencias

$$E = \frac{2 + 4n - 4}{6 + 4n - 4} = \frac{4n - 2}{4n + 2}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{2n - 1}{2n + 1}}$$

15.17.42 **Ejercicio Explicativo:**

El cuarto y noveno término de una P.A. son 9 y -6 respectivamente.
¿Cuántos términos de esta progresión son necesarios tomar de modo que éstos sumen -45?.

Solución:

(1°) Podemos escribir:

$a_4 = 9 \; ; \; a_9 = -6$ .... (A).

(2°) Sean "m"los términos necesarios para que se verifique:

$S_m = -45$ .... (B).

(3°) Debemos de obtener una ecuación en términos de "m"

de (B) : $\frac{m}{2}[\, 2a_1 + (m - 1)r \,] = -45$ .... (C).

de (A) : $\begin{cases} a_1 + 3r = 9 \\ a_1 + 8r = -6 \end{cases}$

(4°) Resolviendo el sistema:

$r = -3 \; , \; a_1 = 18$

(5°) Sustituyendo lo obtenido en (C).

$$\frac{m}{2}[\, 36 - 3m + 3 \,] = -45 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 13m - 30 = 0 \; , \; m = 15, m = -2$$

$$\therefore \boxed{m = 15 \text{ términos}}$$

15.17.43 **Ejercicios Explicativos:**

Se sabe que:

$$\{\, 3 \; ; 3 \log_y x \; ; 3 \log_z y \; ; 7 \log_x z \,\}$$

son términos sucesivos de una progresión geométrica.

Calcular:

$$E = \frac{4x^{\sqrt{3}}}{7z^{\sqrt{7}} + 9\, y^{\sqrt[6]{63}}}$$

Solución:

(1°) La razón de la P.G. es: $q = \frac{3 \log_y x}{3} = \log_y x$ .... (I).

(2°) El producto de los 4 términos es:

$$P_4 = \left(\sqrt{U_1 U_4}\right)^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{II}).$$

(3°) Sustituyendo datos sobre (II).

$$\Rightarrow 3 \cdot 3 \log_y x \cdot 3 \log_z y \cdot 7 \log_x z = \left(\sqrt{21 \log_x z}\right)^4$$

$$\Rightarrow 27 \times 7 = (21 \log_x z)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{27 \times 7} = 21 \log_x z$$

$$\Rightarrow \log_x z = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{III}).$$

(4°) Podemos conformar la progresión consignada:

$$\Rightarrow 3\,,\ \log_y x\,,\ 3 \log_z y\,,\ 7\sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{ó}$$

$$\underbrace{3}_{U_1},\ \underbrace{3 \log_y x}_{U_2},\ \underbrace{3 \log_z y}_{U_3},\ \underbrace{\sqrt{21}}_{U_4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{IV}).$$

(5°) De la progresión, podemos tener:

$$\Rightarrow q = \log_y x = \sqrt[4-1]{\frac{U_4}{U_1}}$$

$$\Rightarrow q = \log_y x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{21}}{3}} = \sqrt[6]{\frac{7}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{V}).$$

(6°) De la progresión (IV)

$$\Rightarrow U_3 = 3 \log_z y = U_1 q^2 \quad \Rightarrow \quad 3 \log_z y = 3\left(\sqrt[6]{\frac{7}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \log_z y = \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{VI})$$

(7°)
$$\left.\begin{array}{l} \text{De (III): } z = x^{\sqrt{\frac{3}{7}}} \\ \text{De (V): } x = y^{\sqrt[6]{\frac{7}{3}}} \\ \text{De (VI): } y = z^{\sqrt[3]{\frac{7}{3}}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{VII})$$

(8°) Sustituyendo (VII) sobre la expresión E.

$$\Rightarrow E = \frac{4x^{\sqrt{3}}}{7x^{\sqrt{3}} + 9x^{\sqrt{3}}} = \frac{4x^{\sqrt{3}}}{16x^{\sqrt{3}}} \quad \therefore \quad \boxed{E = \frac{1}{4}}$$

(1) Hallar el conjunto solución de la ecuación: $x+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}+\dfrac{x}{27}+\ldots\ldots\infty=81$

Rpta: $\{54\}$

(2) Si: $1+x+x^2+x^3+\ldots\infty=25$

Hallar el valor de x

Rpta: $x=\dfrac{24}{25}$

(3) Hallar el valor de t si $\sum\limits_{K=0}(10t)^K=1993$

Rpta: $t=\dfrac{996}{9965}$

(4) Resolver $\operatorname{Rec}\left(\dfrac{1}{x}\right)+\operatorname{Rec}\left(\dfrac{2}{x}\right)+\operatorname{Rec}\left(\dfrac{4}{x}\right)+\operatorname{Rec}\left(\dfrac{8}{x}\right)\ldots\ldots\infty=25$

Rpta: $\left\{\dfrac{21}{2}\right\}$

(5) Sabiendo que M^7, N^2 y P^3 están en progresión geométrica, multiplicar

$\left(M^7+N^2+P^3\right)\left(M^7-N^2+P^3\right)$

Rpta: $M^{14}+N^4+P^6$

(6) Los elementos x; 10 y ; 5 z conforman una P.A. en ese orden, cuya suma es 15. A su vez los elementos, x ; 10 y + 1 ; 5 (z + 1) forman en ese orden una progresión geométrica de suma 21 ; si $0\le x\le 10$. Hallar el valor de 4z.

Rpta: 28

(7) Si las sucesiones iguales:

$A=\{11-A,40-B,15-C,E-9\}$; $\{A-15,B-30,7+7C,16-F\}$

Hallar E y F

Rpta: $E=28$, $F=3$

(8) Calcular "n" si: $\sum_{i=1}^{n} (7i-3) = 1470$

Rpta: $i = 20$

(9) Resolver: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)}{2} x^{i-1} = 343$

Rpta: $n = \frac{13}{2}$

(10) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la P.A. creciente establecida en:

$\{2x, 4x^2, 1, \ldots\}$

Rpta: 28,75

(11) Si la suma de los cuatro términos en P.A. es 16 y la suma de sus cuadrados es 144. Calcular dichos números

Rpta: -2, 2, 6, 10

(12) Hallar tres números reales sabiendo que conforman una P.G cuya suma es 38 y el producto del central por la suma de los extremos es igual a 312.

Rpta: 8, 12, 18

(13) Interpolar siete medios geométricos entre los números 3 y 48. Proporcionando el producto de multiplicar el 2° y 4° término.

Rpta: 72

(14) Las edades de 4 hermanos conforman una P.G. Cuando nació el menor, el mayor tenía 28 años y la diferencia entre las edades de los otros es 8
¿Cuáles son dichas edades?

Rpta: 4, 8, 16, 32

(15) Calcular: $S = 3 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots\ldots \infty$

Rpta: $\frac{15}{2}$

(16) En cierta progresión aritmética, si se disminuye la edad al primero y se incrementa la unidad a la razón, la suma de los términos no se altera. ¿Cuántos términos tiene?

Rpta: 3

(17) Si: $\{ a_m \}$ es una sucesión tal que:

$a_1 = 4$; $a_2 = -5$ y $a_{m+2} = 2a_{m+1} - 3a_m$

Obtener a_4

Rpta: $a_4 = -29$

(18) Calcular la suma de los 10 primeros términos de la sucesión:

$$\left\{ \frac{32}{2^{n-1}} \right\}$$

Rpta: $63\frac{7}{8}$

(19) Sea: $x_n = 7n^2 + 4n + 9$

Hallar la suma de los "n" términos de la sucesión: $y_n = x_{n+1} - x_n$

Rpta: $7n^3 + 7n^2 + 29n$

(20) Sea la sucesión: $\{ 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots \}$

Hallar el enésimo

Rpta: $n^2 + 2n$

CAPITULO 16

LAS DESIGUALDADES

16.1 LAS DESIGUALDADES

Definición.- Se denomina desigualdad a toda relación entre números reales cuya diferencia es distinta de cero tales como:

$a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$

16.2 AXIOMAS DE ORDEN.- Una de las propiedades de los números reales es la de formar un conjunto ordenado. Intuitivamente los elementos se pueden colocar partiendo del más pequeño hasta los mayores y a su vez hacerlos corresponder con los puntos de una recta.

16.2.1 **Axioma 01.** (Axioma de **Tricotomia** o comparación)
Para todo par de elementos "a" y "b" en IR, una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica: $a < b$; $a = b \vee a > b$

16.2.2 **Axioma 02.** (Axioma de **Transitividad**)

(1) Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

(2) Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

16.2.3 **Axioma 03.** (Axioma de **Adición**)

(1) Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c \ \forall \ c \in IR$

(2) Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c \ \forall \ c \in IR$

16.2.4 **Axioma 04.** (Axioma de multiplicación)

(1) Si $a < b \Rightarrow ac < bc \ \forall \ c > 0$ "La desigualdad no se altera si se multiplica por c>0"

(2) Si $a < b \Rightarrow ac > bc \ \forall \ c < 0$ "La desigualdad se altera si se multiplica por c<0"

DEFINICIONES IMPORTANTES

16.3 ***Definición.-*** Un número real "a":
Es positivo si : $a > 0 \vee a \in IR^+$
Es negativo si : $a < 0 \vee -a \in IR^+$

El número "0" no es positivo ni negativo.

16.4 ***Definición.-*** Si $a, b \in \mathbb{R}$ decimos que:

Si: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

Lectura:

"a" es menor que b si y solo si (b - a) es positivo".

16.5 ***Definición.-*** ("Relación mayor o igual que")

Sea $a \geq b$

$\Rightarrow \quad a > b \quad \vee \quad a = b$

TEOREMAS RELATIVOS A LAS DESIGUALDADES:

16.6 **TEOREMA:** Si a y b tienen el mismo signo, entonces.

A) Si: $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0$

B) Si: $a < b < 0 \Rightarrow 0 > a^{-1} > b^{-1}$

16.7 **TEOREMA:** Si $a \geq 0$, $b \geq 0$

$\Rightarrow a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

16.7.1 **Teorema:**

(i) $b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b}$ ó $a < -\sqrt{b}$

(ii) $b \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq b \Leftrightarrow a \geq \sqrt{b}$ ó $a \leq -\sqrt{b}$

Demostración:

(1) Considerando los casos: $a > 0$ y $a < 0$

Si $a > 0$; $b \geq 0$ y $a^2 > b$

$\Rightarrow a^2 > \left(\sqrt{b}\right)^2$

$\Rightarrow a > \sqrt{b}$ .... (α)

Si $a < 0$; $b \geq 0$ y $(-a)^2 > b$

$\Rightarrow (-a)^2 > \left(\sqrt{b}\right)^2$

$\Rightarrow a > \sqrt{b}$ .... (β)

(2) De (α) y (β) se desprende que:

$$\boxed{a^2 > b \Leftrightarrow a > \sqrt{b} \text{ ó } a < -\sqrt{b}}$$

16.7.2 **Teorema:** Si: $b > 0 \Rightarrow a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

$b \geq 0 \Rightarrow a^2 \leq b \Leftrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

16.7.3 **Teorema:** Si: $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$

16.7.4 **Teorema:** Si: $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow a \leq b^2$

16.7.5 **Teorema:** Si: $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > b \Leftrightarrow a > b^2$

16.7.6 **Teorema:** Si: $b > 1 \Rightarrow b^x < b^y \Leftrightarrow x < y$

16.7.7 **Teorema:** Si: $0 < b < 1 \Rightarrow b^x < b^y \Leftrightarrow x > y$

16.8 LA INECUACION

Definición.- Una inecuación es toda desigualdad condicional que contiene una o más cantidades desconocidas denominadas variables y que sólo es verdadera para determinados valores de dicha variable las cuales se hallan contenidos en el conjunto solución.

La inecuación es también denominada proposición abierta de la forma.

$P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \geq 0$ ó $P(x) \leq 0$

Ejemplo:

$x + 1 \geq -x - 5$ Es una inecuación.

Ejemplo:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$$ Es una inecuación

Ejemplo:

$x^2 + x - 90 < 0$ Es una inecuación

LA INECUACIÓN LINEAL O INECUACIÓN DE 1^ER GRADO.

16.8.1 ***Definición.-*** Una inecuación lineal o de 1^er grado es toda proposición abierta de la forma.

$F(x):\ ax + b > 0$ ó $F(x):\ ax + b < 0$

Para resolver una inecuación lineal se utilizan los axiomas y teoremas establecidos por la relación de orden.

16.8.2 **Regla.-** Para resolver una inecuación lineal se transponen todos los términos que contienen a la variable y las constantes al segundo miembro de la desigualdad.

A modo de síntesis, considere la analogía de las ecuaciones y las inecuaciones en relación a la transposición de sus términos

	ECUACIONES		INECUACIONES
	REGLAS DE TRANSPOSICION		
(1)	Si: $a + b = c \Rightarrow a = c - b$	(1)	Si: $a + b > c \Rightarrow a > c - b$
(2)	Si: $ab = c \Rightarrow a = \frac{c}{b},\ b \neq 0$	(2)	Si: $ab > c \Rightarrow a > \frac{c}{b}$ si $b > 0$
			Si: $ab > c \Rightarrow a < \frac{c}{b}$ si $b < 0$
(3)	Si: $b^m = c \Rightarrow b = \sqrt[m]{c}$	(3)	Si: $b^m > c \Rightarrow b > \sqrt[m]{c},\ c > 0$
(4)	Si: $a + b = c + b \Rightarrow a = c$	(4)	Si: $a + b > c + b \Rightarrow a > c$
(5)	Si: $ab = cb \Rightarrow a = c \ \vee\ b = 0$	(5)	Si: $ab > cb \Rightarrow a > c$ si $b > 0$ Si: $ab > cb \Rightarrow a < c$ si $b < 0$

Ejemplo:

Resolver: $$\frac{\frac{6}{5}x - 3}{2} - \left(\frac{2}{5}x - 6\right) \geq \frac{\frac{1}{5}x - 3}{4}$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a los axiomas de la relación de orden, luego de ordenar:**

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}x - 3\right) - \left(\frac{2x}{5} - 6\right) \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x - 3\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x - \frac{3}{2} - \frac{2x}{5} + 6 \geq \frac{1}{20}x - \frac{3}{4}$$

(2°) **Multiplicando por 20**

$$\Rightarrow 20\left(\frac{3}{5}x\right) - 20\left(\frac{3}{2}\right) - 20\left(\frac{2x}{5}\right) + 20(6) \geq 20\left(\frac{1}{20}x\right) - 20\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 12x - 30 - 8x + 120 \geq x - 15$$

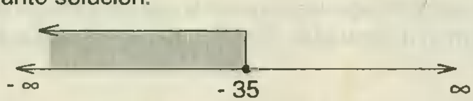
(3°) **De acuerdo a la regla de resolución de inecuaciones:**

$$\Rightarrow 12x - 8x - x \geq -15 - 120 + 30$$

$$\Rightarrow 3x \geq -105$$

$$\Rightarrow x \geq -35$$

(4°) Obtenemos el conjunto solución.



$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty, -35]}$

Ejemplo:

Se define la operación $a * b = \dfrac{3a-2b}{10}$ en IR; hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$\left(\frac{x}{6}-1\right)*2 \le \left(3*\frac{x}{6}\right)*\frac{1}{2} \le \left(1+\frac{5x}{6}\right)*5$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la regla "*"**

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{6}-1\right)*2 = \frac{3\left(\frac{x}{6}-1\right)-2(2)}{10} = \frac{1}{10}\left[\frac{3x}{6}-3-4\right] \quad \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \left(3*\frac{x}{6}\right)*\frac{1}{2} = \left[\frac{3(3)-2\left(\frac{x}{6}\right)}{10}\right]*\frac{1}{2} = \frac{\left[\frac{3(3)-2\left(\frac{x}{6}\right)}{10}\right]-2\left(\frac{1}{2}\right)}{10} \quad \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{5x}{6}\right)*5 = \frac{3\left(1+\frac{5x}{6}\right)-2(5)}{10} \quad \ldots\ldots (\mathrm{III})$$

(2°) **Recuerde que la inecuación en estudio es:**

$$\underbrace{\left(\frac{x}{6}-1\right)*2}_{(\mathrm{I})} \le \underbrace{\left(3*\frac{x}{6}\right)*\frac{1}{2}}_{(\mathrm{II})} \le \underbrace{\left(1+\frac{5x}{6}\right)*5}_{(\mathrm{III})}$$

Sustituyendo los equivalentes de I, II y III.

$$\Rightarrow \frac{1}{10}\left[\frac{3x}{6}-7\right] \le \frac{1}{10}\left[\frac{27}{10}-\frac{6x}{60}-2\left(\frac{1}{2}\right)\right] \le \frac{1}{10}\left[\frac{15x}{6}-7\right]$$

(3°) **Simplificando:**

$$\frac{3x}{6}-7 \le \frac{27}{10}-\frac{x}{10}-1 \le \frac{15x}{6}-7$$

$$\frac{x}{2}-7 \le \frac{17}{10}-\frac{x}{10} \le \frac{5}{2}x-7$$

(4°) **Multiplicando por 10**

$5x - 70 \le 17 - x \le 25x - 70$

(5°) **Transformamos a un sistema simultáneo:**

$$\begin{cases} 5x - 70 \le 17 - x \quad \ldots\ldots (\alpha) \\ 17 - x \le 25x - 70 \quad \ldots\ldots (\beta) \end{cases}$$

De (α): $5x + x \leq 17 + 70$

$$6x \leq 87$$

$$x \leq \frac{87}{6}$$

$$\boxed{x \leq 14\frac{1}{2}}$$

De (β) : $17 + 70 \leq 25x + x$

$\Rightarrow$ $87 \leq 24x$

$\Rightarrow$ $x \geq \frac{87}{24}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \geq 3\frac{5}{8}}$

(6°) Por ser un sistema simultáneo: $3\frac{5}{8} \leq x \leq 14\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\boxed{x \in \left[3\tfrac{5}{8} \, , \, 14\tfrac{1}{2}\right]}$

16.8.2 Inecuaciones de 2do Grado o Cuadratica.

Definición.- Una inecuación cuadrática es la proposición abierta de la forma:

$$P(x): \; ax^2 + bx + c > 0 \; , \; a \neq 0$$

ó $$P(x): \; ax^2 + bx + c < 0 \; ; \; a \neq 0$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

Para resolver una inecuación cuadrática se disponen de dos métodos.

I) Método de las áreas

II) Método de completación de cuadrados.

Los cuales se desarrollan a continuación:

I. METODOS DE LAS AREAS O REGLA DE LOS SIGNOS DE LAS ORDENADAS

(1°)	Se obtienen los ceros de la regla normal cuadrática: $ax^2 + bx + c$, con $a > 0$
(2°)	Se ubican los ceros sobre la recta numérica real.
(3°)	Mediante una línea paralela y en la parte superior al eje real desde él, avanzando de la derecha hacia la izquierda cortando sucesivamente los ceros ubicados sobre la recta, hasta el $-\infty$
(4°)	Considerando que el área encerrada por encima de la recta numérica real son positivos y corresponden a todas aquellas proposiciones abiertas positivas y las otras que corresponden a las negativas.
(5°)	Si las desigualdades poseen > ó ≥ se consideran intervalos cerrados o semicerrados según sea el caso.

Ejemplo:

Resolver la inecuación. $x^2 + x - 156 > 0$

Solución:

(1°) **Por ser una inecuación cuadrática, y de acuerdo a la regla de áreas.**

Encontremos los ceros, para ello:

$x^2 + x - 156 = 0$

$\Rightarrow (x + 13)(x - 12) = 0$ por ser factorizable.

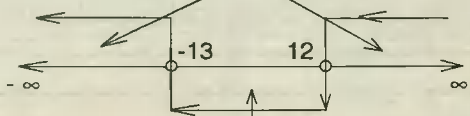
$\Rightarrow x = 12,\ x = -13$ son los ceros

(2°) **Ubicando los ceros sobre la recta Numérica Real:**

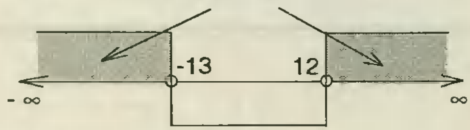
Se tomó abierto porque - 13 **no verifica** la desigualdad.

Se tomo abierto porque 12 **no verifica** la desigualdad.

(3°) Realizando el trazo de la línea quebrada.



(4°) Debido a que la desigualdad: $x^2 + x - 156 > 0$ "señala" ser positiva, nos indica realizar el trazo del área correspondiente.



(5°) Seleccionando el intervalo correspondiente:

$\therefore\ \boxed{x \in \langle -\infty, -13 \rangle \cup \langle 12, \infty \rangle}$

Ejemplo:

Resolver: $-x^2 - 7x + 18 > 0$

Solución:

(1°) **La regla de áreas exige que el coeficiente principal sea positivo.**

$\Rightarrow x^2 + 7x - 18 < 0$, luego de multiplicar por (-1).

(2°) **El valor de x que permite a la inecuación ser negativa se obtendrá como:**

$\Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -9\ ,\ x = 2$

(3°) **Graficando los ceros:**

(4°) **Realizando el trazo de la línea quebrada:**

Se toma abierto debido a que -9 no cumple con la desigualdad y adopta la forma $0 < 0$

Se toma abierto debido a que 2 no cumple con la desigualdad y adopta la forma $0 < 0$.

(5°) **Seleccionando el área negativa en razón a que: $x^2 + 7x - 18 < 0$**, de la gráfica tendremos:

$\Rightarrow \boxed{x \in \langle -9, 2 \rangle}$

16.8.3 **Inecuaciones Equivalentes**

Definición.- Son todas aquellas que poseen el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

Sea: $x^2 < x + 420$

$\Rightarrow \quad x^2 - x < 420$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 420 < 0$

Son tres inecuaciones equivalentes pues tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

Sea: $\dfrac{3}{x+7} > 1$ ó $3 > x + 7$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+7}{3} < 1$

No son inecuaciones equivalentes pues poseen conjuntos soluciones distintos entre sí.

16.8.3.1 **Teoremas Relativos a las Inecuaciones Equivalentes.**

16.8.3.1.1 **Teorema.**- El conjunto solución de una inecuación $f(x) > g(x)$ ó $f(x) < g(x)$ **No se altera** al sumar una regla polinomial $h(x)$ a los miembros de la misma.

$f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$, o

$f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

16.8.3.1.2 **Corolario.-** El conjunto solución de una inecuación $f(x) > g(x)$ puede no ser equivalente al correspondiente que resulta de sumarle una regla **fraccionaria**.

$f(x) > g(x)$, no necesariamente es equivalente a:

$$f(x) + \frac{p(x)}{q(x)} > g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

Ejemplo:

Sea: $x + 1 > 5 \Rightarrow x \in \langle 4, \infty \rangle$

Si agregamos: $\dfrac{1}{x-12}$

$$\Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x-12} > 5 + \frac{1}{x-12}$$

$$\Rightarrow x \in \langle 4, \infty \rangle - \{12\}$$

$$\therefore \underbrace{x + 1 > 5 \wedge x + 1 + \frac{1}{x-12} > 5 + \frac{1}{x-12}}_{\text{No son equivalentes}}$$

16.8.3.1.3 **Teorema:** El conjunto solución de una inecuación se altera generalmente si se multiplica la misma por una regla polinomial.

Ejemplo:

Sea: $x > 4 \Rightarrow x \in \langle 4, \infty \rangle$

Si multiplicamos $x - 11$, $x - 11 > 0$

$$\boxed{\Rightarrow x(x-11) > 4(x-11) \Rightarrow x \in \langle 4, \infty \rangle - \{11\}}$$

16.8.4 La Inecuación Fraccionaria

Definición.- Es toda proposición abierta de la forma:

$$\frac{F(x)}{G(x)} > P(x) \quad ó \quad \frac{F(x)}{G(x)} < P(x)$$

16.8.4.1 **Teorema:** Sea la inecuación.

$$\frac{F(x)}{G(x)} > 0 \Rightarrow \boxed{F(x)Q(x) > 0 \wedge Q(x) \neq 0}$$

$$ó \quad \frac{F(x)}{G(x)} < 0 \Rightarrow \boxed{F(x)Q(x) < 0 \wedge Q(x) \neq 0}$$

Toda inecuación fraccionaria se transforma a otro equivalente entera, tal que esta es el producto del numerador y denominador a condición que este último sea distinto de cero.

Ejemplo:

Resolver la inecuación: $\dfrac{2x+11}{33x+5} > 0$

Solución:

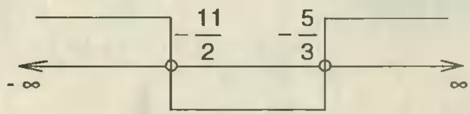
(1°) **De acuerdo al teorema:**

$\Rightarrow (2x+11)(33x+5) > 0 \;\wedge\; 33x+5 \neq 0$

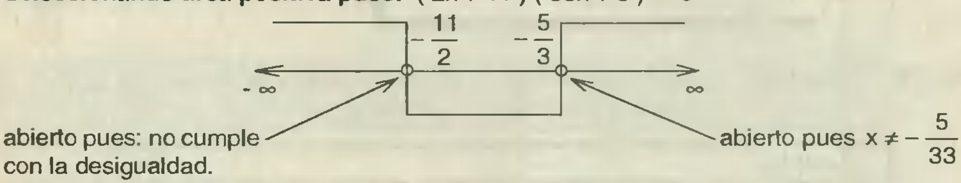
(2°) **Resolviendo el sistema simultáneo mediante el método de áreas:**

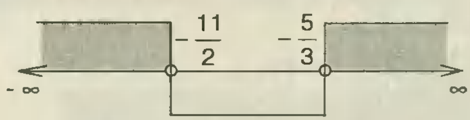
$\Rightarrow x = -\dfrac{11}{2}$ y $x = -\dfrac{5}{33} \;\wedge\; x \neq -\dfrac{5}{33}$

(3°) **Graficando:**



(4°) **Seleccionando área positiva pues:** $(2x+11)(33x+5) > 0$





(5°) **Finalmente:**

$\therefore\; \boxed{x \in \left< -\infty, -\dfrac{11}{2} \right> \cup \left< -\dfrac{5}{33}, \infty \right>}$

16.8.5 **La Inecuación Irracional**

Definición.- Es toda inecuación en la cual la variable se encuentra afectado por el algoritmo de la radicación.

Ejemplo:

$$\sqrt{x+1} > 0$$

$$\sqrt{x^2+x-6} + \sqrt{x^2+4x+3} \leq \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt[3]{x+8} \geq \sqrt[3]{x}$$

Son inecuaciones irracionales.

Lema.-
Sean a y b $\in$ IR $\Rightarrow$ Si: $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq b$

Ejemplo:
Resolver: $\sqrt{x^2 - 7} \geq \sqrt{6x}$

Solución:

(1°) **Debido a que la raíz cuadrada de un número real es cero o mayor que cero.**

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 7} \geq \sqrt{6x} \geq 0$

(2°) **De acuerdo al Lema establecido**

$\Rightarrow x^2 - 7 \geq 6x \geq 0$

(3°) **El sistema equivalente será:**

$$\begin{cases} x^2 - 7 \geq 0 \text{ .... } (\text{I}) \\ 6x \geq 0 \text{ .... } (\text{II}) \\ x^2 - 7 \geq 6x \text{ .... } (\text{III}) \end{cases}$$

(4°) Resolviendo el sistema equivalente

De (I): $x^2 - 7 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 7$

$\Rightarrow \boxed{x \in \langle -\infty, -\sqrt{7}\,] \cup [\,\sqrt{7}, \infty \rangle}$

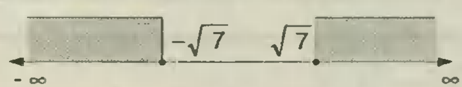
De (II): $6x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 0}$

De (III): $x^2 - 6x - 7 \geq 0 \Rightarrow (x - 7)(x + 1) \geq 0$

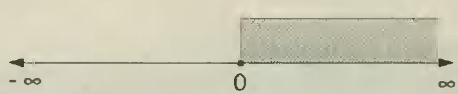
$\Rightarrow \boxed{x \in \langle -\infty, -1\,] \cup [\,7, \infty \rangle}$

Intersección.- (Para mayor panorama, grafiquemos).

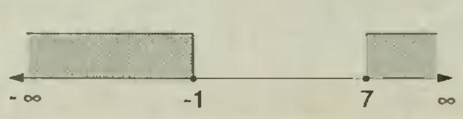
De (I):



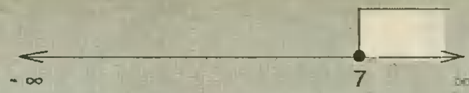
De (II):



De (III):



Intersección de (I), (II) y (III)



$\therefore \boxed{x \in [7, \infty>}$

16.8.6 Teoremas Relativos a las Inecuaciones Irracionales.

16.8.6.1 **Teorema:** Si $n \in IN$ pares:

a) $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y$

b) $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow 0 \leq x < y$

16.8.6.2 **Teorema:** Si $n \in IN$ impares:

a) $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$

b) $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$

c) $\sqrt[n]{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

d) $\sqrt[n]{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

16.8.6.3 **Teorema:** (Relativo a inecuaciones con 2do miembro racional)

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b > 0 \wedge a < b^2 \right]$$

$$\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b \geq 0 \wedge a \leq b^2 \right]$$

16.8.6.4 **Teorema:** (Relativo a Inecuaciones con 2do miembros racionales).

$$\boxed{\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b < 0 \vee \left(b \geq 0 \wedge a > b^2 \right) \right]}$$

$$\boxed{\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b < 0 \vee \left(b \geq 0 \wedge a \geq b^2 \right) \right]}$$

Ejemplo:

Resolver: $\sqrt{6x + 1} \geq 2x - 3$

Solución:

(1°) De acuerdo al teorema ya establecido:

$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \underbrace{a \geq 0 \wedge \left[\underbrace{b < 0 \vee \left(\underbrace{b \geq 0 \wedge a \geq b^2}_{\text{Intersec.}} \right)}_{\text{Unión}} \right]}_{\text{Intersección}}$$

(2°) **Asociando elementos del ejemplo al teorema.**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{6x+1}}_{a} \geq \underbrace{2x-3}_{b} \Leftrightarrow \underbrace{6x+1\geq 0 \wedge \underbrace{\left[\,2x-3<0 \vee \underbrace{\left(2x-3\geq 0 \wedge 6x+1\geq(2x-3)^2\right)}_{\text{Intersec.}}\right]}_{\text{Unión}}}_{\text{Intersección}}$$

(3°) **Realizando las sentencias:**

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\,x<\frac{3}{2} \vee \left(x\geq\frac{3}{2} \wedge 4x^2-18x+8\leq 0\right)\right]$$

(4°) **En la notación de intervalos:**

$$\Leftrightarrow \underbrace{[-\frac{1}{6},\infty> \wedge \underbrace{\left[<-\infty,\frac{3}{2}> \vee \left(\underbrace{[\frac{3}{2},\infty> \wedge [\frac{1}{2},4]}_{\text{Intersección}}\right)\right]}_{\text{Unión}}}_{\text{Intersección}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[-\frac{1}{6},\infty> \wedge \left[\underbrace{<-\infty,\frac{3}{2}> \vee [\frac{3}{2},4]}_{\text{Unión}}\right]}_{\text{Intersección}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[-\frac{1}{6},\infty> \wedge [<-\infty,4]]}_{\text{Intersección}}$$

$$\Leftrightarrow [-\frac{1}{6},4]$$

(5°) Finalmente el conjunto solución será dado por:

$$\boxed{x \in \left[-\frac{1}{6},4\right]}$$

16.8.7 Inecuaciones en Términos de Valor Absoluto.

Definición.- Son aquellas inecuaciones o proposiciones abiertas en los cuales la variable está contenida en el operador valor absoluto.

Ejemplo:

a) $|x| \geq 3$

b) $|x+2|+|x-9| \geq 5$

c) $4+x \geq |12x-1|$

Son inecuaciones en términos de valor absoluto.

18.8.7.1 **La Definición de Valor Absoluto y sus Consecuencias ($|a| = V.A(a)$)**

Definición.- El valor absoluto de un número real "a" denotado por $|a|$, se define por la regla siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a = op(a) \text{ si } a < 0, a \in IR \end{cases}$$

18.8.7.2 ***Consecuencias:***

(1°) $|a| = |-a|$ "El V.A. de "a" es el mismo que el del opuesto correspondiente"

(2°) $|a| \geq a$ "El V.A. de "a" es mayor o igual que el elemento a.

(3°) $|a| \geq -a$ "El V.A. de a es mayor o igual que el elemento opuesto de a".

(4°) $-|a| \leq a \leq |a|$ "Un elemento de IR está siempre contenido entre el opuesto del V.A. y su propio V.A."

(5°) $|a| \geq 0,\ a \in IR$ "El V.A. es siempre o cero o positivo".

(6°) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(7°) $|ab| = |a||b|,\ a, b \in IR$ "El V.A. de un producto es igual que el producto de los V.A. de sus factores.

(8°) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$

(9°) $|a + b| \geq |a| + |b|$

(10°) $|a|^2 = |a|^2 = a^2$

16.8.7.3 **Teorema:** (Inecuación en V.A. con 2° miembro constante)

$|x| < b \Leftrightarrow (b > 0 \wedge -b < x < b)$

Ejemplo:

Resolver: $|x| < 11$

Solución:

(1°) De acuerdo al teorema y asociando los elementos del ejemplo.

$$\underbrace{|x|}_{a} < \underbrace{11}_{b} \Leftrightarrow (11 > 0 \ \wedge \ -11 < x < 11)$$

(2°) Realizando las sentencias: $\underbrace{|x|}_{a} < \underbrace{11}_{b} \Leftrightarrow (-11 < x < 11)$

$\therefore \boxed{x \in \langle -11 . 11 \rangle}$

16.8.7.4 **Teorema:** (Inecuación en V.A. con 2° miembro constante)

$|x| \leq b \Leftrightarrow (b \geq 0 \wedge -b \leq x \leq b)$

Ejemplo:

Resolver: $|3x - 5| \leq 13$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema y asociando los elementos del ejemplo.**

$$\underbrace{|3x-5|}_{a} \leq \underbrace{13}_{b} \Leftrightarrow (13 \geq 0 \wedge -13 \leq 3x - 5 \leq 13)$$

(2°) **Realizando las sentencias:**

$$\underbrace{|3x-5|}_{a} \leq \underbrace{13}_{b} \Leftrightarrow (13 \geq 0 \wedge -8 \leq 3x \leq 18)$$

$$\Leftrightarrow \left(13 \geq 0 \wedge -\frac{8}{3} \leq x \leq 6\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{8}{3} \leq x \leq 6\right)$$

(3°) **Finalmente:**

$$\boxed{x \in \left[-\frac{8}{3}, 6\right]}$$

16.8.7.5 **Teorema:** (Inecuación en términos de valor absoluto con 2° miembro constante)

$|x| > b \Leftrightarrow x < -b$ ó $x > b$; $b > 0$

16.8.7.6 **Teorema:** $|x| < |b| \Leftrightarrow x^2 < b^2$

16.8.7.7 **Teorema:** $|x| \leq |b| \Leftrightarrow x^2 \leq b^2$

16.8.7.8 **Teorema**

(a) $|x| > b, b < 0 \quad \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(b) $|x| < b, b < 0 \quad \Leftrightarrow x \in \phi$

Ejemplo:

Resolver: $\sqrt{6x+1} \geq 2x - 3$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema siguiente ya establecido:**

$$\boxed{\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge \left[b < 0 \vee \left(b \geq 0 \wedge a \geq b^2\right)\right]}$$

(2°) **Asociando los elementos del ejemplo al teorema:**

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{6x+1}}_{a} \geq \underbrace{2x-3}_{b} \Leftrightarrow 6x+1\geq 0 \wedge \left[\ 2x-3<0 \vee \left(\ 2x-3\geq 0 \wedge 6x+1\geq (\ 2x-3\ )^2\ \right)\right]$$

(3°) **Resolviendo simultáneamente:**

$$\Rightarrow \sqrt{6x+1} \geq 2x-3 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\ x<\frac{3}{2} \vee \left(\ x\geq \frac{3}{2} \wedge \underbrace{4x^2-18x+8\geq 0}_{(\ 2x+1\ )(\ x-4)}\ \right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\ x<\frac{3}{2} \vee \left(\ x\geq \frac{3}{2} \wedge \left(\ -\infty<x<-\frac{1}{2} \vee 4<x<\infty\ \right)\right)\right]$$

(4°) **Realizando las sentencias**

$$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\ x<\frac{3}{2} \vee \underbrace{\left(\ x\geq \frac{3}{2} \wedge \left(\ -\infty<x<-\frac{1}{2} \vee 4<x<\infty\ \right)\right)}_{\text{Intersección}}\right]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\ x<\frac{3}{2} \vee (\ 4<x<\infty\ )\ \right]$$

$$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\ \underbrace{x<\frac{3}{2} \vee (\ 4<x<\infty\ )}_{\text{Unión}}\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x\geq -\frac{1}{6} \wedge \left[\left(\ -\infty<x<\frac{3}{2}\ \right) \vee (\ 4<x<\infty\ )\ \right]}_{\text{Intersección}}$$

$$\therefore \boxed{x\in \left[-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right> \cup <4, \infty>}$$

16.9 INECUACIONES EN TERMINOS DE MAXIMO ENTERO.

Definición: Son aquellas inecuaciones que poseen la variable afectada por el operador $[\![\ \ ]\!]$ que se lee "máximo entero".

Ejemplo:

Son inecuaciones en términos del máximo entero:

a) $3[\![x]\!]^3 \geq 1 + 2x$

b) $10\left[\!\!\left[\ \dfrac{x+6}{5}\ \right]\!\!\right] \leq [\![x-1]\!]$

Para resolver las inecuaciones de las características mencionadas se utiliza la definición y los teoremas correspondientes.

16.9.1 ***Definición:*** (Máximo entero)

Si $x \in \mathbb{R}$ se denota como máximo entero de x a la expresión $[\![x]\!]$ selecciona el mayor entero contenido por defecto si "x" fuera fraccionario o el mismo número si "x" es entero.

Simbólicamente.

Si: $[\![x]\!] = k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k \leq x < k + 1$

Ejemplo:

$[\![12.53]\!] = 12$ pues: $12 \leq 12.53 < 13$

$[\![8]\!] = 8$ pues: $8 \leq 8 < 9$

$[\![-3.02]\!] = -4$ pues: $-4 \leq -3.02 < -3$

$[\![-12]\!] = -12$ pues: $-12 \leq -12 < -11$

16.9.2 Teoremas Relativos a las Inecuaciones en Máximo Entero.

16.9.2.1 **Teorema:** Sea $a \in \mathbb{Z} \wedge$

$[\![x]\!] \geq a \Leftrightarrow x \geq a$

Demostración:

1er Caso: Si: $a \in \mathbb{Z} \wedge [\![x]\!] \geq a$

$\Rightarrow a \leq [\![x]\!] \leq x \Leftrightarrow a \leq x \Leftrightarrow a \geq x$

2° Caso: Si: $x \geq a$, $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a \leq [\![x]\!]$, donde $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a \leq x \leq [\![x]\!]$

$\Rightarrow a \leq [\![x]\!] \Leftrightarrow [\![x]\!] \geq a$

Ejemplo:

Resolver la inecuación $[\![12 - x]\!] \geq 7$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema:**

$[\![12 - x]\!] \geq 7$

$\Leftrightarrow 12 - x \geq 7$

(2°) **Resolviendo la inecuación obtenida**

$\Rightarrow 12 - 7 \geq x$

$\Rightarrow x \leq 5$

$\therefore \boxed{x \in \langle -\infty, 5]}$

16.9.2.2 **Teorema:** (Inecuaciones en términos de Máximo Entero, con 2° miembro $\in Z$)

Sea: $[\![x]\!] \leq a \; ; \; a \in Z$

$\Leftrightarrow \quad x < a + 1$

Demostración:

(1°) **Considerando un 1er caso:**

$$[\![x]\!] \leq a \; ([\![x]\!] = a \vee [\![x]\!] < a)$$

(i) Si: $[\![x]\!] = a , a \in Z \Rightarrow a \leq x < a + 1$ .... (α)

(ii) Si: $[\![x]\!] < a \quad \Leftrightarrow [\![x]\!] = a - 1 , a - 2 , a - 3$, pues: " $[\![x]\!]$ " como "a" $\in Z$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si: } [\![x]\!] = a - 1 & \Leftrightarrow [a - 1 \in Z \wedge a - 1 \leq x < a] \\ \text{Si: } [\![x]\!] = a - 2 & \Leftrightarrow [a - 2 \in Z \wedge a - 2 \leq x < a - 1] \\ \text{Si: } [\![x]\!] = a - 3 & \Leftrightarrow [a - 3 \in Z \wedge a - 3 \leq x < a - 2] \end{array}\right\} x < a \; \ldots\ldots (\beta)$$

de $(\alpha) \cup (\beta)$: $\boxed{x < a + 1}$

(2°) **Considerando un 2° caso**

Si: $\boxed{x < a + 1}$ .... (α)

Además: $[\![x]\!] \leq x$ .... (β)

de (α) y (β): $[\![x]\!] \leq x < a + 1$

$\Rightarrow [\![x]\!] < a + 1, a \in Z$

$\Rightarrow a + 1 \in Z$

A su vez: $a \in Z \Rightarrow a + 1 \in Z$

También: $[\![x]\!] \in Z \Rightarrow [\![x]\!] = a, a - 1 , a - 2, \ldots\ldots$

$\Rightarrow [\![x]\!] = \ldots a - 3, a - 2, a - 1, a$

$\Rightarrow \boxed{[\![x]\!] \leq a}$ Lqqd.

Ejemplo:

Resolver: $[\![13x - 5]\!] \leq 21$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema:**

$$[\![\underbrace{13x - 5}_{x}]\!] \leq \underbrace{21}_{a}$$

$$\Rightarrow \underbrace{13x - 5}_{x} < \underbrace{21}_{a} + 1$$

(2°) **Resolviendo la inecuación establecida mediante el teorema.**

$\Rightarrow 13x < 22 + 5$

$$x < \frac{27}{13}$$

$$x < 2\frac{1}{13}$$

$$\therefore \boxed{x \in \langle -\infty, 2\frac{1}{13} \rangle}$$

16.9.2.3 **Teorema:** $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$$[\![a]\!] + [\![b]\!] \leq [\![a + b]\!]$$

16.9.2.4 **Teorema:** $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$[\![a]\!] + [\![-a]\!] = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

16.9.2.5 **Teorema:** $\forall\, a \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}$

Si: $a > x$

$\Rightarrow [\![x]\!] < [\![x]\!] + 1 \leq a$

16.9.2.6 **Teorema:** $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

Si: $a \leq b$

$\Rightarrow [\![a]\!] \leq [\![b]\!]$

16.9.2.7 **Teorema:** Si: $a = x - [\![x]\!]$

$\Rightarrow 0 \leq a < 1$

16.9.2.8 **Teorema:** Si $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$x = a + b,\ 0 \leq b < 1,\ a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a = [\![x]\!]$

16.9.2.9 **Teorema:** Si $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\![x + a]\!] = [\![x]\!] + a$

"El operador máximo entero es distributivo sobre una suma de componentes enteras"

Demostración:

(1°) **Por definición de máximo entero.**

Si: $[\![x]\!] = b$ .... (γ)

$\Rightarrow b \leq x < b + 1$ .... (α)

(2°) **Sumando "a" a los términos de la desigualdad** (α)

$\Rightarrow a + b \leq x + a < a + b + 1$

(3°) Mediante la definición del máximo entero:

$\Rightarrow [\![x + a]\!] = a + b$ .... (β)

(4°) Sustituyendo (γ) sobre (β)

$\Rightarrow [\![x + a]\!] = a + b \ ; \ [\![x]\!] = b$

$\therefore \boxed{[\![x + a]\!] = [\![x]\!] + a}$ **Lqqd.**

16.9.2.10 **Teorema:** Si $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow [\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$

18.9.2.11 **Teorema:** Si $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x - 1 < [\![x]\!] \leq x$

Demostración:

(1°) **Si $x \in \mathbb{R}$**

$\Rightarrow x = [\![x]\!] + m \ ; \ 0 \leq m < 1$

$\Rightarrow [\![x]\!] = x - m$ .... (A)

(2°) **A partir de la condición de "m"**

$-1 < -m \leq 0$

(3°) **Sumando x a cada elemento de la desigualdad:**

$x - 1 < x - m \leq x$ .... (B)

(4°) Sustituyendo (A) sobre (B)

$$x - 1 < \underbrace{x - m}_{[\![x]\!]} \leq x$$

$\therefore \boxed{x - 1 < [\![x]\!] \leq x}$

Ejemplo:

Resolver: $\left[\!\!\left[x - \dfrac{12}{x} \right]\!\!\right] \geq 1$

Solución:

(1°) **Mediante la utilización de los teoremas mencionados.**

$$\Rightarrow x - \frac{12}{x} \geq 1$$

(2°) Resolviendo esta última

$$\Rightarrow x - \frac{12}{x} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x} \geq 0$$

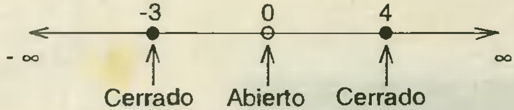
$\Rightarrow (x^2 - x - 12) x \geq 0 , \ x \neq 0$

(3°) De acuerdo a las inecuaciones de grado superior:

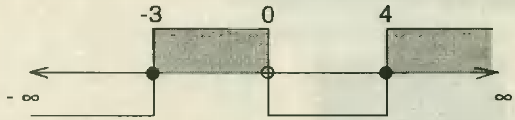
$(x-4)(x+3)x \geq 0, \quad x \neq 0$

(4°) Ceros: $4, 0, -3; \quad x \neq 0$

Gráfica:



(5°) Línea quebrada:



(6°) Finalmente:

$\therefore \boxed{[-3, 0> \cup [4, \infty>}$

Ejemplo:

Resolver: $[\![x+2]\!] = 3x-1$

Solución:

(1°) **Al utilizar la regla distributiva.**

$[\![x]\!] + [\![2]\!] = 3x-1 \quad ; \qquad [\![x]\!] + 2 = 3x-1$

$\Rightarrow [\![x]\!] = 3x-3$

(2°) **Por definición de máximo entero y a condición que** $3x-3 \in Z$

$\Rightarrow 3x-3 \leq x < 3x-2$

(3°) **Resolviendo la inecuación:**

$$\begin{cases} 3x-3 \leq x \ \wedge \\ x < 3x-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x \leq 3 ; x \leq \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow 2 < 2x ; \ x > 1$

(4°) **Se logra:**

$\boxed{1 < x \leq 3/2}$ .... (α)

(5°) **En razón a ser $3x-1 \in Z$**

$\Rightarrow 3x-1 = m ; \ m \in Z$

(6°) **Resolviendo ésta**

$\Rightarrow 3x = m+1, \ \boxed{x = \dfrac{m+1}{3}}$ .... (β)

En (α):

$$1 < \frac{m+1}{3} \le \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow 6 < 2m + 2 \le 9$

$\Rightarrow 4 < 2m < 7$

$\Rightarrow 2 < m < 3\frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{m = 3}$

(7°) **Sustituyendo en (β)**

$$\Rightarrow x = \frac{3+1}{3}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

16.10 LA INECUACION POLINOMIAL O DE ORDEN SUPERIOR

16.10.1 ***Definición:*** Son todas aquellas inecuaciones que adoptan la forma:

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n > 0$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}; \; a_0 \neq 0$$

16.10.2 Resolución de una Inecuación Polinomial

Para resolver una inecuación polinomial se utiliza el método de áreas descrito para el caso de las inecuaciones cuadráticas; se presentan los 3 casos usuales siguientes:

(1°) **Primer Caso.-**

Los ceros de la regla polinomial son elementos de $\mathbb{R}$ (**no presentan multiplicidad**). Según ello y $a > 0$:

(A) Se ubican los ceros sobre la recta numérica real

(B) Se traza las líneas quebradas determinando áreas positivas y negativas.

(C) La solución de la inecuación polinomial será la unión de las áreas positivas si $F(x) > 0$ ó la unión de las áreas negativas si $F(x) < 0$

Ejemplo:

Resolver:	$x^3 - 18x^2 + 77x > 60$

Solución:

(1°) **De acuerdo a lo establecido ordenemos:**

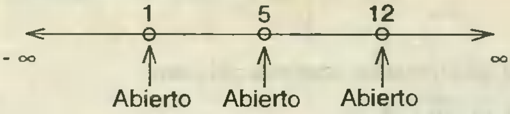
$x^3 - 18x^2 + 77x - 60 > 0$

(2°) Obtenemos los ceros mediante factorización:

$(x - 1)(x - 5)(x - 12) = 0$

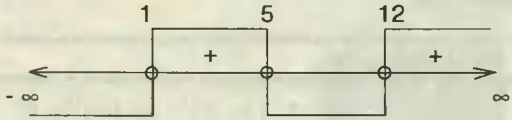
Ceros: 1, 5, 12

(3°) **Ubicando los ceros sobre la recta numérica real.**



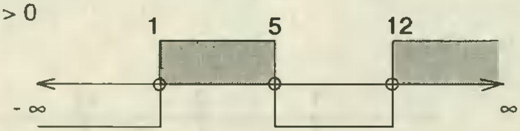
La simbología es el correspondiente al intervalo con extremo **abierto** pues 1, 5 y 12 hacen que la inecuación no se cumpla.

(4°) **Trazamos la línea quebrada a partir de** (∞)



(5°) **Seleccionamos las áreas positivas pues:**

$x^3 - 18x^2 + 77x - 60 > 0$



$\therefore$ $\boxed{x \in \langle 1,5 \rangle \cup \langle 12, \infty \rangle}$

(2°) **2° Caso.-**

Los ceros de $F(x)$ son elementos de $\mathbb{R}$ y **presentan algunos de ellos multiplicidad** de orden par o impar, por lo que consideremos:

(i) **Caso de Multiplicidad par:** Dichos ceros no permiten variación de signos de áreas.

Ejemplo:

Resolver: $(x - 5)(x - 11)^2(x - 19)^{40} \geq 0$

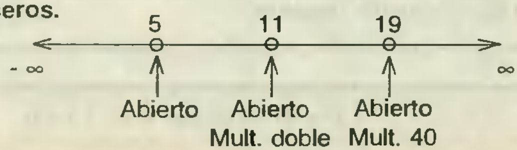
Solución:

(1°) **Se tiene por ceros:** $5 \,;\, \{11\}_2 \,,\, \{19\}_{40}$

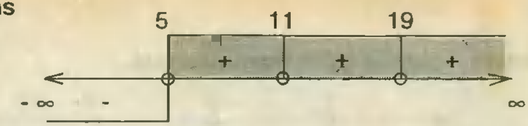
Designando de dicho modo la **multiplicidad** correspondiente:

5 : carece de multiplicidad
$\{11\}_2$: multiplicidad doble
$\{19\}_{40}$: multiplicidad de orden 40

(2°) **Ubicación de los ceros.**



(3°) **Líneas quebradas**



(4°) Seleccionamos los intervalos positivos del caso:

$x \in \langle 5, \infty \rangle - \{11, 19\}$

(ii) **Caso de la Multiplicidad Impar**

Dichos ceros permiten una marcha normal de la regla es decir permiten la variación de signos de los intervalos.

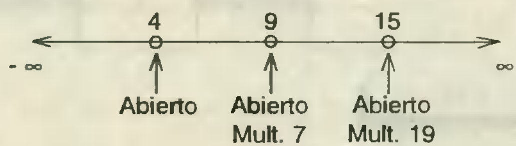
Ejemplo:

Resolver: $(x - 4)(x - 9)^7(x - 15)^{10} > 0$

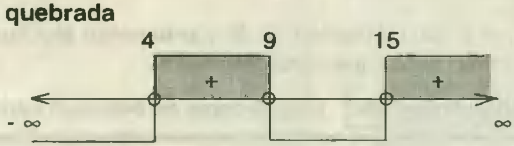
Solución:

(1°) **Ceros:** $4, \{9\}_7, \{15\}_{19}$

(2°) **Gráfica.**



(3°) **Trazo de las línea quebrada**



$\therefore$ $x \in \langle 4, 9 \rangle \cup \langle 15, \infty \rangle$

(4°) **A modo de comentario:**

4, 9 y 15 no verifican la inecuación por lo que será excluidosdel conjunto solución.

(3°) **3er Caso:**

Cuando alguno de los factores de F (x)

Poseen ceros complejos.

En tal caso si el término principal del factor en referencia secaracteriza por tener coeficiente principal positivo, dicho factor se comportará como una constante positiva, en caso contrario como una constante negativa.

Ejemplo:

Resolver: $(x^2 + 3x - 70)(x^2 + x + 1) < 0$

Solución:

(1°) Al factorizar para obtener los ceros, se logra:

$$(x+10)(x-7)(x^2+x+1)<0$$

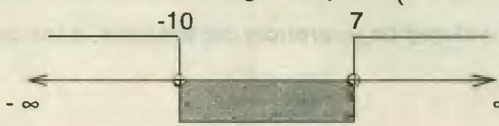
Cero: - 10 Cero: 7 Ceros: $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(2°) Al graficar se obtiene:

Observar que los ceros complejos no son posibles ubicarlos en IR

(3°) Línea quebrada y seleccionando áreas negativas pues: $(x^2+3x-70)(x^2+x+1)<0$



$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -10, 7 \rangle}$

16.11 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

16.11.1 Ejercicio Explicativo

Hallar el menor entero "n" que verifica:

$$\frac{n+3}{n-3}-1<\frac{E}{10} \quad ; \quad n>3$$

Si: E = 0.001

Recuerde:

Si: $\frac{a}{b}>0 \wedge b>0 \Rightarrow a>0$

Solución:

(1°) Como (n - 3) es positivo

(2°) Multiplicando por 10000(n - 3)

$$\Rightarrow 10\,000(n-3)\left(\frac{n+3}{n-3}\right)-10\,000(n-3)<10\,000(n-3)\times\frac{1}{10\,000}$$

$$\Rightarrow 10\,000(n+3) \quad -10\,000(n-3)<n-3$$

(3°) Simplificando:

$\Rightarrow \cancel{10\,000n} + 30\,000 - \cancel{10\,000n} + 30\,000 < n - 3$

$\Rightarrow 60\,000 < n - 3$

$\Rightarrow n > 60\,003$;

$\therefore \boxed{n = 60\,004}$

16.11.2 Ejercicio Explicativo

Resolver: $12x^2 + 28x - 5 \geq 0$

Recuerde:

Un método práctico de solución de inecuación cuadrática es el que corresponde a la regla de áreas o de signos.

Solución:

(1) **Obtenemos los valores de referencia del trinomio, o los ceros del mismo.**

$12x^2 + 28x - 5 = 0$

6x - 1
2x 5

$(6x - 1)(2x + 5) = 0$

$x = 1/6$; $x = -5/2$

(2) **Ubicación en la recta numérica.**

(3) **Aplicando la regla de signos y considerando la desigualdad** ≥ 0

(4) **Elegimos los intervalos correspondientes.**

$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{6}; \infty\rangle$

$\therefore \boxed{12x^2 + 28x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{6}; \infty\rangle}$

16.11.3 Ejercicio Explicativo

Resolver: $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 56} \geq 0$

Recuerde:

El teorema:

Si $\frac{a}{b} > 0 \Rightarrow ab > 0,\ b \neq 0$ son equivalentes.

Solución:

(1°) **Para obtener los valores de referencia de la inecuación factoricemos:**

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-7)(x+8)} \geq 0$$

(2°) **Aplicando el teorema correspondiente**

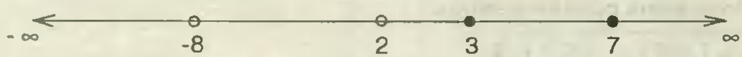
$(x-2)(x-3)(x-7)(x+8) \geq 0$; $(x-7)(x+8) \neq 0$

$\Rightarrow$ Valores de referencia:

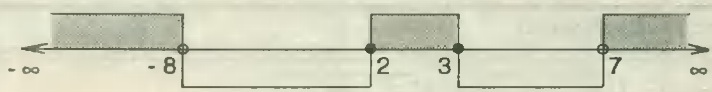
$(x-2)(x-3)(x-7)(x+8) = 0$

$x = 2$, $x = 3$, $x = 7$, $x = -8$; $x \neq 7$, $x \neq -8$

(3°) **Ubicando los valores sobre la recta numérica.**



(4°) **Aplicando la regla de los signos y de acuerdo al sentido de la desigualdad.**



(5°) Obteniendo los intervalos para los cuales se verifica la desigualdad.

$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty , -8 \rangle \cup [2 ; 3] \cup \langle 7 , \infty \rangle}$

16.11.4 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $10 \leq x^2 - 8x + 25 \leq 18$

Recuerde:

Un método apropiado y práctico para resolver inecuaciones cuadráticas es la regla de signos o de áreas.

Solución:

(1°) De acuerdo a la proposición abierta:

$$\begin{cases} 10 \leq x^2 - 8x + 25 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \quad\quad x^2 - 8x + 25 \leq 18 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

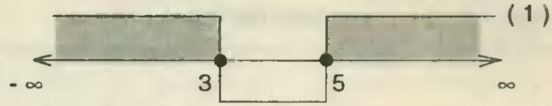
de (1): $x^2 - 8x + 15 \geq 0$

$(x-5)(x-3) = 0$; $x = 5$, $x = 3$ puntos de referencia.

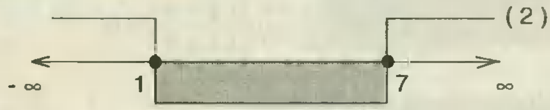
de (2): $x^2 - 8x + 7 \leq 0$

$(x-7)(x-1) = 0 \; ; \; x = 7 \; , \; x = 1$ puntos de referencia.

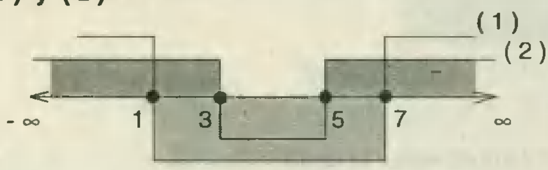
(2°) **En la recta numérica, la inecuación (1)**



En la recta numérica, la inecuación (2)



(3°) **Interceptando (1) y (2)**



(4°) **Los intervalos comunes serán:**

$\therefore \; \boxed{x \in [1, 3] \cup [5, 7]}$

16.11.5 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $\sqrt[8]{x^2 - 4x + 3} \leq \sqrt[8]{x^2 - 7x + 12}$

Recuerde:

Para resolver una inecuación irracional se le transforma a un sistema de inecuaciones.

Solución:

(1°) **Transformando la desigualdad irracional propuesta a un sistema equivalente que la restrinja.**

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1) \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2) \\ x^2 - 4x + 3 \geq x^2 - 7x + 12 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3) \end{cases}$$

(2°) de (1) **puntos de referencia:** $x^2 - 4x + 3 = 0$

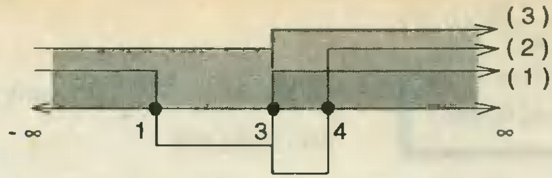
$(x-3)(x-1) = 0 \; ; \; x = 3 \; , \; x = 1$

de (2) **punto de referencia:** $(x-3)(x-4) = 0 \; ; \; x = 3 \; , \; x = 4$

de (3) **punto de referencia:** $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 - 7x + 12$

$3x \geq 9 \; ; \; x \geq 3$

(3°) Graficando:



$\therefore \boxed{x \in [\,4\,,\infty >}$

16.11.6 Ejercicio Explicativo

Si: $(2^{-1} + 6x^{-1}) \in <\; 1\,;8\,]$

Hallar el intervalo de variación de $\dfrac{25x^2 - 16}{4}$

Recuerde:

En el álgebra de las desigualdades:

Si: $a > b$

$\Rightarrow$ $am > bm$ si $m > 0$

$\Rightarrow$ $am < bm$ si $m < 0$

$\Rightarrow$ $a^{2n} > b^{2n}$ si $a > 0$ y $b > 0$

Solución:

(1°) **Aplicando la definición correspondiente al intervalo proporcionado:**

$1 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{6}{x} \leq 8$;

$\Rightarrow$ sumando $-\dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{6}{x} \leq \dfrac{15}{2}$;

$\Rightarrow$ al obtener recíprocas : $2 > \dfrac{x}{6} \geq \dfrac{2}{15}$;

$\Rightarrow$ Por 6 : $12 > x > \dfrac{12}{15}$;

$\therefore \boxed{12 > x \geq \dfrac{4}{5}}$ .... (A)

(2°) **Para obtener la limitación de $\left(\dfrac{25x^2 - 16}{4}\right)$ elevemos al cuadrado (A)**

$\Rightarrow$ por 25 : $144 > x^2 \geq \dfrac{16}{25}$;

$\Rightarrow$ sumando - 16 : $3\,600 > 25\,x^2 \geq 16$;

$\Rightarrow$ dividiendo entre 4 : $3\,584 > 25x^2 - 16 \geq 0$;

$$896 > \frac{25x^2-16}{4} \geq 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{25x^2-16}{4} \in [\,0\,,896>}$$

La expresión $\frac{25x^2-16}{4}$ varía desde cero hasta 896.

16.11.7 Ejercicio Explicativo:

Resolver la inecuación:

$$(0.25)^{\frac{6x-4}{3}} .(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.0625)^{\frac{3x-4}{6}} .(0.125)^{\frac{4x-2}{9}}$$

Comentario:

En este punto se de debe considerar

$$\text{Si:} \quad 0 < a < 1 \ \text{ y } \ a^x < a^y$$
$$\Rightarrow x > y$$

Solución:

(1°) **Transformando las bases de las potencias, en estudio:**

$$\Rightarrow \left[(0.5)^2\right]^{\frac{6x-4}{3}} .(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < \left[(0.5)^4\right]^{\frac{3x-4}{6}} \left[(0.5)^3\right]^{\frac{4x-2}{9}}$$

Efectuando operaciones:

$$(0.5)^{\frac{6x-8}{3}} .(0.5)^{\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}} .(0.5)^{\frac{4x-2}{3}}$$

$$(0.5)^{\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4}} < (0.5)^{\frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}}$$

(2°) **Como la base es menor que 1, debe cambiar el sentido de la desigualdad para los exponentes.**

$$\frac{12x-8}{3}+\frac{2x-3}{4} > \frac{6x-8}{3}+\frac{4x-2}{3}$$

(3°) **Eliminando denominadores.**

$$48x - 32 + 6x - 9 > 24x - 32 + 16x - 8$$

(4°) **transponiendo y reduciendo términos.**

$$54x - 40x > - 40 + 41$$
$$14x > 1 \quad ; \quad x > 1/14$$

(5°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{x \in <\frac{1}{14}, \infty>}$$

16.11.8 **Ejercicio Explicativo**

En IR definimos la operación $a * b = \dfrac{a-b}{2}$, según esto hallar el conjunto solución de:

$$(x-1)*2 \le (3*x)*\frac{1}{2} \le (1+2x)*5$$

Comentario:

En el presente ejemplo se hace utilización del operador matemático (*)

Solución:

(1°) Aplicando la operación * definida, a cada término de la inecuación:

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)*2 = \dfrac{(x-1)-2}{2} = \dfrac{x-3}{2} \\[2ex] (3*x)*\dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{3-x}{2}\right)*\dfrac{1}{2} = \dfrac{\dfrac{3-x}{2}-\dfrac{1}{2}}{2} = \dfrac{2-x}{4} \\[2ex] (1+2x)*5 = \dfrac{1+2x-5}{2} = x-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow : \frac{x-3}{2} \le \frac{2-x}{4} \le x-2$$

(2°) Multiplicando por 4: 2x - 6 < 2 - x < 4x - 8

$$\Leftrightarrow (2x-6 \le 2-x) \wedge (2-x \le 4x-8)$$

$$\Leftrightarrow (2x+x \le 2+6) \wedge (-x-4x \le -10)$$

$$\Leftrightarrow \left(x \le \frac{8}{3}\right) \wedge (x \ge 2)$$

(3°) Representando gráficamente.

$$\therefore \boxed{S = \left\{ x \in R \,/\, 2 \le x \le \frac{8}{3} \right\}}$$ ó

$$\boxed{x \in \left[2, \frac{8}{3}\right]}$$

16.11.9 Ejercicio Explicativo

Resolver las inecuaciones:

a) $x^2 - x - 6 \geq 0$

b) $3x^2 - 11x + 6 < 0$

Comentario:

El ejemplo corresponde al tipo de inecuación de segundo grado, para la solución se aplica la regla de signos de la multiplicación .

Solución:

(1°) $x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow [(x - 3) \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0] \vee (x - 3 \leq 0 \wedge x + 2 \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 3 \wedge x \geq -2) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -2)$

$\Leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq -2)$

Representación Gráfica:

$\therefore \boxed{x \in \langle -\infty, -2] \cup [3, +\infty \rangle}$

(2°) Por factorización: $3x^2 - 11x + 6 = (3x - 2)(x - 3)$

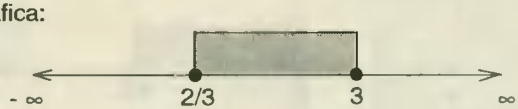
Entonces: $\{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 11x + 6 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (3x - 2)(x - 2) < 0\}$

$\Leftrightarrow (3x - 2 > 0 \wedge x - 3 < 0) \vee (3x - 2 < 0 \wedge x - 3 > 0)$

$$\Leftrightarrow \left(x > \frac{2}{3} \wedge x < 3\right) \vee \left(x < \frac{2}{3} \wedge x > 3\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} < x < 3\right) \vee (\varnothing) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} < x < 3\right)$$

Representación Gráfica:



$\therefore \boxed{x \in \left\langle \frac{2}{3}, 3 \right\rangle}$

16.11.10 Ejercicio Explicativo

Resolver: $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 > 0$

Comentario:

Los ceros de un polinomio son aquellos valores reales o complejos que anulan a dicho polinomio.

Solución:

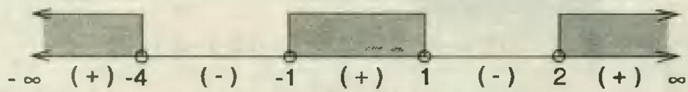
(1°) Sea $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x+4)(x+1)(x-1)(x-2) = 0$

(2°) Se hallan los ceros del polinomio factorizado.

$$x = -4 \ ; \ x = -1 \ ; \ x = 1 \ ; \ x = 2$$

(3°) Se ubican los ceros sobre la recta numérica.



(4°) Se anota el signo (+) en el primer intervalo luego en los demás intervalos de variación se alterna los signos (-), (+), (-), ..., de derecha a izquierda.

(5°) Como $P(x) > 0$, el conjunto solución es la unión de los intervalos positivos, esto es:

$\therefore \ \boxed{x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle}$

16.11.11 Ejercicio Explicativo

Resolver: $x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24 < 0$

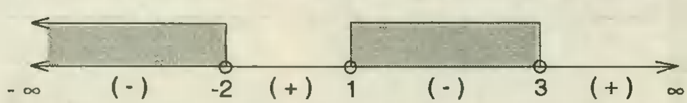
Solución:

(1°) Sea: $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 20x + 24$

$\quad = (x+2)(x-1)(x-3)(x^2+4) = 0$

(2°) La ecuación $(x^2+4) = 0$, tiene ceros complejos, por lo que $x^2+4>0$; $\forall \ x \in \mathbb{R}$. Podemos entonces prescindir de este factor y analizar los intervalos de variación del polinomio:

(3°) $P(x)$: $(x+2)(x-1)(x-3) < 0$, cuyos ceros son: $x = -2$; $x = 1$; $x = 3$.



(4°) Como $P(x) < 0$, el conjunto solución es la unión de los intervalos negativos.

$\therefore \ \boxed{x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle}$

16.11.12 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver: $$\frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} \le 0$$

Solución:

(1°) **Factorizando el numerador y denominador:**

$$\Rightarrow \frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x-12} \le 0 \Rightarrow \frac{(2x-1)(x+2)}{(x+6)(x-2)} \le 0 \text{ .... } (\alpha)$$

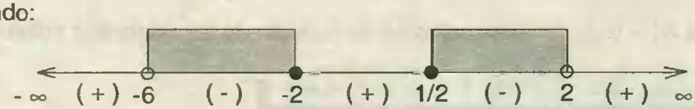
(2°) **Inecuación equivalente:** $\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0 \Rightarrow \{P(x).Q(x) \gtrless 0 \wedge Q(x) \ne 0\}$

$(x+6)(x-2)(2x-1)(x+2) \le 0 \wedge (x+6)(x-2) \ne 0$

los ceros son: $(x+6)(x-2)(2x-1)(x+2) = 0 \wedge (x \ne -6, x \ne 2)$

$x = -6 \ ; \ x = -2 \ ; \ x = 1/2 \ ; \ x = 2 \wedge (x \ne -6, x \ne 2)$

(3°) Graficando:



$\therefore \ \boxed{x \in \left< -6, -2 \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right>}$

16.11.13 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $$\frac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \ge 0$$

Recuerde:

Si: $\frac{a}{b} \ge 0 \Rightarrow ab \ge 0 \ ; \ b \ne 0$

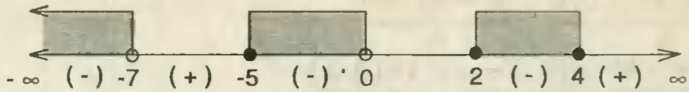
Solución:

(1°) Multiplicando por (- 1); cambia el sentido de la desigualdad: $\frac{x^3-x^2-22x+40}{x(x+7)} \le 0$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)} \le 0 \wedge x \ne 0, x \ne -7$$

(2°) Los ceros serán: $x = 2$; $x = 4$; $x = -5$: $x \neq 0$; $x \neq -7$

(3°) Graficando sobre la recta los ceros obtenidos.



$\Leftrightarrow$ $\boxed{x \in \langle -\infty, -7 \rangle \cup [-5, 0\rangle \cup [2, 4]}$

16.11.14 Ejercicio Explicativo

Resolver:

a) $|x + 6| > 2x - 3$

b) $|x^2 - 4| \geq -2x + 4$

Comentario:

Aplicación de los teoremas

$(1)\ |x| > b \Leftrightarrow (x > b \vee x < -b) \wedge b > 0$

$(2)\ |x| \geq b \Leftrightarrow (x \geq b \vee x \leq -b) \wedge b > 0$

En el caso (1) se resuelve a la unión de ambas. $x > b$; $x < -b$ y la solución que corresponde para el caso (2) procede análogamente.

Solución:

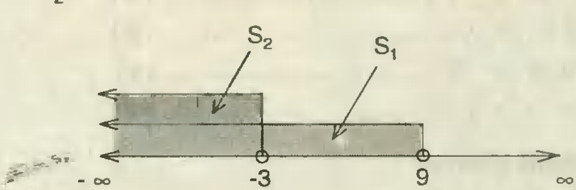
Resolviendo cada inecuación:

a) $\Leftrightarrow (x + 6) > 2x - 3 \vee (x + 6) < -(2x - 3)$

$\Leftrightarrow -x + 9 > 0 \vee x + 1 < 0$

$\Leftrightarrow x - 9 < 0 \vee x < -1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x < 9}_{S_1} \vee \underbrace{x < -1}_{S_2}$



$S_1 \cup S_2$

$\therefore$ $\boxed{x \langle -\infty, 9 \rangle}$

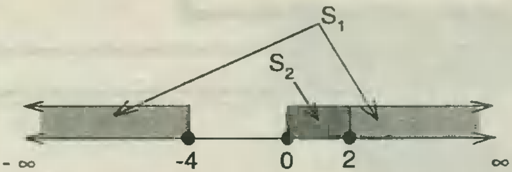
b) $\Leftrightarrow x^2 - 4 \geq (-2x+4) \vee (x^2-4) \leq -(-2x+4)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 \geq 0 \vee x^2 - 2x \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x+4)(x-2) \geq 0}_{S_1} \vee \underbrace{x(x-2) \leq 0}_{S_2}$

$\underbrace{x \in \langle -\infty, -4] \cup [2, +\infty\rangle}_{S_1} \vee \underbrace{x \in [0, 2]}_{S_2}$

Gráficamente:

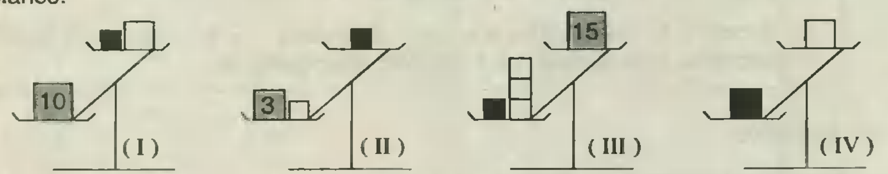


$S_1 \cup S_2$

$\therefore \boxed{x \in \langle -\infty, -4] \cup [0, +\infty\rangle}$

16.11.15 Ejercicio Explicativo:

Los paquetes del mismo tipo, pesan el mismo número entero de kilogramos y las pesas tienen indicado su peso en kilogramos, determinar el peso de un paquete blanco.



Solución:

(1°) **Suponiendo que el peso de un paquete negro sea igual a "x" kg. y el peso de un paquete blanco igual a "y" kg.**

De acuerdo a esta observación se tiene.

En (I) : $10 > x + y$ .... (α)

En (II) : $3 + y > x$ .... (β)

En (III) : $x + 3y > 15$ .... (γ)

En (IV) : $x > y$ .... (ϕ)

(2°) Resolviendo el sistema obtenido:

Sumando: (β) + (γ):

$\Rightarrow 3 + y + x + 3y > 15 + y$

$\Rightarrow 4y > 12 \Rightarrow \boxed{y > 3}$

(3°) Sumando $(\alpha) + (\phi)$:

$$\Rightarrow \quad 10 + x > x + 2y$$
$$\Rightarrow \quad 10 > 2y$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{y < 5}$$

(4°) Comparando las 2 últimas inecuaciones obtenidas: $\boxed{3 < y < 5}$

Luego: $y = 4$

$\therefore$ **Un paquete blanco pesa 4 kg.**

16.11.16 Ejercicio Explicativo:

Resolver: $|3 + 2x| > |4 - x|$

Comentario:

Teorema: $|x| > |y| \Leftrightarrow x^2 > y^2$

Solución:

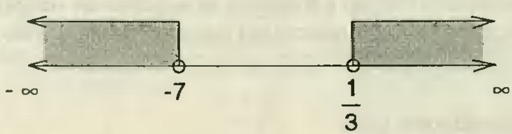
(1°) Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow |3 + 2x| > |4 - x| \Leftrightarrow |3 + 2x|^2 > |4 - x|^2$$
$$\Leftrightarrow (3 + 2x)^2 > (4 - x)^2$$
$$\Leftrightarrow (3 + 2x)^2 - (4 - x)^2 > 0$$

(2°) Por factorización se tiene: $(x + 7)(3x - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow (x + 7 > 0 \wedge 3x - 1 > 0) \vee (x + 7 < 0 \wedge 3x - 1 < 0)$$
$$\Leftrightarrow (x > -7 \wedge x > 1/3) \vee (x < -7 \wedge x < 1/3)$$
$$\Leftrightarrow (x > 1/3) \vee (x < -7)$$

(3°) Gráficamente:



$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty, -7 \rangle \cup \langle \frac{1}{3}, +\infty \rangle}$

16.11.17 Ejercicio Explicativo

Juan, Jorge y José vendedores de zapatos, hablaban acerca del N° de docenas vendidas en cierto día por lo que afirmaban lo siguiente:

- Jorge vendió más que José
- José no llegó a vender 5 docenas
- Todas las docenas vendidas son mas de 8.
- Las docenas de Juan y José menos las de Jorge no llegan a 4.

¿Cuántas docenas vendió c/u?

Solución:

(1°) Sea : x el # de docenas que vendió Juan
y el # de docenas que vendió Jorge
z el # de docenas que vendió José.

$\Rightarrow \quad x + y + z > 8$ .... (1)

$\Rightarrow \quad x - y + z < 4$ .... (2)

$\Rightarrow \quad y < z$ .... (3)

$\Rightarrow \quad z < 5$ .... (4)

(2°) **Resolviendo el Sistema Obtenido:**

de (3) y (4) : $y < z < 5$ .... (5)

de (1) y (2) : $y > 2$ .... (6)

de (5) y (6) : $y = 3 \ , \ z = 4$

En (1) : $x > 1$

En (2) : $x < 3 \ , \ x = 2$

(3°) **Finalmente:**

∴ Juan vendió : 2 docenas
Jorge vendió : 3 docenas
José vendió : 4 docenas

16.11.18 Ejercicio Explicativo

Hallar las edades de 3 bebés, sabiendo que:

Entre los dos primeros no llegan a 6 meses, el segundo es mayor que el tercero y que la diferencia del primero y el tercero está por encima de 1 mes.

Solución:

(1°) **Asumiendo que las edades son:**

El primero : "x" meses
El segundo : "y" meses
El tercero : "z" meses

(2°) Deberá ocurrir lo siguiente:

$\Rightarrow$ $x + y < 6$ .... (1)

$y - z > 0$ .... (2)

$x - z > 1$ .... (3)

(3°) Resolviendo el sistema; para ello buscamos la limitación consiguiente:

$\Rightarrow$ $6 > x + y > 2z + 1$; de (1) - (2)

$\Rightarrow$ $z < 2.5$; $z = 2$; $z = 1$

$\Rightarrow$ de (2) $z < y$ $\therefore$ $z = 1$, $y = 2$

$\Rightarrow$ de (3) $z > x - 1$ $\therefore$ $x = 3$

$\therefore$ El primero : 3 meses
El segundo : 2 meses
El tercero : 1 mes

16.11.19 **Ejercicio Explicativo**

El encargado de la alimentación diaria a una familia de monos de cierto zoológico reporta lo siguiente:

"Entre los padres comen mas de 6 kg; la madre come más que el crío; si el padre dejará de comer un kg menos cada día, seguiría consumiendo mas que el crío.

¿Cuántos kg consume cada uno diariamente sabiendo que son números enteros?

Solución:

(1°) **Asumiendo que los consumos son:**

Padre : x kg/día
Madre : y kg/día
Cría : z kg/día

$\Rightarrow$ $x + y < 6$ .... (1)

$y > z$ .... (2)

$x - 1 > z$ .... (3)

(2°) **Resolviendo el Sistema obtenido:**

$\Rightarrow$ de (1) y (2) + (3):

$\Rightarrow$ $2z + 1 < x + y < 6$ .... (4)

$\Rightarrow$ $z < 2.5$; $z = 1$ ó $z = 2$

$\Rightarrow$ $z = 2$: En (4): $5 < x + y < 6$ Imposible: $z \neq 2$

$\Rightarrow$ $z = 1$: En (4) : $3 < x + y < 6$

(3°) **En Consecuencia:**

$$\left.\begin{array}{l} \text{de } (2): y > 1 \\ \text{de } (3): x > 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2 \\ x = 3 \\ z = 1 \end{array} \Bigg\} \text{ En } \begin{array}{l} (1)\ 5 < 6 \\ (2)\ 2 > 1 \\ (3)\ 2 > 1 \end{array}$$

∴

Padre	: 3 Kg/día
Madre	: 2 Kg/día
Crío	: 1 Kg/día

16.11.20 **Ejercicio Explicativo**

Un comerciante meditaba: "si vendiera a 100 I/. kg el tocino que tengo y 2 1/2 kg más, recaudaría entre 900 y 960 intis.

Si ofertara a 50 I/. kg el tocino y al mismo precio el de jamón, obtendría de 900 a 1 000 I/.".

¿Cuántos kg de tocino y de jamón se tienen; sabiendo que son # enteros?.

Solución:

(1°) **Sean:** "x" # de kg de tocino
"y" # de kg de jamón.

$\Rightarrow 900 < 100\,(x + 2.5) < 960$ .... (1)

$\Rightarrow 900 < 50\,(x + y) < 1\,000$ .... (2)

(2°) Resolviendo el sistema obtenido:

de (1) : $6.5 < x < 7.1$ $\quad\therefore\ x = 7$ kg

de (2) : $11 < y < 13$ $\quad\therefore\ y = 12$ kg

∴ **Se dispone de 7 kg de tocino y 12 kg de jamón.**

16.11.21 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{x}{5} + 83$$

Solución:

(1°) Multiplicando la inecuación por 60

$$\Rightarrow 60\left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) > 60\left(\frac{x}{5} + 83\right)$$

(2°) Ejecutando las sentencias:

$\Rightarrow 60x + 30x + 20x - 15x > 12x + 4\,980$

$\Rightarrow 60x + 30x + 20x - 15x - 12x > 4\,980$

$\Rightarrow\ 83x > 4\,980$

$\Rightarrow\ x > \dfrac{4\,980}{83}$

$\Rightarrow\ x > 60$

(3°) De la última desigualdad obtenemos el conjunto solución correspondiente.

$\therefore\ \boxed{x \in \, < 60\, ,\, \infty >}$

16.11.23 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones simultáneas.

$$\begin{cases} 2x - 3 < 3x - 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 8 > 3x + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x - 2 > x + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ 5x - 1 < 4x + 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

***Recuerde* :**

La solución de un sistema de inecuaciones se obtiene de la intersección de c/u de la soluciones componentes.

Solución:

(I°) **De (1):** $2x - 3x < -4 + 3$

$\Rightarrow\ -x < -1$

$\Rightarrow\ x > 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

(II°) **De (2):** $x - 3x > 1 - 8$

$-2x > -7$

$x < 7/2 \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$

(III°) **De (3):** $3x - x > 2 + 2$

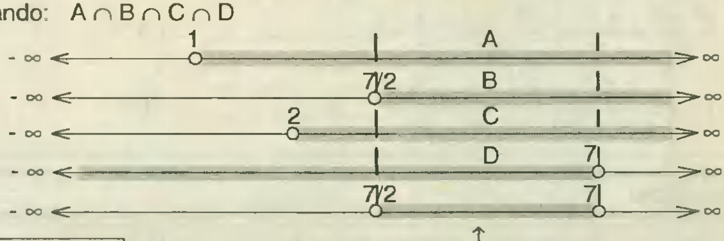
$2x > 4$

$x > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$

(IV°) **De (4):** $5x - 4x < 6 + 1$

$x < 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$

(V°) Intersectando: $A \cap B \cap C \cap D$



$A \cap B \cap C \cap D$

$\therefore\ \boxed{S = \, < 7/2\, ,\, 7 >}$

16.11.24 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones simultáneas.

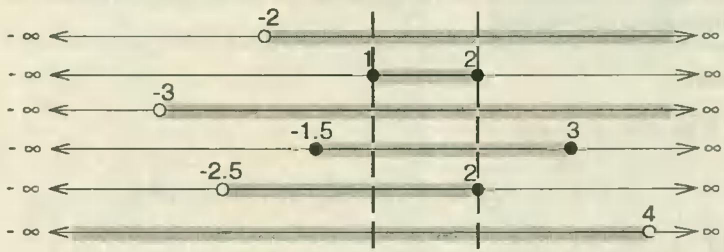
$$\begin{cases} x > -2 & \ldots\ldots\ldots (1) \\ 1 \leq x \leq 2 & \ldots\ldots\ldots (2) \\ x > -3 & \ldots\ldots\ldots (3) \\ 1{,}5 \leq x \leq 3 & \ldots\ldots\ldots (4) \\ -2.5 < x \leq 2 & \ldots\ldots\ldots (5) \\ x < 4 & \ldots\ldots\ldots (6) \end{cases}$$

Recuerde :

La solución de un sistema de inecuaciones se obtiene de intersectar las soluciones de cada uno de los componentes.

Solución:

(I) **Graficando el sistema:**



(II) Intersectando:

$\therefore \boxed{S = \{ x / 1 \leq x \leq 2 \}}$

16.11.25 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{x^2-1}{5} + \frac{x+1}{2} < \frac{2x^2+3}{10} - \frac{x}{2} + 3 \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$1 - x > \frac{0.5(x-3)}{2} - \frac{2x+3.5}{3} \ldots\ldots\ldots (B)$$

Recuerde:

El conjunto solución de un sistema de inecuaciones está dado por la intersección de las soluciones de las inecuaciones componentes.

Solución:

(1°) De la inecuación "A" y al ser multiplicado por 10 a fin de eliminar los denominadores:

$\Rightarrow 2x^2 - 2 + 5x + 5 < 2x^2 + 3 - 5x + 30$

$\Rightarrow 5x + 3 < 33 - 5x$

$\Rightarrow 10x < 30$

$\Rightarrow x < 3$ .... (A_1)

(2°) De la inecuación "B" y luego de multiplicar por 12.

$\Rightarrow 12 - 12x > 3x - 9 - 8x - 14$

$\Rightarrow 12 - 2x > - 23 - 5x$

$\Rightarrow 5x - 2x > - 23 - 12 \;;\; x < -\dfrac{35}{7}$

$\Rightarrow x<5$ .... (B_1)

(3°) De A_1 y B_1

$x<3$

$\therefore \boxed{x \in \langle -\infty, 3 \rangle}$

16.11.26 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} - x \leq \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} & \text{.................. (1)} \\ 2 - x > 2x - 8 & \text{.................. (2)} \end{cases}$$

Recuerde:

Para obtener el conjunto solución de un sistema, se intersecta las soluciones de cada inecuación componente.

Solución:

(1°) **Eliminando los denominadores de la 1° inecuación.**

luego de multiplicar por 12

$\Rightarrow 3x - 9 - 12x \leq 6x - 6 - 4x + 8$

$\Rightarrow 3x - 12x - 6x + 4x \leq - 6 + 8 + 9$

$\Rightarrow - 11x \leq 11$

$\Rightarrow x \geq - 1$ .... (A)

(2°) **De la 2ª inecuación:**

$\Rightarrow - 2x - x > - 8 - 2$

$\Rightarrow - 3x > - 10$

$\Rightarrow x < 10/3$ .... (B)

(3°) Intersectando A y B

$\Rightarrow\ -1 \le x < 10/3$

$\therefore$ $\boxed{S = \{x/x \in [-1\ ,\ 10/3 >\}}$

16.11.27 **Ejercicio Explicativo**

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x - 20 < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

La solución de un sistema de inecuaciones, lo constituye la intersección de los conjuntos soluciones componentes.

Solución:

(1°) **De la primera inecuación.**

$x - 2 > 0$

$\Rightarrow\quad x > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

(2°) **De la segunda inecuación**

$x - 5 < 0$

$\Rightarrow\quad x < 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$

(3°) **Intersecante A y B**

$\Rightarrow\ 2 < x < 5$

$\Rightarrow\ x \in\ < 2,\ 5 >$

$\therefore$ $\boxed{\{x / x \in\ < 2{,}5 >\}}$

16.11.28 **Ejercicio Explicativo**

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2) \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \quad 3(3+2x) < 7x - 2(x-8) \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **A partir de la 1ª inecuación.**

$\Rightarrow\ 5x + 5 - 9x - 3 > -6x - 12$

$\Rightarrow\quad 5x - 9x + 6x > -12 + 3 - 5$

$\Rightarrow\qquad 2x > -14$

$\Rightarrow\qquad \boxed{x > -7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

(2°) **A partir de la 2ª inecuación.**

$\Rightarrow \quad 9 + 6x < 7x - 2x + 16$

$\Rightarrow \quad 6x - 5x < 16 - 9$

$\Rightarrow \quad \boxed{x < 7}$ .... (B)

(3°) Intersectando A y B

$\Rightarrow \; -7 < x < 7$

$\therefore \; \boxed{x \in \langle -7, 7 \rangle}$

16.11.29 **Ejercicio Explicativo**

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} |x| > 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ (x+3)\,x\,(x-1)\,(x-4) < 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

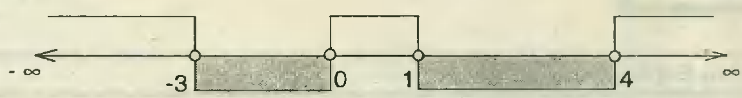
(1°) **A partir de la primera inecuación:**

Si: $|x| > 2 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$ .... (A)

(2°) **A partir de la segunda inecuación y mediante la regla de áreas considerando los ceros:**

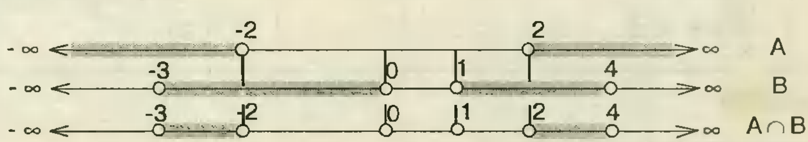
- 3 , 0, 1 y 4; ubicando en la recta:

(3°) **Graficando:**



$\Rightarrow x \in \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle$ .... (B)

(4°) Intersectando A y B



$\therefore \; \boxed{x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle}$ que constituye la solución del sistema.

16.11.30 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} 1-\dfrac{3x-88}{7} > 5x \quad \text{.......... (1)} \\ 4x+5 < 5x+4.5 \quad \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Eliminando el denominador en la primera inecuación; para ello multipliquemos por 7:**

$\Rightarrow$ $7 - 3x + 88 > 35x$

$\Rightarrow$ $-3x - 35x > -7 - 88$

$\Rightarrow$ $-38x > -95$

$\Rightarrow$ $x < \dfrac{95}{38}$ .... (A)

(2°) **A partir de la segunda:**

$\Rightarrow$ $4x - 5x < 4.5 - 5$

$\Rightarrow$ $-x < -0,5$

$\Rightarrow$ $x > \dfrac{1}{2}$ .... (B)

(3°) De A y B

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{95}{38}$

$\therefore$ $\boxed{x \in \left< \dfrac{1}{2}, \dfrac{95}{38} \right>}$

16.11.31 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x} > 9 \quad \text{.......... (1)} \\ \dfrac{12}{x}+5 < 8 \quad \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) Resolviendo la 1ª inecuación:

$\dfrac{5}{x} - 9 > 0$

$$\Rightarrow \frac{(5-9x)}{x} > 0\ ,\ \frac{9x-5}{x} < 0\ ;\ (9x-5)x < 0 \wedge x \neq 0$$

De acuerdo a la regla de áreas:

(2°) Resolviendo la 2ª inecuación.

$$\Rightarrow \frac{12}{x} - 3 < 0\ ;\ \frac{4-x}{x} < 0 \quad \wedge x \neq 0$$

$\Rightarrow x(x-4) > 0$ y de acuerdo a la regla de áreas.

(3°) La intersección de los intervalos solución es el vacío, por lo que el sistema tiene por solución:

$\therefore \boxed{x \in \phi}$

16.11.32 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x+2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\[2ex] \dfrac{2}{x-3} > \dfrac{3}{x-2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

El conjunto solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de los conjuntos soluciones componentes.

Solución:

(1°) Resolviendo cada inecuación: $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} < 0\ ,\ \dfrac{x+2-2x+2}{(x-1)(x+2)} < 0$

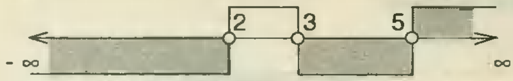
$\Rightarrow (-x+4)(x-1)(x+2) < 0 \quad \vee\ x \neq 1\ ,\ x \neq -2$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)(x+2) > 0$, y de acuerdo a la regla con los ceros: 1, 4 y - 2.

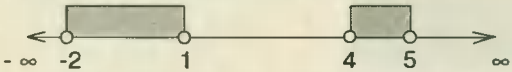
(2°) Resolviendo la segunda inecuación: $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}>0$; $\dfrac{2x-4-3x+9}{(x-2)(x-3)}>0$

$\Rightarrow -(x-5)(x-2)(x-3)>0 \quad \vee \ x \neq b\,,\ x\neq 2$

$\Rightarrow (x-5)(x-2)(x-3)<0$, y de acuerdo a la regla con los ceros: 2, 3, 5



(3°) Realizando la intersección de los intervalos.



$\therefore$ $\boxed{x \in <-2\,,\,1> \cup <4\,,\,5>}$

16.11.33 **Ejercicio Explicativo**

Resolver el siguiente sistema: considerando a "x" como mayor que 3.

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{x-1}>\dfrac{-2}{x+2} & \text{.......................... (1)} \\[2ex] \dfrac{2}{x-3}>\dfrac{3}{x-2} & \text{.......................... (2)} \\[2ex] \dfrac{x}{4}>-30 & \text{.......................... (3)} \end{cases}$$

Recuerde:

Si: $\dfrac{A(x)}{B(x)}>0$

$\Rightarrow A(x)B(x)>0, B(x)\neq 0$

Solución:

(1°) Resolviendo la primera inecuación: $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}<0 \wedge x\neq 1, x\neq -2$

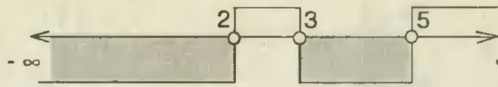
$\Rightarrow \dfrac{x+2-2x+2}{(x-1)(x+2)}<0 \ \wedge \ x\neq 1,\, x\neq -2$

$\Rightarrow (-x+4)(x-1)(x+2)<0 \ \wedge \ x\neq 1\ ,\ x\neq -2$

$(x-4)(x-1)(x+2)>0 \quad \wedge \ x\neq 1$; $x\neq -2$; ceros: 1, 4, - 2

(2°) Resolviendo la segunda inecuación: $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}>0$; $\dfrac{2x-4-3x+9}{(x-3)(x-2)}>0$;

$(x-5)(x-3)(x-2)<0 \ \wedge \ x \neq 3 \ , \ x \neq 2$, ceros, 5, 3, 2



(3°) La solución del sistema es la intersección de los 3 resultantes:

$\Rightarrow$ $\boxed{x \in <-2\,,\,1> \cup <4\,,\,5>}$ el cual representa al conjunto solución.

16.11.34 Ejercicio Explicativo

Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{7(x+1)}<\dfrac{2}{x+9} \\ \dfrac{1}{2x+5}<\dfrac{1}{8x+3} \end{cases}$$

Solución:

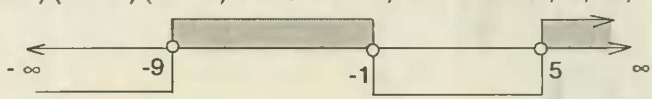
(1°) **Resolviendo cada inecuación componente:**

$$\Rightarrow \ \frac{1}{x+1}-\frac{1}{7(x+1)}-\frac{2}{x+9}<0$$

$$\Rightarrow \ \frac{7(x+9)-(x+9)-14(x+1)}{7(x+1)(x+9)}<0$$

$$\Rightarrow \ \frac{6(x+9)-14(x+1)}{7(x+1)(x+9)}<0 \ ;$$

$\Rightarrow$ $(x-5)(x+1)(x+9)>0 \ \wedge \ x \neq -1 \ , \ x \neq -9$ ceros, 5, - 1, - 9



(2°) **Al resolver la segunda inecuación.**

$$\Rightarrow \ \frac{1}{2x+5}-\frac{1}{8x+3}<0 \ , \ \frac{3x-1}{(2x+5)(8x+3)}<0$$

$\Rightarrow$ $(3x-1)(2x+5)(8x+3)<0 \ \wedge \ x \neq -5/2 \ , \ x \neq -3/8$ ceros: 1/3 , - 5/2 , - 3/8

(3°) La intersección de soluciones componentes será:

$\therefore$ $\boxed{x \in <-9\,,\,-2\ 1/2>}$

16.11.35 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución correspondiente al siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{8}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{3x+5}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\[2ex] \dfrac{3x-1}{4}+\dfrac{2x+1}{3}<\dfrac{5x-2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Resolviendo cada inecuación**

$$\Rightarrow \frac{x+2}{8}-\frac{1}{2}-\frac{3x+5}{6}<0$$

$$\Rightarrow \frac{3(x+2)-12-4(3x+5)}{24}<0 \Rightarrow 9x+26>0$$

$$\Rightarrow x>-\frac{26}{9} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

(2°) A partir de la segunda inecuación:

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{4}+\frac{2x+1}{3}-\frac{5x-2}{8}<0$$

$$\Rightarrow \frac{6(3x-1)+8(2x+1)-3(5x-2)}{24}<0 \Rightarrow 19x+8<0$$

$$\Rightarrow x<-\frac{8}{19} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

(3°) de (A) y (B): $-\dfrac{26}{9}<x<-\dfrac{8}{19}$

$$\therefore \boxed{x \in \left\langle -\frac{26}{9}, -\frac{8}{19} \right\rangle}$$

16.11.36 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución de la siguiente desigualdad: $\dfrac{3}{3-2x-x^2}<1$

Recuerde:

En relación a las inecuaciones fraccionarias:

Si: $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Rightarrow f(x)\,g(x)<0\ ;\ g(x)\neq 0$

Solución:

(1°) **Resolviendo previa ordenación:**

$$\Rightarrow \frac{-3}{x^2+2x-3}-1<0\ ,\ \frac{-3-x^2-2x+3}{(x+3)(x-1)}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-(x+2)x}{(x+3)(x-1)}<0$$

(2°) **De acuerdo al teorema de las inecuaciones fraccionarias**

$x(x+2)(x+3)(x-1)>0 \ \wedge\ x\neq -3\ ,\ x\neq 1$ y con los ceros: $x = 0\ ,\ -2\ ,\ -3,\ 1$

(3°) **Luego de intersectar**

$\therefore\ \boxed{x\in\ <-\infty,-3>\cup<-2,0>\cup<1,\infty>}$

16.11.37 **Ejercicio Explicativo**

Resolver la ecuación: $\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(1-x)^2} = 7$

Recuerde:

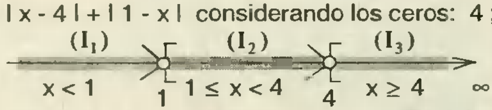
La definición de raíz cuadrada :

Si: $\sqrt{x^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2} = |\,x\,|$

Solución:

(1°) La inecuación dada es equivalente a: $|x-4|+|1-x| = 7$ ....(I)

(2°) Segmentando la recta: $|x-4|+|1-x|$ considerando los ceros: 4 ; 1.



(2°) La ecuación I contiene varias ecuaciones según :

(I_1) $x-4<-3$.... A

$0<1-x$..... B

$\Rightarrow \underbrace{-x+4}+\underbrace{1-x}=7$

$-2x = 2$

$x = -1$

(I_2) $-3<x-4<0$ .... A

$-4<-x<-1$...... B

$-3<1-x<0$

$\Rightarrow \underbrace{-x+4}-\underbrace{1+x} = 7$

$3 = 7$

$x\in\phi$

(I_3) $x-4>0$ .... A

$1-x<-3$ ..... B

$\Rightarrow \underbrace{x-4}+\underbrace{x-1} = 7$

$2x = 12$

$x = 6$

$\therefore\ \boxed{S = \{-1\ ,6\}}$

16.11.38 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución de la inecuación. $|x| > 3$

Recuerde:

De acuerdo al teorema.

Si: $|x| > b$, $b > 0$ $\Rightarrow$ $x^2 > b^2$ ó

$x \in \langle -\infty , -b \rangle \cup \langle b , \infty \rangle$

Equivalentemente:

Si : $|x| > b$, $b > 0$

$\Rightarrow$ $x > b$ o $x < -b$

Solución:

(1°) De la condición: $|x| > 3$

$\Rightarrow$ $x^2 > 9$

$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty , -3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle}$

16.11.39 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución de la inecuación: $|x| < 3$

Recuerde:

Existe el siguiente teorema:

Si: $|x| < b$, $b > 0$

$\Rightarrow$ $x^2 < b^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \in \langle -b , b \rangle}$

Equivalentemente:

Si : $|x| > b$, $b > 0$

$\Rightarrow$ $-b < x < b$

Solución:

Si $|x| < 3$

$\Rightarrow$ $x^2 < 9$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \in \langle -3 , 3 \rangle}$

Comentario:

La inecuación propuesta se resuelve también del modo siguiente: $|x| < 3$

Al elevar el cuadrado: $x^2 < 9$

Al aplicar la regla de áreas: $x^2 - 9 < 0$, ceros: $x = 3$, $x = -3$

Gráfica:

$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -3 , 3 \rangle}$

16.11.40 **Ejercicio Explicativo**

Obtener el conjunto solución de la limitación siguiente:

$$10 \leq | 4x - 3 | \leq 12$$

Recuerde:

a) Si: $| x | \geq b$, $b > 0$ $\Rightarrow$ $x^2 \geq b^2$

b) Si: $| x | \leq b$, $b > 0$ $\Rightarrow$ $x^2 \leq b^2$

c) Si: $| x | \geq b$, $b < 0$ $\Rightarrow$ $x \in IR$

d) Si: $| x | \leq b$, $b < 0$ $\Rightarrow$ $x \in \phi$

Solución:

(1°) El sistema equivalente a la inecuación propuesta será:

$$\begin{cases} | 4x - 3 | \geq 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ | 4x - 3 | \leq 12 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

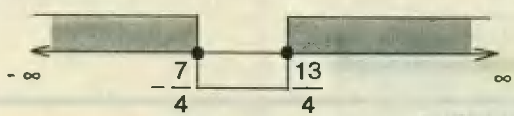
(2°) Resolviendo c/u de las inecuaciones.

$$(4x - 3)^2 \geq 10^2 \text{ y } (4x - 3)^2 \; 12^2$$

$$\Rightarrow (4x - 3)^2 - 10^2 \geq 0 \text{ , } (4x - 13) (4x + 7) \geq 0 \text{ , ceros: } \frac{13}{4}, -\frac{7}{4}$$

$$(4x - 3)^2 - 12^2 \leq 0 \text{ ; } (4x - 15) (4x + 9) \leq 0 \text{ ; ceros: } \frac{15}{4}, -\frac{9}{4}$$

(3°) Graficando cada inecuación:



(4°) La intersección es el conjunto solución buscado:

$$\therefore \boxed{x \in \left[-\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, \frac{15}{4}\right]}$$

16.11.41 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el conjunto solución de la inecuación siguiente:

$$\left| \frac{x+6}{2x-3} \right| < 1$$

Recuerde:

$$\text{Sea } \frac{f(x)}{g^2(x)} < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0 \ ; \ g(x) \neq 0$$

Solución:

(1°) **El equivalente de la inecuación es:**

$$\left(\frac{x+6}{2x-3}\right)^2 < 1 \ \wedge \ x \neq \frac{3}{2}$$

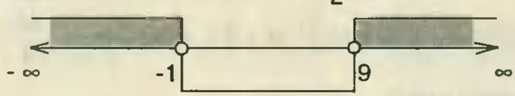
(2°) **Resolviendo la inecuación.**

$$\Rightarrow \left(\frac{x+6}{2x-3}\right)^2 - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6)^2 - (2x-3)^2}{(2x-3)^2} < 0 \ \wedge \ x \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (3x+3)(-x+9) < 0 \ \wedge \ x \neq \frac{3}{2}$$

(3°) **Graficando los ceros:** $x = -1, \ x = 9 \ \wedge \ x \neq \frac{3}{2}$



$, x \neq \frac{3}{2}$

$\therefore$ $\boxed{x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 9, \infty \rangle}$

16.11.42 **Ejercicio Explicativo**

Resolver la desigualdad siguiente: $|3x + 1| \leq -2x - 5$

Recuerde:

a) Si: $|x| \geq b, \ b > 0 \ \Rightarrow \ x^2 \geq b^2 \ \Rightarrow \ x \in \langle -\infty, -b] \cup [b, \infty \rangle$

b) Si: $|x| \leq b \ ; \ b > 0 \ \Rightarrow \ x^2 \leq b^2 \ \Rightarrow \ x \in [-b, b]$

c) Si: $|x| \geq b, \ b < 0 \ \Rightarrow \ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ x \in \langle -\infty, \infty \rangle$

d) Si: $|x| \leq b, \ b < 0 \ \Rightarrow \ x \in \phi$

Solución:

(1°) La desigualdad por resolver es equivalente a:

$0 \leq |3x + 1| \leq -2x - 5$

(2°) A su vez el sistema

$$\begin{cases} -2x - 5 \geq 0 \dots\dots (\text{I}) \\ |3x + 1| \leq -2x - 5 \dots\dots (\text{II}) \\ |3x + 1| \geq 0 \dots\dots (\text{III}) \end{cases}$$

(3°) De (I): $x \leq -2\ 1/2$ .... (IV)

de (II): $(3x + 1)^2 \leq (-2x - 5)^2$

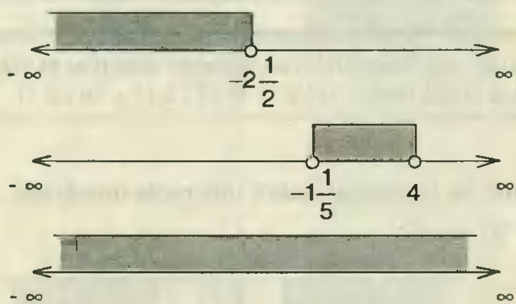
$\Rightarrow (3x + 1) - (2x + 5)^2 \leq 0$

$(5x + 6)(x - 4) \leq 0$

$x = 4\ ,\ \ x = -1\ 1/5$ .... (V)

de (III): $x \in \mathbb{R}$ .... (VI)

(4°) Graficando (IV), (V) y (VI)



$\therefore$ $\boxed{x \in S_1 \cap S_2 \cap S_2 = \phi}$

16.11.43 **Ejercicio Explicativo**

Si "x" es un número real, hallar el intervalo en el cual se verifica:

$$25 \leq (2x - 1)^2 \leq 49$$

Solución:

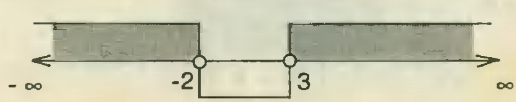
(1°) La inecuación consignada satisface el sistema siguiente:

$$\begin{cases} (2x - 1)^2 \geq 25 \dots\dots (1) \\ (2x - 1)^2 \leq 49 \dots\dots (2) \end{cases}$$

(2°) Resolviendo la primera de éstas:

$(2x - 1)^2 - 5^2 \geq 0$

$\Rightarrow (2x - 6)(2x + 4) \geq 0$ y de acuerdo a la conocida regla con los ceros: $x = 3,\ x = -2$

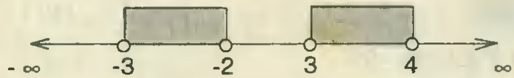


(3°) Resolviendo la segunda de éstas:

$(2x-1)^2 - 7^2 \leq 0$

$\Rightarrow (2x-8)(2x+6)$ y de acuerdo con los ceros: $x = 4$, $x = -3$

(4°) Intersectando los intervalos



$\therefore \boxed{x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 3, 4 \rangle}$

16.11.44 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $4|x| + |x-5| \leq 8$

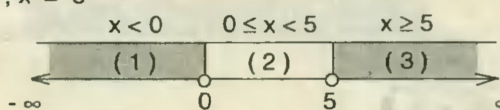
***Recuerde*:**

La definición del valor absoluto $|x|$ permite observar el comportamiento de casos mas complejos como el de $|g(x)|$ ó $|f(x)| + |h(x)|$

Solución:

(1°) **Ubicando puntos de referencia sobre una recta numérica.**

$x = 0$; $x - 5 = 0$; $x = 5$



(2°) **De (1): Si $x < 0$**

$\Rightarrow x - 5 < -5 \qquad \Rightarrow 4\underbrace{|x|}_{\text{Neg}} + \underbrace{|x-5|}_{\text{Neg}} \leq 8$

$\Rightarrow -4x - (x-5) \leq 8$;

$\Rightarrow -5x + 5 \leq 8$

$\Rightarrow -3 \leq 5x$

$x \geq -3/5 \qquad \therefore \boxed{S_1 = [-3/5, 0\rangle}$

(3°) **De (2): Si $0 < x < 5$**

$\Rightarrow -5 \leq x - 5 < 0 \qquad \Rightarrow 4\underbrace{|x|}_{\text{Posit.}} + \underbrace{|x-5|}_{\text{Neg}} \leq 8$

$\Rightarrow 4x - x + 5 \leq 8$

$x \leq 1 \qquad \therefore \boxed{S_2 = [0, 1]}$

(4°) **De (3): Si $x \geq 5$**

$\Rightarrow x - 5 \geq 0$

$\Rightarrow 4x + x - 5 \leq 8 \qquad \Rightarrow 4\underbrace{|x|}_{\text{Posit.}} + \underbrace{|x-5|}_{\text{Posit.}} \leq 8$

$5x \leq 13$

$x \leq 13/5 \qquad \therefore \boxed{S_3 = \phi}$

(5°) Intersectando las soluciones:

$\Rightarrow S \in \{ S_1 \cup S_2 \cup S_3 \}$

$\Rightarrow S \in \left\{ -3/5 \, , 0 > \cup [\, 0,1] \cup \phi \right\}$

$\Rightarrow S \in \left\{ \left[-3/5 \, , 0 \right\rangle \cup [\, 0,1] \right\}$

$\therefore$ $\boxed{S \in [\, -3/5 \, , 1\,]}$

16.11.45 **Ejercicio Explicativo**

Hallar las soluciones naturales del sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y > x + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5x + 1 < 8 + y + 4x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

La resolución de un sistema de inecuaciones de dos o mas variables requiere originalmente de lograr una limitación apropiada a fin de poder deducir los valores naturales solicitados.

Solución:

(1°) **A partir de la primera**

$\Rightarrow 2x - x > 2 + 3y$

$\Rightarrow x > 2 + 3y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

(2°) **A partir de la segunda**

$\Rightarrow 5x - 4x < 8 + y - 1$

$\Rightarrow x < 7 + y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$

(3°) **de A y B:**

$2 + 3y < x < 7 + y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$

$\Rightarrow 2 + 3y < 7 + y$

$\Rightarrow 2y < 5 \ , \ y < 5/2 \ , \ y = 1$ ó 2

(4°) **Si: $y = 1$, sustituido sobre (C)**

$\Rightarrow 2 + 3 < x < 7 + 1$

$\Rightarrow 5 < x < 8 \ ; \ x = 6 \ , \ x = 7$

(5°) **Si: $y = 2$, sustituido sobre (C)**

$\Rightarrow 2 + 6 < x < 7 + 2$

$8 < x < 9 \ ; \ x \in \phi$

$\therefore$ $\boxed{x = 6 \ , \ y = 1 \text{ ó } x = 7 \ , \ y = 1}$

16.11.46 **Ejercicio Explicativo**

Hallar las soluciones enteras y positivas del sistema:

$$\begin{cases} x + y < 6 \quad \dots\dots (1) \\ y - z > 0 \quad \dots\dots (2) \\ x - z > 1 \quad \dots\dots (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **A partir de la segunda y tercera inecuación:**

$y > z$ .... (4)

$x > z + 1$ .... (5)

$\Rightarrow x + y > 2z + 1$ .... (6)

(2°) **Obtenemos una limitación importante al considerar (6) y (1)**

$\Rightarrow 6 > x + y > 2z + 1$ .... (7)

$\Rightarrow 6 > 2z + 1$

$\Rightarrow 5 > 2z \ , \ z < 2\ 1/2$

$\Rightarrow z = 1$ ó $z = 2$

(3°) **Si: $z = 1$ y de (7), (5) y (4)**

$\Rightarrow 6 > x + y > 3 \ ; \ y > 1 \ , \ x > 2$

$\Rightarrow x + y = 4$ ó $x + y = 5$

$\Rightarrow x = 3 \ , \ y = 2$

(4°) **Si: $z = 2$, de (7)**

$\Rightarrow 6 > x + y > 5 , \Rightarrow \ x + y \in \phi$

$\therefore \boxed{x = 3 \ , \ y = 2 \ , \ z = 1}$

16.11.47 **Ejercicio Explicativo**

Hallar las soluciones que pertenecen a "IN" del sistema:

$$\begin{cases} 2y < x \quad \dots\dots (1) \\ 4y > 72 \quad \dots\dots (2) \\ x - 4 < 2z \quad \dots\dots (3) \\ z < 20 \quad \dots\dots (4) \end{cases}$$

Solución:

(1°) A partir de las inecuaciones obtendremos:

de (1) $y < x/2$ .... (5)

de (2) $y > 18$ .... (6)

de (3) $x < 4 + 2z$ .... (7)

(2°) **de (5) , (6) y (7)**

$\Rightarrow$ $18 < y < x/2$

$\Rightarrow$ $18 < y < x/2 < z + 2$; $z < 20$, $z + 2 < 22$

$\Rightarrow$ $18 < y < x/2 < z + 2 < 22$ .... (8)

(3°) **De la limitación (8) se desprende:**

$$18 < \underset{\underset{19}{\uparrow}}{y} < \underset{\underset{20}{\uparrow}}{x/2} < \underset{\underset{21}{\uparrow}}{z+2} < 22$$

$\therefore$ $\boxed{x = 40 , y = 19 , z = 19}$

16.11.48 **Ejercicio Explicativo**

Hallar las soluciones enteras no negativas del sistema:

$$\begin{cases} x - 3y < 0 & \text{.......... (1)} \\ x - y - 4z > 0 & \text{.......... (2)} \\ y - z - 2 < 0 & \text{.......... (3)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Al ordenar el sistema:**

$x < 3y$ .... (4)

$x > y + 4z$ .... (5)

$y < z + 2$ .... (6)

$\Rightarrow$ $y + 4z < x < 3y$ .... (7)

$\Rightarrow$ $y + 4z < 3y$

$\Rightarrow$ $4z < 2y$

$\Rightarrow$ $y > 2z$ .... (8)

(2°) **De (6) y (8):**

$2z < y < z + 2$ .... (9)

$\Rightarrow$ $2z < z + 2$, $z < 2$

$\Rightarrow$ $z = 1$ ó $z = 0$

(3°) **Si: $z = 1$** , en (9): $2 < y < 3$; $y \in \phi$

Si: $z = 0$, en (9): $0 < y < 2$; $y = 1$

(4°) Si: $y = 1$, en (7): $1 < x < 3$; $x = 2$

$\therefore$ $\boxed{x = 2 , \ y = 1 , \ z = 0}$

16.11.49 **Ejercicio Explicativo**

Calcular los valores naturales que satisfacen al sistema siguiente:

$$\begin{cases} a+b+c > 14 \quad \ldots\ldots (1) \\ a-b+c < 6 \quad \ldots\ldots (2) \\ b < c \quad \ldots\ldots (3) \\ c < 7 \quad \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

Recuerde:

Para resolver un sistema de inecuaciones de varias incógnitas en valores enteros se procede del modo siguiente:

(1°) Obtener una limitación que contenga una incógnita mediante reducciones sucesivas.

(2°) A partir de lograr un valor entero mediante sustituciones y otras limitaciones se obtendrán los otros valores enteros.

Solución:

(1°) **De (3) y (4):** $b < c < 7$ .... (5)

De (1): $a + c > 14 - b$ .... (6)

De (2): $a + c < 6 + b$ .... (7)

De (6) y (7): $14 - b < a + c < 6 + b$ .... (8)

De (5) y (8): $b < 7 \;;\; 14 - b < 6 + b$

$b < 7 \;;\; 8 < 2b \;;\; b > 4$

$\Rightarrow \boxed{7 < b < 4 \;,\; b = 5 \;,\; b = 6}$

(2°) **Si:** $\mathbf{b = 5}$, En (5): $5 < c < 7 \;;\; c = 6$

Si: $\mathbf{b = 6}$, En (5): $6 < c < 7 \;;\; c \in \phi$

(3°) **Al ser conocidos b y c y sustituyendo en (8), tendremos:**

$9 < a + 6 < 11$

$\Rightarrow 3 < a < 5 \;,\; a = 4$

$\therefore \boxed{a = 4 \;,\; b = 5 \;,\; c = 6}$

16.11.50 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $|x + 3| \geq |2x - 1|$

Solución:

(1°) **Elevando al cuadrado:** $(x + 3)^2 \geq (2x - 1)^2$

(2°) **De acuerdo a la regla de áreas.**

$\Rightarrow (x + 3)^2 - (2x - 1)^2 \geq 0$; por ser una diferencia de cuadrados.

$\Rightarrow (x + 3 + 2x - 1)(x + 3 - 2x + 1) \geq 0$

$\Rightarrow (3x + 2)(-x + 5) \geq 0$

$\Rightarrow (3x + 2)(x - 5) \leq 0$; ceros: $-2/3$ y 5

(3°) El conjunto solución correspondiente será:

$\therefore \boxed{x \in [-2/3\ ,\ 5]}$

16.11.51 **Ejercicio Explicativo**

¿Qué intervalo de valores de "y" en la siguiente ecuación:

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$$

permite que las raíces x_1 y x_2 sean reales

Recuerde:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ para que la ecuación tenga raíces reales será necesario que:

$$\Delta \geq 0 \text{ y } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) **Al ordenar la ecuación cuadrática en mención:**

$$x^2 + x(2 - 3y) + (y^2 - 9y + 1) = 0$$

$\Rightarrow$ El discriminante deberá cumplir con: $\Delta \geq 0$ .... (α)

(2°) **De (α):** $(2 - 3y)^2 - 4(y^2 - 9y + 1) \geq 0$

(3°) Resolviendo mediante la regla correspondiente:

$4 - 12y + 9y^2 - 4y^2 + 36y - 4 \geq 0$

$\Rightarrow 5y^2 + 24y \geq 0$

$\Rightarrow y(5y + 24) \geq 0$; ceros , 0 , $-24/5$

(4°) Para que (α) se verifique "y" deben estar en el intervalo:

$$\boxed{y \in \langle -\infty , -24/5] \cup [0 , \infty \rangle}$$

16.11.52 **Ejercicio Explicativo**

Demostrar que: $(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc (a + b + c)$

Si: $a > b > c > 0$

Recuerde:

(I) Para los números reales "a" y "b" se verifica:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

ó $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ó $a^n + b^n \geq 2a^{n/2} b^{n/2}$

(II) Si: $(a + b + c)^2$

$\Rightarrow (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b + c)^2 = \Sigma a^2 + 2 \Sigma ab$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema en mención:**

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2 a^2bc$ .... (1)

$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2 b^2c$ .... (2)

$\Rightarrow a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$ .... (3)

(2°) **Sumando miembro a miembro (1), (2) y (3)**

$\Rightarrow 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \geq 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$

(3°) **Sumando "$2\Sigma a^2bc$" a los miembros de la inecuación:**

$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2 \Sigma a^2 bc \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 + 2 \Sigma abc$

$\Rightarrow (ab + ac + bc)^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 + \underbrace{2 a^2bc + 2 ab^2c + 2abc^2}$

(4°) **Al sumar en el 2° miembro concluiremos**

$(ab + ac + bc)^2 \geq 3 a^2bc + 3 ab^2c + 3abc$

$\therefore \boxed{(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc (a + b + c)}$

16.11.53 **Ejercicio Explicativo**

Si $x \in [2 , 5]$;

Hallar el intervalo de: $x^2 - 7x + 10$

Recuerde:

Si: $a > b$; $a > 0$, $b > 0$

$\Rightarrow a^2 > b^2$ mantiene el sentido de la desigualdad.

Solución:

(1°) **De acuerdo al intervalo que se proporciona.**

$2 \le x \le 5$

(2°) **Al sumar - 7/2 a todos los términos de la desigualdad:**

$2 - 7/2 \le x - 7/2 \le 5 - 7/2$

(3°) **Escogemos el sector positivo**

$0 \le x - 7/2 \le 3/2$

(4°) **Elevando al cuadrado**

$0 \le (x - 7/2)^2 \le (3/2)^2$

(5°) **Desarrollando:**

$$0 \le x^2 - 7x + \frac{49}{4} \le \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{49}{4} \le x^2 - 7x \le \frac{9}{4} - \frac{49}{4}$$

(6°) **Sumando 10:**

$$10 - \frac{49}{4} \le x^2 - 7x + 10 \le \frac{9}{4} - \frac{49}{4} + 10$$

$$\therefore \boxed{x^2 - 7x + 10 \in \left[-\frac{9}{4}, 0 \right]}$$

16.11.54 **Ejercicio Explicativo**

Resolver la inecuación siguiente: $\left| 3x + | x - 3 | \right| > \sqrt{5 - x}$

Recuerde:

La definición de valor absoluto $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

también:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ Op(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Transformando a un sistema de condiciones I y II:**

$$\left.\begin{array}{lr} 5 - x \geq 0 \text{ ....} & (A) \\ x - 3 \geq 0 \text{ ....} & (B) \\ \Rightarrow (4x - 3)^2 > 5 - x \text{ ....} & (C) \end{array}\right\} (I)$$

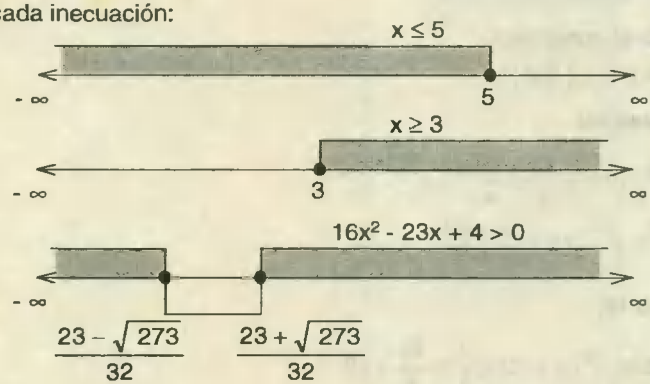
A su vez:

$$\left.\begin{array}{lr} 5 - x \geq 0 \text{ ....} & (D) \\ x - 3 < 0 \text{ ....} & (E) \\ \Rightarrow (2x + 3)^2 > 5 - x \text{ ....} & (F) \end{array}\right\} (II)$$

(2°) **Resolvemos c/u de los sistemas**

de (I): $x \leq 5$; $x \geq 3$; $16x^2 - 23x + 4 > 0$

(3°) Graficando cada inecuación:



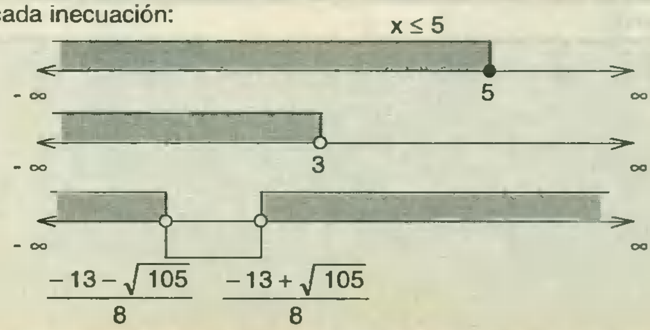
(4°) **Al intersectar:**

El sistema (I) se verifica si: $\boxed{x \in [3, 5]}$

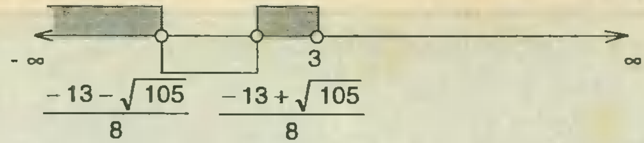
(5°) **Resolvemos el sistema (II)**

$\Rightarrow$ $x \leq 5$, $x < 3$; $4x^2 + 13x + 4 > 0$

Graficando cada inecuación:



(6°) Intersectando:



El segundo sistema se cumple si: $\boxed{x \in \left< -\infty, \frac{-13-\sqrt{105}}{8} \right> \cup \left< \frac{-13+\sqrt{105}}{8}, 3 \right>}$

(7°) **Uniendo las soluciones obtenidas:** $S_I \cup S_{II}$

$$\therefore \boxed{x \in \left\langle -\infty, \frac{-13-\sqrt{105}}{8} \right\rangle \cup \left\langle \frac{-13+\sqrt{105}}{8}, 5 \right]}$$

16.11.55 **Ejercicio Explicativo**

Resolver la inecuación: $\llbracket x^2 + 8x + 1 \rrbracket < 10$

Recuerde:

$\forall\, y \in z\,,\ \llbracket a \rrbracket < y \;\Leftrightarrow\; a < y$

Solución:

(1°) **A partir de la inecuación:**

$\llbracket x^2 + 8x + 1 \rrbracket < 10$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 1 < 10$

(2°) **Resolviendo esta última inecuación:**

$\Rightarrow x^2 + 8x - 9 < 0$; mediante la regla de áreas

$\Rightarrow (x+9)(x-1) = 0$; ceros: 1 y - 9

(3°) **La gráfica será:**

(4°) **Finalmente:**

$\therefore \boxed{x \in \left< -9, 1 \right>}$

16.11.56 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $\llbracket x+5 \rrbracket + \llbracket x+3 \rrbracket = 12$

Recuerde:

a) La definición del máximo entero viene establecido por:

Si: $[\![x]\!] = k \; ; \; k \in Z$

$\Rightarrow k \leq x < k+1$

b) Si: $[\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$

$\forall \; y \in Z$

Solución:

(1°) **De acuerdo a las propiedades del máximo entero:**

$$[\![x]\!] + [\![5]\!] + [\![x]\!] + [\![3]\!] = 12$$

$$\Rightarrow 2[\![x]\!] + 5 + 3 = 12$$

$$\Rightarrow 2[\![x]\!] = 4$$

$$[\![x]\!] = 2$$

(2°) **A partir de la def. de máximo entero.**

$$\Rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$\therefore \boxed{S = \{ x / x \in [2, 3> \}}$$

16.11.57 **Ejercicio Explicativo**

Calcular: $E = | 3 - a | + | a - 4 | \; , \; \mathbf{a} \in \mathbb{R}$

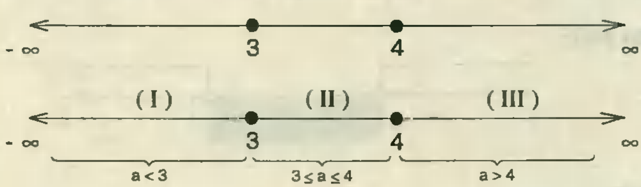
Solución:

(1°) **Hacemos un seccionamiento de los valores de a, para ello:**

$$3 - a = 0 \; , \; a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \; , \; a = 4$$

(2°) **Realizando la gráfica correspondiente:**



(3°) **Del intervalo (I):** $a < 3 \Rightarrow 3 - a > 0$; $3 - a$ es **positivo**

$\Rightarrow a - 4 < -1$; $a - 4$ es **negativo**

$$\Rightarrow E = 3 - a - a + 4$$

$$\therefore \boxed{E = -2a + 7 \text{ si } a < 3}$$

(4°) **Del intervalo (II):** $3 < a < 4 \Rightarrow -1 \leq 3 - a \leq 0$; **3 - a es negativo**

$\Rightarrow -1 \leq a - 4 \leq 0$; **a - 4 es negativo**

$\Rightarrow E = -3 + a - a + 4$

$\therefore \boxed{E = 1 \text{ si } 3 \leq a \leq 4}$

(5°) **Del intervalo (III):** $a > 4 \Rightarrow a - 4 > 0$; **a - 4 es positivo**

$\Rightarrow 3 - a < -1$; **3 - a es negativo**

$\Rightarrow E = -3 + a + a - 4$

$\therefore \boxed{E = 2a - 7 \text{ Si } a > 4}$

16.11.58 **Ejemplo Explicativo**

Hallar el mínimo valor de "M" con la propiedad siguiente:

$$1 + 6x - x^2 \leq M \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

***Recuerde*:**

Toda regla de correspondencia cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$ posee valor extremo máximo o mínimo.

Si: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Máximo si $a < 0 \Rightarrow f_{máx} = f_{(-b/2a)}$

Mínimo si $a > 0 \Rightarrow f_{mín} = f_{(-b/2a)}$

***Solución*:**

(1°) **Si ordenamos la desigualdad.**

$\Rightarrow x^2 - 6x + (M - 1) \geq 0$ .... (A)

Designando por f (x) al primer miembro

$f(x) = x^2 - 6x + (M - 1) \geq 0$ .... (B)

(2°) **f (x) posee extremo mínimo pues: a = 1 > 0,**

$\Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2(1)} = 3$

$\Rightarrow$ Sustituyendo el valor 3 sobre (B)

$\Rightarrow f(3) = 9 - 18 + M - 1 > 0$

(3°) **Resolviendo esta última desigualdad:**

$-10 + M \geq 0$

$M \geq 10$; $M \in [10, \infty\rangle$

$\therefore \boxed{M_{min} = 10}$

16.11.59 **Ejercicio Explicativo**

Encontrar el mayor número "m" con la propiedad de que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$m \le x^2 + 14x + 33$$

Solución:

(1°) **Al ordenar:** $x^2 + 14x + 33 - m \ge 0$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 14x + (33 - m) \ge 0$ .... (A)

El trinomio de 2° grado posee extremo mínimo si:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{14}{2(1)} = -7$$

(2°) **Sustituyendo el valor hallado -7 sobre la desigualdad (A)**

$\Rightarrow f(-7) = 49 - 98 + 33 - m \ge 0$

$\Rightarrow f(-7) = -16 - m \ge 0$

$\Rightarrow m \le -16$

$\therefore \boxed{m_{max} = -16}$

16.11.60 **Ejercicio Explicativo**

Que valor debe de darse a "m" de modo que el trinomio:

$$y = mx^2 + (m - 1)x + m - 1$$

Sea siempre negativo

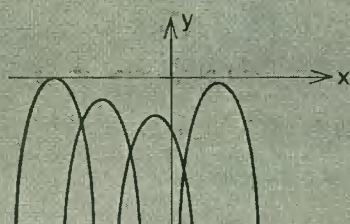
Recuerde:

Al estudiar el trinomio: $f(x) = ax^2 + bx + c$ este adoptará valores negativos siempre que se verifique:

$a < 0$ .... (1)

y $\Delta < 0$ .... (2)

o gráficamente:



Solución:

(1°) **Por condición**

$m < 0$ .... (A)

$\Delta < 0$ .... (B)

(2°) **A partir de (B) y en base a los coeficientes de la regla cuadrática:**

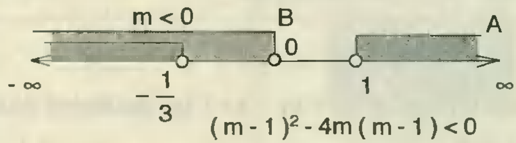
$\Rightarrow (m-1)^2 - 4m(m-1) < 0$; resolviendo esta inecuación.

$(m-1)(m-1-4m) < 0$

$(m-1)(3m+1) > 0$; $m = 1$, $m = -1/3$

De acuerdo a la regla de áreas.

(3°) **De acuerdo al sistema conformado por (A) y (B), la intersección necesaria será:**



$\therefore \boxed{m \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{3} \right\rangle}$

16.11.61 **Ejercicio Explicativo**

Probar que si a, b y c sean reales y positivos se verifica que:

$$a(b^2 + ab + c^2) + c(b^2 + bc + a^2) > 6abc$$

Recuerde:

Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$

Demostración:

(1°) **Al disponer del primer miembro:**

$ab^2 + a^2b + ac^2 + b^2c + bc^2 + a^2c$

$\Rightarrow$ Asociando los pares:

$ab^2 + ac^2 \Rightarrow ab^2 + ac^2 \geq 2\sqrt{(ab^2)(ac^2)}$

$a^2b + bc^2 \Rightarrow a^2b + bc^2 \geq 2\sqrt{(a^2b)(bc^2)}$

$b^2c + a^2c \Rightarrow b^2c + a^2c \geq 2\sqrt{(b^2c)(a^2c)}$

(2°) **Se obtiene las siguientes desigualdades:**

$ab^2 + ac^2 \geq 2abc$

$a^2b + bc^2 \geq 2abc$

$b^2c + a^2c \geq 2abc$

$\Rightarrow ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c \geq 6abc$

(3°) Asociando:

$\therefore \boxed{a(b^2+ab+c^2)+c(b^2+bc+a^2) \geq 6abc}$

16.11.62 **Ejercicio Explicativo**

Siendo a, b, x e y positivos demostrar que:

$$(ab+xy)(ax+by) \geq 4abxy$$

Recuerde:

Si m y $n \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow m+n \geq 2\sqrt{mn}$

Solución:

(1°) **En relación a los términos ab + xy ; ax + by podemos establecer:**

$\Rightarrow ab+xy \geq 2\sqrt{abxy}$ .... (A)

$\Rightarrow ax+by \geq 2\sqrt{axby}$ .... (B)

(2°) **Multiplicando A y B**

$\Rightarrow (ab+xy)(ax+by) \geq 4\sqrt{abxy}\sqrt{axby}$

$\therefore \boxed{(ab+xy)(ax+by) \geq 4\,abxy}$ **Lqqd.**

16.11.63 **Ejercicio Explicativo**

Suponiendo que: $a^2+b^2+c^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 1$

Demostrar que: $ax+by+cz \leq 1$

$a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$

Recuerde:

Si x^2 e $y^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

Solución:

(1°) **Podemos tener con seguridad en relación a:** a^2+x^2 , b^2+y^2 , c^2+z^2

Lo siguiente:

$\Rightarrow a^2+x^2 \geq 2ax$ .... (A)

$\Rightarrow b^2+y^2 \geq 2by$ .... (B)

$\Rightarrow c^2+z^2 \geq 2cz$ .... (C)

(2°) **Al sumar las tres desigualdades:**

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{} + \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{} \geq 2ax + 2by + 2cz$$

(3°) **Sustituyendo los equivalentes dados:**

$\Rightarrow 1 + 1 \geq 2\,(ax + by + cz)$

(4°) **Que luego de simplificar:**

$\Rightarrow \cancel{2}\,(ax + by + cz) \leq \cancel{2}$

$\therefore \boxed{ax + by + cz \leq 1}$

16.11.64 **Ejercicio Explicativo**

Probar que: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 > abc\,(a + b + c)$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

Recuerde:

Si: a, b, y $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^4c^2}$

Solución:

(1°) **Podemos tener los siguientes desigualdades:**

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^4c^2}$$
$$b^2c^2 + a^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^4}$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2}$$

(2°) **Al sumar ordenadamente:**

$\Rightarrow 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 \geq 2ab^2c + 2abc^2 + 2a^2bc$

(3°) **Luego de simplificar:**

$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq ab^2c + abc^2 + a^2bc$

(4°) **Al factorizar en el segundo miembro:**

$\therefore \boxed{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc\,(a + b + c)}$

16.11.65 **Ejercicio Explicativo**

Si. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Demostrar que: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4\,abcd$

Recuerde:

Si $a, b, \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Solución:

(1°) **Para realizar dicha demostración podemos tener que:**

$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$ .... (1)

$c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2$ .... (2)

Sumando (1) y (2)

$\Rightarrow (a^4 + b^4) + c^4 + d^4 \geq \underbrace{2a^2b^2 + 2c^2d^2}_{(A)}$ .... (3)

(2°) **Podemos tener la siguiente serie de desigualdades incidiendo en "A"**

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \geq 2\sqrt{(2a^2b^2)(2c^2d^2)}$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 \geq 4\,abcd$

$\therefore \boxed{a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4\,abcd}$ **Lqqd.**

16.11.66 **Ejemplo Explicativo**

Demostrar que: $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) > (a^3 + b^3)^2$; $a, b \in \mathbb{R}$

Recuerde:

Si, a y b $\in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow a^{2n} + b^{2m} \geq 2a^nb^m$

Solución:

(1°) Podemos tener en base el teorema en mención:

$a^2b^4 + a^4b^2 \geq 2\sqrt{a^6b^6}$

$\Rightarrow a^2b^4 + a^4b^2 \geq 2a^3b^3$ .... (A)

(2°) **Sumando $a^6 + b^6$: $a^2b^4 + a^4b^2 + a^6 + b^6 \geq a^6 + b^6 + 2a^3b^3$**

(3°) **El segundo miembro corresponde al cuadrado de un binomio: $(a^3 + b^3)^2$**

(4°) **El primer miembro permite ser factorizado como:**

$\underbrace{a^6 + a^2b^4} + \underbrace{a^4b^2 + b^6} \geq (a^3 + b^3)^2$

$a^2(a^4 + b^4) + b^2(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$

$\therefore \boxed{(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) \geq (a^3 + b^3)^2}$

16.11.67 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $|x - 5| + |x + 5| + |-2x + 13| \leq |x|$

Recuerde:

(1°) El operador valor absoluto realiza la sentencia correspondiente a condición de conocer el signo del elemento real afectado.

ESQUEMATICAMENTE

| # positivo | = # positivo

"El valor absoluto de un elemento de IR positivo **es el mismo elemento**"

| # negativo | = op (# negativo)

El valor absoluto de un elemento de IR negativo **es el opuesto de dicho elemento.**

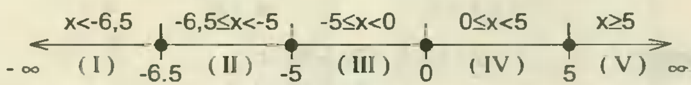
Solución:

(1°) **Obtenemos los cambios de signo, para ello:**

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \Rightarrow x = 5 \\ x + 5 &= 0 \Rightarrow x = -5 \\ 2x - 13 &= 0 \Rightarrow x = -6{,}5 \\ x &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

(2°) **Luego en una recta:**

También:



(3°) **De (I):**

$$\Rightarrow \boxed{x < -6.5} \begin{cases} x - 5 < 0 & \Rightarrow |x - 5| = -x + 5 \\ x + 5 < 0 & \Rightarrow |x + 5| = -x - 5 \\ -2x - 13 < 0 & \Rightarrow |-2x - 13| = 2x + 13 \\ x < 0 & \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$$

Sumando: $-x + 5 - x - 5 + 2x + 13 \leq -x$

$$13 \leq -x$$

$$x \leq -13 \quad \therefore \boxed{S_1 \in \langle -\infty, -13]}$$

(4°) **De (II):**

$$\Rightarrow -6{,}5 \leq x < -5 \begin{cases} -11{,}5 \leq x - 5 < -10 & \Rightarrow |x - 5| = -x + 5 \\ -1{,}5 \leq x + 5 < 0 & \Rightarrow |x + 5| = -x - 5 \\ -3 \leq -2x - 13 < 0 & \Rightarrow |-2x + 3| = 2x + 13 \\ -6{,}5 \leq x < -5 & \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$$

Sumando: $-x + 5 - x - 5 + 2x + 13 \leq -x$

$$x \leq -13 \quad \therefore \boxed{S_2 \ \langle -\infty, -13]}$$

(5°) **De (III):**

$$\Rightarrow -5 \le x < 0 \quad \begin{cases} -10 \le x-5 < -5 & \Rightarrow |x-5| = -x+5 \\ 0 \le x+5 < 5 & \Rightarrow |x+5| = x+5 \\ -13 < -2x-13 \le -3 & \Rightarrow |-2x-13| = 2x+13 \\ -5 \le x < 0 & \Rightarrow |x| = -x \end{cases}$$

Sumando:

$$-x+5+x+5+2x+13 \le -x$$
$$3x+23 \le 0$$
$$x \le -\frac{23}{3} \quad \therefore \quad \boxed{S_3 \in \langle -\infty, -\frac{23}{3}]}$$

(6°) **De (IV):**

$$\Rightarrow 0 \le x < 5 \quad \begin{cases} -5 \le x-5 < 0 & \Rightarrow |x-5| = -x+5 \\ 5 \le x+5 < 10 & \Rightarrow |x+5| = x+5 \\ -23 < -2x-13 \le -13 & \Rightarrow |-2x-13| = 2x+13 \\ 0 \le x < 5 & \Rightarrow |x| = x \end{cases}$$

Sumando:

$$-x+5+x+5+2x+13 \le x$$
$$x+23 \le 0$$
$$x \le -23 \quad \therefore \quad \boxed{S_4 \in \langle -\infty, -23]}$$

(7°) **De (V):**

$$\Rightarrow x \ge 5 \quad \begin{cases} 5 \le x < \infty & \\ 0 \le x-5 < \infty & \Rightarrow |x-5| = x-5 \\ 5 \le x+5 < \infty & \Rightarrow |x+5| = x+5 \\ -\infty < -2x-13 \le -23 & \Rightarrow |-2x-13| = 2x+13 \\ 5 \le x < \infty & \Rightarrow |x| = x \end{cases}$$

Sumando:

$$x-5+x+5+2x+13 \le x$$
$$3x+18 \le 0$$
$$x \le -6 \quad \therefore \quad \boxed{S_5 \in \langle -\infty, -6]}$$

(8°) Finalmente: $\quad C.S \in [\, S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \,]$

$$C.S \in \underbrace{\langle -\infty, -13] \cup \langle -\infty, -13]} \cup \langle -\infty, -\frac{23}{3}] \cup \langle -\infty, 23] \cup \langle -\infty, -6]$$

Simplificando:

$$C.S \in \langle -\infty, -13] \cup \langle -\infty, -\frac{23}{3}] \cup \langle -\infty, 23] \cup \langle -\infty, -6]$$

$\therefore \quad \boxed{C.S. \in \langle -\infty, -6]}$

16.11.68 **Ejercicio Explicativo**

Resolver: $\quad \sqrt{5 - 2\,\text{sen}\,x} \ge 6\,\text{sen}\,x - 1$

Solución:

(1°) **Por tener una inecuación irracional podemos tener el sistema equivalente:**

Sistema A $\begin{cases} 5 - 2\,\text{sen}\,x \geq 0 \text{ .... } (M) \\ 6\,\text{sen}\,x - 1 \geq 0 \text{ .... } (N) \\ 5 - 2\,\text{sen} \geq (6\,\text{sen}\,x - 1)^2 \text{ .... } (P) \\ -1 \leq \text{sen}\,x \leq 1 \text{ .... } (Q) \end{cases}$

Además el sistema siguiente:

Sistema B $\begin{cases} 5 - 2\,\text{sen}\,x \geq 0 \text{ .... } (\alpha) \\ 6\,\text{sen}\,x - 1 < 0 \text{ .... } (\beta) \\ -1 \leq \text{sen}\,x \leq 1 \text{ .... } (\gamma) \end{cases}$

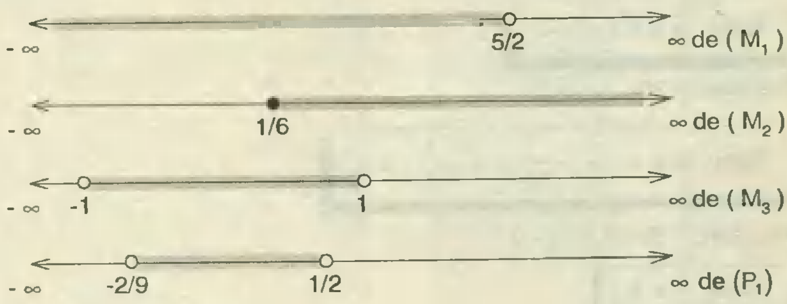
(2°) Resolviendo cada sistema el conjunto solución de la inecuación original será la unión de los conjuntos soluciones de los sistemas A y B.

(3°) **Solución del sistema A:**

de (M): $\text{sen}\,x \leq 5/2$ .... (M_1)
de (N): $\text{sen}\,x \geq 1/6$ .... (N_1)
de (Q): $-1 \leq \text{sen}\,x \leq 1$ .... (Q_1)

(4°) de (P): $36\,\text{sen}^2x - 10\,\text{sen}\,x - 4 \leq 0$
$18\,\text{sen}^2x - 5\,\text{sen}\,x - 4 \leq 0$
$(9\,\text{sen}\,x + 2)(2\,\text{sen}\,x - 1) \leq 0$; $\text{sen}\,x = -2/9$, $\text{sen}\,x = 1/2$
$-2/9 \leq \text{sen}\,x \leq 1/2$ .... (P_1)

(5°) **Graficando:**



(6°) **Finalmente:** $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap MP_1$

$$\Rightarrow \text{sen}\,x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\therefore \boxed{x \in \left[\text{arcsen}\frac{1}{6}, \text{arcsen}\frac{1}{2}\right\rangle}$$

16.12 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

CAPITULO : DESIGUALDADES

(1) Hallar el mayor "a" y el menor "b" tal que para todo $x \in [1/2, 1]$ se verifique:

$$a < \frac{10x+2}{10x+3} < b$$

Rpta: $a = \frac{7}{8}, b = \frac{12}{13}$

(2) Hallar el mayor "p" y el menor "q" tal que para todo $x \in [2, 5]$ se verifique:

$$\frac{x+2}{x+3} \in \langle p ; q \rangle$$

Rpta: $p = \frac{4}{5}, q = \frac{7}{8}$

(3) Resolver: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} > \sqrt{3x-2}$

Rpta: $x \in [\frac{3}{2}, \infty\rangle$

(4) Resolver: $|x+1| < |x-2|$

Rpta: $x \in \langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$

(5) Resolver: $|3x+1| < 1-x$

Rpta: $x \in \langle -1, 0\rangle$

(6) Resolver: $|20x-1| > 3$

Rpta: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{10}\rangle \cup \langle \frac{1}{5}, \infty\rangle$

(7) Resolver: $|3x-1| < x-2$

Rpta: $x \in \phi$

(8) Resolver: $[\![10 - x^2]\!] \geq -39$

Rpta: $x \in [-7, 7]$

(9) Resolver: $[\![2x+5]\!] \leq 13$

Rpta: $x \in \langle \infty, -\frac{9}{2}\rangle$

(10) Resolver: $\left\llbracket \dfrac{x+3}{x+6} \right\rrbracket \leq 4$

Rpta: $x \in \langle -\infty, -6\frac{3}{4} \rangle \cup \langle -6, \infty \rangle$

(11) Resolver: $\left[\dfrac{6x+1}{6x-2} \right] \leq 3$

Rpta: $x \in \langle -\infty, \frac{1}{3} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, \infty \rangle$

(12) Resolver: $\llbracket 100x^2 - 20x - 2 \rrbracket < 6$

Rpta: $x \in \langle -\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \rangle$

(13) Resolver: $\llbracket \sqrt{5-6x} \rrbracket = 1$

Rpta: $x \in \langle \frac{1}{6}, \frac{2}{3}]$

(14) Resolver: $\dfrac{\sqrt{1-3x}}{\llbracket 9x^2 - 4 \rrbracket} \leq 0$

Rpta: $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right]$

(15) Resolver: $\left\llbracket \left| -\dfrac{x}{4} \right| + 1 \right\rrbracket < 2$

Rpta: $x \in \langle -4, 4 \rangle$

(16) Resolver: $\left| 7x^2 - 4 \right|^2 + 30 \leq 13 \left| 7x^2 - 4 \right|$

Rpta: $x \in \left[-\sqrt{2}, -1 \right] \cup \left[-\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{7}}{7} \right] \cup \left[1, \sqrt{2} \right]$

(17) Si: $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{2}x < \dfrac{\frac{1}{2}x + 4}{\frac{1}{4}x^2 - 1} \right\}$

Determinar: C' (complemento de C)

Rpta: $c' \in [-2, 2] \cup [4, \infty>$

(18) Resolver: $\dfrac{2}{5x+1} + \dfrac{5}{5x-1} < -1$

Rpta: $x \in <-1, -\frac{1}{5}> \cup <\frac{2}{5}, 1>$

(19) Si: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \left| \frac{1}{13}x - \frac{1}{2} \right| > \frac{3}{2} \right\}$

Hallar A' (complemento de A)

Rpta: $[-13, 26]$

(20) Resolver: $\dfrac{\frac{1}{25}x^2 + \frac{3}{5}x + 2}{\frac{1}{5}x - 2} < \dfrac{\frac{1}{5}x - 2}{\frac{1}{5}x + 2}$

Rpta: $x \in <-\infty, -10> \cup <0, 10>$

CAPITULO 17

Una de las preocupaciones de la disciplina matemática en especial la del Algebra es de poder asociar un modelo matemático ideal a las diversas situaciones del quehacer cotidiano, para plantear problemas matemáticos que sean equivalentes al problema original.

LA ECUACION

17.1. LA IGUALDAD (=). (De números reales)

Definición.- Es la relación matemática que se establece entre los números reales que poseen el mismo valor absoluto y el mismo signo.

Ejemplo:

$3 = 3$	;	Por tener el mismo valor y el mismo signo.
$9 \neq -9$	;	No es una igualdad a pesar de tener igual valor, poseen signos distintos.
$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	;	Es una igualdad porque cumple con la definición.
$a = b$	;	En este caso se exige que se cumpla la definición, es decir a y b deben tener igual valor e igual signo.

17.2 AXIOMAS DE LA IGUALDAD

(1°) **Axioma de Reflexividad:**

Si: $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $a = a$

(2°) **Axioma de Simetría:**

Si: $a = b$

$\Rightarrow$ $b = a$, $a, b \in \mathbb{R}$

(3°) **Axioma de Transitividad:**

Si: $a = b$ y

$b = c$

$\Rightarrow$ $a = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

(4°) **Axiomas de Sustitución:**

Sustitución respecto a la suma
$$\begin{cases} \text{Si:} & a = d \quad y \\ & a + c = m \\ \Rightarrow & a + d = m \end{cases}$$

Sustitución respecto al producto
$$\begin{cases} \text{Si:} & a = d \quad y \\ & ac = m \\ \Rightarrow & ad = m \end{cases}$$

17.3 TEOREMA # 1.- (De la adición y la multiplicación)

Si: $a = b$; $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ (i) $a + c = b + c$

(ii) $a - c = b - c$

} · Adición en la igualdad

(iii) $ac = bc$

(iv) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$; $c \neq 0$

} Multiplicación en la igualdad

17.4 TEOREMA # 2.- (De la transposición)

Siendo: $a, b \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ (i) **Transposición de los términos de la suma:**

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \text{ ó } b = -a$$

(ii) **Transposición de los términos del producto:**

$$ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b} \;;\; b \neq 0$$

$$\text{ó } b = \frac{1}{a} \;;\; a \neq 0$$

17.5 TEOREMA # 3.- (De la cancelación)

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(i) Cancelación de la suma:

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

(ii) Cancelación del producto:

$$ac = bc \Rightarrow a = b \;;\; c \neq 0$$

17.6 TEOREMA # 4.- (Del álgebra de la igualdad)

Si: $a = b$ y $c = d$; $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

(i) $a + c = b + d$ } **suma y diferencia de igualdades**

(ii) $a - c = b - d$

(iii) $ac = bd$ } **producto y división de igualdades**

(iv) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ $(c \neq 0 \ , \ d \neq 0)$

(v) $a^n = b^n$ } **potenciación y radicación de igualdades**

$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ $(m \neq 0)$

17.7 LA ECUACION

Definición.- Es toda proposición abierta cuyo valor de verdad se determina mediante el correspondiente conjunto solución S.

Comentario.-

Una ecuación se denomina proposición abierta porque su valor de verdad no se determina de inmediato.

Ejemplo:

¿ Es verdadera la igualdad: $3(2x + 1) = 6x + 1$?

Solución:

Por distributividad: $6x + 3 = 6x + 1 \ ; \ 3 = 1$

$\therefore$ La igualdad es falsa

17.8 CONJUNTO SOLUCION (S)

Definición.- El conjunto solución de una ecuación, es aquel cuyos elementos permiten que la ecuación sea una **proposición verdadera**; cualquier elemento del conjunto solución se denomina solución o raíz de la ecuación.

Comentario:

(1) Resolver una ecuación es hallar el conjunto solución.
(2) A toda ecuación le corresponde un conjunto solución.
(3) Un conjunto solución vacío implica la inconsistencia de la ecuación.
(4) Un conjunto solución de infinitos términos implica la igualdad absoluta de la ecuación o identidad.
(5) Un conjunto solución de número finito de términos implica la igualdad relativa de la ecuación.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 34 \\ \Rightarrow \quad 3x &= 27 \\ \Rightarrow \quad x &= 9 \\ \Rightarrow \quad S &= \{9\} \end{aligned}$$

$3x + 7 = 24$ es una ecuación de conjunto solución $\{9\}$.

Ejemplo:

¿Es verdadera la igualdad $5(2x + 7) = 9x + 36$?

Solución:

(1°) Al ordenar: $10x + 35 = 9x + 36$

(2°) Mediante transposición: $10x - 9x = 36 - 35$

$$x = 1$$

(3°) El conjunto solución será: $S = \{1\}$

$\therefore$ **La igualdad es verdadera si: $x = 1$**

17.9 LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

Definición.- Un conjunto de ecuaciones son equivalentes si poseen un conjunto solución común.

Ejemplo:

Sean: $\frac{1}{2}x + 3 = 11 \Rightarrow x = 16, \quad S = \{16\}$

$\frac{22}{x-5} + 1 = 3 \Rightarrow x = 16, \quad S = \{16\}$

$\therefore$ $\boxed{\frac{1}{2}x + 3 = 11 \wedge \frac{22}{x-5} + 1 = 3 \text{ son equivalentes}}$

Ejemplo:

Sean: $(x+1)(x+5) = -x - 5 \quad \wedge \quad x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x+1)(x+5) + (x+5) = 0 \quad \wedge \quad (x-5)(x-2) = 0$

$(x+5)(x+2) = 0 \quad \wedge \quad x - 5 = 0 \ , \ x - 2 = 0$

$x = -2 \vee x = -5 \quad \wedge \quad x = 5 \ ; \ x = 2$

$\boxed{S = \{-5, -2\}} \quad \wedge \quad \boxed{S = \{2, 5\}}$

$\therefore$ $(x+1)(x+5) = -x - 5 \ \wedge \ x^2 - 7x + 10 = 0$, **no son equivalentes**

17.10 TRANSFORMACIONES A ECUACIONES EQUIVALENTES

Teorema: Sea $F(x) = G(x)$, una ecuación algebraica de partida.

$\Rightarrow$ Las siguientes ecuaciones **son sus equivalentes:**

(i) $F(x) - G(x) = 0$

(ii) $F(x) \div G(x) = 1$; si $F(x)$ y $G(x)$ son primos entre sí; $G(x) \neq 0$

(iii) $F(x) + P(x) = G(x) + P(x)$; si $P(x)$ es racional entero

(iv) $F(x) + \dfrac{P(x)}{q(x)} = G(x) + \dfrac{P(x)}{q(x)}$; si $q(x) \neq 0$

(v) $F(x) + c = G(x) + c$; $c \in \mathbb{R}$

(vi) $cF(x) = cG(x)$; $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

(vii) $\dfrac{F(x)}{c} = \dfrac{G(x)}{c}$; $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

(viii) $a^{F(x)} = a^{G(x)}$; $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

(ix) $\dfrac{1}{F(x)} = \dfrac{1}{G(x)}$; Si $G(x) = F(x) \neq 0$

(x) $F(x) = H(x)$; si $G(x) = H(x)$

17.11 TRANSFORMACIONES A ECUACIONES NO EQUIVALENTES

Teorema: Sea $F(x) = G(x)$ una ecuación algebraica de partida, tal que $S \neq \{\ \}$

$\Rightarrow$ Las siguientes ecuaciones **no son sus equivalentes:**

(i) $F(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; Si $Q(x) = 0$ en "S"

(ii) $F(x) . C(x) = G(x)\, C(x)$;

(iii) $\dfrac{F(x)}{C(x)} = \dfrac{G(x)}{C(x)}$; Si $F(x). G(x)$ y $C(x)$ no son primos entre sí

(iv) $F^m_{(x)} = G^m_{(x)}$; $m \in \mathbb{N} > 1$

(iv) $\sqrt[m]{F(x)} = \sqrt[m]{G(x)}$; $m \in \mathbb{N} > 1$

17.12 DOMINIO DE VALORES ADMISIBLES DE UNA ECUACION DE UNA INCOGNITA EN IR (DVA)

(Restricción de la Ecuación)

Definición.- Se denomina Dominio de Valores Admisibles (DVA) de una ecuación al conjunto de valores de la incógnita para los cuales tiene sentido y están definidos los miembros de la ecuación.

17.12.1 OBSERVACIONES:

(i) Todo elemento del DVA son considerados admisibles para conformar el conjunto solución de la ecuación.

(ii) **Recíprocamente**, la solución de una ecuación está contenida en el DVA de la ecuación.

(iii) El cálculo del dominio de una función o relación se realiza de acuerdo a reglas establecidas.

(iv) Esquema para determinar el DVA de una ecuación:
A.- Se obtiene el dominio del 1er miembro de la ecuación (D_1).
B.- Se obtiene el dominio del 2° miembro de la ecuación (D_2).
C.- El dominio de valores admisibles de la ecuación será la intersección.

$$\boxed{DVA = D_1 \cap D_2}$$

(v) La determinación del DVA es un criterio importante en el análisis de una ecuación al restringir el comportamiento de la incógnita; sin embargo al no ser necesario se le sustituye por la verificación de las raíces.
Se recomienda la conjugación adecuada de ambas metodologías.

Ejemplo:

Hallar el dominio de valores admisibles de la ecuación:

$$x - 42 = \sqrt{x}$$

Solución:

(1°) Calculamos el dominio de cada miembro:

Dominio $(x - 42) \in \mathbb{R}$ ....(1)

Dominio $\left(\sqrt{x}\right) \in (x \geq 0)$ ....(2)

(2°) De (1): $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ (Dominio del 1er miembro)

De (2): $x \in [0, \infty\rangle$ (Dominio del 2° miembro)

(3°) Intersección: $D_1 \cap D_2$

$\langle -\infty, \infty\rangle \cap [0, \infty\rangle$

$[0, \infty\rangle$

$\therefore \boxed{DVA = [0, \infty\rangle}$

Comentario:

(1°) El dominio hallado establece que la raíz se encuentra en dicho intervalo, es decir es necesariamente positiva.

(2°) **El hecho de haber establecido el DVA no implica haber resuelto la ecuación, sólo se le ha restringido.**

(3°) Si se resuelve la ecuación, en efecto se encuentra:
$S = \{49\} \in$ DVA.

Ejemplo:

Hallar las restricciones de la incógnita de la ecuación:

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{1-x}=0$$

Solución:

(a) Determinemos el DVA de la ecuación por ello ordenamos:

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{1-x}$$

En el primer miembro:

$$x-4\geq 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

En el segundo miembro:

$$1-x\geq 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

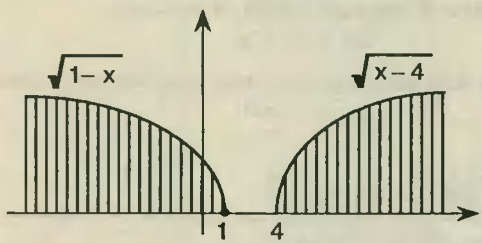
De (1) : $x\geq 4 \quad \therefore \quad D_1=[4,\ \infty>$

De (2) : $x\leq 1 \quad \therefore \quad D_2=<-\infty,\ 1]$

$$D_1\cap D_2=[4,\infty>\ \cap\ <-\infty,\ 1]$$

$\therefore$ $\boxed{D_1\cap D_2=\phi}$ (La ecuación no tendrá solución)

(b) **Para abundar en detalles:** La gráfica de las funciones debiera intersectarse para que exista solución.



Observar: $\boxed{\sqrt{1-x}\ \cap\ \sqrt{x-4}=\phi}$

(c) Si se resolviera la ecuación sin considerar el Dominio, se tendrá:

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{1-x}$$

Al cuadrado: $\sqrt{x-4}^{\,2}=\sqrt{1-x}^{\,2}$

$\Rightarrow$ $|x-4|=|1-x|$; pues desconocemos los signos

Al cuadrado:

$$(x-4)^2=(1-x)^2$$

$$(x-4)^2-(1-x)^2=0$$

$$(x-4+1-x)(x-4-1+x)=0$$

$$3(2x-5)=0$$

$$x=\frac{5}{2}$$

Verificando: $x = 5/2$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{5}{2}-4} = \sqrt{1-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{-\frac{3}{2}} = \sqrt{-\frac{3}{2}}$$

Las ecuaciones irracionales se consideran únicamente **en el conjunto de los números reales**, por lo que la igualdad última carecerá de sentido:

$\therefore \quad \boxed{S = \{\ \}}$

17.12.2 EL TEOREMA DE RENATO DESCARTES O REGLA DE LOS SIGNOS

TEOREMA.- (REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES)

Sea P(x) = 0 una ecuación racional entera de coeficientes reales.

⇒ El número de **raíces reales positivas es igual que el número de variaciones de signo de los coeficientes de P(x)** o bien al número de variaciones menos un entero positivo par.

El número de raíces reales negativas es igual que el número de permanencias de signo de los coeficientes de P(x) o bien este número menos un entero positivo par.

Ejemplo:

De acuerdo a la regla de signos, la ecuación:

$$3x + 1 = 0$$

tiene una sola raíz negativa, pues tiene una permanencia de signos:

$$\underbrace{+3x + 1}_{(-)} = 0$$

$\therefore$ Tiene una raíz negativa

Verificación: Si resolvemos:

$$3x + 1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

En efecto ∃ raíz única y negativa.

Ejemplo:

De acuerdo a la regla de signos, la ecuación:

$$-3x + 12 = 0$$

posee una raíz positiva, pues tiene una variación de signos de coeficientes:

$$\underbrace{-3x + 12}_{(+)} = 0$$

$\therefore$ Tiene una raíz positiva

Verificación: Si resolvemos: $-3x = -12$

$$x = 4$$

En efecto $\exists$ raíz única y positiva.

Ejemplo:

De acuerdo a la regla de signos de la ecuación:

$$x^2 + 7x + 1 = 0$$

tiene 2 raíces negativas o 2 raíces complejas, pues tiene dos permanencias de signos como se observa:

$$\underbrace{+x^2 + 7x}_{(-)}\;\underbrace{\;+ 1}_{(-)}$$

$\Rightarrow$ Establecemos el cuadro de posibilidades.

	Raíces **Positivas** (Variaciones)	Raíces **Negativas** (Permanencias)	Raíces **Complejas**	Total de Raíces
(I)	$\nexists$	2	0	2
(II)	$\nexists$	0	2	2

(I) De acuerdo a los datos de los signos de los coeficientes de la ecuación, tenemos 2 raíces negativas; por ser de 2° grado el n° total de raíces será 2.

(II) Disminuyendo 2 al número de raíces negativas, para que el n° total de raíces contiene siendo 2, es necesario que su lugar sea ocupado por números complejos.

Verificación: Al resolver:

$$X_1 = \frac{-7+\sqrt{35}}{2} \quad ; \quad X_2 = \frac{-7-\sqrt{35}}{2}$$

$\therefore$ **En efecto x_1 y x_2 son negativas.**

Ejemplo:

La ecuación $x^2 - 6x + 25 = 0$

tiene dos raíces negativas **o dos raíces complejas**; de acuerdo a la regla de signos:

$$\underbrace{+x^2 - 6x}_{-}\;\underbrace{\; + 25}_{-} = 0$$

tenemos dos variaciones de signo, con ello establecemos el cuadro de posibilidades:

	Raíces Positivas (Variaciones)	Raíces Negativas (Permanencias)	Raíces Complejas	Total de Raíces
(I)	2	$\nexists$	0	2
(II)	0	$\nexists$	2	2

La segunda fila se obtiene de disminuir un número par el n° de raíces positivas, la diferencia se traslada a la columna de raíces complejas.

Verificación: Al resolver la ecuación:

$$\Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} \quad ; \quad x_1 = 3 + 4i \ ; \ x_2 = 3 - 4i$$

Tiene 2 raíces complejas.

Ejemplo:

Verificar que la ecuación:
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

tiene 3 raíces positivas ó **una raíz positiva y 2 complejas conjugadas.**

Solución:

Observando la variación de los signos de los coeficientes:

$$+x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

(+) (+) (+)

Tenemos 3 variaciones de signo, con lo cual establecemos el cuadro siguiente:

Raíces Positivas (Variaciones)	Raíces Negativas (Permanencias)	Raíces Complejas	Total de Raíces
3	$\nexists$	0	3
1	$\nexists$	2	3

Verificando: Al factorizar:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \ , x = 2 \ , \ x = 3$$

La ecuación tiene 3 raíces positivas.

Ejemplo:

Determinar el número posible de raíces positivas y negativas de la ecuación:
$x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 5 = 0$

Solución:

(1°) De acuerdo a la notación establecida.

Variación : (+)

Permanencia : (-)

$$\Rightarrow \quad +x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 5 = 0$$

(-) (+) (+) (+)

permanencia variación variación variación

(2°) Con estos resultados establecemos el cuadro siguiente mediante el TEOREMA DE DESCARTES.

	# de Raíces **Reales Positivas (Variaciones)**	# de Raíces **Reales Negativas (Permanencias)**	# de Raíces **Complejas**	# Total **de Raíces**
(I)	3	1	0	4
(II)	1	1	2	4

(I) En esta primera fila transcribimos los resultados de los signos de los coeficientes de la ecuación; el total de raíces lo determina el grado de la misma (4°).

(II) En esta segunda fila disminuimos en 2 el número de variaciones y de permanencias el cual no se altera, por lo cual se da opción a que se tengan dos raíces complejas.

∴ El cuadro sintetiza todas las posibilidades de las **raíces de la ecuación**.

Ejemplo:

¿Cuál es el número máximo de raíces reales que puede tener la ecuación:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

y cuál es el mínimo?

Solución:

(1°) Debemos establecer los datos del cuadro siguiente:

# de Raíces **Reales Positivas**	# de Raíces **Reales Negativas**	# de Raíces Complejas	# Total de Raíces
Variaciones	Permanencias		

(2°) Para ello: $+x^2 + x + 1 = 0$

(-) (-)

\# de variaciones : 0
\# de permanencias : 2
\# de total de raíces : 2

(3°) De acuerdo al Teorema de Descartes.

	# de Raíces **Reales Positivas**	# de Raíces **Reales Negativas**	# de Raíces Complejas	# Total de Raíces
	Variaciones	Permanencias		
(I)	0	2	0	2
(II)	0	0 $(*)_1$	2 $(*)_2$	2 $(*)_3$

(I) En esta 1ª fila transcribimos las observaciones de los signos de la ecuación.

(II) En esta 2ª fila disminuimos 2 al n° de raíces negativas, dando lugar a 2 raíces complejas $(*)_2$ de modo que el número total de raíces sea fijo e igual a $2(*)_3$.

∴ Máximo # de raíces reales: 2
Mínimo # de raíces reales: 0

Ejemplo:

Explicar porque:

$$6x^3 + x^2 + 1 = 0$$

Debe de tener dos raíces complejas.

Solución:

(1°) Según Descartes:

$$\underbrace{+6x^3+x^2}_{-}\underbrace{\;}_{-}+1=0$$

	# de Raíces **Reales Positivas**	# de Raíces **Reales Negativas**	# de Raíces **Complejas**	# Total **de Raíces**
	Variaciones	Permanencias		
(I)	0	2	1	3
(II)	0	1	2	3

(I) Transcribimos los datos de la regla de signos; recordemos que las raíces complejas deben de ser conjugadas.

(II) La única opción razonable será ésta que establece 2 raíces complejas y una raíz negativa.

17.13 LA ECUACION ALGEBRAICA DE PRIMER GRADO DE UNA INCOGNITA

Definición.- Se denomina ecuación de primer grado de incógnita "x" a toda proposición abierta de la forma:

$$ax+b=0\ ;\ a, b, \in \mathbb{R}$$

Teorema.- Toda ecuación de primer grado $ax+b=0$ consistente tiene un conjunto unitario de elemento $-b/a$ como conjunto solución.
Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si:} & ax+b=0\ ;\ a\neq 0 \\ \Rightarrow & S=\{-b/a\} \end{array}}$$

17.13.1 CONSISTENCIA DE LA ECUACION DE PRIMER GRADO

Considerando la ecuación de primer grado $ax+b=0$ y la única raíz:

$$X=-\frac{b}{a}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

ocurren las siguiente casos: $(a=b=0\ ;\ a=0\ ;\ b\neq 0\ ;\ a\neq 0\ ;\ b=0)$

I.- Si: $a=b=0$, ECUACION CONSISTENTE E INDETERMINADA

Al reemplazar en (A): $X=-\dfrac{0}{0}$, (indeterminación)

Al reemplazar en la E^c: $0a+b=0$ (identidad nula)

Admite un número infinito de raíces)

II.- Si: $a=0$, $b\neq 0$; ECUACION INCONSISTENTE O ABSURDA

Al reemplazar en A: $X=-\dfrac{b}{0}$ (División sin definición)

Al reemplazar en la E^c: $0x+b=0$ (Absurdo $(b\neq 0)=0$)

No admite raíz alguna; el conjunto solución es vacío)

III.- Si: $a \neq 0$ y $b \neq 0$ ECUACION CONSISTENTE DETERMINADA

Al reemplazar en (A): $X = -\dfrac{b}{a}$ (División definida)

Al reemplazar en la E^c: $ax + b = 0$ (Proposición abierta)

Admite la única raíz correspondiente.

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$2(x+3)+3(x+4)+4(x+5) = 5(x+7)+7$

Solución:

(1°) Al efectuar en el 1° y 2° miembro la ecuación obtenida es equivalente al original.

(2°) $2x+6+3x+12+4x+20 = 5x+35+7$

$$\Rightarrow \quad 9x+38 = 5x+42$$

(3°) TRANSPONIENDO; $4x = 4$

$$x = 1$$

$$\boxed{\therefore\ S = \{1\}}$$

Ejemplo:

Hallar el valor de verdad de la siguiente proposición abierta:

$$p: \left(3^x + 3^{-x}\right)^2 - \left(3^x - 3^{-x}\right)^2 = \frac{1}{3}(x-6)$$

Solución:

(1°) Debemos de hallar el conjunto solución. Del primer miembro según Legendre.

$$\Rightarrow \quad 4\underbrace{\left(3^x\right)\left(3^{-x}\right)}_{3^0} = \frac{1}{3}(x-6)$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{1}{3}(x-6)$$

$$\Rightarrow \quad 12 = x - 6$$

$$x = 18$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{18\}}$$

(2°) Verificando: $x = 18$

$$\Rightarrow \left(3^{18} + 3^{-18}\right)^2 - \left(3^{18} - 3^{-18}\right)^2 = \frac{1}{3}(18-6)$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(3^{18} \times 3^{-18}\right) = \frac{1}{3}(12)$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 4$$

$\therefore$ **El valor de verdad de la proposición es "V"**

17.14 LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO DE UNA INCOGNITA

Definición.- Se denomina de esta manera a toda proposición abierta de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \,;\, a \neq 0}$$

Tales que "a", "b" y "c" representan constantes reales o complejas.

17.14.1 **Teorema.-** (DE LA FORMULA CUADRATICA)

A toda ecuación de 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le corresponde la **fórmula cuadrática** y 2 raíces x_1, x_2;

tales que: $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0,}$ es la fórmula cuadrática

donde:

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{, es el discriminante}$$

y $S = \{x_1, x_2\}$ es el conjunto solución.

Demostración:

(1°) A partir de: $ax^2 + bx + c = 0$

(2°) Nos proponemos aislar a "x", para ello:

(3°) Completemos cuadrados, manteniendo las equivalencias:

(i) Multiplicando por "4a": $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

(ii) Tenemos parte del trinomio cuadrado perfecto luego de transponer -4ac:

$$\Rightarrow \underbrace{(2ax)^2}_{\text{Cuadrado del primero}} + \underbrace{2(2ax)b}_{\text{Doble del primero y el segundo}} = -4ac$$

(4°) Para tener el cuadrado perfecto **falta el cuadrado del segundo: b^2**

(iii) Sumando b^2 a la igualdad:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)b + \underbrace{b^2}_{\uparrow\ \text{Cuadrado del segundo}} = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\uparrow}$$

(*) Obsérvese la aparición del discriminante

(iv) Se logra el cuadrado del binomio $(2ax + b)$:

$$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

(v) Al estar aislado la incógnita x en el binomio, resolvemos la ecuación:

$$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

(vi) Se obtiene la fórmula cuadrática: $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

(vii) Las raíces x_1, x_2 serán:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(viii) El conjunto solución que involucra a x_1 y x_2 será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{ x_1 , x_2 \}}$$

17.14.2 COROLARIO: (DE LA FORMULA CUADRATICA RACIONALIZADA)

A toda ecuación de 2° grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le corresponde la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}; \quad a \neq 0}$$

17.15 NATURALEZA NUMERICA ($\in$ IR) DE LAS RAICES DE LA ECUACION CUADRATICA

La naturaleza algebraica de la fórmula cuadrática

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

es la de una **expresión algebraica irracional**; sin embargo las raíces, esencialmente dependen del discriminante Δ = **b^2 - 4ac**, por lo cual se presentan los siguientes casos:

CONSIDERACION: En la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$
($a, b, c \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$) y el análisis del discriminante

I CASO: Si $\Delta > 0$, se tiene 2 raíces reales y distintas

a) $\Delta = k^2$; (Δ cuadrado perfecto)
$\Rightarrow$ 2 raíces reales racionales

b) $\Delta \neq k^2$; (Δ no es un cuadrado perfecto)
$\Rightarrow$ 2 raíces reales irracionales conjugadas

II CASO: Si $\Delta = 0$, se tiene 2 raíces reales iguales
(La ecuación adopta la forma de **un trinomio cuadrado perfecto**)

III CASO: Si $\Delta < 0$, se tiene 2 raíces **complejas conjugadas**.

Ejemplo:

Mediante el análisis del discriminante, determinar la naturaleza de las raíces de las siguientes ecuaciones:

i) $x^2 + 2x + 122 = 0$

ii) $-4x^2 + 12x + 59 = 0$

iii) $10x^2 - 41x + 4 = 0$

Solución:

(i): **Para este caso:** $(x^2 + 2x + 122 = 0)$

$a = 1$

$b = 2$

$c = 122$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(122)$

$\Delta = -484 < 0$

$\therefore$ **Las raíces de esta ecuación serán complejas conjugadas.**

Solución:

(ii): **Para este caso:** $(-4x^2 + 12x + 59 = 0)$

$a = -4$

$b = 12$

$c = 59$

$\Delta = 12^2 - 4(-4)(59)$

$\Delta = 1088 > 0$; 1088 no es cuadrado perfecto

$\therefore$ **Las raíces de esta ecuación serán reales irracionales conjugadas entre sí.**

Solución:

(iii): **Para este caso:** $(10x^2 - 41x + 4 = 0)$

$a = 10$

$b = -41$

$c = 4$

$\Delta = (-41)^2 - 4(10)(4) = 1521$

$\Delta = 1521 > 0$; 1521 es un cuadrado perfecto

$\therefore$ **Las raíces de esta ecuación serán reales racionales.**

Ejemplo:

Hallar el valor de los parámetros "p" y "q" de modo que la proposición A sea falsa:

$$A : 3\left(\frac{p}{4} - 7\right)x + \left(\frac{pq}{56} - 3\right)5 = 0 \quad , \quad p, q, x \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) Se desea saber para qué valor de p y q la ecuación de 1° grado:

$$3\left(\frac{p}{4} - 7\right)x + \left(\frac{pq}{56} - 3\right)5 = 0$$

es **absurda.**

(2°) **Condicionamos:**

$$\Rightarrow \quad 3\left(\frac{p}{4}-7\right)=0 \text{ ....(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{pq}{56}-3\right)5 \neq 0 \text{ ....(2)}$$

(3°) **Resolviendo**

De (1): $\boxed{p=28}$

De (2): $\left(\frac{28q}{56}-3\right)5 \neq 0$ ....(3)

De (3): $\frac{q}{2}-3 \neq 0$

$\boxed{q \neq 7}$

(4°) Finalmente:

$\therefore$ La proposición es falsa si $p=28 \wedge q \in \mathbb{R} - \{70\}$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación mónica de primer grado en x:

$$5\left(\frac{a}{13}-2\right)x^2+\left(\frac{ab}{52}-7\right)x+\frac{a+b}{a-b}=0$$

Solución:

(1°) De acuerdo a los datos expuestos, se producen una serie de simplificaciones:

$$5\underbrace{\left(\frac{a}{13}-2\right)}_{\substack{\text{coef.} = 0 \\ \text{porque la} \\ \text{ecuación no} \\ \text{es de 2°gra-} \\ \text{do.}}}x^2+\underbrace{\left(\frac{ab}{52}-7\right)}_{\substack{\text{coef} = 1 \\ \text{porque la} \\ \text{ecuación} \\ \text{es mónica en x.}}}x+\frac{a+b}{a-b}=0 \text{ ....(1)}$$

(2°) **Resolviendo las condiciónes:**

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\left(\dfrac{a}{13}-2\right)=0 \text{ ....(1)} \\ \dfrac{ab}{52}-7=1 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

De (1): $\boxed{a=26}$

De (2): $\frac{26b}{52}-7=1$

$\frac{b}{2}=8 \quad ; \quad \boxed{b = 16}$

(3°) En (1): Reemplazando los datos obtenidos:

$$\Rightarrow \quad 0x^2 + x + \frac{26+16}{26-16} = 0$$

(4°) Resolviendo: $\Rightarrow \quad x + \dfrac{42}{10} = 0$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{21}{5}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{-\frac{21}{5}\right\}}$$

17.16 TEOREMA.- (Raíces irracionales cuadráticas conjugadas)

Sea: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$

con: $(a, b, c) \in \mathbb{Q}$

Si: $x_1 = m + \sqrt{n}$; **una raíz irracional**

$\Rightarrow$ $x_2 = m - \sqrt{n}$; $n \neq 0$, k^2; **es la otra raíz (irracional conjugada).**

$\therefore$ $S = \{m + \sqrt{n}\ ;\ m - \sqrt{n}\ \}$

17.17 TEOREMA.- (Raíces complejas conjugadas)

Sea: $ax^2 + bx + c = 0\ ;\ a \neq 0$

con: $(a, b, c) \in \mathbb{Q}$

Si: $x_1 = m + ni$; **una raíz compleja**

$\Rightarrow$ $x_2 = m - ni$ **es la otra raíz, (compleja conjugada).**

$\therefore$ $S = \{\ m + ni\ ;\ m - ni\ \}$

17.18 TEOREMA.- (Ecuación recíproca de 2° grado)

Sea: $ax^2 + bx + c = 0\ ;\ a \neq 0$ con: $a = c$; $a, c \in \mathbb{R}$

Si: $ax^2 + bx + a = 0$

$\Rightarrow$ Es una ecuación recíproca.

Si una raíz es "m" la otra es "$\dfrac{1}{m}$" , $m \neq 0$

$\therefore$ $S = \left\{m, \dfrac{1}{m}\right\}$

17.19 TEOREMA.- (Ecuación indeterminada de 2° grado)

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

con: $(a = b = c = 0)$

$\Rightarrow$ $0x^2 + 0x + 0 = 0$

Es una identidad nula $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $S = \{\ \langle -\infty, \infty\ \}$

17.20 CONSISTENCIA DE LA ECUACION CUADRATICA

Considerando la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ a, b, c \in \mathbb{R} \ ....(1)$$

pueden ocurrir los siguientes casos:

(I) **Si: $a = b = c = 0$, ECUACION CUADRATICA INDETERMINADA**

Al reemplazar en (1): $0x^2 + 0x + 0 = 0$
se tiene una identidad nula.

$\therefore \quad \boxed{S \in \mathbb{R}}$

(II) **Si $a = b = 0$; $c \neq 0$, ECUACION CUADRATICA INCONSISTENTE O ABSURDA**

Al reemplazar en (1): $0x^2 + 0x + c = 0$

$$(c \neq 0) = 0$$

Se tiene una igualdad absurda.

$\therefore \quad \boxed{S \in \{\ \}}$ ó $(a \neq 0, b \neq 0, c = 0)$

(III) **Si $(a \neq 0, b = 0, c = 0)$ ó $(a \neq 0, b \neq 0, c = 0)$ ó $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$, ECUACION CUADRATICA CONSISTENTE**

Al reemplazar en (1):

$$ax^2 + 0x + 0 = 0 \text{ , ó}$$
$$ax^2 + bx + 0 = 0 \text{ , ó}$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Todas ellas son ecuaciones consistentes; las dos primeras incompletas.

$\therefore \quad \boxed{S = \{x_1, x_2\}}$

Ejemplo:

Hallar m y n de modo que la ecuación siguiente en x:

$7(m + n + 18)x^2 + 3(m - n)x + mn = 0$ sea absurda.

Solución:

(1°) Para que se cumpla la condición solicitada:

$$a = 7(m + n + 18) = 0 \ ....(1)$$
$$b = 3(m - n) = 0 \ ....(2)$$
$$c = mn \neq 0 \ ....(3)$$

De (1) y (2): $m + n + 18 = 0$ ....(4)

$m - n = 0$ ....(5)

(2°) Resolviendo: $2m + 18 = 0$

$$\boxed{m = -9}$$

de (2): $\boxed{n = -9}$

Verificando en la ecuación los resultados:

$$7(-9 - 9 + 18)x^2 + 3(-9 + 9)x + (-9)(-9) = 0$$
$$0x^2 + 0x + 81 = 0$$
$$81 = 0$$

ECUACION ABSURDA y

Se obtiene un absurdo

$\therefore \quad \boxed{m = n = -9\text{; verifican la inconsistencia}}$

17.21 TEOREMA.- (De la suma, producto y diferencia de raíces).

Sea:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \neq 0$$

de $S = \{ x_1 , x_2 \}$

$$\Rightarrow \; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \textbf{(Suma de raíces)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \textbf{(Producto de raíces)}$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \quad \textbf{(Valor absoluto de la diferencia de raíces).}$$

Demostración:

(1°) Asumimos la simbología del discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(2°) Además las raíces de la ecuación:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(3°) De (2) + (3): $x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a}$

$$\therefore \quad \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \textbf{(La suma de raíces)}$$

(4°) De (2) x (3): $x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{\Delta - b^2}{4a^2}$

(5°) Sustituyendo Δ por su equivalente:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{b^2 - 4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \quad \textbf{(El producto de raíces)}$$

(6°) De (2) - (3): $x_1 - x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\therefore \quad \boxed{|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}} \quad \textbf{(La diferencia de raíces)}$$

Ejemplo:

Sin resolver la ecuación:
$9x^2 - 51x + 70 = 0$

Calcular:

a) La suma de raíces
b) El producto de raíces
c) La diferencia de raíces

Solución:

(1°) **Los coeficientes de la ecuación para este caso:**
$a = 9$, $b = -51$, $c = 70$

(2°) **De acuerdo al teorema:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-51}{9} = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{La suma de raíces es: } \frac{17}{3}}$

(3°) **En relación de producto de raíces:**

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{70}{9}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{El producto de raíces es: } \frac{70}{9}}$

(4°) **En relación a la diferencia de raíces:**

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{9} = \frac{\sqrt{(-51)^2 - 4(9)(70)}}{9} = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1$$

$\therefore$ $\boxed{\text{La diferencia de raíces es: } 1}$

(5°) **Verificación:** Si resolvemos la ecuación por factorización:

$$\Rightarrow \quad 9x^2 - 51x + 70 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3x - 7)(3x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{7}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

Suma de raíces: $\frac{7}{3} + \frac{10}{3} = \frac{17}{3}$

Producto de raíces: $\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{70}{9}$

Diferencia de raíces: $\left|\left(\frac{7}{3}\right) - \left(\frac{10}{3}\right)\right| = \left|\frac{-3}{3}\right| = |-1| = 1$

17.22 ECUACIONES EN TERMINOS DEL VALOR ABSOLUTO DE UNA INCOGNITA |x|

Definición.- Se denomina así a toda proposición abierta, no algebraica en la cual la incógnita aparece afectada por el símbolo del valor absoluto.

17.22.1 TEOREMA.- (Incógnita afectado del V. Absoluto)

Si: $|x| = b \;;\; b \geq 0$
$\Rightarrow x^2 = b^2$; es la ecuación algebraica equivalente

17.22.2 TEOREMA.- (Ambos miembros afectados por V. Absoluto)

Si: $|x| = |m|$
$\Rightarrow x^2 = m^2$; es la ecuación algebraica equivalente

17.22.3 TEOREMA.- (ECUACION INCONSISTENTE)

Si: $|x| = b \;;\; b < 0$
$\Rightarrow x \in \phi$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$|3x + 5| = 11$$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema:**

$$|3x + 5|^2 = 11^2$$
$$\Rightarrow (3x + 5)^2 - 11^2 = 0$$

(2°) **Por ser una diferencia de cuadrados:**

$$\Rightarrow \quad (3x + 5 + 11)(3x + 5 - 11) = 0$$

(3°) **Igualando cada factor a cero:**

$$3x + 16 = 0 \;;\; x = -\frac{16}{3}$$
$$3x - 6 = 0 \;;\; x = 2$$

(4°) Verificando la ecuación de partida se observa que ambos cumplen con la ecuación:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{2, -\frac{16}{3}\right\}}$$

(5°) **Nota:** Como regla práctica en estos casos se puede tener:

Si: $|3x + 5| = 11$
$\Rightarrow$ $3x + 5 = 11$ ....(1)
ó $3x + 5 = -11$ ....(2)

De (1): $x = 2$;

De (2): $x = -\dfrac{16}{3}$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{2, -\frac{16}{3}\right\}}$$

17.23 EL MAXIMO ENTERO $[\![x]\!]$

Definición.- Dado un número real x, se llama máximo entero de x, denotado por $[\![x]\!]$, al **mayor entero por defecto contenido** en x.

Ejemplo:

$[\![5.8]\!] = 5$; 5 es el mayor entero contenido en 5.8

$[\![7.3]\!] = 7$; 7 es el mayor entero contenido en 7.3

$[\![\sqrt{2}]\!] = [\![1.4142]\!] = 1$; 1 es el mayor entero contenido en 1.4142

$[\![3/4]\!] = [\![0.75]\!] = 0$; 0 es el mayor entero contenido en 0.75

$[\![-8.40]\!] = -9$; -9 es el mayor entero contenido en -8.4

Ejemplo:

Calcular:

$$K = \frac{2[\![8.99]\!] + 5[\![-7.001]\!]}{8[\![2\sqrt{10}]\!] + 11[\![\sqrt{5}+1]\!]}$$

Solución:

(1°) **Calculamos por partes:**

$[\![8.99]\!] = 8$

$[\![-7.001]\!] = -8$

$[\![2\sqrt{10}]\!] = 6$

$[\![\sqrt{5}+1]\!] = 3$

(2°) **Sustituyendo los resultados sobre "K":**

$$\Rightarrow K = \frac{2(8)+5(-8)}{8(6)+11(3)} = \frac{16-40}{48+33} = \frac{-24}{81}$$

$$\therefore \boxed{K = -\frac{8}{27}}$$

17.24 PROPIEDADES DEL MAXIMO ENTERO

(1°) **Propiedad Fundamental:**

Sea: $[\![x]\!] = n$; $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad n \leq x < n+1$

Ejemplo:

En relación a los ejemplos anteriores y siendo:

$[\![5.8]\!] = 5$, pues $5 \leq 5.8 < 6$

$[\![7.3]\!] = 7$, pues $7 \leq 7.3 \leq 8$

$[\![1.4142]\!] = 1$, pues $1 \leq 1.4142 < 2$

$[\![3/4]\!] = 0$, pues $0 \leq 3/4 < 1$

$[\![-8.40]\!] = -9$, pues $-9 \leq -8.40 < -8$

(2°) Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [\![x]\!] = x$
El máximo entero de un entero es el mismo entero

(3°) $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4°) Si: $[\![x]\!] = n\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in [\ n, n+1 >$

(5°) $[\![x+b]\!] = [\![x]\!] + b$, si $b \in Z$; " El máximo entero es distributivo sobre la suma de elementos enteros

17.25 ECUACIONES EN TERMINOS DEL MAXIMO ENTERO DE UNA INCOGNITA $[\![x]\!]$

Definición.- Es toda aquella ecuación no algebraica cuya incógnita se halla afectada por el operador máximo entero.

Ejemplo:

$2[\![x]\!] + 30 = 0$

Es una ecuación en términos del máximo entero.

Ejemplo:

$[\![x]\!]^2 + [\![x]\!] = 110$

Es una ecuación en términos del máximo entero.

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$[\![x]\!] = 4$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la definición de máximo entero:**

Si: $[\![x]\!] = 4$; **¿Cual es el número cuyo máximo entero es 4?**

$\Rightarrow 4 \leq x < 5$;

$x \in [\,4, 5 >$

(2°) Luego de verificar la ecuación de partida con las referencias que establece el intervalo concluimos en:

$\therefore \boxed{S = \{[\,4, 5\rangle\}}$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$[\![-x]\!] = 3$

Solución:

(1°) **Por definición:**

Si: $[\![-x]\!] = 3$

$\Rightarrow \quad 3 \leq -x < 4$; aislando x:

$-4 < x \leq -3$

$\therefore \quad \boxed{S = \{ \langle -4, -3] \}}$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$[\![4x + 1]\!] = 3x + 11 \; ; x \in Z$

Solución:

(1°) **Por definición de máximo entero**

$[\![4x + 1]\!] = 3x + 11$

$\Rightarrow 3x + 11 \leq 4x + 1 < (3x + 11) + 1$

(2°) **Resolviendo la inecuación obtenida, sumando:** -3x

$\Rightarrow \quad 3x + 11 - 3x \leq 4x + 1 - 3x < 3x + 12 - 3x$

$\Rightarrow \quad 11 \leq x + 1 < 12$

$\Rightarrow \quad 10 \leq x < 11$

(3°) **Concluimos que:** $x = 10$

$\therefore \quad \boxed{S = \{ 10 \}}$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$$\left[\!\!\left[\frac{12x+5}{x-1}\right]\!\!\right] = 11 , \quad x > 1$$

Solución:

(1°) **Por definición de máximo entero:**

$$11 \leq \frac{12x+5}{x-1} < 12$$

(2°) **Resolviendo la inecuación:**

$$11 \leq 12 + \frac{17}{x-1} < 12$$

$$-1 \leq \frac{17}{x-1} < 0 \quad ; \quad x - 1 < 0$$

(3°) **Debido a que (x - 1) es negativo:**

$\Rightarrow \quad 0 < \dfrac{17}{1-x} \leq 1$

$\Rightarrow \quad 0 < 17 \leq 1 - x$

$\Rightarrow \quad 1 - x \geq 0 \wedge 1 - x \geq 17$

$\Rightarrow \quad x \leq 1 \quad \wedge \quad x \leq -16 \; ; \; x \leq -1$

$\therefore \quad \boxed{x \in \langle -\infty, -1]}$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$$[\![\sqrt{x-17}]\!] = 8, \quad x \in \mathbb{Z}$$

Solución:

(1°) **Dominio de la ecuación**

$x - 17 \geq 0$ .... (I)

$x \geq 17$

(2°) **Por definición de valor absoluto:**

$8 \leq \sqrt{x-17} < 9$ .... (II)

$\Rightarrow \quad 64 \leq x - 17 < 81$

$\Rightarrow \quad 81 \leq x < 98$

(3°) **Finalmente:**

$$\boxed{S = \{ x / x \in [81, 98 \rangle, x \in \mathbb{Z} \}}$$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$$\left[\!\left[\frac{10x}{3} - 9\right]\!\right] = 41$$

Solución:

(1°) **Por definición**

$$41 \leq \frac{10x}{3} - 9 < 42$$

(2°) **Resolviendo la inecuación:**

$$50 \leq \frac{10x}{3} < 51$$

$$150 \leq 10x < 153$$

$$15 \leq x < \frac{153}{10}$$

(3°) **La variable "x" se ubica en el intervalo:**

$$\boxed{x \in [\ 15, 15\ 3/10\ \rangle}$$

Ejemplo Explicativo:

Resolver:

$$[\![x^2 - x + 1]\!] = 7$$

Solución:

(1°) Por definición:

$7 \leq x^2 - x + 1 < 8$

(2°) **Resolvemos la inecuación:**

$$7 \leq (x - \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} < 8$$

$$7 - \frac{3}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 < 8 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{25}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 < \frac{31}{4}$$

(3°) **De acuerdo al Teorema:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sea: } a < x^2 < b \\ \Rightarrow\ -b < x < -a \vee a < x < b \end{array}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{31}}{2} < x - \frac{1}{2} \leq -\frac{5}{2} \quad \vee \quad \frac{5}{2} \leq x - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{31}}{2}$$

(4°) **Aislando x en cada inecuación:**

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{31}+1}{2} < x \leq -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \quad \vee \quad 3 \leq x < \frac{\sqrt{31}+1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{31}+1}{2} < x \leq -2 \quad \vee \quad 3 \leq x < \frac{\sqrt{31}+1}{2}$$

(5°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{x \in \left\langle \frac{-\sqrt{31}+1}{2}, -2 \right] \cup \left[3, \frac{\sqrt{31}+1}{2} \right\rangle}$$

17.26 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA Y SUS COROLARIOS

Teorema fundamental del Algebra.-
A toda ecuación entera definida por la regla polinomial:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (\text{Con } a_0 \neq 0 \text{ y } n \geq 1),$$

Le corresponde por lo menos una raíz (real o compleja).

17.27 TEOREMA (DEL NUMERO DE RAICES DE LA ECUACION POLINOMIAL).-

A toda ecuación entera definida por:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (\text{Con } a_0 \neq 0 \text{ y } n \geq 1),$$

Le corresponde exactamente "n" raíces. (reales o complejas).

17.28 NATURALEZA DE LAS RAICES DE UNA ECUACION ENTERA
Teorema (RAICES IRRACIONALES CUADRATICAS CONJUGADAS).-

A toda ecuación entera definida por:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (\text{Con } a_0 \neq 0 \,;\, n \geq 2 \,;\, a_i \in Q)$$

Si le corresponde una raíz irracional cuadrática:

$$x = a + \sqrt{c} \quad ; \quad c > o \quad ; \quad c \neq K^2$$

$\Rightarrow\ x = a - \sqrt{c}$ es necesariamente otra raíz

17.29 TEOREMA (RAICES COMPLEJAS CONJUGADA).-

A toda ecuación entera definida por:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (\text{Con } a_0 \neq 0 \text{ ; } n \geq 2 \text{ ; } a_i \in Q)$$

Si le corresponde una raíz compleja:

$$x = m + ni$$

$\Rightarrow$ $x = m - ni$ es necesariamente otra raíz

17.30 TEOREMA (RELATIVO A LA PARIDAD DEL GRADO DE UNA E^C).-

A toda ecuación entera definido por:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (\text{Con } a_0 \neq 0 \text{ ; } n \geq 1 \text{ ; } a_i \in Q)$$

Si le corresponde un grado **n impar.**

$\Rightarrow$ **La ecuación tiene por lo menos una raíz real.**

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3 + 9x^2 + 31x + 43 = 0$$

Por ser una ecuación de grado impar, el teorema asegura que ésta tendrá de todas maneras una raíz real.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$-x^2 + 9x\ 14 = 0$$

Por ser de grado par, el teorema no asegura la presencia de una raíz real.

17.31 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

17.31.1 **Ejercicio Explicativo**

Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$x^2(3^{x+1}) + 9(3^{|x-3|}) = 81x^2(3^{|x-3|}) + 3^{x-1}$$

Recuerde:

El valor absoluto de una variable real se determina luego de tener definido el signo correspondiente y de acuerdo a la regla siguiente:

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad |x| = \begin{cases} \text{op}(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Para definir el valor absoluto**: $|x - 3|$

Asumimos lo siguiente:

(a) **Sea:** $\mathbf{x - 3 \geq 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3}$

$\Rightarrow \quad x^2(3^{x+1}) + 9(3^{x-3}) = 81x^2(3^{x-3}) + 3^{x-1}$;

$\Rightarrow \quad x^2(3^{x+1}) + 3^{x-1} = x^2(3^{x+1}) + 3^{x-1}$

$0 = 0$

$\Rightarrow$ **Interpretación:**

Esta ecuación se verifica para todo valor del dominio de la incógnita:

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_1 = \{[3; \infty>\}}$$

(2°) (b) **Sea $x < 0$; $|x - 3| = -x + 3$**

$\Rightarrow \quad x^2(3^{x+1}) + 9(3^{-x+3}) = 81x^2(3^{-x+3}) + 3^{x-1}$

$\Rightarrow \quad x^2(3^{x+1}) + 3^{-x+5} = x^2(3^{-x+7}) + 3^{x-1}$

Ordenando:

$\Rightarrow \quad x^2(3^{x+1}) - 3^{x-1} = x^2(3^{-x+7}) - 3^{-x+5}$

$\Rightarrow \quad 3^{x+1}(x^2 - 3^{-2}) = 3^{-x+7}(x^2 - 3^{-2})$

$\Rightarrow \quad (x^2 - 3^{-2})(3^{x+1} - 3^{-x+7}) = 0$

(3°) **Simplificando e igualando a cero los factores:**

$\Rightarrow \boxed{3^{x+1} = 3^{-x+7} \; ; \; x + 1 = -x + 7 \qquad \therefore \quad x = 3}$

$\Rightarrow \boxed{x^2 - 3^{-2} = 0 \; ; \; x^2 = \frac{1}{9} \qquad \therefore \quad x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad S_2 = \{3; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\}$

(c) **El conjunto solución será: $S = S_1 \cup S_2$**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left[3, \infty\right\rangle ; \frac{1}{3} ; -\frac{1}{3}\right\}}$$

17.31.2 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación en x:

$$ax^{n^2+6n+7} + bx^{n^2+6n+8} + cx^{n^2+6n+9} = a + b + c$$

Sabiendo que:

$$c = n_2 + \sqrt{2} - 1 = n_2^2 - b + 6\sqrt{2}$$

$n_1 = -3 - \sqrt{2}$ es una de las raíces de la ecuación $1{,}50n^2 + 9n + 10{,}50 = 0$

Solución:

(1°) A partir de la ecuación:

$1.50n^2 + 9n + 10.50 = 0$

$n^2 + 6n + 7 = 0$ .... (1)

$$\Rightarrow \quad S = \{\underbrace{(-3 - \sqrt{2})}_{n_1}, \underbrace{(-3 + \sqrt{2})}_{n_2}\}$$

(2°) Haciendo los estudios de las expresiones en los exponentes:

$\Rightarrow \; n^2 + 6n + 7 = 0$

$\Rightarrow \; n^2 + 6n + 8 = 1$

$\Rightarrow\ n^2 + 6n + 9 = 2$

$\Rightarrow\ c = -(-3+\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 1 = 2$

$\therefore\ \boxed{c = 2}$

$\Rightarrow\ 2 = (-3+\sqrt{2})^2 - b + 6\sqrt{2}$

$\therefore\ \boxed{b = 9}$

(3°) Se puede establecer que :

$\Rightarrow$ La ecuación será:

$$ax^0 + 9x^1 + 2x^2 = a + 9 + 2$$
$$2x^2 + 9x - 11 = 0$$
$$(2x + 11)(x - 1) = 0$$
$$x = 1 \,;\, x = -11/2$$

(4°) Finalmente:

$\therefore\ \boxed{S = \{1; -11/2\}}$

17.31.3 **Ejemplo Explicativo:**

Hallar el conjunto solución de la ecuación de primer grado en "a" siguiente:

$$\frac{19a^2(x-3)}{x^2} + 3a\left(\frac{2}{x} - \frac{7}{x^2}\right) = -x$$

Solución:

(1°) De acuerdo al enunciado:

a: incógnita

x: parámetro

$\Rightarrow 19a^2(x - 3) + 3a(2x - 7) - x^3 = 0$

(2°) Por ser de 1° grado en "a", **el coeficiente del término cuadrático deberá ser nulo:**

$19(x - 3) = 0 \ ;\ x = 3$

$\Rightarrow\ 19a^2(0) + 3a(-1) - 27 = 0$

$-3a - 27 = 0$

(3°) $a = -9$

$\therefore\ \boxed{S = \{-9\}}$

17.31.4 **Ejemplo Explicativo:**

Entre dos personas tienen 65 unidades de cierta mercadería, aunque de precios diferentes.
Si permutaran sus existencias de mercadería luego de venderlos obtendrían 175 S/. y 180 S/. respectivamente. Aunque al final del día y luego de agotar sus existencias el último recauda 60 S/. más.

Obtener:

a) El n° de unidades de mercadería de cada comerciante.

b) Los precios correspondientes.

Solución:

(1°) Podemos elaborar un cuadro que involucre los datos:

Comerciante	Cantidad	Precios Unitarios	Recaudación S/.	Permuta S/.
A	x	P_A	$P_A x$	$P_A(65 - x)$
B	$65 - x$	P_B	$P_B(65 - x)$	$P_B x$

(2°) En relación a las ventas

$$\Rightarrow \quad P_A(65 - x) = 175 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$P_B x = 180 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$P_B(65 - x) - P_A x = 60 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(3°) De (1) y (2): $P_A = \dfrac{175}{65 - x}$; $P_B = \dfrac{180}{x}$

(5°) En (3): $\dfrac{180}{x}(65 - x) - \dfrac{175}{(65 - x)}x = 60$

(6°) Resolviendo: $36\left(\dfrac{65 - x}{x}\right) - 35\left(\dfrac{x}{65 - x}\right) = 12$

$$\therefore \quad \boxed{x = 30}$$

En el cuadro:

Comerciante	Cantidad	P. Unitario
A	30	5
B	35	6

17.31.5 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 2x & -3x \\ 5x & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 & -4 \\ 4 & x \end{bmatrix}$$

Recuerde:

i) Por definición del determinante de una matriz cuadrada:

$$|A| = \begin{vmatrix} x & z \\ y & k \end{vmatrix} = (xk - yz)$$

ii) La ecuación cuadrática :

$$ax^2 + bx + c = 0 \,;\, a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Solución:

(1°) Desarrollando ambos determinantes.

$$(2x)(-3) - ((5x)(-3x)) = (2x + 1)x - ((-4)(4))$$

$$\Rightarrow \quad -6x + 15x^2 = 2x^2 + x + 16$$

(2°) Ordenando la ecuación cuadrática:

$$\Rightarrow \quad 13x^2 - 7x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+\sqrt{881}}{26} \\ x_2 = \dfrac{7-\sqrt{881}}{26} \end{cases}$$

(3°) Conjunto Solución:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{ \dfrac{7+\sqrt{881}}{26} \; ; \; \dfrac{7-\sqrt{881}}{26} \right\}}$$

17.31.6 **Ejemplo Explicativo:**

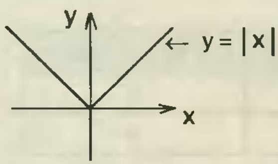
Resolver:

$3|x| + 1 = [\![x]\!] + 7$

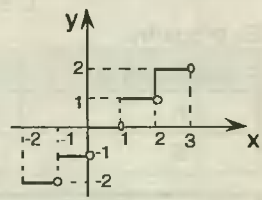
Recuerde:

Las siguientes gráficas:

$y = |x|$

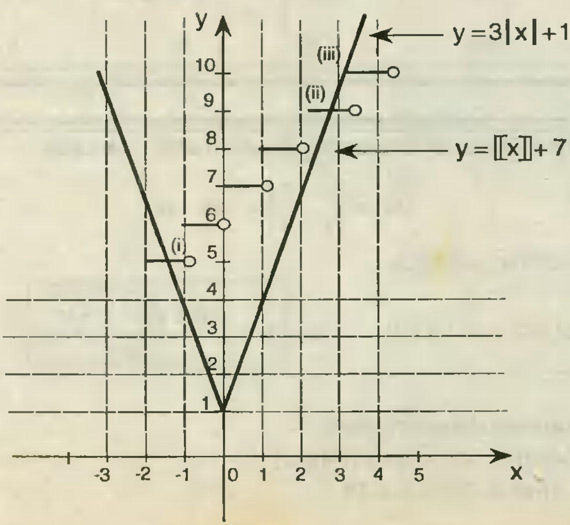


$y = [\![x]\!]$



Solución:

(1°) Graficando las funciones e intersectándolas:



(2°) **De las intersecciones:**

i) $3|x| + 1 = 5 \quad ; \quad x < 0$

$$3|x| = 4$$

$$|x| = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

ii) $y = 3|x| + 1 \quad ; \quad x > 0$

$$\boxed{x = \frac{8}{3}}$$

iii) $10 = 3|x| + 1 \quad ; \quad x > 0$

$$\boxed{x = 3}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(-\frac{4}{3}, 5\right); \left(\frac{8}{3}, 9\right); (3, 10)\right\}}$$

17.31.7 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$16 = \left\{\left[[\![x]\!] + \frac{2}{([\![x]\!] - 1)^{-0.5}}\right]^{-0.5} + \left[[\![x]\!] - \frac{2}{([\![x]\!] - 1)^{-0.5}}\right]^{-0.5}\right\}^2 \div (2 - [\![x]\!])^{-2}$$

Recuerde:

$[\![x]\!] = n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n \leq x < n + 1}$

$\frac{a}{b} \;\exists\; \forall \quad b \neq 0 \;\wedge\; (a, b) \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Realizando el cambio siguiente en el primer miembro de la ecuación:

$[\![x]\!] \neq 1 \qquad x \in [\,1, 2\,>$

$$\frac{2}{([\![x]\!] - 1)^{-0.5}} = a \quad \Rightarrow \quad \wedge \left\{[[\![x]\!] + a\,]^{-0.5} + [\,[\![x]\!] - a\,]^{-0.5}\right\}^2 = E$$

$$\Rightarrow \quad 16 = E \div (2 - [\![x]\!])^{-2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\text{I})$$

$\Rightarrow E = \left\{[\,[\![x]\!] + a\,]^{-0.5} + [\,[\![x]\!] - a\,]^{-0.5}\right\}^2$, desarrollando en cuadrado:

$$\Rightarrow E = [[\![x]\!] + a]^{-1} + [[\![x]\!] - a]^{-1} + 2[[\![x]\!]^2 - a^2]^{-0.5}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2[\![x]\!]}{[\![x]\!]^2 - a^2} + \frac{2}{\sqrt{[\![x]\!]^2 - a^2}}$$

(2°) Dando común denominador:

$$\Rightarrow E = \frac{2[\![x]\!] + 2\sqrt{[\![x]\!]^2 - a^2}}{[\![x]\!]^2 - a^2}$$

(3°) Luego, reemplazar "a" por el valor correspondiente sobre E

$$\Rightarrow \quad E = \frac{2[\![x]\!] + 2\sqrt{[\![x]\!]^2 - 4[\![x]\!] + 4}}{[\![x]\!]^2 - 4[\![x]\!] + 4} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2[\![x]\!] + 2|[\![x]\!] - 2|}{([\![x]\!] - 2)^2}$$

$$a = 2\sqrt{[\![x]\!] - 1} \qquad ; \qquad a^2 = 4[\![x]\!] - 4$$

(4°) Luego la ecuación propuesta será:

$$\Rightarrow\ 16=\underbrace{\frac{[\,2[\![x]\!]+2[\![x]\!]-2\,]}{([\![\cancel{x}]\!]-2)^2}}.(2-[\![\cancel{x}]\!])^2\ ;$$

$$\Rightarrow\ 2[\![x]\!]+2\left|[\![x]\!]-2\right|=16$$

$$[\![x]\!]+\left|[\![x]\!]-2\right|\ =\ 8$$

(5°) Por los teoremas relativos al valor absoluto:

$$\Rightarrow\begin{cases}[\![x]\!]-2\ =\ 8-[\![x]\!] & \Rightarrow [\![x]\!]=5\\ [\![\cancel{x}]\!]-2\ =[\![\cancel{x}]\!]-8\end{cases}$$

$$\therefore\ \boxed{x\in[\,5\,;\ 6>}$$

17.31.8 **Ejemplo Explicativo:**

¿Para que valor de "m" la pareja de proposiciones abiertas:

$$2x+3=13\ \wedge\ 2x+4\ =\ 3(7m-11)$$

serán equivalentes?

Recuerde:

Dos ecuaciones se denominan equivalentes si poseen conjuntos soluciones iguales

Solución:

(1°) Despejando la incógnita "x" en cada ecuación:

$$2x+3\ =\ 13\qquad\Rightarrow\qquad x\ =\ 5$$

$$2x+4\ =\ 3(7m-11)\qquad\Rightarrow\qquad x\ =\ \frac{21m-37}{2}$$

(2°) Igualando

$$5=\frac{21m-37}{2}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{m=\frac{47}{21}}$$

17.31.9 **Ejemplo Explicativo:**

Señalar las proposiciones correctas:

A.- $2x-3+\dfrac{x+1}{x-4}\ =\ 5+\dfrac{x+1}{x-4}\ \wedge\ 2x-3=5$ Son equivalentes

B.- $2x-3+\dfrac{x+1}{x+4}\ =\ 5+\dfrac{x+1}{x+4}\ \wedge\ 2x-3=5$ Son equivalentes

C.- $\dfrac{x+3}{x+1}\ =\ \dfrac{1-x}{x+1}\ \wedge\ x+3\ =\ 1-x$ Son equivalentes

D.- $\dfrac{x+3}{x+1}\ =\ \dfrac{2x-1}{x+1}\ \wedge\ x+3\ =\ 2x-1$ Son equivalentes

E.- $3x-1\ =\ 5\ \wedge\ |3x-1|\ =\ 5$; Son equivalentes

Recuerde:

Dos ecuaciones **son equivalentes** si estas poseen conjuntos soluciones iguales.

Solución:

(1°) Realizando el estudio por partes:

(2°) A) $2x-3+\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{x-4}} = 5+\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{x-4}} \quad \wedge \quad x \neq 4$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{x=4} \wedge x \neq 4 \Rightarrow S_1 = \{\ \} \\ 2x-3=5 \Rightarrow \boxed{x=4} \Rightarrow S_2=\{4\} \end{array}\right\rangle \nexists \text{ equivalencia}$$

$\boxed{\text{A) FALSO}}$

(3°) B) $2x-3+\dfrac{x+1}{x+4} = 5+\dfrac{x+1}{x+4} \quad \wedge \quad x \neq -4$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x=4} \wedge x \neq -4 \Rightarrow S_1 = \{4\} \\ 2x-1=5 \Rightarrow \boxed{x=4} \Rightarrow S_2=\{4\} \end{array}\right\rangle \exists \text{ equivalencia}$$

$\boxed{\text{B) VERDADERO}}$

(4°) C) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{1-x}{x+1} \quad \wedge \quad x+3=1-x \ \wedge \ x \neq -1$

$$2x=-2 \quad \wedge \quad x \neq -1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \quad \wedge \quad x \neq -1 \Rightarrow S_1 = \{\ \} \\ x+3=1-x \Rightarrow 2x=-2,\ x=-1 \Rightarrow S_2=\{-1\} \end{array}\right\rangle \nexists \text{ equivalencia}$$

$\boxed{\text{C) FALSO}}$

(5°) D) $\dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x+1}$; $x+3=2x-1 \ \wedge \ x \neq -1 \Rightarrow S_1=\{4\}$

$\boxed{\text{D) VERDADERO}}$ $\Rightarrow 4=x \ \wedge \ x \neq -1 \Rightarrow S_2=\{4\}$ $\quad \exists$ equivalencia

(6°) $|3x-1|=5 \Rightarrow 3x-1=5 \ \vee \ 3x-1=-5$

$\Rightarrow 3x=6 \ \vee \ 3x=-4 \Rightarrow S_1=\{2,-4/3\}$

$\boxed{\text{E) FALSO}}$ $\quad x+3=2x-1 \Rightarrow S_2=\{4\}$ $\quad \nexists$ equivalencia

17.31.10 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver: $\dfrac{2y}{y-5} = -2+\dfrac{10}{y-5}$

Recuerde:

La definición de la división

$\dfrac{a}{b} \ \exists \ \forall \ b \neq 0 \quad ; \quad \{a,b\} \in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) Restringiendo el dominio de la incógnita:

$\Rightarrow$ De la ecuación:

$\boxed{y \neq 5}$ ó $\boxed{y \in \mathbb{R} - \{5\}}$

(2°) Resolviendo la ecuación:

$$\Rightarrow \frac{2y}{y-5} - \frac{10}{y-5} = -2 \quad \wedge \quad y \neq -5$$

$$\Rightarrow y - 5 = -(y-5) \quad \wedge \quad y \neq -5$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 5} \quad \wedge \quad y \neq 5$$

(3°) El conjunto solución será:

$\therefore$ $\boxed{C.S. = \{\ \}}$

17.31.11 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación siguiente:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$$

$; \quad x \in \mathbb{R}.$

Recuerde:

(i) La definición de raíz cuadrada

$$\sqrt{a} \ \exists \ \forall \ \ a \geq 0 \ ; \ a \in \mathbb{R}^+$$

(ii) La fórmula cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x \ \exists \ \forall \ \Delta > 0$$

$$; \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Solución:

(1°) Restringiendo el dominio de la incógnita.
De la ecuación:

$$\left.\begin{cases} x+3 \geq 0 & \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ x-2 \geq 0 & \Rightarrow \quad \boxed{x \geq 2} \\ 4x+1 \geq 0 & \Rightarrow \quad x \geq -1/4 \end{cases}\right\} \quad x \geq 2$$

(2°) Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\Rightarrow x + 3 + x - 2 - 2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 4x + 1 \ \wedge \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+1}\right)^2 \wedge \ x \geq 2,$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} = -x \ \wedge \ x \geq 2 \ ; \ \text{¡ABSURDO!}$$

(3°) La radicación no puede resultar en valor negativo.

$\therefore$ $\boxed{S = \{\ \}}$

17.31.12 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$\frac{10}{x^2-9}+\frac{3x}{x+3}-\frac{7}{x-3}=3$$

Recuerde:

La definición de división

$\frac{a}{b}\ \exists\ \forall\ b\neq 0\ ;\ \{a,b\}\in \mathbb{R}$

Solución:

(1°) **Dominio de la incógnita:**

$x^2-9\neq 0 \Rightarrow x\neq \{3,-3\}$

(2°) **Sumando las fracciones de la ecuación:**

$$\frac{10+3x^2-9x-7x-21}{x^2-9}=3$$

$\Rightarrow \cancel{3x^2}-16x-11=\cancel{3x^2}-27\ ,\ -16x=-16$

$\Rightarrow x=1$

$\therefore\ \boxed{C.S.=\{1\}}$

17.31.13 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$\left|5-|x|\right|=3$$

Recuerde:

i) Por el teorema de la igualdad en términos de valor absoluto

Si: $|a|=b\ ;\ b\geq 0$

$\Rightarrow |a|^2-b^2=0$

$(a-b)(a+b)=0$

$\Rightarrow \boxed{a=b \vee a=-b}$

Solución:

(1°) Por el teorema establecido:

$\Rightarrow \left(5-|x|\right)^2-3^2=0$

$\Rightarrow \left(5-|x|+3\right)\left(5-|x|-3\right)=0$

$\Rightarrow \left(8-|x|\right)\left(2-|x|\right)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - |x| = 0 \text{..........................} (\alpha) \\ \quad\quad \vee \\ 2 - |x| = 0 \text{..........................} (\beta) \end{cases}$$

(2°) De acuerdo al teorema:

De (α): $|x| = 8$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

(3°) De (β): $|x| = 2$

Por teorema:

$$\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{8; -8; 2; -2\}}$$

17.31.14 **Ejemplo Explicativo:**

Para qué valor de "m" la ecuación:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} 3x - 1 & 2 \\ 3m & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Tiene por conjunto solución $\left\{-\frac{15}{2}\right\}$

Recuerde:

La definición del determinante de una matriz cuadrada de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & k \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \text{Det } A = |A| = \begin{vmatrix} x & z \\ y & k \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{|A| = xk - yz}$$

Solución:

(1°) Por definición del determinante de una matriz cuadrada.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3x - 1 & 2 \\ 3m & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad S = \{-\frac{15}{2}\}$$

$$\Rightarrow (1 - 3x) - 6m = 0$$

(2°) Reemplazando y sustituyendo m el valor de $x = -\frac{15}{2}$

$$\Rightarrow 1 - 3\left(-\frac{15}{2}\right) - 6m = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{45}{2} - 6m = 0$$

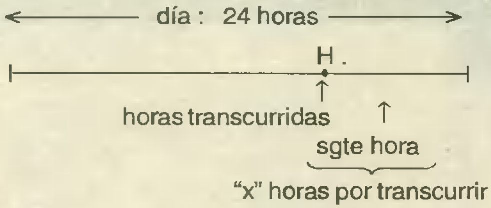
$$\therefore \quad \boxed{m = -\frac{43}{12}}$$

17.31.15 **Ejemplo Explicativo:**

En un día faltan tantas horas completas como minutos han transcurrido de la hora en que estamos, además el número de minutos que faltan para la hora siguiente son el cuádruple del número de horas completas que faltan. ¿A qué hora estamos?.

Solución:

(1°) Esbozando un gráfico en atención al enunciado:



(2°) Sea "x" el número de horas por transcurrir.

$\Rightarrow$ **La hora en que estamos será:** H + x minutos

$\Rightarrow$ Número de minutos para la siguiente hora: $60 - x$

(3°) La ecuación que define el problema será:

$\Rightarrow \quad 60 - x = 4x \quad \Rightarrow \quad 60 = 5x$

$\Rightarrow \quad x = 12$ Faltan 12 horas completas para terminar el día.

$\Rightarrow$ La hora será:

$\therefore$ $\boxed{\text{11 y 12 minutos}}$

17.31.16 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$4(x - 3)^2 = (2x + 1)^2$$

Recuerde:

Si: $a^2 = b^2$; $(a, b) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (a - b)(a + b) = 0$

$a = b \vee a = -b$

Solución:

(1°) Ordenando la ecuación:

$$(2x - 6)^2 = (2x + 1)^2$$

$$(2x - 6)^2 - (2x + 1)^2 = 0$$

(2°) Luego de factorizar:

$$(4x - 5)(-7) = 0$$

$\therefore$ $\boxed{x = \dfrac{5}{4}}$

17.31.17 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$3 + 5(x - 2)(x + 1) = 4x^2 + x(x - 2) - 10$

Recuerde:

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Regla de Stevin para la multiplicación de binomios.

Solución:

(1°) Efectuando las sentencias:

$$3 + 5x^2 - 5x - 10 = 4x^2 + x^2 - 2x - 10$$

$$\Rightarrow \quad -5x - 7 = -2x - 10$$

$$3x = 3$$

(2°) Obtenemos el conjunto solución:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{1\}}$$

17.31.18 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver y verificar las ecuaciones siguientes:

A) $\sqrt{2x+3} = 5$

B) $\sqrt{x+3} + 5 = 0$

Recuerde:

(i) Para las igualdades en términos irracionales

$\sqrt{a} = b \quad \wedge \ b>0 \quad ; \quad (a, b) \in \mathbb{R} \,/\, a \geq 0$

ó $\sqrt{m^2} = |m|$

Solución:

(1°) Análisis de cada caso:

A) $\sqrt{2x+3} = 5 \quad \wedge \quad 2x + 3 \geq 0$

$$\Rightarrow \quad 2x + 3 = 25 \quad \wedge \quad 2x \geq -3$$

$$\boxed{x = 11} \quad \wedge \quad x > -\frac{3}{2}$$

$\therefore \quad \boxed{S_1 = \{11\}}$ **cumple con la restricción**

B) $\sqrt{x+3} = -5 \quad \wedge \quad -5 > 0$

Por definición raíz cuadrada: $x \in \{\ \}$

$\therefore \quad \boxed{S_2 = \{\ \}}$ **verifica la restricción**

17.31.19 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$\frac{1+3+5+\ldots\ldots+(2x-1)}{4+7+10+\ldots\ldots+(3x+1)}=\frac{40}{7}$$

Recuerde:

(i) Sea:

$\div\, a_1.a_2 \ldots\ldots .\, a_n$ una P.A.

donde:

$a_i - a_{i-1} = r$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n-1)r)$

$$\boxed{S_n = na_1 + r\,\frac{(n-1)(n)}{2}}$$

(ii) $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

Solución:

(1°) **Sumando en el numerador:** N

$$N = \underbrace{1+3+5+\ldots\ldots+(2x-1)}_{\text{“x” términos}} \Rightarrow \boxed{r=2};\ \boxed{n=\frac{2x-1-1}{2}+1=x}\ \boxed{a_1=1}$$

$$N = (x)(1) + 2\frac{(x-1)(x)}{2} = x + x^2 - x$$

$$\boxed{N = x^2}$$

(2°) **Sumando en el denominador:** M

$$M = \underbrace{4+7+10+\ldots+(3x+1)}_{\text{“x” términos}} \Rightarrow \boxed{r=3},\quad \boxed{n=\frac{3x+1-4}{3}+1=x}\ \boxed{a_1=4}$$

$$M = 4(x) + \frac{3(x-1)(x)}{2}$$

$$\boxed{M = -\frac{1}{2}(3x+5)x}$$

(3°) **Dividiendo correspondientemente:**

$$\frac{N}{M} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}(3x+5)x} = \frac{2x}{3x+5}$$

La ecuación será:

$$\Rightarrow \frac{2x}{3x+5} = \frac{40}{7} \Rightarrow 14x = 120x + 200\ ;\ 106x = -200$$

$$\therefore\quad \boxed{S = \frac{-100}{53}}$$

17.31.20 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación:

$$\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}=4$$

Recuerde:

La equivalencia siguiente:

$$(a+b)^3=\underbrace{\overbrace{a^3+b^3}^{}}_{\text{suma de cubos}}+3\underbrace{ab}_{\text{Producto}}\underbrace{(a+b)}_{\text{suma}}$$

Solución:

(1°) **Elevando al cubo:**

$$\left\{\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}\right\}^3=(4)^3$$

(2°) **Se obtendrá:**

$$\underbrace{15+2x+13-2x}_{\text{Suma de cubos}}+3\underbrace{\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}}_{\text{Producto}}\left[\underbrace{\sqrt[3]{15+2x}+\sqrt[3]{13-2x}}_{\text{Suma }=\ 4}\right]=64$$

$$\Rightarrow\ 28+12\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}=64$$

(3°) **Efectuando:**

$$\sqrt[3]{(15+2x)(13-2x)}=3$$

$$\Rightarrow\quad -4x^2-4x+195=27\ ,$$

$$\Rightarrow\quad x^2+x-42=0$$

(4°) **Factorizando:**

$$(x-6)(x+7)=0$$

$$\Rightarrow\quad x=6\ ,\ x=7$$

$$\therefore\quad \boxed{\text{C.S.}=\{6,-7\}}$$

17.31.21 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2$$

Solución:

(1°) En lugar de elevar al cuadrado procedemos a iniciar con la equivalencia siguiente:
$(x^2+3x-3)-(x^2-2x+2)=5x-5$

(2°) Transformando como una diferencia de cuadrados:

$$\Big(\underbrace{\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}}_{=2}\Big)\Big(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\Big)=5(x-1)$$

Luego de hacer la sustitución correspondiente:

$$2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=5(x-1)$$

(3°) Podemos tener las ecuaciones:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}=\dfrac{5}{2}(x-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)\\ \sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)\end{cases}$$

(4°) Luego de restar (β) - (α):

$$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{9-5x}{4}\quad;\quad\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2=\left(\frac{9-5x}{4}\right)^2\wedge\frac{9-5x}{4}\geq 0$$

(5°) Luego de elevar al cuadrado:

$$9x^2-58x+49=0\quad\wedge\quad 9\geq 5x\quad,\quad x\leq 1\tfrac{4}{5}$$

$$\Rightarrow\ x=1\ ,\ x=\frac{49}{9}\quad\wedge\quad x\leq 1\tfrac{4}{5}$$

$$\therefore\ \boxed{S=\{1\}}$$

17.31.22 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación siguiente:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x-2}$$

Recuerde:

(i) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

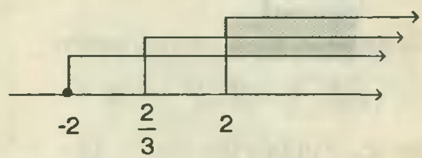
(ii) $ax^2+bx+c = 0$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Solución:

(1°) Restringiendo el dominio de la ecuación:

$$\begin{cases}x+2\geq 0 & \Rightarrow & x\geq -2\\ x-2\geq 0 & \Rightarrow & x\geq 2\\ 3x-2\geq 0 & \Rightarrow & x\geq \dfrac{2}{3}\end{cases}$$



$$\therefore\ \boxed{x\geq 2}$$

(2°) Elevando al cuadrado:

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{3x-2}\right)^2\quad\wedge\quad x\geq 2$$

$$\Rightarrow\ x+2+x-2+2\sqrt{x^2-4}=3x-2\quad\wedge\quad x\geq 2$$

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{x^2-4}\right)^2 = (x-2)^2 \qquad \wedge \quad x \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 16 = x^2 - 4x + 4 \qquad \wedge \quad x \geq 2$$

(3°) Se obtiene la ecuación siguiente:

$$3x^2 + 4x - 20 = 0 \qquad \wedge \quad x \geq 2$$

$$(3x+10)(x-2) = 0 \qquad \wedge \quad x \geq 2$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{10}{3} \end{cases} \qquad \wedge \quad x \geq 2$$

(4°) Finalmente se logra:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{2\}}$$

17.31.23 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación:

$$\sqrt{2[\![x]\!]+1} + \sqrt{[\![x]\!]-3} = 4$$

Recuerde:

(i) $[\![x]\!] = n$ (Operador máximo entero)

$\Rightarrow n \leq x < n+1 \quad ; \; n \in Z$

(ii) $\sqrt{a} = m \iff a = m^2 \quad ; \quad m > 0$

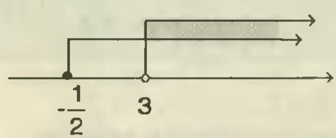
Solución:

(1°) Sea: $[\![x]\!] = k$ = # entero, haciendo el cambio

$$\sqrt{2K+1} + \sqrt{K-3} = 4$$

$$2k + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq -\frac{1}{2}$$

$$k - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq 3$$



$$\therefore \quad \boxed{k \geq 3}$$

(2°) Resolviendo la ecuación obtenida:

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2K+1} + \sqrt{K-3}\right)^2 = 16 \qquad \wedge \quad K \geq 3$$

$$3k - 2 + 2\sqrt{(2K+1)(K-3)} = 16 \qquad \wedge \quad K \geq 3$$

$$4(2k^2 - 5k - 3) = (18 - 3k)^2 \qquad \wedge \quad K \geq 3$$

$$k^2 - 88k + 336 = 0 \qquad \wedge \quad K \geq 3$$

$$\left.\begin{cases} k_1 = 84 \\ \qquad\qquad \vee \\ k_2 = 4 \end{cases}\right\} \qquad \wedge \quad K \geq 3$$

(3°) **En relación al máximo entero**

Para: $k_1 = 84$

$\Rightarrow [\![x]\!] = 84$

$\Rightarrow \quad 84 \leq x < 85$ ....(1)

Para: $k_2 = 4$

$[\![x]\!] = 4$

$4 \leq x < 5$ ....(2)

(4°) De (1) y (2):

$\therefore \quad \boxed{x \in [4,5\rangle \cup [84,85\rangle}$

17.31.24 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación siguiente:

$x + \sqrt{x+4} = 3x - 7$

Recuerde:

El siguiente teorema que establece la igualdad entre elementos racionales e irracionales.

(i) $\sqrt{a} = m \iff a = m^2 \quad ; \quad a > 0$

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solución:

(1°) Restringiendo de acuerdo al teorema

$x + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -4$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (2x-7)^2 \quad \wedge \quad x \geq -4$

$x + 4 = 4x^2 - 28x + 49 \quad \wedge \quad x \geq -4$

(2°) Resolviendo la ecuación resultante.

$4x^2 - 29x + 45 = 0 \quad \wedge \quad x \geq -4$

$(4x - 9)(x - 5) = 0 \quad \wedge \quad x \geq -4$

$x_1 = 5 \quad \wedge \quad x \geq -4$

$x_2 = \frac{9}{4} \quad \wedge \quad x \geq -4$

$\therefore \quad \boxed{S = \left\{5; \frac{9}{4}\right\}}$

17.31.25 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$|x + 3| + |x - 1| = 6$

Recuerde:

(1°) (i) La definición de Valor Absoluto

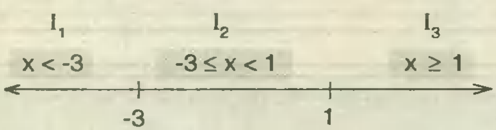
$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

(2°) **(ii) Definición equivalente:**

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Seccionando el comportamiento del 1er miembro.**



(2°) **Por partes:**

(I_1) $x < -3$: $\quad |x + 3| = -(x + 3)$; por ser $x + 3 < 0$

$x - 1 < -4 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$; por ser $x - 1 < 0$

$\Rightarrow \quad -(x + 3) - (x - 1) = 6$; $-2x - 2 = 6$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = -4}$

(3°) **Para el intervalo siguiente:**

(I_2) $-3 \leq x < 1$: $\quad 0 \leq x + 3 < 4$; $\quad -4 \leq x - 1 < 0$

$\Rightarrow \quad |x + 3| = x + 3$; por ser $x + 3 > 0$

$\Rightarrow \quad |x - 1| = -x + 1$; por ser $x - 1 < 0$

$\Rightarrow \quad x + 3 + (-x + 1) = 6$

$\Rightarrow \quad 3 + 1 = 6 \qquad$ (Absurdo)

(4°) **Para el último intervalo:**

(I_3) $x \geq 1$: $\quad x + 3 \geq 4$; $\quad x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \quad |x + 3| = (x + 3) \qquad$ por ser $x + 1 \geq 0$

$\quad |x - 1| = (x - 1) \qquad$ por ser $x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \quad (x + 3) + (x - 1) = 6$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

$\therefore \quad \boxed{S = \{-4, 2\}}$

17.31.26 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$|x - 1| - 2|x + 3| + x + 7 = 0$$

Recuerde:

(i) Definición del Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(ii) Definición equivalente

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ op(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) Seccionando de acuerdo a los ceros de los términos con Valor Absoluto.

a) $\longleftarrow$ -3 —— 1 $\longrightarrow$

b) $x < -3$ $\quad -1 \leq x \leq 1$ $\quad x > 1$

$\longleftarrow$ - 3 —— 1 $\longrightarrow$

(2°) **Primera Sección: $x < -3$:**

$\Rightarrow \; x + 3 < 0 \; ; \qquad x - 1 < -4$ para efectos de la definición del Valor Absoluto.

$\Rightarrow \; -x + 1 + 2(x + 3) + x + 7 = 0$

$\Rightarrow \; \boxed{x = -7}$

(3°) **Segunda Sección: $-3 \leq x < 1$:**

$\Rightarrow \; 0 \leq x + 3 < 4 \; ; -4 \leq x - 1 < 0$

$\Rightarrow \; -(x - 1) - 2(x + 3) + x + 7 = 0$

$-2x + 2 = 0$

$\Rightarrow \; \boxed{x = 1}$

(4°) **Tercera Sección: $x > 1$:**

$\Rightarrow \; x - 1 > 0 \quad ; \quad x + 3 > 4$

$\Rightarrow \; (x - 1) - 2(x + 3) + x + 7 = 0 \quad ; \quad 2x - 2x - 7 + 7 = 0 \; , \; 0 = 0$

$\Rightarrow \; \boxed{x \in \langle 1, \infty \rangle}$

$\therefore \; \boxed{x \in \{ \langle 1, \infty \rangle, 1, -7 \}}$

17.31.27 **Ejemplo Explicativo**

Resolver:

$$|3x - 2| - |3 - x| = 3$$

Recuerde:

(i) Definición de Valor Absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

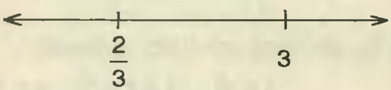
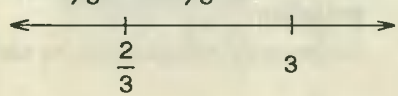
En consecuencia:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Secccionando el comportamiento del 1^er^ miembro de la ecuación mediante los ceros.**

$x < \frac{2}{3}$ $\quad \frac{2}{3} \leq x \leq 3$ $\quad x > 3$

a)  b) 

(2°) **Tomando el Primer Intervalo**

$x < \dfrac{2}{3}$:

$\Rightarrow \; 3x - 2 < 0 ; \qquad 3 - x > \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow \; -(3x - 2) - (3 - x) = 3$; por ser (3x - 2) negativo y (3 - x) Positivo.

$\Rightarrow \; \boxed{x = -2}$

(2°) **Tomando el siguiente intervalo**

$\dfrac{2}{3} \leq x \leq 3$:

$\Rightarrow \; 0 \leq 3x - 2 \leq 7$; **(3x - 2) es positivo** ; $0 \leq 3 - x \leq \dfrac{7}{3}$; **(3 - x) es positivo.**

$\Rightarrow \; (3x - 2) - (3 - x) = 3 \quad ; \quad 3x - 2 - 3 + x = 3 \; ; \; 4x = 8$

$\Rightarrow \; \boxed{x = 2}$

(3°) **Finalmente**

$x > 3$:

$\Rightarrow \; 3x - 2 > 7$; (3x - 2) es positivo ; $3 - x < 0$; (3 - x) es negativo

$\Rightarrow \; (3x - 2) - (-(3 - x)) = 3$

$\Rightarrow \; x = 1 ; x > 3$; **INCONSISTENCIA**

(4°) Finalmente:

$\Rightarrow \; \boxed{x \in \{\ \}}$

$\therefore \; \boxed{S = \{-2; 2\}}$

17.31.28 **Ejemplo Explicativo:**

Señalar las proposiciones correctas (V) y falsas (F).

A) $10x - 2 = 4 \quad \wedge \quad 5x - 1 = 2$ Son equivalentes

B) $(x - 2)(x + 3) = 0 \quad \wedge \quad x - 2 = 0$ Son equivalentes

C) $(x + 4)(x - 2) = 4(x + 4) \quad \wedge \quad x - 2 = 4$ Son equivalentes

D) $\frac{1}{6}(5x - 3) = 3 \quad \wedge \quad 5x - 3 = 18$ Son equivalentes

E) $(x - 2)^2 = 3(x - 2) \quad \wedge \quad x - 2 = 3$ Son equivalentes

Solución:

(1°) Hacemos el estudio de cada caso:

A) $$10x - 2 = 4 \quad \wedge \quad (5x - 1 = 2)$$

$$x = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad \left(x = \frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \qquad \boxed{A) = (V)}$$

(2°) En las siguientes parejas de ecuaciones

B) $$(x - 2)(x + 3) = 0 \wedge (x - 2 = 0)$$

$$x = 2 \vee x = -3 \wedge (x = 2)$$

$$\therefore \qquad \Rightarrow \boxed{B) = (F)}$$

C) $$(x + 4)(x - 2) = 4(x + 4) \wedge (x - 2 = 4)$$

$$x = -4 \vee x = 6 \wedge (x = 6)$$

$$\therefore \qquad \Rightarrow \boxed{C) = (F)}$$

D) $$(5x - 3)\frac{1}{6} = 3 \wedge (5x - 3 = 18)$$

$$5x - 3 = 18 \wedge \left(x = \frac{21}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{21}{5} \wedge x = \frac{21}{5}$$

$$\therefore \qquad \Rightarrow \boxed{D) = (V)}$$

E) $$(x - 2)^2 = 3(x - 2) \wedge (x - 2 = 3)$$

$$x = 2 \vee x = 5 \wedge (x = 5)$$

$$\therefore \qquad \boxed{E) = (F)}$$

(3°) Finalmente logramos la secuencia:

VFFVF

17.31.29 **Ejemplo Explicativo:**

El producto de un número de dos dígitos por la suma de los mismos es 324. El dígito de las unidades excede en 3 al dígito de las decenas.
Determinar el número.

Recuerde:

Por la aritmética se sabe que $\overline{mn} = 10m + n$

Solución:

(1°) **Sea N = $\overline{ab}$ el número buscado**; "a" representa las decenas y "b" las unidades.

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{ab}(a+b) = 324 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ a - b = 3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10a+b)(a+b) = 324 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$b - a = 3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\Rightarrow \quad b = a + 3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(5) en (3):

(2°) **Se obtiene una ecuación en términos de "b"**

$$(11a+3)(2a+3) = 324 \;,\; 22a^2 + 39a - 315 = 0$$

$$(a-3)(22a+105) = 0 \;;\; a = 3 \;,\; a = -\frac{105}{22}$$

(3°) **De aquí**:

Si : $\boxed{a = 3} \Rightarrow b = 3 + 3 , \boxed{b = 6}$

$$\boxed{N = \overline{3b}}$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 36}$$

17.31.30 **Ejemplo Explicativo:**

Eduardo y José tardaron juntos un cierto número de días para cosechar un campo. Si cada uno hubiere cosechado la mitad, Eduardo demoraría un día menos y José dos días más. ¿Cuánto tiempo demoraron juntos la cosecha?

Recuerde:

El rendimiento esta definido por: $R = \dfrac{\text{Trabajo realizado}}{\text{Tiempo empleado}}$

$$\Rightarrow \quad IR = \frac{w}{T}$$

Solución:

(1°) Sea "x" el tiempo de trabajo conjunto.

$$\text{Juntos} \begin{cases} \text{Tiempo: x días} \\ \text{Trabajo: w ; } R_T \end{cases}$$

$$\textbf{Eduardo}\begin{cases}\text{Tiempo: } (x-1) \text{ días}\\[2ex] \text{Trabajo: } \dfrac{w}{2}\ ;\ R_1\end{cases}$$

$$\textbf{José}\begin{cases}\text{Tiempo: } (x+2) \text{ días}\\[2ex] \text{Trabajo: } \dfrac{w}{2}\ ;\ R_2\end{cases}$$

(2°) Por el Teorema de trabajo conjunto:

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_1 + R_2 = R_T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{w}{2}}{x-1} + \frac{\frac{w}{2}}{x+2} = \frac{w}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{x}\ ; \quad \frac{2x+1}{2(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + x = 2x^2 + 2x - 4 \ ; \quad x = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Tiempo conjunto 4 días}}$$

17.31.31 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$1 + |x| + x^2 + |x^3| + \ldots = 5$$

suponiendo que $|x| < 1$.

Recuerde:

i) $|a| = b \Rightarrow b > 0$

ii) $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} = \left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right)$

Si: $n \to \infty \quad \wedge \quad 0 \leq a < 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_\infty = \left(\frac{1}{1-a}\right)}$$

iii) $|x| = b$;

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = -b \end{cases}$$

Solución:

(1°) Por condición:

$0 \leq |x| < 1$:

$$\Rightarrow \quad 1 + |x| + |x|^2 + |x|^3 + \ldots = 5$$

→ tiende a cero

$$\Rightarrow \quad \frac{|x|^{\infty}-1}{|x|-1}=5$$

(2°) Resolvemos la ecuación:

$$\Rightarrow \quad 5|x|-5=-1$$

$$\Rightarrow \quad |x|=\frac{4}{5}$$

(3°) Por el Teorema correspondiente a las ecuaciones en términos de valor absoluto:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} \\[2ex] x_2 = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{S=\left\{\frac{4}{5};-\frac{4}{5}\right\}}$$

17.31.32 **Ejemplo Explicativo:**

Al Resolver e investigar la siguiente ecuación en x:

$(p^2-1)x+1+p^3=0$

Encontrar "p" de manera que la ecuación sea:

i) Absurda
ii) Tenga infinitas soluciones

Solución:

(1°) Despejando la incógnita "x": $\left(p^2-1\right)x=-1-p^3$

$$\Rightarrow \quad x=\left(\frac{1+p^3}{1-p^2}\right) \text{.....................................} (\mathrm{I})$$

(2°) **Análisis para el caso del absurdo o inconsistencia**

Si: $1-p^2=0$

$\Rightarrow$ La ecuación es absurda

$$\Rightarrow \quad p=\pm 1 \; ; \qquad \underbrace{X_{p=1}=\frac{1+1^3}{1-1}=\frac{2}{0}}_{\text{Absurdo}} \quad , \quad \underbrace{X_{p=-1}=\frac{1-1^3}{1-1}=\frac{0}{0}}_{\text{Indeterminado}}$$

$$\therefore \quad \boxed{p=1}$$

(3°) **Análisis para la indeterminación**

$\Rightarrow \quad 1+p^3=0 \quad \wedge \quad 1-p^2=0$

$\Rightarrow$ La ecuación tiene infinitas soluciones

$\Rightarrow \quad p^3=-1 \quad \wedge \quad p^2=1$

$\Rightarrow \quad p=-1 \quad \wedge \quad (p=1,\; p=-1)$

$\Rightarrow \quad p=-1$

$$\Rightarrow \quad X_{p=-1} = \frac{1+(-1)^3}{1-(-1)^2} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminado}$$

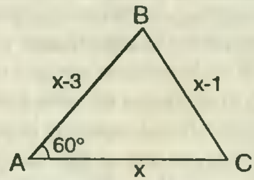
$$\therefore \quad \boxed{p = -1}$$

(4°) Finalmente si:

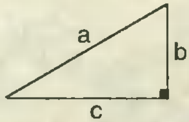
p = 1	La ecuación será absurda.
p = -1	La ecuación será indeterminada.

17.31.33 **Ejemplo Explicativo:**

Hallar el mayor lado del triángulo y comprobar su existencia.



Recuerde:



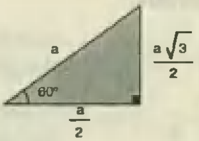
Desigualdad de Schwartz

$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

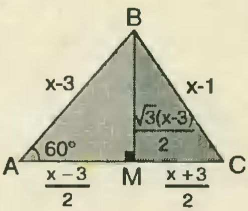
$|a - b| < c < a + b$

T. Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$



Solución:

(1°) Del triángulo y en relación a la altura



Del Δ MBC (T. de Pitágoras)

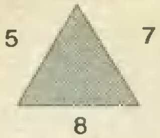
$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3)\right]^2 + \left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{4}(x^2 - 6x + 9) + \frac{x^2+6x+9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} - 3x + 9$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 8}$$

(2°) Comprobando la existencia del Δ por la desigualdad SCHWARTZ.



Dif. de lados Adyacentes → $3 < 7 < 13$ ← Suma de los Adyacentes

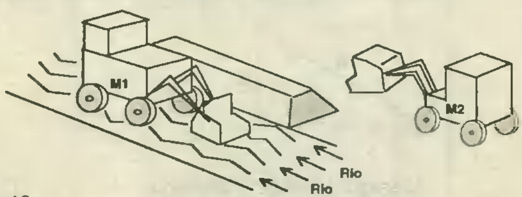
$1 < 5 < 15$

$2 < 8 < 12$

17.31.34 **Ejemplo Explicativo:**

Hay que realizar una obra en un río y se dispone de una máquina que tardaría en hacer esa obra un cierto **tiempo, si la corriente no lo estorbase**. Pero esta corriente es tan fuerte que va desapareciendo la obra en la proporción que resulta de destruirla en 8 horas menos del tiempo que tardaría la máquina sin este estorbo. En vista de ello se emplea, además otra máquina que tarda 8 horas más que la primera en hacer la misma obra en un tiempo que es 21 veces mayor que el que se hubiere empleado con la primera máquina, sin el estorbo de la corriente. ¿En cuántas jornadas de 8 horas, se hizo la obra con lados máquinas en las condiciones supuestas?

Solución:



(1°) J: N° de Jornadas.
Jx: N° de horas.

(2°) **Rendimientos:**

$R_1 = \dfrac{w}{Jx}$ .... Rendimiento de la 1ª Máquina sin estorbo.

$R_d = \dfrac{w}{Jx-8}$ .... Rendimiento de la Corriente del río.

$R_2 = \dfrac{w}{Jx+8}$ .... Rendimiento de la 2da. máquina sin estorbo.

$21J_x$ .... Tiempo con las dos máquinas y la corriente del río.

(3°) **Relación de rendimientos:**

$\Rightarrow \quad R_1 + R_2 - R_d = R_T$ .... (1)

$\Rightarrow \quad \dfrac{w}{Jx} + \dfrac{w}{Jx+8} - \dfrac{w}{Jx-8} = \dfrac{w}{21\,Jx}$ .... (2)

(4°) Resolviendo la ecuación (2)
⇒ Si hacemos que Jx = y

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{y+8} - \frac{1}{y-8} = \frac{1}{21y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{2+y} = \frac{1}{y-8} - \frac{1}{y+8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{20}{21y} = \frac{16}{y^2 - 64}$$

$$\Rightarrow \quad 5y^2 - 320 = 84y$$

$$\Rightarrow \quad 5y^2 - 84y - 320 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 5y & \diagdown\!\!\!\!\diagup & +16 \\ y & & -20 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y = 20$$

$$\Rightarrow \quad 20 = \underbrace{J \times 8}_{y} \qquad \therefore \quad \boxed{J = 2.5}$$

(5°) **Finalmente se obtendrá luego de realizar las sustituciones:**

$\Rightarrow$ El primero (M_1) : 2.5 Jorn.

$\Rightarrow$ El segundo (M_2) : 3.5 Jorn.

$\Rightarrow$ Destrucción por el río: 1.5 Jorn.

$\Rightarrow$ Juntos sin Estorbo: $1\frac{11}{24}$ Jorn.

$\Rightarrow$ Juntos con Estorbo: 52.50 Jorn.

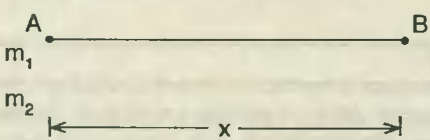
17.31.35 **Ejemplo Explicativo:**

Desde un punto A y hacia B parten dos móviles con velocidades fijas, con el propósito de llegar a B, volver de inmediato y repetirlo sucesivamente.
El primer ciclista dejó atrás al segundo y lo encuentra en el camino de regreso a la distancia de "a" km. del punto B. Luego, después de alcanzar el punto A y de volver hacia el punto B, encuentra al segundo ciclista después de recorrer una enésima parte de la distancia de A en B.

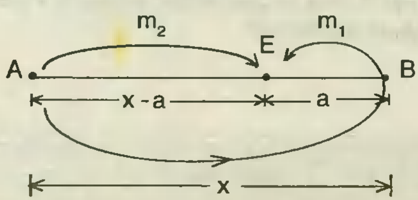
Expresar la distancia de A a B en términos de "a" y "n".

Solución:

(1°) **Sea "x" la distancia entre A y B**



(2°) **Describiendo trayectorias:**

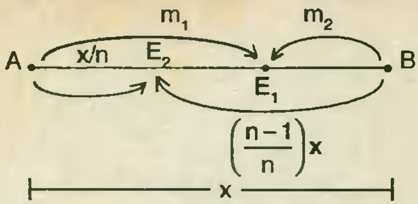


Relación de tiempos del 1^r encuentro:

$$Tm_1 = Tm_2$$

$$\frac{x + a}{Vm_1} = \frac{x - a}{Vm_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

(3°) Ubicación luego de volver hacia el punto B.



Relación de tiempos del 2° encuentro:

$T'm_1 = T''m_2$

$$\frac{x-a+\frac{x}{n}}{Vm_1} = \frac{a+\left(\frac{n-1}{n}\right)x}{Vm_2} \text{......(II)}$$

(4°) Relacionando velocidades, a partir de (I) y (II):

$$\Rightarrow \quad \frac{Vm_1}{Vm_2} = \frac{x+a}{x-a} \text{ ....(I)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Vm_1}{Vm_2} = \frac{x-a+\frac{x}{n}}{a+\left(\frac{n-1}{n}\right)x} \text{ ....(II)}$$

(5°) Igualamos (III) y (IV):

$$\Rightarrow \quad \frac{x+a}{x-a} = \frac{x-a+\frac{x}{n}}{a+\left(\frac{n-1}{n}\right)x} \quad ;$$

resolviendo con la propiedad de razones:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{m+n}{m-n} = \frac{p+q}{p-q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{x}}{a} = \frac{2\cancel{x}}{-2a+\frac{2x}{n}}$$

(5°) Aislando "x"

$$\Rightarrow \quad 2a = -2a + \frac{2x}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{n} = 4a$$

$$\Rightarrow \quad x = 2an$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Distancia A a B = 2an Km.}}$

17.31.36 **Ejemplo Explicativo:**

Juan y Antonio, pintores, se comprometen a pintar un edificio en 18 días. Sabiendo que Antonio pinta en el mismo tiempo una mitad más que Juan; pasados 9 días ven que resulta imposible terminar y llaman a Pedro.

Se sabe que Juan y Pedro juntos hacen en 8 días lo que hacen Antonio y Pedro en 7. ¿Cumplieron el compromiso con la ayuda de Pedro?
¿Qué tiempo tardarán los 3 juntos?
¿Qué tiempo por separado?
¿Qué tiempo Antonio y Juan?

Nota: $R = \frac{W}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{W}{R} \quad \Rightarrow \quad W = TR$

Solución:

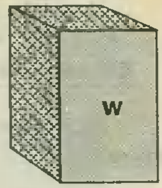
(1°) Resolviendo los rendimientos:

Antonio: $Ra = \dfrac{w}{a}$

Juan : $Rj = \dfrac{w}{j}$

Pedro: $Rp = \dfrac{w}{p}$

donde:
a, j, p: Tiempo que tarda Antonio, Juan y Pedro solos en hacer el trabajo por separados.



(2°) Según datos:

$$\Rightarrow \quad 1.5\,Rj = Ra$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Ra = \frac{3}{2}Rj} \text{..} (1)$$

$$\Rightarrow \quad 8(Rj + Rp) = 7(Ra + Rp) = 7\left(\frac{3}{2}Rj + Rp\right)$$

$$\Rightarrow \quad 8Rj + 8Rp = \frac{21}{2}Rj + 7Rp \;;\quad 8Rp - 7Rp = \frac{21}{2}Rj - 8Rj$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Rp = \frac{5}{2}Rj = \frac{5}{3}Ra} \text{..} (2)$$

Según la teoría del rendimiento conjunto:

$$\Rightarrow \quad 9(Ra + Rj) + 9(Ra + Rj + Rp) = \cancel{18}\left(\frac{w}{\cancel{18}}\right) \text{.............} (3)$$

$$\Rightarrow \quad 18(Ra + Rj) + 9\,Rp = W$$

$$\Rightarrow \quad 18\left(Ra + \frac{2}{3}Ra\right) + 9 \times \frac{5}{3}Ra = W \text{..............................} (4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18 \times 5}{3}Ra + \frac{9 \times 5}{3}Ra = W$$

$$\Rightarrow \quad 30Ra + 15Ra = W$$

$\Rightarrow \quad Ra = \dfrac{w}{45}$; **Antonio demora el solo 45 días.**

(3°) **En (1) el resultado: $Re = \dfrac{W}{45}$:**

$$\Rightarrow \quad Rj = \frac{2}{3}Ra = \frac{2}{3}\left(\frac{w}{45}\right) = \frac{w}{\frac{135}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad Rp = \frac{5}{3} \times \frac{w}{45} = \frac{w}{27}$$

(3°) **En (4) verificando:**

$$\Rightarrow \quad 18\left(\frac{w}{45}+\frac{2w}{135}\right)+9\times\frac{w}{27} = W$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2w}{5}+\frac{4w}{15}+\frac{w}{3} = W$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6w+4w+5w}{15} = \frac{15w}{15} = W$$

(4°) **Respuestas:**

(a) Si terminaron a tiempo.

(b) Antonio solo en 45 días.
Juan solo en 67.5 días.
Pedro solo en 27 días.
3 juntos en $\boxed{\text{13.5 días.}}$

(c) Antonio y Juan en $\boxed{\text{33.25 días.}}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: ECUACIONES DE UNA SOLA INCOGNITA

(1) Al resolver la ecuación polinomial Mónica en x de 1er grado y de término independiente 13.

$$\left(\frac{9a+13}{2a-15}-5\right)x^2+\left(\frac{13b+5}{2b-11}-5\right)x+\frac{14c-19}{1+c} = 0$$

Calcular : a + b + c + x

Rpta: 36

(2) Resolver:

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{Rec}\left(\frac{5}{2x+1}\right)+\mathrm{Rec}\left(\frac{4}{x-3}\right)+\mathrm{op}\left(\frac{x-1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}+\frac{x-4}{6} \quad ; \quad \mathrm{Rec}(x) = \frac{1}{x} \;;\; x \neq 0$$

$$\mathrm{Op}(x) = -x \;;\; x \in \mathbb{R}$$

Rpta: { 7 }

(3) Resolver la ecuación cuadrática

$\Delta x^2 + \Delta x + 42 = 0 \quad ; \quad \Delta \neq 0$

Donde: Δ es el discriminante de la ecuación.

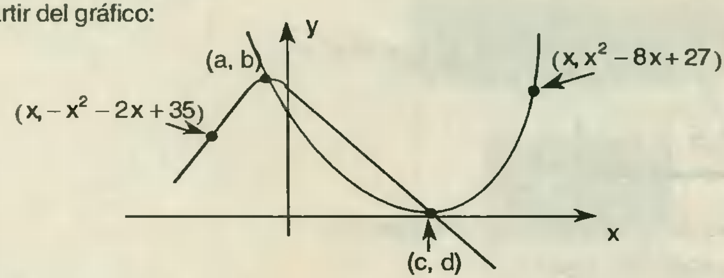
Rpta: $\left\{-\frac{6}{13}, -\frac{7}{13}\right\}$

(4) Resolver:

$$\frac{n+op(ax)}{b+c}+\frac{n+op(bx)}{c+a}+\frac{n+op(x)}{a+b} = 4x-\frac{n}{a+b+c} \; ; \; op(x) = -x \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

Rpta: $\left\{\dfrac{n}{a+b+c}\right\}$

(5) A partir del gráfico:



Calcular: a + b + c + a

Rpta: 50

(6) El conjunto solución de la ecuación recíproca siguiente:

$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Rpta: $\left\{2, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{3}\right\}$

(7) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\left(8+3\sqrt{7}\right)^{x^2-9x+1}+\left(8-3\sqrt{7}\right)^{x^2-9x+1} = 16$$

Rpta: $\left\{0,\ 9,\ \dfrac{1}{2}\left(9+\sqrt{73}\right),\ \dfrac{1}{2}\left(9-\sqrt{73}\right)\right\}$

(8) Hallar el conjunto solución de la ecuación sgte.:

$$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x} = 3\sqrt{a+b-2x}$$

Rpta: $S = \{a, b\}$

(9) Hallar el conjunto solución de la ecuación siguiente :

$$\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}+\frac{1+2x^{-1}}{1-2x^{-1}} = \frac{2+13x^{-1}}{1+x^{-1}}$$

Rpta: $S = \left\{5,\ \dfrac{6}{5}\right\}$

(10) Obtener el conjunto solución de la ecuación:

$$\sqrt{1-a}\,\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1-a}\,\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2}$$

Rpta: $\{a\}$

(11) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=4\sqrt{x^2-1}$$

Rpta: $\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\right\}$

(12) Si las raíces de la ecuación son 1 y 4, siendo:

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

Obtener el conjunto solución:

Rpta: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

(13) Hallar el conjunto solución:

$$x^2\frac{(b+x)(x+c)}{(x-b)(x-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+x)}{(b-c)(b-x)}+c^2\frac{(c+x)(c+b)}{(c-x)(c-b)}=(b+c)^2$$

Rpta: $\{0, -2(b+c)\}$

(14) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=2\sqrt{x^2+4x+6}$$

Rpta: $\{\ \}$

(15) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}=-\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}$$

Rpta: $\{3\}$

(16) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$x^2-x\left(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\right)+1=0$$

Rpta: $\left\{\sqrt[3]{2}-1,\ \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right\}$

(17) Si: $S = \left\{\frac{2n-1}{n-1}, \frac{2n+3}{n+1}\right\} \in (ax^2 + 2bx + 4c = 0)$

Con $abc \neq 0$

Calcular: $E = \dfrac{b^2 - 4ac}{(a+b+c)^2}$

Rpta: 16

(18) Hallar el conjuto solución de la ecuación:

$(k - 2)x^2 - (2k - 1)x + k - 1 = 0$

Sabiendo que el discriminante es 25.

Rpta: $\left\{3, \frac{1}{2}\right\}$

(19) Determinar el valor de "b" en la ecuación:

$4x^2 + bx + 5 = 0$

Para el cual las raíces x_1 y x_2 satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -8 \\ x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$$

Rpta: 12

(20) Si las raíces de: $x^2 + px + q = 0$ son x_1 y x_2, escribir la ecuación cuyas raíces sean:

$x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ y $x_2 + \dfrac{1}{x_1}$

Rpta: $pqx^2 + p^2(1 - p)x - q(1 - p)^2 = 0$

CAPITULO 18

LA FUNCION

18.1. PRODUCTO CARTESIANO

18.1.1. INTRODUCCION :

Definición.- Dados dos conjuntos A y B, A x B representa el PRODUCTO CARTESIANO y que a su vez es el conjunto formado por todos los pares ordenados que se pueden obtener con los elementos de A y B, de tal modo que las primeras componentes de cada par sean de A y las segundas componentes sean de B.

Ejemplo:

Sean: $A = \{p, q, r\} \wedge B = \{6; 7; 8\}$ obtener A x B

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición de Producto Cartesiano

$\Rightarrow A \times B = \{(p, 6), (p, 7), (p, 8), (q, 6), (q, 7), (q, 8), (r, 6), (r, 7), (r, 8)\}$

Será el Producto Cartesiano de los conjuntos A y B.

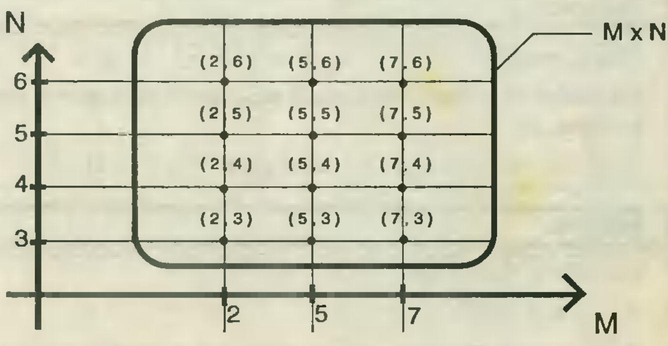
El Producto Cartesiano se representa mediante el diagrama cartesiano.

Ejemplo:

Sean: $M = \{2, 5, 7\} \wedge N = \{3, 4, 5, 6\}$

Representar gráficamente el producto cartesiano A x B.

Solución:



Descripción :

En la semirrecta horizontal el conjunto M.

En la semirrecta vertical el conjunto N.

En cada intersección el par representa un elemento del producto cartesiano.

18.1.2 RELACIONES O CORRESPONDENCIAS

Definición.- Dados dos conjuntos A y B llamaremos RELACION O CORRESPONDENCIA $\mathbb{R}$ de A en B a todo subconjunto del producto cartesiano A x B.

Una correspondencia suele escribirse como:

$\mathbb{R}$: $\boxed{A \rightarrow B}$ ó $\boxed{A \xrightarrow{\mathbb{R}} B}$

Lectura:

"Correspondencia S de A en B".

Ejemplo:

Sea la relación

$$R: A \rightarrow B = \{ (x, y) / x = y \} \text{ ó}$$

$$= \{ (1, 1), (2, 2), (-5, -5), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (0, 0) \}$$

Establece una relación de igualdad entre sus componentes.

Ejemplo:

Sea la relación: $R: \quad A \rightarrow B = \{ (x, y) / y = \frac{10}{x} \}$

Establece una relación de pares ordenados tales que sus segundos componentes son **diez veces las recíprocas de las primeras componentes.**

$$\Rightarrow R: \quad A \rightarrow B = \left\{ \left(7, \frac{10}{7}\right), \left(3, \frac{10}{3}\right), \left(-9, -\frac{10}{9}\right), \ldots \right\}$$

Ejemplo:

Sea la relación: $R: A \rightarrow B = \{ (x, y) / x + y = 19 \}$

Establece una relación de pares ordenados tales que la suma de componentes es siempre 19.

$R: A \rightarrow B = \{ (6, 13), (13, 6), (9, 10), (-1, 20) \}$

Ejemplo:

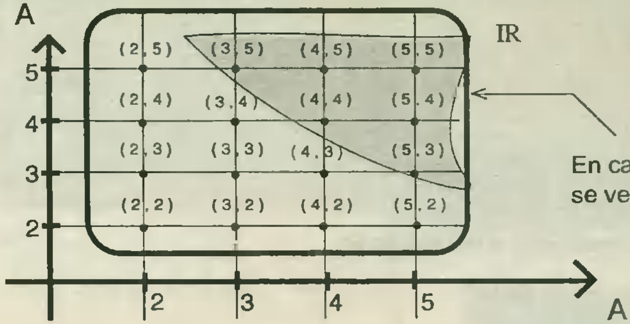
Considere el conjunto :

$A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$.

Encontrar los elementos del conjunto A x A tales que la suma de sus componentes es 8 ó mayor que 8.

Solución:

(1°) Representando gráficamente el diagrama cartesiano del producto A x A.



(2°) Del Diagrama adjunto, la relación propuesta será:

$R = \{ (x, y) \in A \times A \,/\, x + y \geq 8 \}$

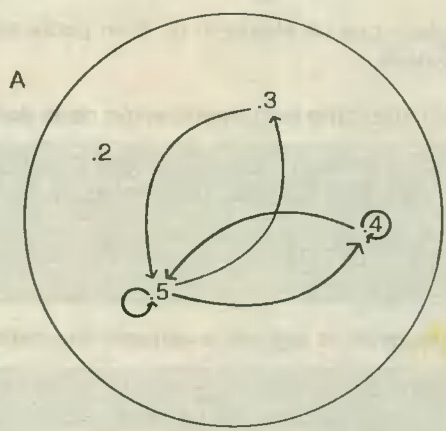
$R = \{ (3, 5), (4, 4), (5, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5) \}$

También la relación R puede representarse mediante el **DIAGRAMA DE FLECHAS,** para ello se sigue la secuencia:

I.- Se escribe el conjunto A en un Diagrama de Venn.

II.- Se relaciona cada par mediante flechas que tienen origen en su primer componente.

$R = \{ (3, 5), (4, 4), (5, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 5) \}$



18.2 LA FUNCION

El concepto de función es uno de los más importantes en matemática.
La idea de función fue utilizada mucho antes que aparezca la teoría de conjuntos ; al reformular el concepto de función en términos de conjuntos la concepción adopta una sistematización y generalidad de la cual se adolecía originalmente.

18.2.1 **Definicion.-** f : A → B es una FUNCION O APLICACION DE A EN B si y sólo si f es un subconjunto de pares ordenados (a, b) que pertenecen al producto cartesiano A x B, tales que dichos pares satisfacen las siguientes condiciones:

(i) **EXISTENCIA:**

$$\forall a \in A \,;\, \exists b \in B \,/\, (a, b) \in f$$

(ii) **UNICIDAD:**

$$\text{Si } (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b = c$$

18.2.2 Ampliación y Comentarios a la Definición :

La notación f : A → B, se lee:

"f" es función de A en B", o bien

"f es función de dominio A y rango en B"

18.2.3 La definición de función puede ser también establecida por la equivalencia siguiente:

Una función de A en B ; f : A → B es una triada de elementos en donde A y B son conjuntos y f es una regla de correspondencia que hace corresponder a **cada** elemento "a" de A **un único** elemento "b" de B.

En esta definición es necesario redundar que las palabras:

"CADA".- Establece que todos los elementos de A deberán tener un correspondiente en B.

"UN UNICO".- Establece que un elemento de B no podrá ser imagen de más de un elemento de A.

18.2.4 Tengamos en cuenta la siguiente esquematización de la definición:

Se llama función de A en B a toda relación f de A en B que cumple:
Para cada elemento " a " de A **EXISTE** un elemento " b " de B y sólo uno tal que (a, b) ∈ f.
Este único elemento se denomina imágen o también valor de la función f para el elemento " a ".

18.2.5 También podemos considerar la siguiente variante a la definición de función:

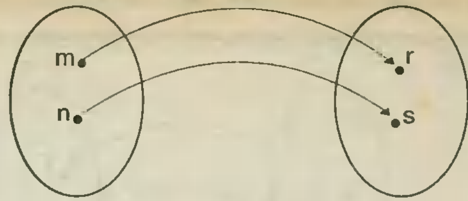
"Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera, si a cada elemento de A se le hace corresponder un único elemento de B, a esta correspondencia se le denomina función de A en B ; f : A → B".

Ejemplo:

La correspondencia:

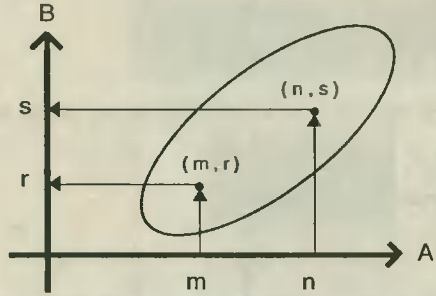
R : A → B

Se puede escribir como un **conjunto** de pares ordenados.



$R: A \rightarrow B = \{(m, r), (n, s)\}$

También en forma gráfica:



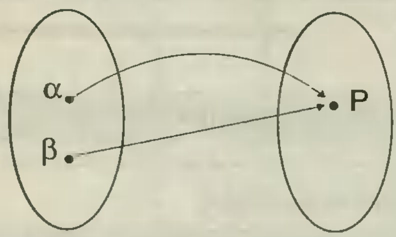
$R: A \rightarrow B$

La relación $R: A \rightarrow B$ **define una función** $f: A \rightarrow B$.

Ejemplo:

La correspondencia:

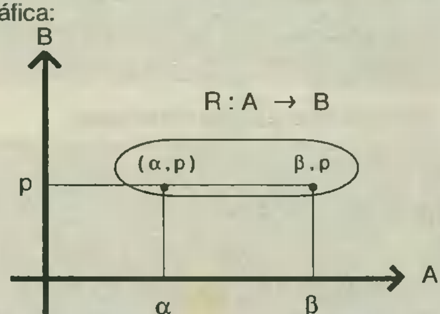
$R: A \rightarrow B$



Se puede escribir como un **conjunto** de pares ordenados.

$R: A \rightarrow B = \{(\alpha, p), (\beta, p)\}$

También en forma gráfica:

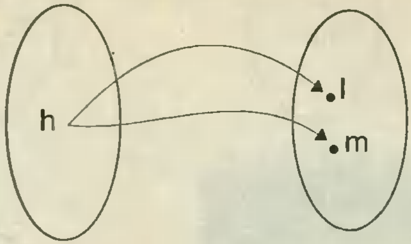


La relación $R: A \rightarrow B$ **define una función** $f: A \rightarrow B$.

Ejemplo:

La correspondencia:

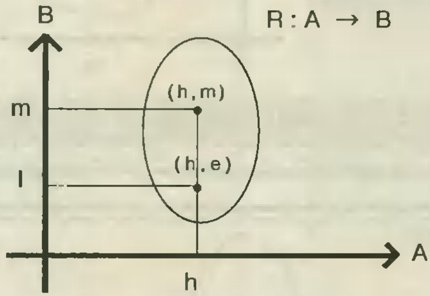
R : A → B



Se puede escribir como un **conjunto** de pares ordenados.

R : A → B = { (h, l), (h, m) }

También en forma gráfica.



La relación R : A → B **no define** una función.

18.2.6 Así mismo se tiene la definición:

Se dice que una correspondencia f : A → B es una **función** o una **aplicación** al conjunto de pares ordenados, tal que:

(i) Su conjunto de partida es igual a su conjunto de definición.

(ii) Su gráfica F es una gráfica funcional, es decir para todo "x" existe a lo sumo un solo elemento correspondiente.

18.2.7 Es frecuente tener también la siguiente definición:

Si f es una función de A en B.

El conjunto A se llama **dominio de f.**

El conjunto B se llama **Rango o Codominio o Imagen de la función.**

Los elementos de A se llaman **Argumentos para** f.

Si se verifica que y = f (x) el elemento y se llama valor de f para el argumento x o valor asignado a x por f.

18.3 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION REAL.

18.3.1 **Dominio de la función:** (Df) Es el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados (x, f(x)), es decir:

$$Dom(f) = \{x \in A / \exists!\ y \in B \wedge y = f(x)\}$$

ó $$Dom(f) = \{x \in A [\exists\ y \in B / y = f(x)]\}$$

(El dominio se lee en el eje horizontal)

18.3.2 **Rango de la función:** (Rf) Es el conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados (x, f (x)), es decir :

$$Rf = \{y \in B / [\exists\ x \in A / y = f(x)]\}$$

ó $$Rf = \{f(x) \in B / x \in Df\}$$

(El rango se lee en el eje vertical)

18.3.3 Regla de Correspondencia de una función.

Es la expresión algebraica f (x) que permite calcular la segunda componente del par ordenado (x, f (x)) para cada valor de x que pertenece al dominio de f.

Ejemplo:

Sea la función:

$f : A \rightarrow B = \{(-1, -2), (2, 4), (-3, -6), (4, 8), (5, 10)\}$

Señalar: a) El rango y dominio.

b) La regla de correspondencia.

Solución:

a) $Df = \{-1, 2, -3, 4, 5\}$ Primeras componentes.

$Rf = \{-2, 4, -6, 8, 10\}$ Segundas componentes.

b) Regla de correspondencia.

$$f(x) = 2x$$

18.3.4 Interpretación geométrica de la definición de una función real.

Toda $F : A \rightarrow B$ es posible que sea asociada a una gráfica en un sistema rectangular de ejes cartesianos, para ello se hace la representación siguiente:

- Representamos los elementos de “A” por puntos del eje “x”.
- Representamos los elementos de “B” por puntos del eje “y”.
- Unimos los pares ordenados mediante una linea.

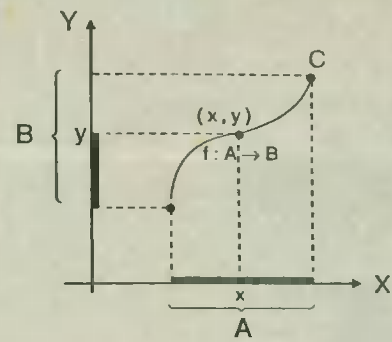
El gráfico obtenido también deberá cumplir las dos condiciones de la definición, es decir:

(i) Principio de Existencia.

(ii) Principio de Unicidad.

Ejemplo:

Sea la $f : A \rightarrow B$ expuesta en el gráfico:



interpretar geométricamente las condiciones (i) y (ii) de la definición.

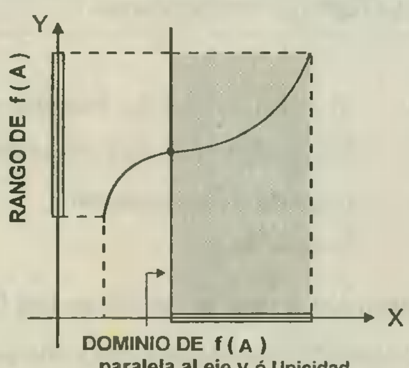
Solución:

Asociando a la gráfica las condiciones de la definición establecida son:

(i) **Condición de Existencia.-**
Para cada elemento "x" de A , debe existir por lo menos un elemento " y " de B , tal que $(x, y) \in f : A \rightarrow B$.

Geométricamente:
La gráfica debe estar compuesta por lo menos de un punto.

En efecto la gráfica C, consta de por lo menos un punto en el plano XY.



(Estas gráficas satisfacen las condiciones de Existencia y de Unicidad).

(ii) **Condición de Unicidad.-**

Geométricamente:

Si una paralela al eje **y** contiene a un punto p del gráfico C de la función, no deberá cortar a ningún otro punto de C.

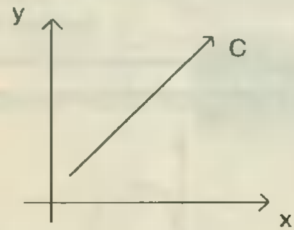
18.3.5 LA GRAFICA

Definición.- Un conjunto C es una gráfica si sus elementos son pares ordenados. Si C es una gráfica y $(a, b) \in C$, se dice que "b" es el correspondiente de "x" por C.

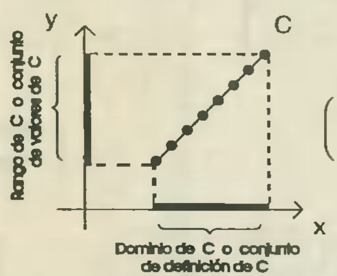
Definición.- Si C es una gráfica, al conjunto de sus primeras componentes, se les denomina **Dominio de definición de C** o **Conjunto de definición de C,** y al conjunto de las segundas componentes se les denomina **Rango** o **Conjunto de valores de C.**

Ejemplo:

En la gráfica:



Se establece que:



(Es una gráfica funcional)

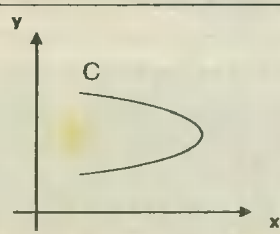
18.3.6 LA GRAFICA FUNCIONAL

Definición.- Se dice que C es una gráfica funcional si para todo "x" del dominio existe a lo sumo un único elemento "y" que pertenece a C.

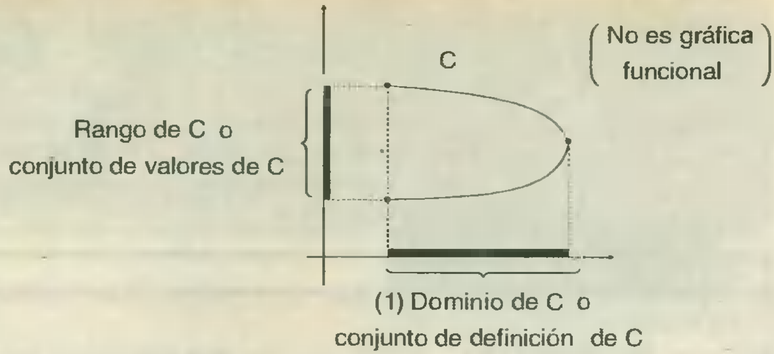
Simbólicamente.- C es gráfica funcional si para todo par $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ se cumple que si : $x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$

Ejemplo:

En la gráfica C

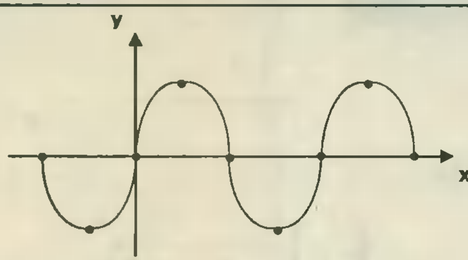


Se establece que:

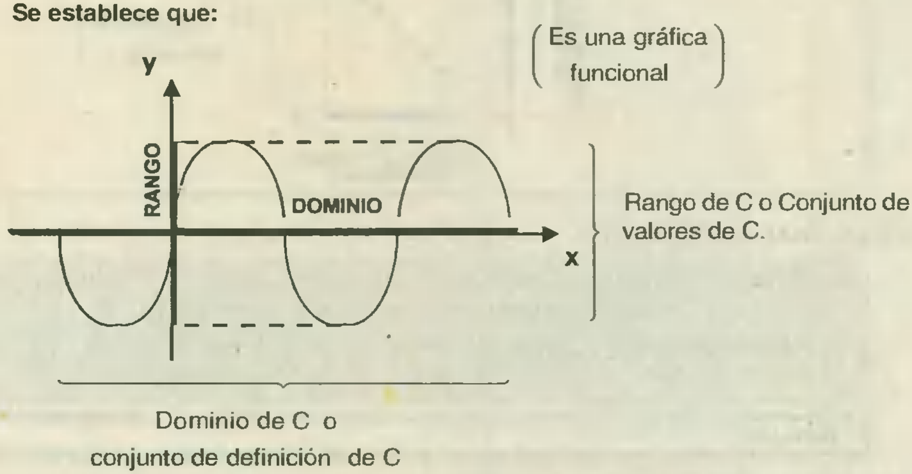


Ejemplo:

En la gráfica C.



Se establece que:



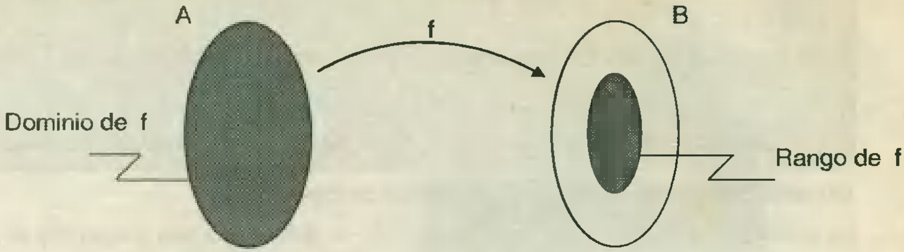
18.3.7 LA APLICACION (Es un caso especial de función)

Definición.- Sean A y B dos conjuntos cuyos elementos son números reales y sea $f: A \rightarrow B$ una función de A en B se dice que f es una APLICACION de A en B, si:

$$\text{Dom}(f) = A$$

Ejemplo:

Sea la f : A $\rightarrow$ B, dado por el diagrama siguiente:

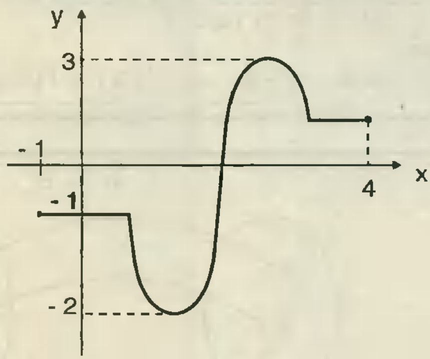


Es una aplicación debido a que el conjunto de partida es igual que el Dominio de la función:

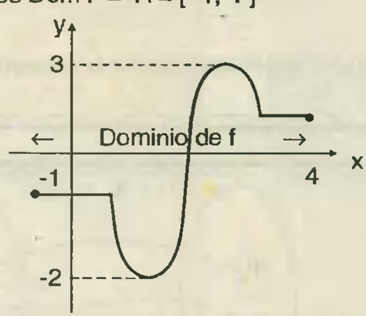
$$\text{Dom } f = A \ ; \quad \text{Rango } f \neq B$$

Ejemplo:

En el gráfico de la f : A $\rightarrow$ B, donde: A = [-1, 4] y B = [-2, 3]



Es una aplicación pues Dom f = A = [-1, 4]



18.3.8 CLASES DE FUNCIONES

Son: A.- La función Inyectiva o Univalente.

B.- La función Sobreyectiva.

C.- La función Biyectiva Biunívoca.

A. LA FUNCION INYECTIVA O UNIVALENTE

Definición.- La función

$f : A \rightarrow B$

es **inyectiva** si para los elementos x_1 y $x_2 \in A$ es válida la siguiente implicación:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

(A imágenes diferentes les corresponden elementos del dominio diferentes).

Observaciones: En relación a la definición de inyección:

(1) La definición establece que una función $f : A \rightarrow B$ es uno a uno o inyectiva si y sólo si a elementos distintos del dominio, se originan elementos distintos en el codominio.

Ejemplo:

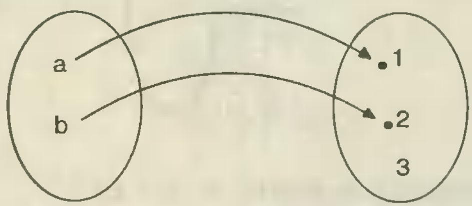
La función: $F = \{ (2, 3), (4, 5), (6, 7) \}$
es inyectiva, pues tiene las componentes diferentes.

Ejemplo:

La función: $G = \{ (2, 3), (4, 5), (6, 3) \}$
no es inyectiva.
pues ocurre que siendo : $2 \neq 6 \Rightarrow f(2) = f(6)$ ó $3 = 3$

Ejemplo:

La función: $f : A \rightarrow B$

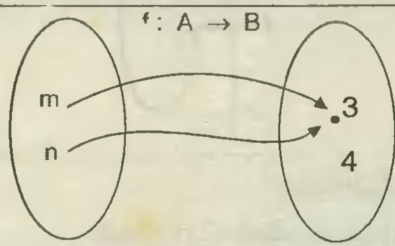


Es inyectiva.

(a todos los elementos distintos del dominio le corresponden diferentes elementos del codominio).

Ejemplo:

La función: $f : A \rightarrow B$

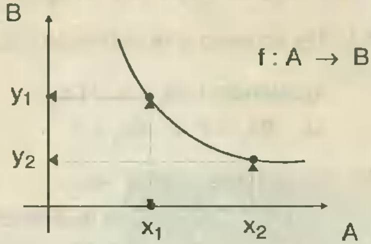


No es inyectiva.

(a los elementos diferentes del dominio le corresponden elementos iguales del codominio).

Ejemplo:

La función:

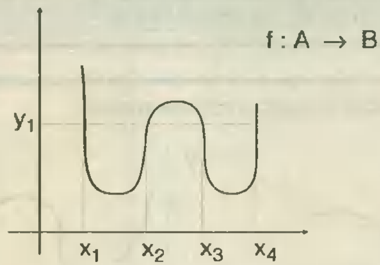


Es inyectiva.

(a los elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del codominio).

Ejemplo:

La función



No es inyectiva.

(a los elementos distintos del dominio le corresponden elementos iguales del codominio).

(2) Recordemos la siguiente propiedad de lógica.

" Toda implicación es equivalente a su contrarrecíproca ".

Es decir: $p \Rightarrow q$ es equivalente a:

$\sim q \Rightarrow \sim p$

Esta propiedad permite reformular sin embargo la definición dada:

Definición.- La función:

$f : A \to B$

es inyectiva si para elementos $f(x_1)$ y $f(x_2) \in B$ es válida la siguiente implicación:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Por lo general esta última definición permite realizar demostraciones en relación a la inyectividad de una función.

Ejemplo:

Demostrar que la función $f : R \to R$ dada por la regla: $f(x) = -6x + 7$ es inyectiva.

(1°) Si x_1 y $x_2 \in Df$,

$f(x_1) = -6x_1 + 7$ y $f(x_2) = -6x_2 + 7$

(2°) De acuerdo a la definición: Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Igualando: $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow -6x_1 + 7 = -6x_2 + 7$

(3°) Se obtiene: $-6x_1 = -6x_2$

$x_1 = x_2$ (se verifica la definición)

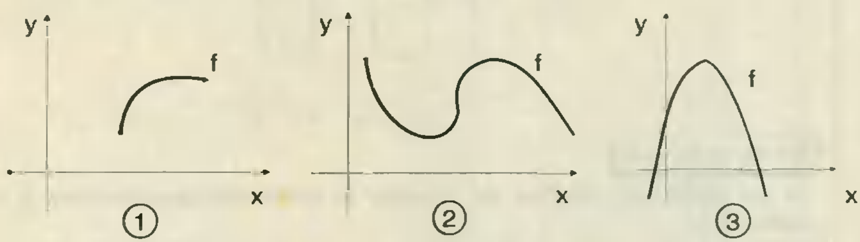
$\therefore$ $\boxed{f(x) = -6x + 7 \text{ es inyectiva}}$

(3) La definición dada originalmente, permite establecer una regla geométrica para determinar la inyectividad de una función:

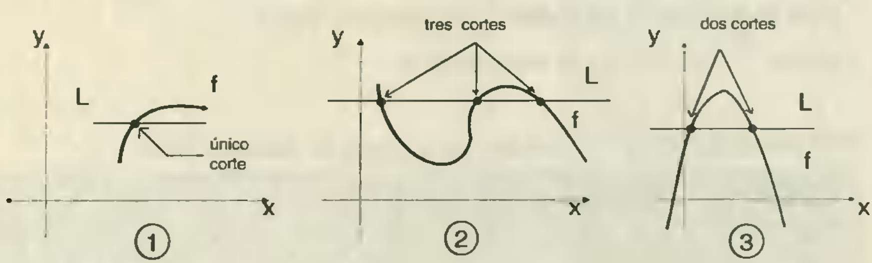
"Una función definida en los números reales es inyectiva, si la recta horizontal intercepta a su gráfica en un solo punto".

Ejemplo:

Sean las gráficas de las funciones reales:



Solo la primera es inyectiva, pues al trazar la recta horizontal L, tendremos:



B. LA FUNCION SOBREYECTIVA

Definición.- La función

$$f : A \to B$$

es sobreyectiva si:

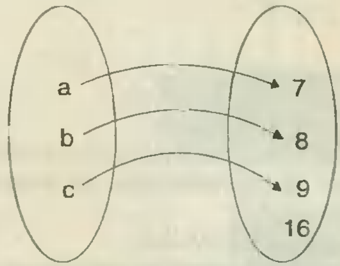
$$\text{Rango}(f) = B$$

Observaciones:

(1) La definición de sobreyectividad establece implícitamente que la función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si su rango es todo el conjunto de llegada o conjunto B.

Ejemplo:

La función $f: A \rightarrow B$



es sobreyectiva.

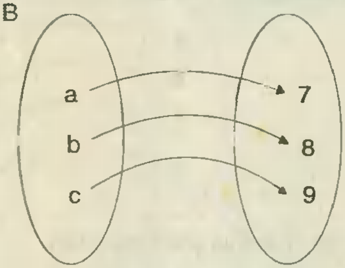
De acuerdo a la definición, todos los elementos del conjunto de llegada tienen correspondiente en el dominio.

Es decir:

$B = \text{Rango}(f) = \{7, 8, 9\}$

Ejemplo:

Sea la función $f: A \rightarrow B$

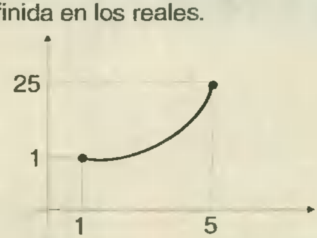


No es sobreyectiva

por no ser una función la relación dada; el elemento 16 carece de correspondencia.

Ejemplo:

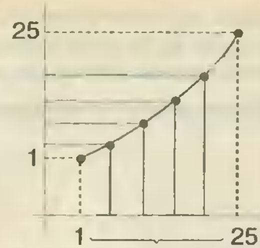
Sea la función $f: A \rightarrow B$ definida en los reales.



Es sobreyectiva, pues:

$B = \text{Rango } f = [1, 25]$, es decir todos los elementos del Rango son correspondidos por algún elemento del dominio.

(1°) **Gráficamente:** al trazar las correspondencias



(2) La definición dada se puede establecer como: una función es sobreyectiva si todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio.

C. LA FUNCION BIYECTIVA O BIUNIVOCA

Definición.- La función:

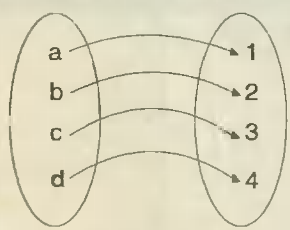
$f : A \rightarrow B$

Es biyectiva si:

f es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo:

Sea la función $f : A \rightarrow B$



Es biyectiva, pues es inyectiva y sobreyectiva.

Inyectiva: Todos los elementos del conjunto de partida poseen imágenes diferentes.

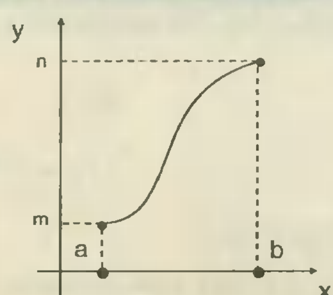
Sobreyectiva: El conjunto de llegada es igual al rango de la función.

Ejemplo:

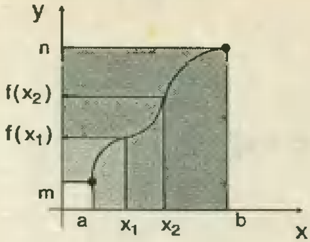
Sea la función $f : A \rightarrow B$

$A = [a, b]$

$B = [m, n]$



Es biyectiva porque:



a) **Es inyectiva:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{para } x_1 \neq x_2 \\ f(x_1) \neq f(x_2) \end{array}}$$

b) **Es sobreyectiva:**

$$\boxed{\text{pues } Rf = B = [\,m\,,\,n\,]}$$

Ejemplo:

Sea la función f .

$f = \{ (x, y) / x \in R \wedge y = -9x - 21 \}$

Demostrar que f es **biyectiva.**

Solución:

(1°) Debemos mostrar que f es:

a) inyectiva; y,

b) sobreyectiva

(2°) **Inyectividad:** Sea $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \quad -9x_1 - 21 = -9x_2 - 21$

Debemos llegar a : $x_1 = x_2$

En efecto: $-9x_1 = -9x_2$

$x_1 = x_2$

$\therefore$ **f es inyectiva** .... (I).

(3°) **Sobreyectividad:** Debemos demostrar que : $Rf = R$

para ello : $y = -9x - 21 \quad \Rightarrow \quad y + 21 = -9x$

$$x = \frac{y+21}{-9} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{9}\,y - \frac{7}{3}$$

$y = Rf = \mathbb{R}$

$\therefore$ **f es sobreyectiva** .... (II).

(4°) de (I) y (II) : $\boxed{\text{f es BIYECTIVA}}$ .... L.q.q.d.

Ejemplo:

Sea la función f

$f = \{ (x, y) / x \in R \wedge y = x^3 \}$

Demostrar que f es inyectiva.

Solución:

(1°) Debemos mostrar que f es:

a) inyectiva y

b) sobreyectiva

(2°) **Inyectividad:** Sea $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$

Debemos de llegar a $x_1 = x_2$

En efecto : $x_1^3 - x_2^3 = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \,;\, \underbrace{x_1 = x_2 w \;;\; x_1 = x_2 w^2}_{\text{complejos}}$

$\therefore$ **f es inyectiva** .... (I).

(3°) **Sobreyectividad:** Debemos demostrar que : $Rf = R$

para ello : $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = Rf = R$

$\therefore$ **f es sobreyectiva** .... (II).

(4°) De (I) y (II) : $\therefore$ f es BIYECTIVA .... L.q.q.d.

18.4 LA FUNCION INVERSA (f^* o f^{-1})

Definición.- Sea f una función biyectiva; se define a la función f^* denominada FUNCION **INVERSA DE f** como aquella que verifica las dos condiciones:

(i) **REGLA DE CORRESPONDENCIA:**
$f^* = \{ (f(x), x) / x \in Df \}$

(ii) Dominio (f^*) = Rango f
Rango (f^*) = Dom f

Ejemplo:

Si la función inyectiva:

$f : A \rightarrow B = \{ (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36), (7, 49) \}$

Hallar la función inversa.

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición:

$f^* = \{ (9, 3), (16, 4), (25, 5), (36, 6), (49, 7) \}$

(2°) asimismo:

$Dom\, f^* = \{ 9, 16, 25, 36, 49 \}$; $Ran\, f^* = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$

La gráfica de la función f^* o inversa es simétrica respecto a la función diagonal.

Ejemplo:

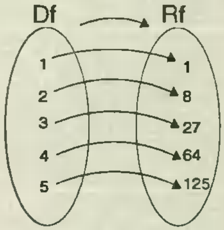
Sea la función biyectiva:

f: A B = { (1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64), (5, 125) }

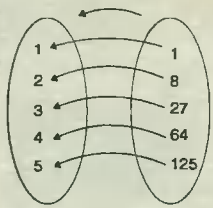
Realizar el Diagrama de Venn Euler que objetivice la función inversa.

***Solución*:**

(1) Sea f : A $\rightarrow$ B



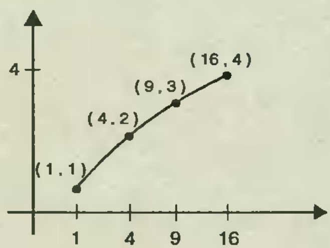
(2) f*: A B



Ejemplo:

Sea la gráfica de la función:

f : A $\rightarrow$ B = { (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4) }

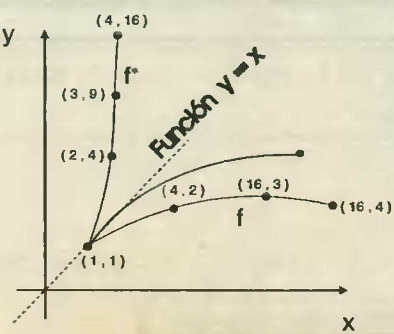


Trazar la gráfica correspondiente a la función f* (función inversa).

***Solución*:**

(1°) Por definición:

f* = A $\rightarrow$ B = { (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) }



La función directa f y la función inversa f* son simétricas respecto a la gráfica y = x

18.5 ALGEBRA DE FUNCIONES

Si f y g son funciones reales de reglas de correspondencia f(x) y g(x), definimos las 4 operaciones: Adición, Diferencia, Producto y Cociente de las funciones, del modo siguiente:

18.5.1 Adición de Funciones f y g.

Se le denota por f + g y se establece:

(i) $f + g = \{ (x, y) / y = f(x) + g(x) \}$

(ii) Dominio (f + g) = Df ∩ Dg

18.5.2 Diferencia de Funciones f y g.

Se le denota por f - g y se establece:

(i) $f - g = \{ (x, y) / y = f(x) - g(x) \}$

(ii) Dominio (f - g) = Df ∩ Dg

18.5.3 Multiplicación de Funciones f y g.

Se le denota por fg y se establece:

(i) $fg = \{ (x, y) / y = f(x)\, g(x) \}$

(ii) Dominio (fg) = Df ∩ Dg

18.5.4 Cociente de Funciones f y g.

Se le denota por $\frac{f}{g}$ y se establece:

(i) $$\frac{f}{g} = \left\{ (x,y) \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)} \right\}$$

(ii) $$\text{Dominio}\left(\frac{f}{g}\right) = Df \cap Dg - \{ x \in Dg \,/\, g(x) = 0 \}$$

18.6 IGUALDAD DE FUNCIONES (f = g)

Definición.- Dos funciones f y g serán iguales si se verifican las 2 condiciones.

(i) f(x) = g(x) ; reglas de correspondencia iguales.

(ii) Dom f = Dom g ; igualdad de **DOMINIOS**.

Ejemplo:

Sean : $A(x) = 3x - 1 \in \langle -10, -3 \rangle \quad \Rightarrow \quad B(x) = 3x - 1 \,;\, x \in \langle 1, 10 \rangle$

¿serán funciones iguales?

Solución:

De acuerdo a la definición:

(i) A(x) = B(x) (ii) $\langle -10, -3 \rangle \neq [1, 10]$ Dominios diferentes.

∴ $\boxed{\text{A(x) y B(x) no son funciones iguales}}$

18.7 LA COMPOSICION DE FUNCIONES

Además de la adición, multiplicación y división sobre las funciones existe otra operación básica denominada composición. Esta operación se considera a veces como otra multiplicación de funciones.

18.7.1 Definición.- La composición de "f" con "g" representada por fog y que se lee "f compuesta con g" es la función cuyo dominio consiste en los elementos $x \in Dg$ tales que $g(x) \in Df$ y cuya regla de correspondencia es:

$$\boxed{[fog](x) = f[g(x)]}$$

Tales que: Dom fog = $\{x \in \mathbb{R} / x \in Dom(g) \wedge g(x) \in Dom(f)\}$
$Rang(g) \cap Dom(f) \neq \phi$

Ejemplo:

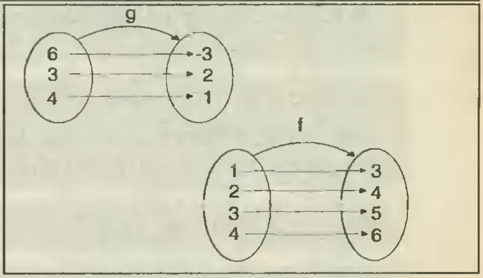
Sea:

$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$

$g = \{(6, -3), (3, 2), (4, 1)\}$

Hallar fog

Solución:



(1°) Para obtener fog, los datos son :

$Rang(g) = \{-3, 2, 1\}$ .... (I).

$Dom(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ .... (II).

(2°) Obtenemos la intersección de ambos:

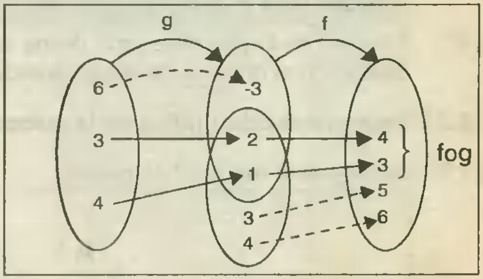
$Rang(g) \wedge Dom(f) = \{1, 2\}$

(3°) Seleccionando aquellos pares de g y f que tengan segundos y primeros componentes a 1 y 2:

$(4, 1) \in g \wedge (1, 3) \in f \Rightarrow (4, 3) \in fog$

$(3, 2) \in g \wedge (2, 4) \in f \Rightarrow (3, 4) \in fog$

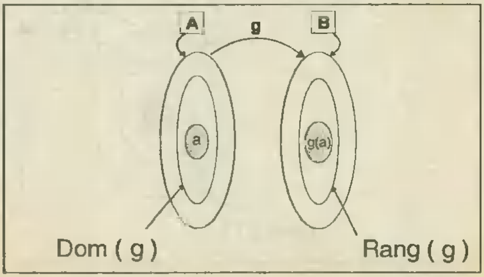
$\therefore \quad \boxed{fog = \{(4, 3), (3, 4)\}}$



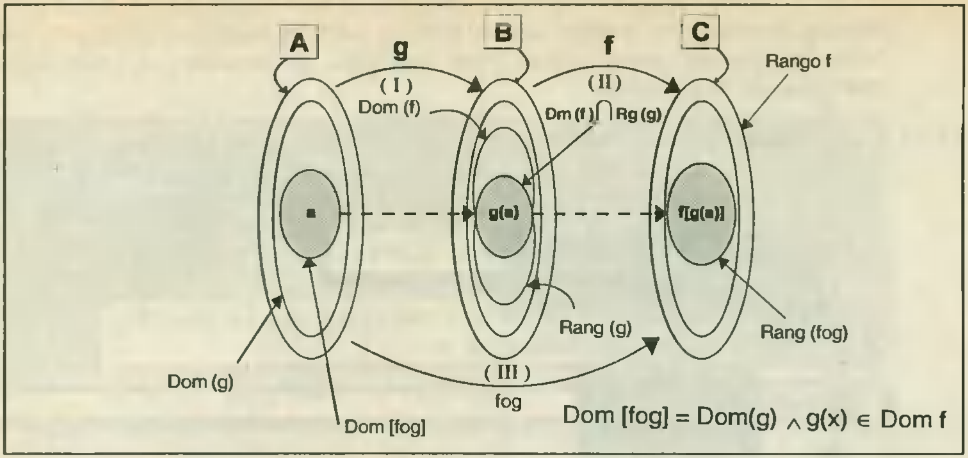
18.7.2 Representación gráfica de la composición FOG

A partir de la definición de composición de funciones:

(1°) Definimos la función g de partida.



(2°) Establecemos la función f y la función fog.



(3°) A partir del gráfico.

- $\text{Dom}[\,fog\,] = \{\, x \in \text{Dom}(\,g\,) \wedge g(\,x\,) \in \text{Dom} f\,\}$

  "Los elementos del dominio de la composición de f y g son los elementos del dominio de g tales que dichos elementos tengan imagen en la intersección del Rango de g y el dominio de f."

- $\text{Rang}(\,g\,) \cap \text{Dom}(\,f\,) \neq \phi$

  Una condición importante de modo que exista composición es que la intersección del Rango de g y el dominio de f no sea vacía.

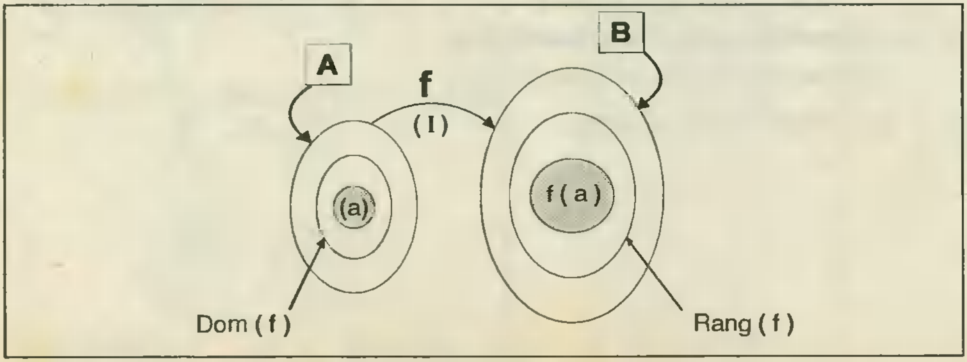
- $\text{Rang}(\,fog\,) \subset \text{Rang}(\,f\,) \subset C$

- $\text{Dom}(\,fog\,) \subset \text{Dom}(\,g\,) \subset A$

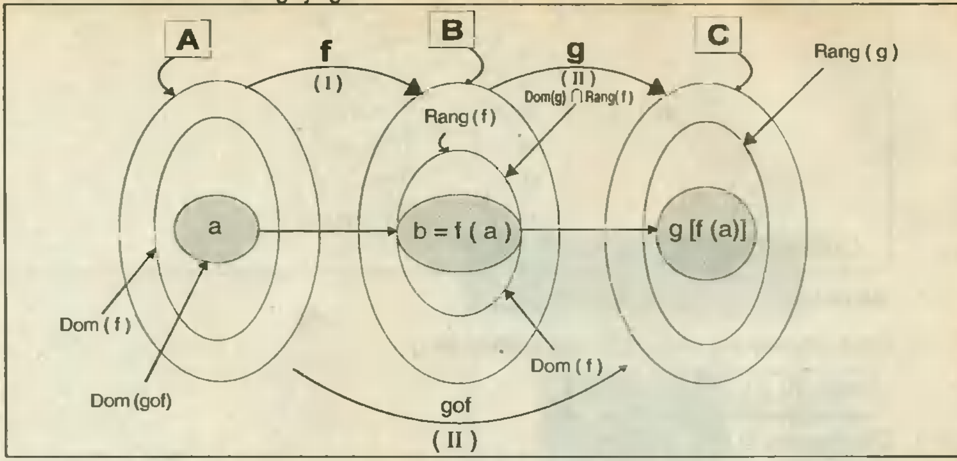
(4°) Para definir fog es necesario definir la función g, Rg y Df de modo que esta intersección determine el dominio de la composición.

18.7.3 Representación gráfica de la composición GOF

(1°) Definimos la función f de partida.



(2°) Establecemos la función g y gof.



(3°) A partir del gráfico.

Dom[gof] = Dom(f) $\wedge$ f (x) $\in$ Dom g

"Los elementos del dominio de la composición de g y f son los elementos del dominio de f tales que dichos elementos tengan imagen en la intersección del rango de f y el dominio de g."

- Rang(f) $\cap$ Dom(g) $\neq$ ϕ
- Ran(gof) $\subset$ Ran(g) $\subset$ C
- Dom(fog) $\subset$ Dom(g) $\subset$ A

(4°) Para definir gof es necesario definir la función f, Rf y Dg de modo que esta intersección determine el dominio de la composición.

(5°) En relación a la notación fog la función de partida es la que se halla a la derecha de "O" es decir g.

Esquema: Sea fog $\leftarrow$ g es la función de partida para definir la composición y f es el conjunto de llegada.

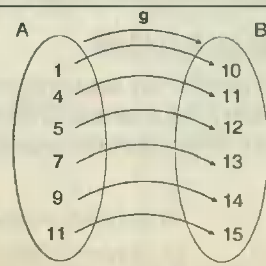
(6°) En general : fog $\neq$ gof la composición de funciones no es commutativa.

(7°) $\boxed{\text{Si fog = gof} \Leftrightarrow f = g}$

Ejemplo:

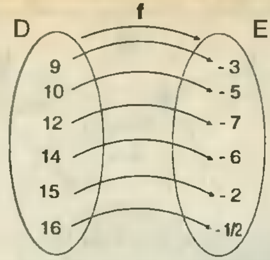
A partir de los esquemas:

I)



y

II)



Obtener fog :

Solución:

(1°) Para obtener fog el conjunto de partida es g

$\boxed{\text{Rango}(\,g\,) \cap \text{Dom}\ f \neq \phi}$

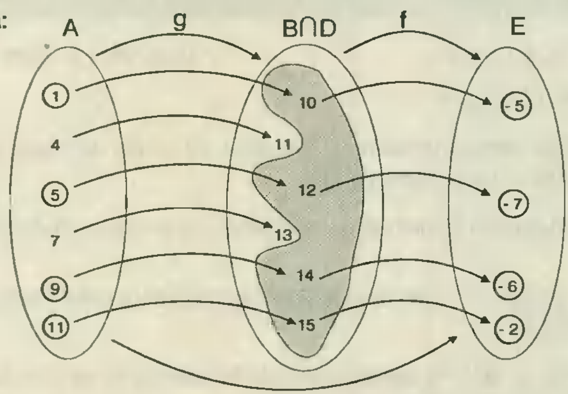
(2°) Obtenemos la intersección:

Rango(g) = { 10, 11, 12, 13, 14, 15 }

Dom(f) = { 9, 10, 12, 14, 15, 16 }

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Rang}(\,g\,) \cap \text{Dom}(\,f\,) = \{\,10, 12, 14, 15\,\}}$ .... (I)

(3°) El gráfico será:



fog

(4°) Finalmente:

$\therefore$ $\boxed{\text{fog} = \{\,(\,1, -5\,), (\,5, -7\,), (\,9, -6\,), (\,11, -2\,)\,\}}$

18.8 FUNCIONES NOTABLES BASICAS

Algunas funciones son de uso muy frecuente por lo que el conocimiento del Dominio y Rango correspondientes son puntos de partida para realizar el análisis de otras funciones, incluyendo las gráficas con las variantes asociadas a ellas; entre los principales definiremos a:

I.- La Función constante

II.- La Función identidad

III.- La Función de 1^{er} grado o lineal
IV.- La Función de 2° grado o parabólica
V.- La Función de 3^{er} grado o cúbica
VI.- La Función valor absoluto
VII.- La Función máximo entero
VIII.- La Función raíz cuadrada
IX.- La Función signo
X.- La Función escalón unitario
XI.- La Función polinómica de grado n
XII.- La Función racional
XIII.- La Función par
XIV.- La Función impar
XV.- La Función periódica
XVI.- La Función mantisa
XVII.- La Función de Dirichlet
XVIII.- La Función exponencial
XIX.- La Función logarítmica

18.8.1 **I.- La Función Constante ($C_{(x)} = b$).**

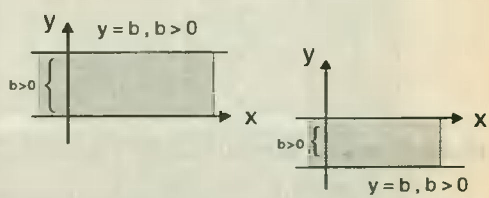
Definición.- Es aquella función denotada por C y regla de correspondencia $C_{(x)} = b$, **cuyo Dominio es IR y su Rango es un solo número real b.**

Es decir: $F = \{(-1, b), (0, b), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

1.- $C = \{(x, y) / y = b\}$ .... (1).

2.- Dom (C) = IR
Rango (C) = b

3.- La gráfica es una recta horizontal



18.8.2 **II.- La Función Identidad o Función Diagonal ($I_{(x)} = x$)**

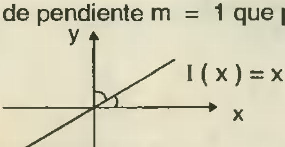
Definición.- Es aquella función denotada por I con regla de correspondencia $I_{(x)} = x$, de Dominio y Rango ∈ IR.

Es decir: $I = \{(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\}$

(1) $I = \{(x, y) / y = x\}$ .... (1).

(2) Dom (I) = IR
Rango (I) = IR

(3) La gráfica es una recta de pendiente m = 1 que pasa por el origen de coordenadas, y es bisectriz del 1° cuadrante.



(4°) En esta función en cada par ordenado, las componentes son iguales.

18.8.3 **III.- La Función de Primer Grado o Función Lineal ($f_{(x)} = mx + b$)**

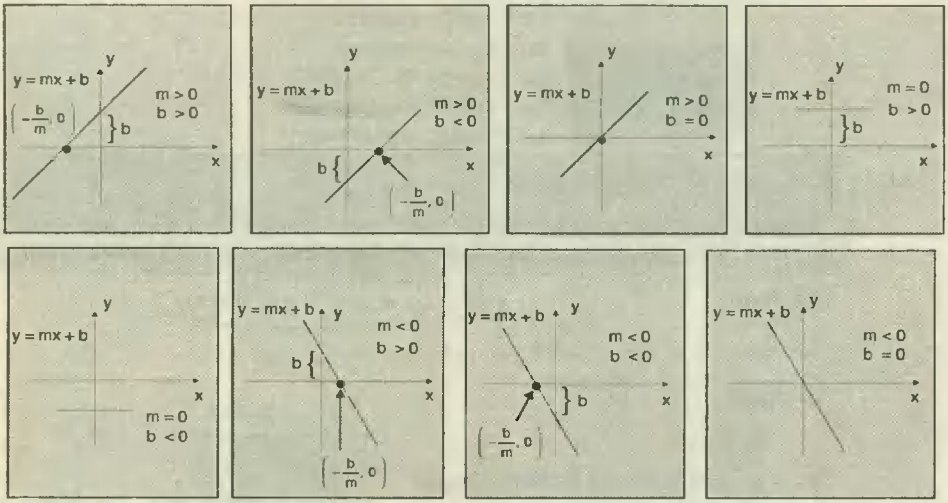
Definición.- Es aquella función con dominio R y rango R cuya regla de correspondencia es $F_{(x)} = mx + b$; $m \neq 0$ y b son constantes en especial m es la pendiente.

Es decir:

(i) $F = \{ (x, y) / y = mx + b \}$

(ii) Dom (F) = IR $\wedge$ Rango (F) = IR

(iii) La gráfica es una recta cuya pendiente es "m" y su ordenada en el origen es "b"; el corte en el eje x se produce si $x = -b/a$



18.8.4 **IV.- La Función de 2° Grado.**

Definición.- Es el conjunto de pares $(x, F_{(x)})$ de dominio $\in$ IR y regla de correspondencia:

$$F_{(x)} = ax^2 + bx + c \; ; \; a \neq 0$$

La función F se define en el conjunto IR como: $F : IR \rightarrow IR$

$$F = \{ (x,y)/y = F_{(x)} = ax^2 + bx + c; \; a \neq 0, x \in IR; y \in [F(-b \backslash 2a), \infty \rangle \text{ si } a > 0 \;\vee\; y \in \langle -\infty, F(-b/2a)] \text{ si } a \langle 0 \}$$

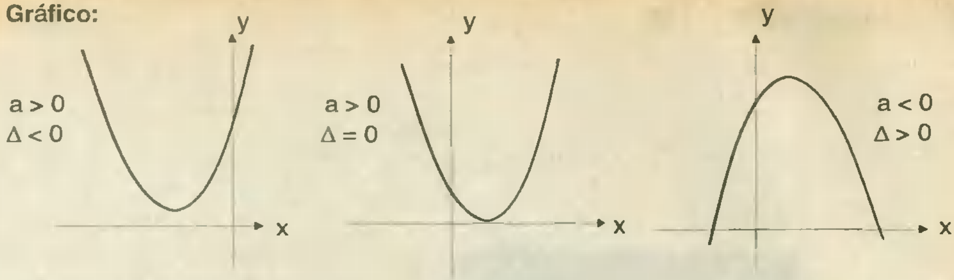
Es decir:

1. La regla de correspondencia es : $F_{(x)} = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

2. Dominio (F) = $\langle -\infty , \infty \rangle$

Rango (F) = $\left[f\left(-\dfrac{b}{2a} \right), \infty \right\rangle$ si $a > 0$ ó Rango (F) $\in \left\langle -\infty, F\left(-\dfrac{b}{2a} \right) \right]$ si $a < 0$

3. **Gráfico:**



18.8.5 **V.- La Función de 3° grado.**

Definición.- Es el conjunto de pares (x, x^3). La función f se define en el conjunto R como: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{y = \{ (x, y) / y = x^3 ; x \in \mathbb{R} ; y \in \mathbb{R} \}}$$

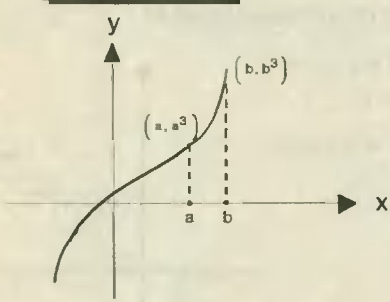
Es decir:

(1) **La regla de correspondencia es :** $\boxed{y = f(x) = x^3}$

(2) Dominio (f) = $\langle -\infty, \infty \rangle$

Rango (f) = $\langle -\infty, \infty \rangle$

(3) La gráfica $y = x^3$ es:



18.8.6 **VI.- La Función Valor Absoluto.**

Definición.- Es el conjunto de pares (x, $|x|$).

La función f se define en el conjunto R como : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

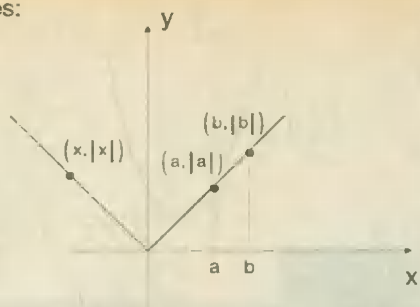
$$\boxed{y = \{ (x, y) / y = |x| ; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}_0^+ \}}$$

Es decir:

1. **La regla de correspondencia es:**
   $y = f(x) = |x|$

2. Dominio (f) = $\langle -\infty, \infty \rangle$
   Rango (f) = $[0 , \infty \rangle$

3. La gráfica $y = |x|$ es:



18.8.7 **VII.-La Función Máximo Entero.**

Definición.- Es el conjunto de pares $(x, [\![x]\!])$.

La función f se define en el conjunto IR como: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

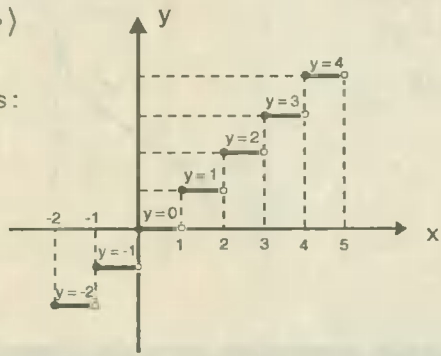
$$f = \{(x, y) / \text{si } y = [\![x]\!] = n \Rightarrow n \leq x < n + 1 ; n \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

Es decir:

1. **La Regla de Correspondencia es :** $y = f(x) = [\![x]\!]$

2. Dominio $(f) = \langle -\infty, \infty \rangle$
   Rango $(f) \in \mathbb{Z}$

3. La gráfica $y = [\![x]\!]$ es:



18.8.8 **VIII. La Función Raíz Cuadrada.**

Definición.- Es el conjunto de pares $(x, \sqrt{x})$.

La función f se define en el conjunto R como: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

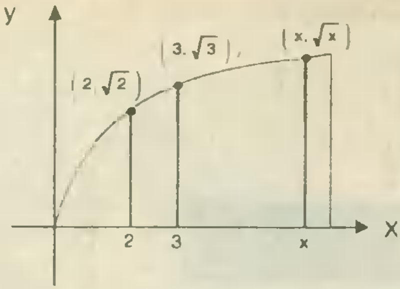
$$f = \{(x, y) / y = \sqrt{x} ; x \geq 0\}$$

Es decir:

1. **La regla de correspondencia es:** $y = \sqrt{x}$

2. Dominio $(f) = [0, \infty\rangle$
   Rango $(f) = \mathbb{Z}$ (enteros)

3. La gráfica $y = \sqrt{x}$ es la "**media parábola**" de eje paralelo a X.



18.8.9 **IX. La Función Signo Sgn (x).**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados cuyo dominio $\in$ IR y el rango es el conjunto { -1,0,1 } definido mediante la regla de correspondencia siguiente:

$$\text{SIGN}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{SIGN}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

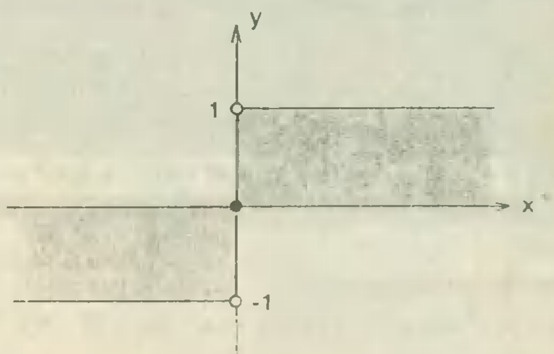
$$\boxed{f = \{ (x,y) \,/\, y = -1 \text{ si } x < 0 \,;\, y = 0 \text{ si } x = 0 \,,\, y = 1 \text{ si } x > 0 \}}$$

Es decir:

1. $y = f(x) = \{ -1, 0, 1 \}$

2. Dom (f) $\in$ IR
   Rango (f) = { -1, 0, 1 }

3. Grafica



18.8.10 **X. La Función Escalón Unitario.**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados $(x, U_{(x)})$ de dominio $\in$ IR y rango = { 0 , 1 } definida por la regla:

$$U_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función f se define en el conjunto IR como : f : IR $\to$ { 0,1 }

$$\boxed{f = \{ (x, U_{(x)}) \,/\, y = 0 \text{ si } x < 0 \,;\, y = 1 \,,\, \text{si } x \geq 0 \}}$$

Es decir:

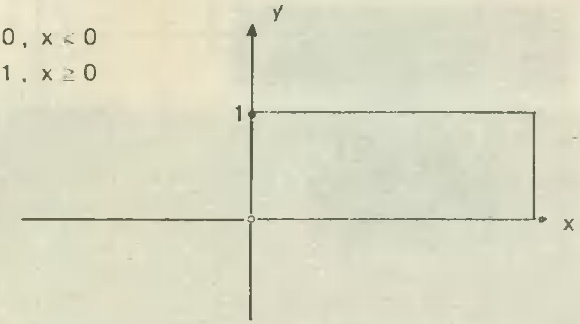
1. La regla de correspondencia es:

$$U_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. $\text{Dom}(f) = \langle -\infty, \infty \rangle$

   $\text{Rango}(f) = \{0, 1\}$

3. La gráfica $y = U_{(x)} = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x \geq 0 \end{cases}$



18.8.11 **XI. La Función Polinomial de Grado n.**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados $(x, Pn(x))$ de dominio $\in \mathbb{R}$ y cuya regla de correspondencia está dado por:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n\,;$$

$$n \in \mathbb{N}\,,\ (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}\,,\ a_0 \neq 0$$

La función f se define en el conjunto $\mathbb{R}$ como : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f = \{(x,y) \,/\, y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n\,;\ x \in \mathbb{R}\,;\ a_0 \neq 0\}}$$

Es decir:

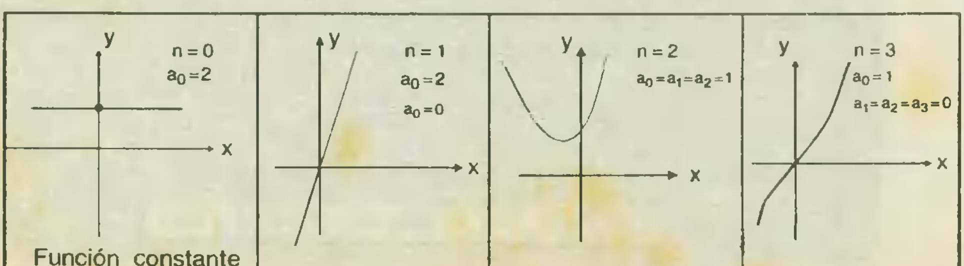
1. La regla de correspondencia es:

   $P(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_n\ ;\ a_0 \neq 0\ ;\ x \in \mathbb{R}$

2. $\text{Dominio}(f) = \langle -\infty, \infty \rangle$

   Rango (f) = Dependerá de $n(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$

3. La gráfica dependerá de n y $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$



18.8.12 **XII. La Función Racional.**

Definición.- Es el conjunto de pares $\left(x, \dfrac{g(x)}{h(x)}\right)$ tales que g y h son reglas polimoniales, la regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{h_0x^m + h_1x^{m-1} + h_2x^{m-2} + \ldots + h_m}; \ h_{(x)} \neq 0$$

El dominio $\in$ IR - { h(x) = 0 }

La función f se define en el conjunto IR como f : IR $\to$ IR

$$\boxed{f = \left\{ (x,y) / y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, x \in \mathrm{IR} - \{ h(x) = 0 \} \right\}}$$

Es decir:

1. La regla de correspondencia es :

$$f_{(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m};$$

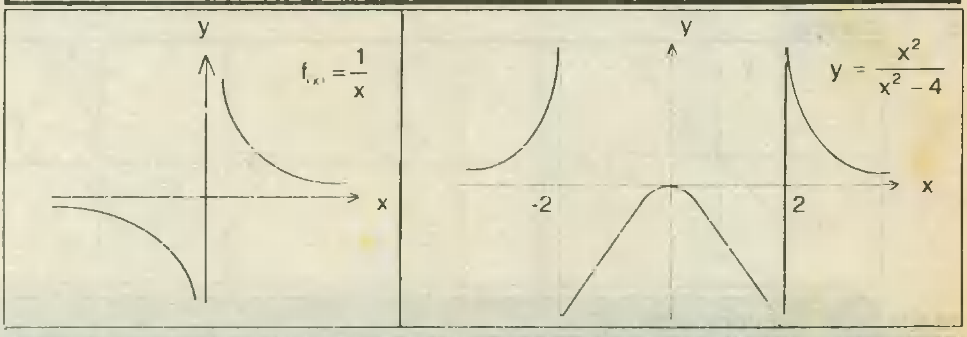
2. Dominio (f) = $\langle -\infty, \infty \rangle$ - { h(x) = 0 }

   Rango (f) = Dependerá de m y n y los a_i, b_i

3. **Gráfica**

   Dependiente de los m, n, a_i y b_i

Ejemplo:



18.8.13 **XIII. La Función Par.**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados (x,f(x)) en los cuales se verifica:

(i) Si x $\in$ Dom f $\Rightarrow$ -x $\in$ Dom f

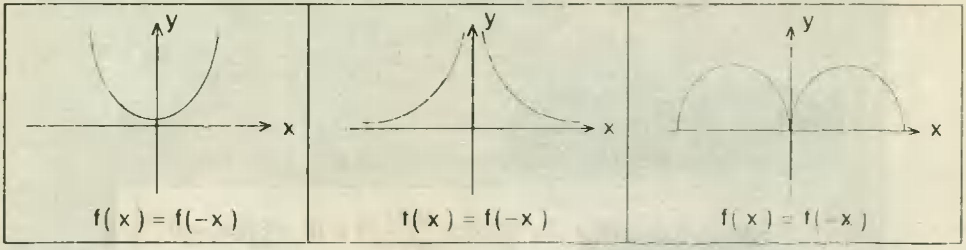
(ii) f (x) = f (-x), $\forall$ x $\in$ Dom f

La función f se define en el conjunto IR como f : IR $\to$ IR

$$\boxed{f = \{ (x,y) / y = f(x) = f(-x) ; x \in \mathrm{IR} \}}$$

Es decir :

1. La regla de correspondencia f (x) cualesquiera que sea deberá verificar : $f(x) = f(-x)$
2. Dominio (f) $\in$ IR
3. La gráfica se caracteriza por ser simétrica respecto al eje y



18.8.14 **XIV. La Función Impar.**

Definición.- Es el conjunto de pares (x,f(x)) en los cuales se verifica:

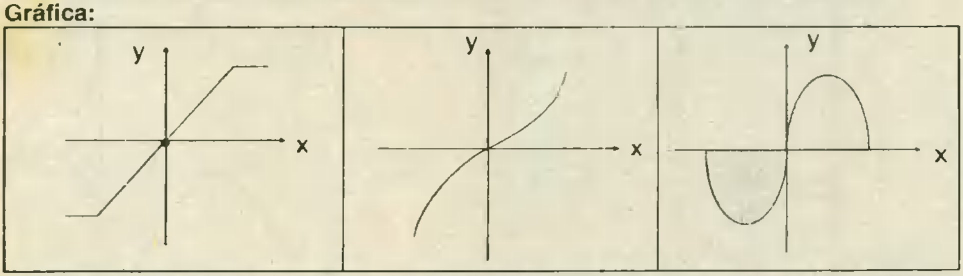
(i) Si $x \in$ Dom f $\Rightarrow$ $-x \in$ Dom f
(ii) $f(x) = -f(-x)$, $\forall\, x \in$ Dom f

La función f se define en el conjunto IR como f : IR $\rightarrow$ IR

$$\boxed{f = \{ (x,y) \,/\, y = f(x) = -f(-x) \,;\, x \in \mathrm{IR} \}}$$

Es decir:

1. La regla de correspondencia f(x) cualesquiera deberá verificar:
$f(x) = -f(-x)$
2. Dominio (f) $\in$ IR
3. **Gráfica:**



18.8.15 **XV. La Función Periódica.**

Definición.- Es el conjunto de pares (x,f(x)) en los cuales existe un número real fijo $T \neq 0$, tal que:

$$f(x+T) = f(x) \text{ para todo "x"}$$

para la que está definido f (x) y que verifica lo siguiente:

(i) $\exists\, T \in \mathrm{IR} \,/\, T \neq 0$
(ii) $(x+T) \in Df \Rightarrow x \in Df$
(iii) $f(x+T) = f(x)\ \ \forall\, x \in Df$

T se llama "período" de la función f.
La función f se define en el conjunto IR como: f : IR → IR

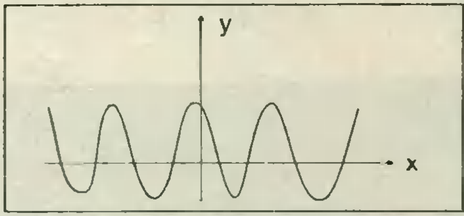
$$f = \{ (x,y) / y = f(x) = f(x+T) ; T \neq 0 ; x \in IR \}$$

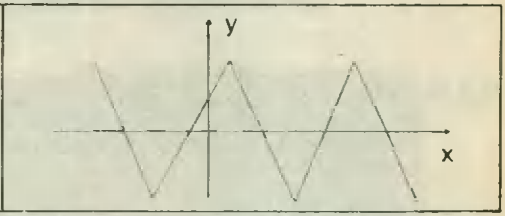
Es decir:

1 La regla de correspondencia puede ser: $f(x) = \text{senx}$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \text{Tg } x$

2 Dominio (f) ∈ IR

3 **Gráfica.-** Generalmente es aquella que tienen un carácter repetitivo.





18.8.16 **XVI. La Función Mantisa Manti (x).**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados (x,M(x)), de dominio ∈ IR, Rango ∈ [0,1 > cuya regla de correspondencia M (x) viene dada por:

$$M(x) = x - [x]$$

La función M se define en IR como: IR → [0 , 1 >

$$M = \{ (x,y) / y = M(x) = x - [\![x]\!] \; x \in IR ; y \in [0, 1> \}$$

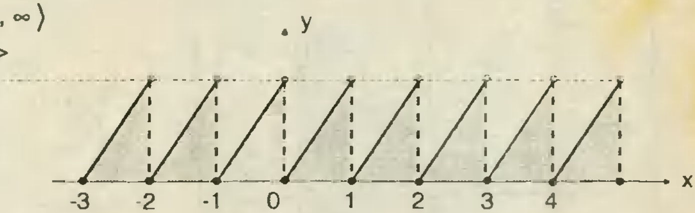
Es decir:

1 La regla de correspondencia es : $M(x) = x - [\![x]\!]$

2 Dominio (M) = $\langle -\infty, \infty \rangle$

Rango (M) = [0 , 1 >

3 **Gráfica:**



18.8.17 **XVII. La Función de Dirichlet (D(x)).**

Definición.- Es el conjunto de pares ordenados (x,D(x)), de dominio ∈ IR y Rango ∈ { 1,0} de acuerdo con la regla de correspondencia.

$$D_{(x)} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in Q \text{ (Racionales)} \\ 0 \text{ si } x \in Q' \text{ (Iracionales)} \end{cases}$$

La función f se define en el conjunto IR como: f : IR → { 1,0 }

$$f = \{ (x,y) / y = f(x) = 1 \text{ , si} \in Q \text{ , } f(x) = 0 \text{ , si } x \in IR \}$$

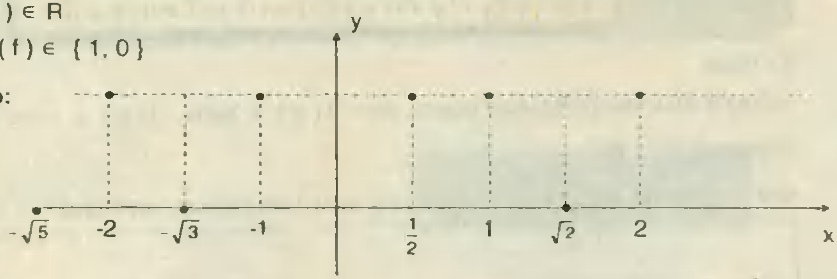
Es decir:

1. La regla de correspondencia $f(x)$ conduce a : $f(x) = 1$, si $x \in Q$, $f(x) = 0$, si $x \in Q'$

2. Dom (f) $\in$ R

   Rango (f) $\in$ { 1, 0 }

3. **Gráfico:**



18.8.18 **XVIII. La Función Exponencial de Base b.**

Definición.- Es el conjunto de pares (x, b^x) tales que la base: $b \in IR_0^+ - \{1\}$ y el dominio $x \in IR$.

La función f se define en el conjunto IR como: $f : IR \rightarrow IR_0^+$

$$\boxed{f = \{ (x,y) / y = b^x ; b \in IR_0^+ - \{1\} \wedge x \in IR \}}$$

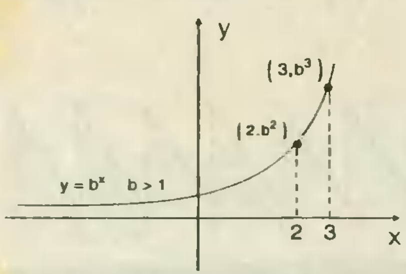
Es decir:

1 La regla de correspondencia es : $y = f(x) = b^x$

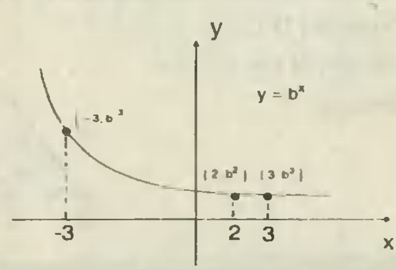
2 Dominio (f) $= \langle -\infty, \infty \rangle$

Rango (f) $= \langle 0, \infty \rangle$

3 **La gráfica** $y = b^x ; b > 1$.



La gráfica $y = b^x ; 0 < b < 1$



18.8.19 **XIX. La Función Logarítmica de Base b (b > 1).**

Definición.- Es el conjunto de pares ($x, \log_b x$) tales que la base: $b \in IR_0^+ - \{1\}$ y el dominio $x \in IR_0^+$.

La función se define en el conjunto IR como: $f : IR_0^+ \rightarrow IR$

$$\boxed{f = \{ (x,y) / y = \log_b x ; b \in IR_0^+ - \{1\} \wedge x \in IR_0^+ \}}$$

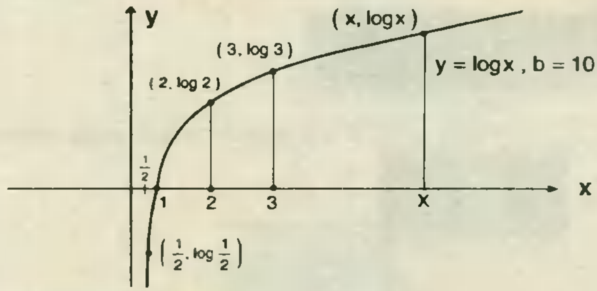
Es decir:

1. **La regla de correspondencia es:** $y = f(x) = \log_b x$

2. Dominio (f) = $\langle 0 , \infty \rangle$

   Rango (f) = $\langle -\infty , \infty \rangle$

3. La gráfica $y = \log x$ es absolutamente creciente.



18.9.1 Ejercicios y Problemas Resueltos

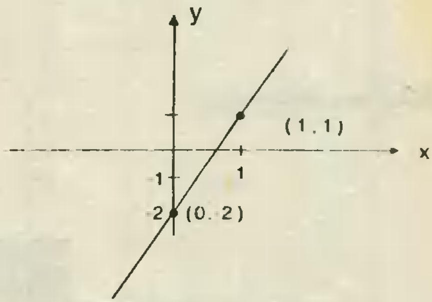
Ejemplo:

Sea la función f : $y = 3x - 2$

Hallar: a) La gráfica
b) El dominio
c) El rango

Solución:

(1°) La gráfica de esta función es:



(2°) Por definición:

El Dominio es: $\langle -\infty, \infty \rangle$ ó

$-\infty < x < \infty$

(3°) Por definición:

El Rango es: $\langle -\infty, \infty \rangle$ ó

$-\infty < x < \infty$

$-\infty < 2x < \infty$

$-\infty < 3x - 2 < \infty$

18.9.2 **Ejemplo:**

Sea F(x) la función que es el conjunto de las pares ordenados, tales que:

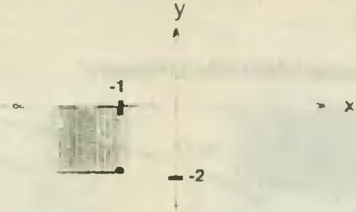
$$F(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Hallar el Dominio y Rango de dicha función.

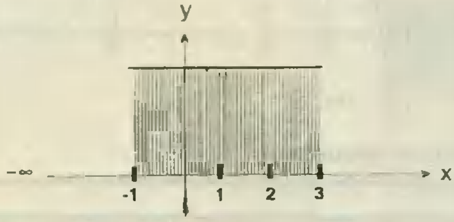
Solución:

(1°) Si realizamos el gráfico que corresponda a la función tendremos:

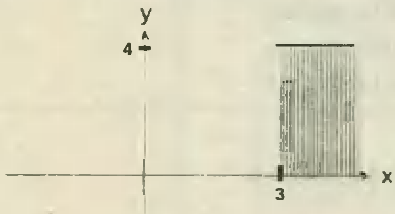
(2°) Si $\boxed{x \leq -1}$ $\Rightarrow$ F(x) = -2 , es lo que establece la 1ª regla, sobre un sistema de ejes



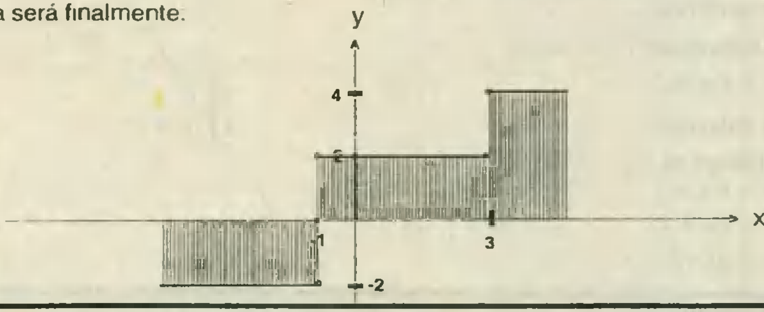
(3°) Si $\boxed{-1 < x \leq 3}$ $\Rightarrow$ F(x) = 2 , lo que establece la 2ª regla; sobre el sistema de ejes



(4°) Si $\boxed{x > 3}$ $\Rightarrow$ F(x) = 4, es lo que establece la 3ª regla, sobre el sistema de ejes



(5°) La gráfica será finalmente.



18.9.3 Ejemplo Explicativo

Para cada una de las siguientes relaciones, determine el dominio y la imagen, estableciendo si la relación en estudio es una función.

(a) A = { (-3, 1); (-1, 3), (1, 5), (3, 7) }
(b) B = { (1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 6) }
(c) C = { (-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2) }
(d) F = { (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) }

Recuerde:

La definición de función:

"Es el conjunto de parejas ordenadas de números reales (x , y) en la cual no hay dos parejas ordenadas que tengan la misma primera componente".

El conjunto de todos los valores posibles de "x" se llama dominio y el conjunto de todos los valores posibles de "y" se llama imagen o rango de la función.

Solución:

(1°) De la relación A: $D_A = \{-3, -1, 1, 3\}$ (Dominio de A)

$R_A = \{1, 3, 5, 7\}$ (Rango de A)

Debido a que todas las parejas ordenadas tienen primera componentes distintos, la relación es:

∴ $\boxed{\text{La relación A es una función}}$

(2°) De la relación B: $D_B = \{1, 2, 3, 5\}$ (Dominio de B)

$R_B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ (Rango de B)

Debido a que los pares ordenados (3, 4) y (3, 5) tienen la misma primera componente, tendremos sólo una relación.

∴ $\boxed{\text{La relación B no es una función}}$

(3°) De la relación C: $D_C = \{-2, -1, 0, 1\}$

$R_C = \{2\}$

No hay dos parejas que tengan la misma primera componente.

∴ $\boxed{\text{La relación C es una función}}$

(4°) De la relación F: $D_F = \{1\}$

$R_F = \{2, 3, 4, 5\}$

Las cuatro parejas ordenadas tienen la misma primera componente.

∴ $\boxed{\text{La relación F no es una función}}$

18.9.4 Ejemplo Explicativo:

Dados los intervalos:

$A = \langle -\infty, -4]$ $\qquad$ $B = \langle 3, \infty \rangle$

$C = \langle -6, 2 \rangle$ $\qquad$ $D = \langle 0, 4 \rangle$

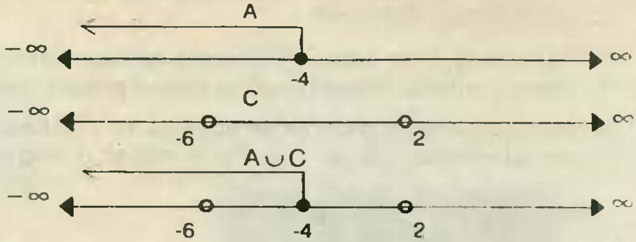
Calcular:

$(A \cup C) - (B \cap D)$

Solución:

1. Calculamos $A \cup C$:

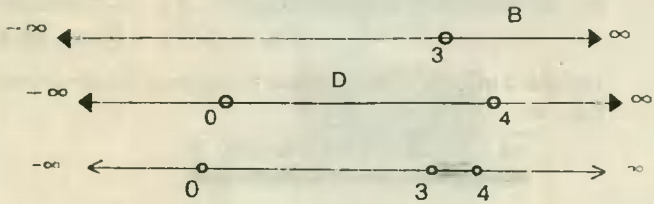
$A = \langle -\infty, -4\,]$



$C = \langle -6, 2 \rangle$

$\Rightarrow \boxed{A \cup C = \langle -\infty\,;\, 2 \rangle}$

2. Calculamos $B \cap D$:



$B = \langle -\infty, -4 \rangle$

$D = \langle 0, 4 \rangle$

$\boxed{B \cap D = \langle 3, 4 \rangle}$

3. Calculamos $(A \cup C) - (B \cap D)$:

$A \cup C = \langle -\infty, 2 \rangle$

$B \cap D = \langle 3, 4 \rangle$

$\boxed{A \cup C - B \cap D = \langle -\infty, 2 \rangle}$

18.9.5 Ejemplo Explicativo:

Sea: $f(x) = \begin{cases} 3x + \left(x^2 - 4\right)i & \text{si } -5 \le x < 0 \\ x + (2x - 1)i & 0 \le x < 5 \\ -3x + (2x + 6)i & 5 \le x < 8\ ;\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$

Calcular:

$$K = \frac{\left|f(-4)\right| - \left|\bar{f}(-3)\right|}{\left|f^{*}(6)\right| . \left|\bar{f}(4)\right| \left|7 + 2i\right|}$$

***Solución*:**

(1°) Si : $x = -4 \Rightarrow f(x) = 3x + (x^2 - 4)i$

$f(-4) = -12 + 12i$

$\boxed{\left|f(-4)\right| = \sqrt{(-12)^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}}$ .... (1).

(2°) Si : $x = -3 \Rightarrow (x) = 3x + (x^2 - 4)i$

$f(-3) = -9 + 5i$

$\bar{f}(-3) = -9 - 5i$

$$\boxed{\left|\bar{f}(-3)\right| = \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{106}} \qquad \text{.......... (2).}$$

(3°) Si : $x = 6 \quad \Rightarrow \quad f(x) = -3x + (2x + 6)i$

$f(6) = -18 + 18i$

$f^{*}(6) = 18 - 18i$

$$\boxed{\left|f^{*}(6)\right| = \sqrt{18^2 + (-18)^2} = 18\sqrt{2}} \qquad \text{.......... (3).}$$

(4°) Si : $x = 4 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + (2x - 5)i$

$f(4) = 4 + 3i$

$\bar{f}(4) = 4 - 3i$

$$\boxed{\left|\bar{f}(4)\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5} \qquad \text{.......... (4).}$$

(5°) De (1), (2), (3) y (4) en K :

$$K = \frac{\left(12\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{106}\right)}{\left(18\sqrt{2}\right)(5)\left(\sqrt{53}\right)} \text{ simplificando } \quad \therefore \quad \boxed{K = \frac{2\sqrt{2}}{5}}$$

18.9.6 Ejemplo Explicativo:

Sea la función $f : R \Rightarrow R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 10 & \text{si } x > 3 \\ 4x^2 - 16 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ 2^x + 3 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

Hallar :

a) $f(2)$ b) $f(4)$ c) $f(-1)$ d) $f(-3)$

Solución:

(1°) Como 2 pertenece al intervalo $[-2, 3]$, es válida la regla $f(x) = 4x^2 - 16$

$\Rightarrow f(2) = 4(2)^2 - 16 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{f(2) = 0}$

(2°) Como 4 pertenece al intervalo $\langle 3, \infty \rangle$, es válida la regla $f(x) = 3x - 10$

$\Rightarrow f(4) = 3(4) - 10 = 2 \quad \therefore \quad \boxed{f(4) = 2}$

(3°) Como -1 pertenece al intervalo $[-2, 3]$, es válida la regla $f(x) = 4x^2 - 16$

$\Rightarrow f(-1) = 4(-1)^2 - 16 = -12 \quad \therefore \quad \boxed{f(-1) = -12}$

(4°) Como -3 pertenece al intervalo $\langle -\infty, -2 \rangle$, es válida la regla $f(x) = 2^x + 3$

$$\Rightarrow \boxed{f(-3) = 2^{-3} + 3 = \frac{25}{3} \quad \therefore \quad f(-3) = \frac{25}{3}}$$

18.9.7 **Ejemplo Explicativo:**

Sean los conjuntos:

A = { a, b, c } y B = { 3, 4 }

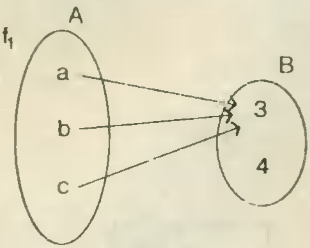
¿Cuántos y cuáles son las funciones de A en B que existen?

Solución:

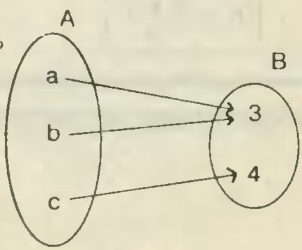
(1°) Representando con Diagramas todas las funciones posibles de A en B se tendra asignando a cada elemento de A el 3 ó el 4 de B.

(2°)

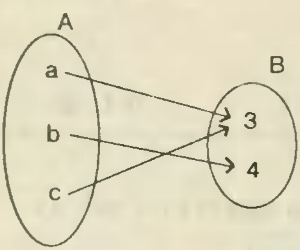
f_1



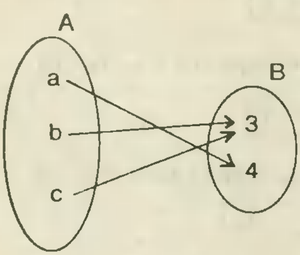
f_2



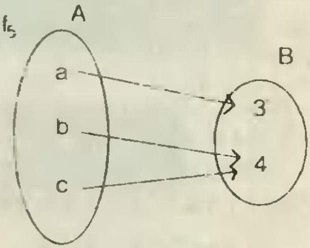
f_3



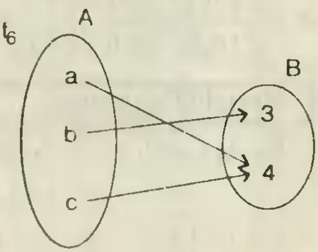
f_4



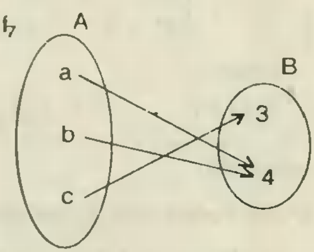
f_5



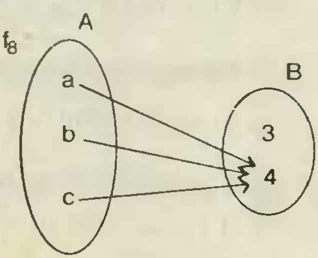
f_6



f_7



f_8

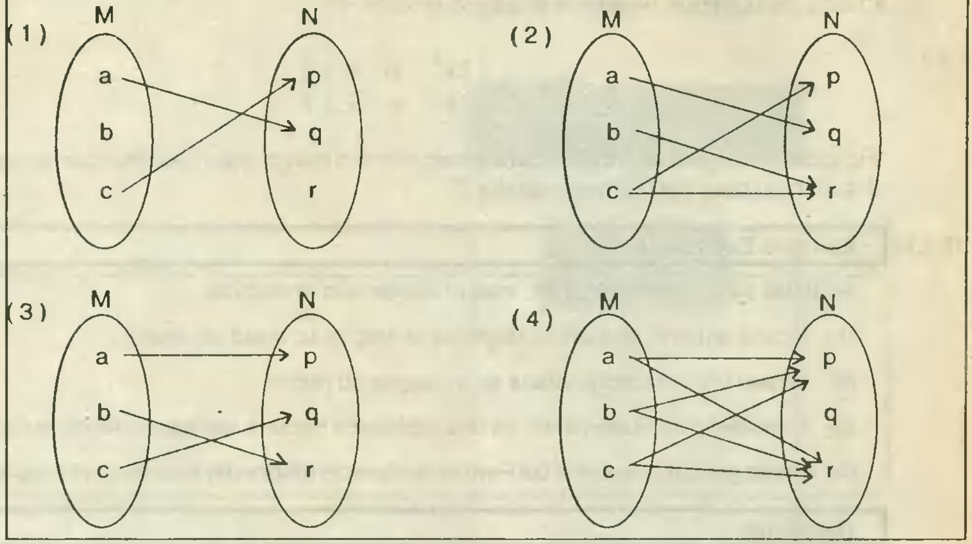


(3°) Finalmente

∴ EXISTEN OCHO FUNCIONES POSIBLES

18.9.8 **Ejemplo Explicativo:**

En los diagramas que siguen, indicar aquella que define una función de M = { a, b, c } en:
N = { p, q, r }



Solución:

(1) **No define función.-** El elemento de $b \in M$ carece de imagen en N

(2) **No define función.-** El elemento $c \in M$ le corresponde dos imágenes, no cumple con la definición de función.

(3) **Si define una función.-** A un mismo elemento del codominio puede corresponder más de un elemento del dominio.

(4) **No define función.-** A un mismo elemento del dominio $a \in M$ le corresponde los elementos en el codomino x , $z \in N$.

18.9.9 **Ejemplo Explicativo:**

Proporcionar la regla de correspondencia para definir las siguientes funciones:

1.- A cada número real asignarle el triple de su cuadrado.

2.- A cada número real positivo asignarle 5, al número cero se le asigna 3, y a cada número real negativo asignarle -6.

3.- A cada número real mayor que 7, le corresponde el doble del cubo y a los otros números reales le corresponda -2.

Solución:

(1) $f(x) = 3x^2$; $x \in IR$.

"La función que asigna a cada número real el triple de su cuadrado".

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x > 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ -6 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

"Función que asigna a todo número positivo el valor 5 ; al número real cero le asigna 3 y a todos los números negativos le asigna el valor -6".

(3)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 & \text{si} \quad x > 7 \\ -2 & \text{si} \quad x \leq 7 \end{cases}$$

"Función que origina el doble del cubo a todo número mayor que 7, asimismo asigna el valor -2 a todo número real menor o igual a 7".

18.9.10 **Ejemplo Explicativo:**

Sean las siguientes funciones, indicar cuáles son inyectivas:

(1) A cada alumno de cierto colegio se le asigna su edad en años.

(2) A cada universidad peruana se le asigna su rector.

(3) A los libros de matemática en una biblioteca hacerle corresponder su autor.

(4) A cada gobierno regional del Perú se le hace corresponder su presidente regional.

***Recuerde*:**

Sea f una función de A en B.
$\Rightarrow$ f será **inyectiva** si a elementos distintos de B corresponden

***Solución*:**

(1) Varios alumnos pueden tener la misma edad, por lo que esta función **NO ES INYECTIVA**

(2) Un Rector no esta a cargo de más de una universidad , por lo que esta función **ES INYECTIVA**.

(3) Dos libros distintos pueden ser del mismo autor, por lo que esta función **NO ES INYECTIVA**

(4) Un presidente regional preside sólo una región, por lo que esta función **ES INYECTIVA.**

18.9.11 **Ejemplo Explicativo:**

Sean: $M = [-2, 2]$

$N = [1, 14]$

$P = [-20, 0]$

Además:

$f_1 : M \to \mathbb{R}$

$f_2 : N \to \mathbb{R}$

$f_3 : P \to \mathbb{R}$

Definidas así: A cada número le corresponde su cuadrado ¿Cuál de las funciones son inyectivas?

Solución:

(1°) La función f_1 : M → R **NO ES INYECTIVA** porque:

$f(x) = f(-x)$;

$x^2 = (-x)^2$

Existen elementos distintos del dominio que tienen la misma imagen.

(2°) La función f_2 : N → R **ES INYECTIVA** porque los cuadrados se números positivos distintos son distintos.

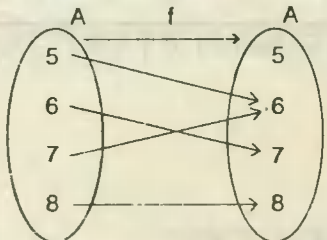
(3°) La función f_3 : C → R **ES INYECTIVA** porque los cuadrados de números negativos distintos son distintos.

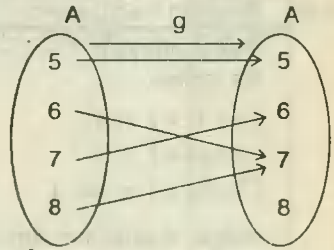
18.9.12 **Ejemplo Explicativo:**

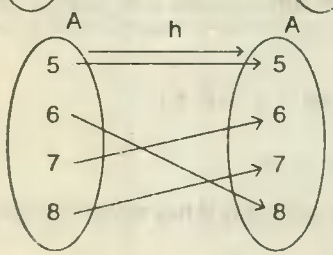
Sea: A = { 5, 6, 7, 8 } y las funciones:

$f : A \to A$; $g : A \to A$ y $h : A \to A$

Definidas por los Diagramas siguientes:





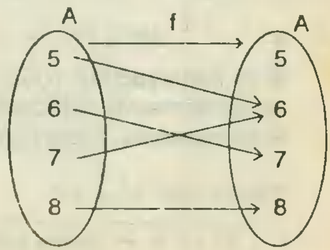


¿Cuál de estas funciones tiene función recíproca?

Recuerde:

Para que una función tenga recíproca, la función deberá ser sobreyectiva e inyectiva.

Solución:



(1°) Haciendo las observaciones a cada Diagrama:

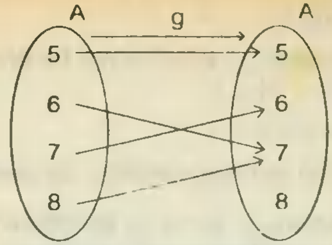
(2°) f no es sobreyectiva (Una imágen carece de elemento en el dominio.)

f no es inyectiva (A una imágen le corresponde dos elementos en el dominio.)

∴ $\boxed{\text{La función no tiene recíproca.}}$

(3°) g no es sobreyectiva ($Rg \neq A$).

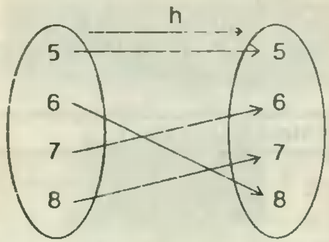
∴ $\boxed{\text{La función no tiene recíproca}}$



(4°) Es sobreyectiva

Es inyectiva

∴ $\boxed{\text{La función tiene recíproca}}$



18.9.13 Ejemplo Explicativo:

Sea el intervalo : $I = [\,-6, 6\,]$ y sean las funciones f , g y h de $I \to I$ definidas por las reglas :

(1) $f(x) = x^2$

(2) $g(x) = x^3$

(3) $h(x) = \text{sen}\, x$

Indicar si estas funciones tienen o no función recíproca.

***Solución*:**

De acuerdo al intervalo $I = [-6, 6]$

(1) $f : I \to I$, con $f(x) = x^2$

No es sobreyectiva, puesto que hay elementos del rango que carecen de pre-imagen en el dominio.

No es inyectiva, puesto que hay elementos del rango que le corresponden dos elementos del dominio distintos.

∴ $\boxed{f(x) = x^2 \text{ no tiene función recíproca}}$

(2) $g : I \to I$, con $g(x) = x^3$

Si es sobreyectiva, puesto que todos los elementos del rango son los correspondientes de los elementos del dominio.

Si es inyectiva, puesto que para $x_1 \neq x_2$

Implica que $x_1^3 \neq x_2^3$

∴ $\boxed{g(x) = x^3 \text{ posee función inversa}}$

(3) $h: I \rightarrow I$, con $h(x) = \text{sen}x$

Si es **inyectiva**, puesto que todos los elementos del dominio tienen correspondientes distintos en el rango.

No es sobreyectiva , no todos los elementos del rango son los correspondientes de los elementos del dominio.

$\therefore$ $\boxed{h(x) = \text{sen}x\text{; carece de función reciproca}}$

18.9.14 **Ejemplo Explicativo:**

Sea $f: R \rightarrow R$ definida por la regla de correspondencia : $f(x) = 10x^3 - 11$, siendo f inyectiva y sobreyectiva. Proporcionar la regla de correspondencia que defina f^{-1}.

Solución:

(1°) Expresando la regla dada como:

$$y = 10x^3 - 11 \quad \Rightarrow \quad y + 11 = 10x^3$$

$$\frac{y+11}{10} = x^3 \quad ; \quad x = \sqrt[3]{\frac{y+11}{10}} \quad ;$$

(2°) Permutando x por y

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+11}{10}}$$

(3°) La función recíproca será aquella cuya regla de correspondencia es:

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+11}{10}}$$

18.9.15 **Ejemplo Explicativo:**

Cuál es la pendiente de la función :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si} \quad 1 \leq x < 4 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

en los puntos cuya abcisa es $-\frac{3}{2}$; 3 y 5

Solución:

(1°) La derivada de la función así definida será

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ \frac{1}{2}(25+x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) & \text{si} \quad 1\leq x<4 \\ 2x-2 & \text{si} \quad 4\leq x<6 \end{cases}$$

(2°) Si $x = -\dfrac{3}{2}$ es válida la regla: $f(x) = -x^2$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x$$

$$\Rightarrow f'(-\frac{3}{2}) = -2(-\frac{3}{2}) = 3$$

$\therefore$ $\boxed{f'(-\frac{3}{2}) = 3}$ (pendiente en $x = \frac{3}{2}$)

(3°) Si x = 3 es válida la regla: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$$\Rightarrow f'(3) = -x(25 - x^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow f'(3) = -3(25 - 9)^{-1/2} = -3(16)^{-1/2}$$

$\therefore$ $\boxed{f'(3) = -\frac{3}{4}}$ (pendiente en x = 3)

(4°) Si x = 5 es válida la regla $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - 2$$

$$\Rightarrow f'(5) = 2(5) - 2 = 10 - 2$$

$\therefore$ $\boxed{f'(5) = 8 \quad \text{(pendiente en } x = 5\text{)}}$

18.9.16 **Ejemplo Explicativo:**

Hallar el dominio y rango de la función cuya regla de correspondencia viene dado por :

$$F(x) = \frac{3x^2 - 6x}{|x - 2|}$$

***Solución*:**

(1°) La regla dada se escribe como:

$$F(x) = \frac{3x(x-2)}{|x-2|} \quad \wedge \quad x \neq 2$$

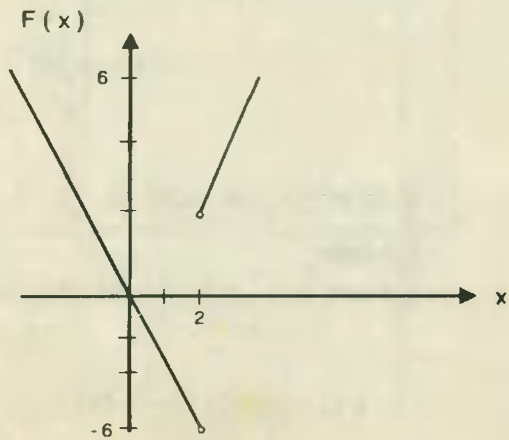
(2°) Por definición de valor absoluto:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si} \quad x - 2 > 0 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x - 2 < 0 \end{cases}$$

(3°) La regla de correspondencia será:

$$F(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x > 2 \quad \wedge \quad x \neq 2 \\ -3x & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Dominio} = x \in \mathbb{R} - \{2\}}$



(4°) Asimismo para el Rango:

$$F^{*}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad x > 2 \\ -\dfrac{x}{3} & \text{si} \quad x > -6 \end{cases}$$

(5°) Rango $= \langle -6, \infty \rangle \cup \langle 6, \infty \rangle$

$$\therefore \boxed{\text{Rango} = \langle -6, \infty \rangle - \{6\}}$$

18.9.17 **Ejemplo Explicativo:**

Dado los conjuntos:

$A = \{ x \in Z \; / -12 < x + 6 < 20 \}$

$B = \{ x \in Z \; / \; 100 < x^2 \leq 400 \}$

¿Cuántos elementos tiene el conjunto A x B?

Solución:

(1°) De cada conjunto :

$$A = \{ x \in Z / -18 < x < 14 \}$$

$$B = \{ x \in Z / -20 \leq x < -10 \vee 10 < x \leq 20 \}$$

(2°) Para facilitar los cálculos hacemos que:

$$A = \{ x \in Z / x \in [-17, 13] \}$$

$$B = \{ x \in Z / x \in [-20, -11] \cup [9, 20] \}$$

$$\Rightarrow \quad n(A \times B) = n_{(A)} \times n_{(B)} \; .... \; (1).$$

(3°) Como: $n_{(A)} = 13 - (-18) = 31$

$$n_{(B)} = -11 - (-21) + 20 - (8) = 22$$

$$\Rightarrow \boxed{n(A \times B) = 31 \times 22 = 682}$$

18.9.18 **Ejemplo Explicativo:**

Sea la función f, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \quad , & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 2x + 1, & \text{si} \quad 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

Si : $1 \leq x < \dfrac{3}{2}$, calcular el valor de : $f(2x - 1) - f(2x^2)$

Solución:

(1°) Para obtener la suma: $f(2x-1)-f(2x^2)$

partimos de la limitación : $1 \leq x < \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \; 2 \le 2x < 3 \; \Rightarrow \; \boxed{1 \le 2x - 1 < 2}$

$\Rightarrow \boxed{f(2x-1) = (2x-1)^2}$ **1ª Regla.**

(2°) Partimos de la misma limitación: $1 \le x < \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \; 1 \le x^2 < \dfrac{9}{4} \; \Rightarrow \; \boxed{2 \le 2x^2 < \dfrac{9}{2}}$

$\Rightarrow \; f(2x^2) = 2(2x^2) + 1$ **2ª Regla**

(3°) Luego de tener las definiciones: $\boxed{2x - 1 \in [\,1, 2\,\rangle \;\; y \;\; 2x^2 \in \left\langle 2, \dfrac{9}{2} \right\rangle}$

$\Rightarrow \; f(2x-1) - f(2x^2) = (2x-1)^2 - 2(2x^2) \;\;\; \Rightarrow \;\; 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2$

$\therefore \; \boxed{f(2x-1) - f(2x^2) = -4x}$

18.9.19 **Ejemplo Explicativo:**

Indicar el dominio de la función cuya regla es:

$F(x) = \sqrt{x(x-5)}$

Recuerde:

El dominio de la función raíz cuadrada:

Sea $F(x) = \sqrt{G(x)} \;\; \Rightarrow \;\; DF : G(x) \ge 0$

Solución:

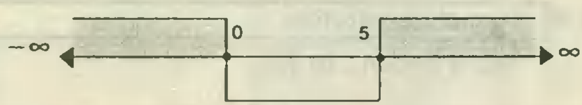
(1°) Por definición para la regla de correspondencia raíz cuadrada:

$Df: \; x(x-5) \ge 0$

(2°) Resolviendo la inecuación obtenida mediante la regla de áreas:

$\Rightarrow \;\; Df : x = 0, \; x = 5;$

$\Rightarrow \;\; Df :$



$\therefore \; \boxed{Df : \langle -\infty, 0\,] \cup [\,5, \infty \rangle}$

18.9.20 **Ejemplo Explicativo:**

Sea la función: $f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

Hallar el dominio y la regla de correspondencia.

Recuerde:

(1°) El dominio de una función de elementos discretos, es el conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados.

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición de Dominio:

$$\boxed{Df = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$$

(2°) Para obtener la regla de correspondencia hacemos lo siguiente:

Si : $x = 0 \Rightarrow 0 + 1 = 1$

Si : $x = 1 \Rightarrow 2(1) + 1 = 3$

Si : $x = 2 \Rightarrow 2(2) + 1 = 5$

Si : $x = 3 \Rightarrow 2(3) + 1 = 7$

Si : $x = x \Rightarrow 2(x) + 1 = f(n)$

$$\therefore \boxed{f(x) = 2x + 1}$$

18.9.21 Ejemplo Explicativo

Escribir el conjunto de pares ordenados que constituye la función **f**, si **f** tiene como dominio $\left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{2}{3}; \frac{5}{2}; 1 + \sqrt{2}\right\}$ y por regla de correspondencia:

$$f(x) = x^2 - 10x$$

Solución:

(1°) De acuerdo a lo establecido:

si : $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}}$$

(2°) Si: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 10(0) = 0$

$$\boxed{f(0) = 0}$$

(3°) Si : $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - 10\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{56}{9}$

$$\boxed{f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{56}{9}}$$

(4°) Si : $x = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 10\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{75}{4}$

$$\boxed{f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{75}{4}}$$

(5°) Si : $x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow f\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 - 10\left(1+\sqrt{2}\right)$

$$= 3 + 2\sqrt{2} - 10 - 10\sqrt{2}$$

$$= -7 - 8\sqrt{2}$$

(6°) La función será: $f\left(1+\sqrt{2}\right) = -7 - 8\sqrt{2}$

$$\therefore \boxed{f = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right), (0,0), \left(\frac{2}{3}, -\frac{56}{9}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{75}{4}\right), \left(1+\sqrt{2}, -7-8\sqrt{2}\right)\right\}}$$

18.9.22 Ejemplo Explicativo

Si f es la función:

$$f = \left\{(-1, 4), (0, 2), (1, 4)\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right), \left(2; \sqrt{2}\right)\right\}$$

Encontrar:

$$E = f(-1) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la notación establecida f (−1) es la segunda componente del par que tiene por primera componente a − 1

$\Rightarrow f(-1) = 4$

(2°) De modo análogo:

$\Rightarrow f(1) = 4$

$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

(3°) Determinamos que:

$E = f(-1) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow E = 4 + 4 - \frac{2}{3} \qquad \therefore \boxed{E = \frac{22}{3}}$

18.9.23 Ejemplo Explicativo

Si f es la función que tiene como dominio el intervalo cerrado [−4, 5] y como regla de correspondencia:

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ si } x \in [-4, 1\rangle$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 5 \text{ si } x \in [1, 5]$$

Encontrar: $f(-2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{3}{2}\right)$

Solución:

(1°) Se trata de la función con regla dual que se caracteriza por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si } x\in[-4,1\rangle \\ \frac{1}{2}x+5 & \text{si } x\in[1,5] \end{cases}$$

(2°) Obtenemos las imágenes

$f(-2) \Leftrightarrow x\in[-4,1\rangle$ es decir la 1^a Regla

$\Rightarrow f(-2) = (-2)^2-3(-2) = 4+6 = 10$

$\therefore \boxed{f(-2) = 10}$

(3°) Análogamente:

$\Rightarrow f(0) \Leftrightarrow x\in[-4,1\rangle$ es decir la 1^a regla

$\Rightarrow f(0)=(0)^2-3(0)=0 \quad \therefore \boxed{f(0)=0}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x\in[-4,1\rangle$ es decir la 1^a regla

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4} \quad \therefore \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow f(1) \Leftrightarrow x\in[1,5]$ es decir la 2^a Regla

$\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}(1)+5=\frac{11}{2} \quad \therefore \boxed{f(1)=\frac{11}{2}}$

$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x\in[1,5]$ es decir la 2^a Regla

$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)+5=\frac{23}{4} \quad \therefore \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{23}{4}}$

18.9.24 Ejemplo Explicativo

Si f es la función que tiene con $\mathbb{R}^2$ dominio y como regla de correspondencia:

$$f(x,y) = xy$$

Es decir: $f = \left\{((x,y), xy) \,/\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Escribir los pares ordenados de elementos de f que tienen como primer elemento.

a) $(7, 2)$

b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$

c) $\left(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}\right)$

Solución:

(1°) De acuerdo a la regla de correspondencia:

$$f(x, y) = xy$$

$$\Rightarrow \quad f(7, 2) = 7 \times 2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}\right) = \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{5}{6}}$$

(2°) Los pares de la función serán:

$$\therefore \quad \boxed{f = \left\{((7, 2), 14), \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right), \frac{1}{21}\right), \left(\left(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}\right), 5^{\frac{5}{6}}\right)\right\}}$$

18.9.25 Ejemplo Explicativo

Exhibir el conjunto de pares ordenados que constituye la función f, si f tiene como dominio { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } y como regla de correspondencia $f(x) = x^2$

Solución:

(1°) Por definición de dominio

$$\Rightarrow \quad f = \{(1,1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$$

(2°) Cada par relaciona a un elemento del dominio y 2ª componente, mediante el cuadrado establecido por la regla de correspondencia.

18.9.26 Ejemplo Explicativo

Hallar el conjunto de pares ordenados que constituye la función f, si su dominio es el conjunto { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } y como regla de correspondencia:

$$f(x) = x^2 - \frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición de función:

$$f(1) = 1^2 - \frac{7}{24}(1-1)(1-2)(1-3)(1-5)$$

$$\boxed{f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad (1, 1)}$$

$$f(2) = 2^2 - \frac{7}{24}(2-1)(2-2)(2-3)(2-5)$$

$$\boxed{f(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad (2, 4)}$$

$$f(3) = 3^2 - \frac{7}{24}(3-1)(3-2)(3-3)(3-5)$$

$$\boxed{f(3) = 9 \quad \Rightarrow \quad (3, 9)}$$

$$f(4) = 4^2 - \frac{7}{24}(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)$$

$$\boxed{f(4) = \frac{71}{4}} \quad \Rightarrow \quad \left(4, \frac{71}{4}\right)$$

(2°) La función será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{ (1, 1), (2, 4), (3, 9), \left(4, \frac{71}{4}\right) \right\}}$$

18.9.27 Ejemplo Explicativo

Determinar el rango de la función cuya regla de correspondencia viene dado por:

$$f(x) = 3x^2 + 24x - 79, \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

(1°) Para la regla de correspondencia cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; x \in \mathbb{R}$$

El rango se determina mediante el teorema siguiente:

$$\text{Rango } f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty \right\rangle \quad \text{si } a > 0$$

$$\text{Rango } f = \left\langle -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right] \quad \text{si } a < 0$$

(2°) El rango se lee sobre el eje vertical de una gráfica x, y

Solución:

(1°) Por ser el dominio $\mathbb{R}$ se tendrá:

$$a = 3, \; b = 24, \; x = -\frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{24}{2(3)} = -4$$

(2°) Obtenemos $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, $a = 3 > 0$

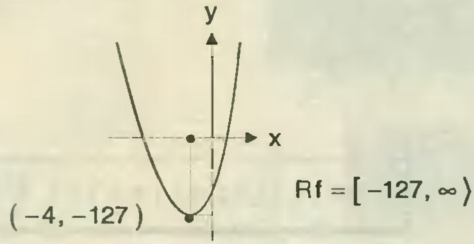
$$\Rightarrow \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-4) = 3(-4)^2 + 24(-4) - 79$$

$$= f(-4) = 48 - 96 - 79 \quad \Rightarrow \quad f(-4) = -127$$

(3°) El rango será:

$$\boxed{Rf = [-127, \infty\rangle}$$

(4°) A modo de ilustración el punto extremo: (– 4, – 127) será:



18.9.28 Ejemplo Explicativo

Determinar el rango de la función cuya regla de correspondencia viene dado por:

$$f(x) = -7x^2 - 42x + 39, \; x \in \mathbb{R}$$

Recuerde:

(1°) Si la regla de correspondencia es: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a < 0$

$$\Rightarrow \quad Rf = \left\langle -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$$

(2°) El rango se lee sobre el eje vertical de la gráfica de una función al sistema x - y.

Solución:

(1°) Como: $a = -7$, $b = -42$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-42}{2(-7)} = -3$$

(2°) Obtenemos $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$$\Rightarrow \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-3) = -7(-3)^2 - 42(-3) + 39$$

$$f(-3) = -7(9) + 42(3) + 39$$

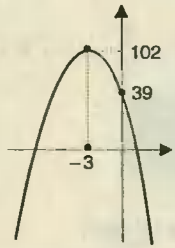
$$f(-3) = -63 + 126 + 39$$

$$f(-3) = 102$$

(3°) Por ser $a = -7 < 0$, el rango será:

$\therefore$ $\boxed{Rf = \langle -\infty, 102]}$

(4°) Geométricamente, el punto extremo (− 3,102) será:



18.9.29 **Ejemplo Explicativo**

Hallar el dominio de la función cuya regla es:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 324} - \sqrt{x^2 - 81}$$

Solución:

(1°) Por definición del dominio de la regla de correspondencia de la función raíz cuadrada:

$$Df : \begin{cases} -x^2 + 324 \geq 0 \text{ .... } (1). \\ x^2 - 81 \geq 0 \text{ .... } (2). \end{cases}$$

(2°) Resolviendo el sistema obtenido de (1): $x^2 - 324 \leq 0$

$\Rightarrow$ $(x - 8)(x + 8) \leq 0$; mediante la regla de áreas

$\Rightarrow$ $\boxed{-18 \leq x \leq 18}$ .... (3).

(3°) De (2): $x^2 - 81 \geq 0$; mediante la regla de áreas.

$\Rightarrow$ $(x - 9)(x + 9) \geq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \in \langle -\infty, -9] \cup [9, \infty \rangle}$ .... (4).

(4°) De (3) y (4) la intersección será:

$\therefore$ $\boxed{x \in [-18, -9] \cup [9, 18]}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO: LA FUNCION

(1) Si la función siguiente está definida:

$$f = \{ (3, 5), (4, \frac{a}{2}), (5, 2), (4, 9), (3, \frac{b}{4}) \}$$

Calcular: $a + b$

Rpta: 38

(2) Si f es una función de variable real tal que:

$$f\left(\sqrt{x-10}\right) = x^2 + 3x - \frac{51}{4}, \text{ obtener } \sqrt{f\left(\sqrt{2x-5}\right)}$$

Rpta: $\sqrt{2x-5} + \frac{23}{2}$

(3) Calcular el valor de: $a + b$ para que la siguiente función sea constante:

$$f = \left\{ \left(2, \frac{3a+1}{4}\right), (5, a+7), \left(9, \frac{7b-3}{2}\right), (11, 3b-5) \right\}$$

Rpta: - 34

(4) Calcular: $a + b + c + d + e$, sabiendo que la función siguiente es la función identidad.

$$f = \left\{ (4, a-11), (3, \log b), \left(8, 2^c\right), (125, e+80) \right\}$$

Rpta: 1063

(5) Calcular: $p + q + r$, sabiendo que la función siguiente es lineal

$$f = \{ (1, 24), (2, 27), (3, 30), (4, p), (5, q), (6, r) \}$$

Rpta: 108

(6) La regla de correspondencia de cierta función lineal mónica es:

$$f(x) = \left(\frac{20b+1}{7} - 3\right)x^3 + \left(\frac{m-3}{7} - 2\right)x^2 + \left(\frac{q-8}{6} - 5\right)x + m$$

Calcular: $m + q + b$

Rpta: 62

(7) Para que f sea la función diagonal:

$$f = \{ (a+5, 9-a), (b+7, 11-b), (6-\frac{1}{p}, 8+\frac{1}{p}) $$

será necesario que a, b y p sean:

Rpta: $a = b = 2, p = -1$

(8) Si los pares ordenados:

(3, - 1) y (1,3) pertenecen a la relación:

$\mathbb{R} = \{ (x, y) / y = ax + b \}$

Calcular a - b

Rpta: -7

(9) Dada las funciones:

$$f(x) = [\![2x]\!] \text{ y } g(x) = 2[\![x]\!] \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Hallar el rango de f - g

Rpta: $\langle -1, 2 \rangle$

(10) Sea la función lineal

$$f\colon A \to B = \left\{ (x,y)/f(x) = \left(\frac{7a+9}{3a-11} - 2 \right) x^2 + (a+b)x + \frac{b}{4} \right\}$$

cuya gráfica corta al eje "y" en 5

Calcular a y b

Rpta: a = -31 , b = 20

(11) Hallar el rango de la función cuya regla es:

$$f(x) = x^2 - 10x + 21$$

sabiendo que el dominio es el $x \in [3, 7]$

Rpta: $Rf \in [-4, 0]$

(12) Si: $f(x) = -x^2 + 8x + 1, \quad x \in \langle 3, 7 \rangle$

Hallar el rango de la función establecida por dicha regla

Rpta: < 8, 17]

(13) Si $f(x) = -x^2 + 8x + 1, \quad x \in \langle 0, 7 \rangle$

Hallar el rango de la función

Rpta: $\langle 1, 17]$

(14) Dada las funciones reales de variable real:

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$g(x) = -10x^2 + 40x - 30$$ y los conjuntos

$$A = \{ x \in \mathbb{R}\ f(x) > 0 \}, \quad B = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0 \}$$

Calcular: $(A \cup B)'$

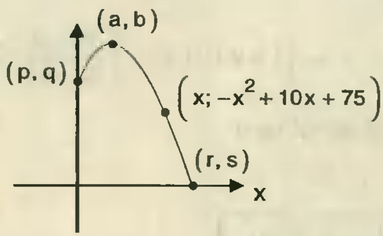
Rpta: $[-1, 1] \quad [3, 5]$

(15) Calcular el dominio de función cuya regla viene dado por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-x-1}}{[\![-3x+1]\!]-7}$$

Rpta: $\left\langle -\infty, -2\tfrac{1}{3} \right\rangle \cup \langle -2, -1 \rangle$

(16) Indicar el rango y dominio de la función cuya gráfica y regla es el sgte:



Rpta: $D_f = [0, 15]$

$R_f = [0, 100]$

(17) Se define la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -24 < x < 1 \\ -209 + x^2 & \text{si } 1 \leq x < 40 \end{cases}$$

Calcular: $f(3x-4) - f(15-3x)$ si $x \in \left\langle -6, \tfrac{4}{3} \right\rangle$

Rpta: $66x$

(18) Sean:

$$f: A \to B = \{(2,5),(3,4),(4,1),(5,0)\}$$

$$g: C \to D = \{(0,1),(1,2),(2,1)$$

Calcular: $f + g + fg$

Rpta: $\{(2, 11)\}$

(19) Si: $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \langle -1, 7]$ y

$g(x) = 2x+1$; $x \in [1, \infty\rangle$

Determinar: $(f \circ g)(x)$

Rpta: $4x^2$, $x \in [1, 3]$

(20) Si: $f(x) = -1 + x^2$ y

$g(x) = 2x - b$ con $p \in \mathbb{R}$

Calcular la suma de los valores de "b" para los que se cumple:

$$(f o g)\left(\tfrac{1}{2}\right) = (g o f)(a+1)$$

Rpta: - 5

CAPITULO 19

EL LOGARITMO

19.1 INTRODUCCION:

Sea la potenciación: $3^7 = 2187$

Sus términos son:

$$\underset{\text{Base}}{3}^{\overset{\text{Exponente}}{7}} = \underset{\text{Potencia}}{2187}$$

Aceptemos en adelante lo siguiente:

$3^7 = 2187$

- 7 → Exponente o Logaritmo
- 2187 → Potencia o Antilogaritmo
- 3 → Base del exponente o Base del logaritmo

Concluimos que el **logaritmo es sencillamente un exponente**, por lo cual tiene una base y determina una potenciación, en consecuencia:

$$3^7 = 2\,187 \quad \Rightarrow \quad 7 = \log_3 2187$$

19.2 Definición:

Sea: $b^x = N$

$$\Rightarrow \; x = \log_b N \;; \quad N > 0 \,,\; b > 0 \,,\; b \neq 1 \,,\; x \in \mathbb{R}$$

"x" es el exponente o logaritmo que teniendo a "b" como base fija permite determinar un tercer elemento "N" o antilogaritmo."

19.3 ALGEBRA DEL LOGARITMO

19.3.1 LOGARITMO DE UNA MULTIPLICACIÓN

$$\log_b (A\,B) = \log_b A + \log_b B \qquad \text{si: } A > 0 \;\wedge\; B > 0$$

"El logaritmo de una multiplicación es equivalente a la suma de los logaritmos de cada uno de sus factores."

19.3.2 LOGARITMO DE UNA DIVISIÓN

$$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B\ , \quad A > 0\ ,\ B > 0$$

"El logaritmo de una división es equivalente a la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador."

19.3.3 LOGARITMO DE UNA POTENCIACIÓN

$$\log_b (A^m) = m \log_b A \quad ; \quad A > 0\ ,\ b > 0\ ,\ b \neq 1$$

"El logaritmo de una potenciación es equivalente a multiplicar el exponente por el logartimo de la base de la potenciación."

19.4.4 LOGARITMO DE UNA RADICACIÓN

$$\log_b \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m}\log_b A \ ; \quad m \neq 0$$

"El logaritmo de una radicación es equivalente a dividir el logaritmo del subradical entre el indice de radical."

19.4.5 LOGARITMO DE UNA SUMA O LOGARITMO DE LEONELLI

$$\log (a+b) = \log\left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

19.4.6 LOGARITMO DE LA UNIDAD

$$\log_b 1 = 0\ ,\quad b \text{ e } \mathbb{R}^+ - \{0, 1\}$$

19.4.7 LOGARITMO DE CERO

$$\log_b 0 \in \phi \ ; \quad b \in \mathbb{R}^+ - \{0, 1\}$$

Demostraciones:

1°) **Sean:** $b^x = A$

$b^y = B$

2°) **Logarítmicamente se tendrá**

Si : $b^x = A \Rightarrow x = \log_b A$ ....(1)

$b^y = B \Rightarrow y = \log_b B$ ....(2)

Con: $b^{x+y} = AB \Rightarrow x + y = \log_b (AB)$ ....(3)

$b^{x-y} = \dfrac{A}{B} \Rightarrow x - y = \log_b$ ....(4)

3°) Sustituyendo (1) y (2) sobre (3)

$$\Rightarrow \; x + y = \log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$$

(Logaritmo de una multiplicación)

$$\Rightarrow \; x - y = \log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$$

(Logaritmo de una división)

4°) Aceptamos que:

$\log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$;

$\Rightarrow$ **con A = B**

$\Rightarrow \; \log_b(A^2) = \log_b A + \log_b A$

$\Rightarrow \; \boxed{\log_b(A^2) = 2\log_b A}$

(5°) Análogamente para tres factores

$\log_b(ABC) = \log_b A + \log_b B + \log_b C$; **con A = B = C**

$\Rightarrow \; \log(AAA) = \log_b A + \log_b A + \log_b A$

$\Rightarrow \; \boxed{\log_b(A^3) = 3\log_b A}$

Concluimos que:

$$\boxed{\log_b(A^n) = n\log_b A}$$

19.5 PROPIEDADES ADICIONALES

(I) $$\log_b B = \frac{\log B}{\log b} \quad ; \quad \log b \neq 0$$

Semánticamente:

El logaritmo de "B" en base "b" es equivalente a dividir el logaritmo decimal de B entre el logaritmo decimal de la base b.

Demostración:

Sea: $b^x = B$

$\Rightarrow$ logarítmicamente: $x = \log_b B$ ....(1)

$\Rightarrow$ tomando logaritmos decimales : $\log(b^x) = \log(B)$

$\Rightarrow$ Realizando las sentencias : $x\log b = \log B$

$\Rightarrow$ Aislando x : $x = \dfrac{\log B}{\log b}$ ....(2)

$\Rightarrow$ de (1) y (2) : $\log_b B = \dfrac{\log B}{\log b}$

(II) $\text{Log}_N N = 1 \quad ; \quad N > 0 \ , \ N \neq 1$

Semánticamente:
El logaritmo de N en base N es equivalente a la unidad, $N > 0$, $N \neq 1$

(1°) **Demostración:**
Sea: $N^1 = N$; por definición de logaritmo
$\Rightarrow \quad 1 = \log_N N$

(2°) **Demostración:**
Sea: $\log_N N$

$\Rightarrow$ Mediante la propiedad (I)

$$\Rightarrow \log_N N = \frac{\log N}{\log N} = 1$$

$\therefore \boxed{\log_N N = 1}$

(III) $\log_b N = \log_{b^x}\left(N^x\right)$
$x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Semánticamente:
El logaritmo de un número "N" en base "b" es equivalente al logaritmo decimal de la potenciación de "N" dividiendo entre el logaritmo decimal de la potenciación de "b^a".
Análogamente, el logaritmo de un Número "N" en base "b" no se altera si se eleva a exponente a tanto el número como la base b.

Ejemplo:

Sea $\log_3 2$

$$\Rightarrow \log_3 2 = \log_{3^5} 2^5 = \log_{3^{-6}} 2^{-6} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{3}{2}} = \log_{3^{500}}\left(2^{500}\right) = \ldots..$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_3 2 = \log_{243} 32 = \log_{\left(\frac{1}{729}\right)}\left(\frac{1}{64}\right) = \log_{\sqrt{27}}\sqrt{8}}$$

(IV) $b^{\log_b N} = N \ , \ N > 0$

Semánticamente:
En toda potenciación de exponente logarítmico si la base de la potenciación coincide con la base del exponente logarítmico, dicha potencia es equivalente al número correspondiente.

Demostración:

Sea: $b^x = N$ (1)
Por definición de logaritmo: $x = \log_b N$ (2)

Sustituyendo 2 en 1: $b^x = b^{\log_b N} = N$

$\therefore \boxed{b^{\log_b N} = N}$

(V) $b^{\log_q N} = N^{\log_q b}$

Semánticamente:
En toda potencia de exponente logarítmico puede permutarse la base y el número correspondiente; la potencia original será equivalente a la potencia resultante.

Demostración:

A partir de la igualdad: $b^{\log_q N} = N^{\log_q b}$

Tomando logaritmos en base q: $\log_q\left(b^{\log_q N}\right) = \log_q\left(N^{\log_q b}\right)$

Realizando las sentencias: $(\log_q N).(\log_q b) = \overbrace{(\log_q b).(\log_q N)}$

Conmutando la multiplic.: $\log_q N \cdot \log_q b = \log_q N \cdot \log_q b$

La igualdad obtenida es una identidad por lo que concluimos que:

$$\boxed{b^{\log_q N} = N^{\log_q b}}$$

19.6 LA FUNCION LOGARITMO

Definición: Es toda aquella cuya regla de correspondencia viene expresado por:

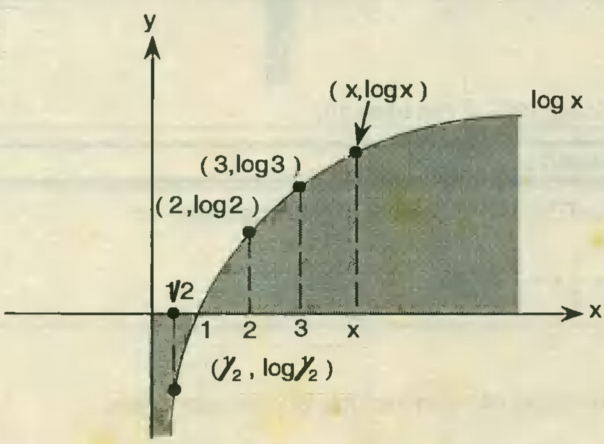
$f(x) = \log(g(x))$; $g(x) > 0$; en dicha función se verifica que:

EL DOMINIO: $Df = g(x) > 0$

EL RANGO: $Rf = \mathbb{R}$

GRÁFICA: Es una línea curva que puede ser continua o no.
Es asintótica en los puntos en los cuales no existe logaritmo: $g(x) = 0$

Ejemplo:

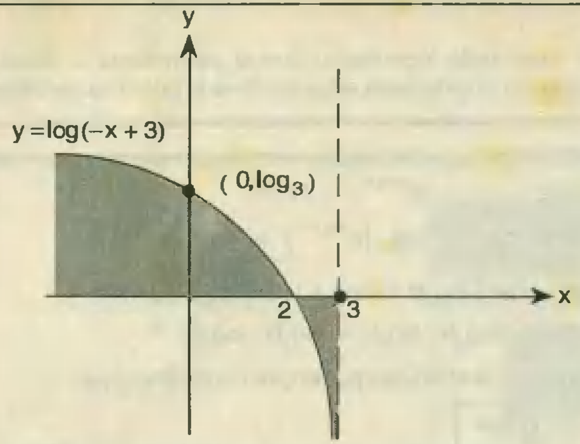


; $Df = \mathbb{R}^+$

$Rf = \mathbb{R}$

Es la gráfica de la función logaritmo decimal de x.

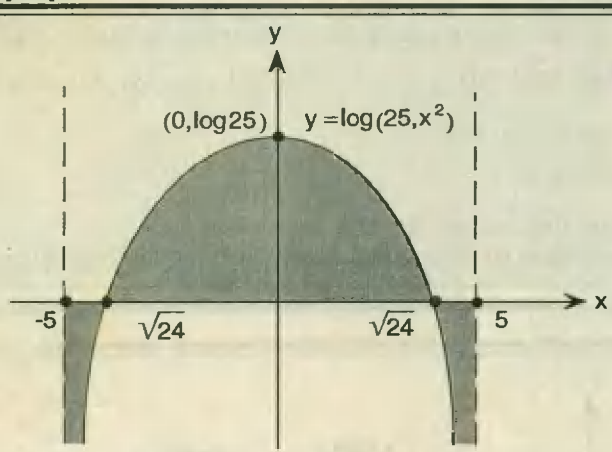
Ejemplo:



Df = $\langle -\infty, 3 \rangle$
Rf = IR

Es la gráfica del logaritmo de (-x + 3) en base 10.

Ejemplo:



Df = $\langle -5, 5 \rangle$
Rf = $\langle -\infty, \log 25]$

Es la gráfica de log (25 - x²) en base 10.

Ejemplo Explicativo:

Hallar el dominio de la función cuya regla viene dada por:

$$f(x) = \log\left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x + 50\right)$$

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición del dominio una función logarítmica.

$$Df: -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x + 50 > 0$$

(2°) **Resolviendo la inecuación**

$$Df: \quad 60 > \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x$$

$$Df: \quad 60 > \frac{2x + x}{6}$$

$$Df: \quad 60 > \frac{3x}{6}$$

$$Df: \quad x < 120$$

(3°) **Finalmente**

$$\boxed{Df \in \langle -\infty, 120 \rangle}$$

Ejemplo Explicativo:

Hallar el dominio de la función cuya regla viene dada por:

$$f(x) = \log\left(\frac{3x - 12}{5 - \frac{1}{2}x}\right)$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la definición del dominio correspondiente:**

$$Df: \frac{3x - 12}{5 - \frac{1}{2}x} > 0$$

(2°) **Resolviendo la inecuación obtenida:**

$$Df: \frac{3(x - 4)}{-\left(\frac{1}{2}x - 5\right)} > 0 \qquad \wedge \quad \frac{1}{2}x - 5 \neq 0$$

$$Df: \frac{x - 4}{\frac{1}{2}x - 5} < 0 \qquad \wedge \quad x \neq 10$$

$$Df: (x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 5\right) < 0 \qquad \wedge \quad x \neq 10$$

(3°) **De acuerdo a la regla de áreas**

$$Df: 4 < x < 10 \quad \wedge \quad x \neq 10$$

$$\therefore \quad \boxed{Df \in \langle 4, 10 \rangle}$$

19.6.1 Regla para realizar el bosquejo de la gráfica de regla de correspondencia logarítmica.

(1°) Si la regla es: $f(x) = \log_b [g(x)]$

Se obtiene el dominio de la función:

$\Rightarrow$ $Df = g(x) > 0$ .... (1)

(2°) Se obtiene el cero de la regla o corte en el eje x.

$\Rightarrow \log_b[g(x)] = 0\,,\quad g(x) = b^0 \quad ó \quad g(x) = 1$ ....(2)

(3°) Corte con el eje "y" :

haciendo $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \log\left[g(0)\right]$

dicho corte será: $\left(0, \log\left[g(0)\right]\right)$

(4°) Se obtiene las asíntotas de la regla, para ello:

$g(x) = 0$ ....(3)

(5°) Se realiza el esbozo del gráfico a partir del ∞, cortando a x en los ceros y desligándose en las asíntotas para concluir en el - ∞ si fuese necesario.

Ejemplo Explicativo:

Obtener el gráfico de la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \log\left(-\frac{1}{3}x + 5\right)$$

Solución:

(1°) **Obtenemos el dominio:**

Df: $-\frac{1}{3}x + 5 > 0 \quad ; \quad \frac{1}{3}x < 5 \quad ; \quad x < 15 \quad \therefore \quad \boxed{Df = x < 15}$

Df $\in \langle -\infty, 15 \rangle$

(2°) **Cero de la regla de correspondencia: (corte con el eje x)**

$\log\left(-\frac{1}{3}x + 5\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x + 5 = 1 \quad , \quad 5 - 1 = \frac{1}{3}x \quad ; \quad x = 12$

La gráfica corta al eje x en (12 , 0)

(3°) **Corte con el eje "y":**

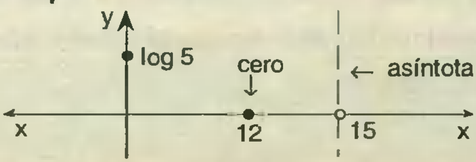
con x = 0 y sobre sobre la regla dada:

$y = f(0) = \log\left[-\frac{1}{3}(0) + 5\right] = \log 5$. El corte con el eje "y" será en (0, log 5).

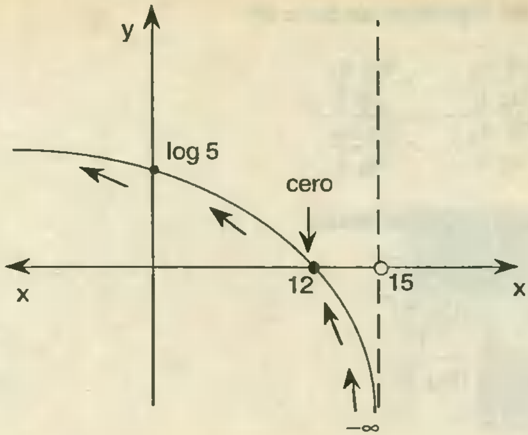
(4°) **Obtenemos la asíntota de la gráfica**

$-\frac{1}{3}x + 5 = 0 \quad ; \quad \frac{1}{3}x = 5 \quad ; \quad \boxed{x = 15}$

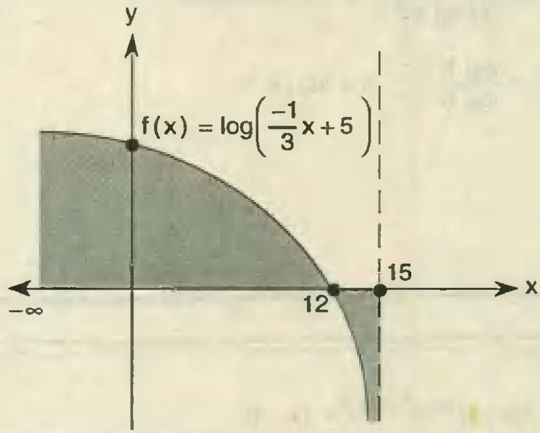
(5°) **Ubicamos los puntos obtenidos sobre un sistema de referencia.**



(5°) **Trazamos la gráfica de la curva según las flechas:**



(6°) Distinguiendo elementos principales de la curva, se tendrá:



$Df = \langle -\infty, 15 \rangle$
$Rf = \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0$ si $x \in \langle -\infty, 12]$

$f(x) < 0$ si $x \in \langle 12, 15 \rangle$

$f(x) \in \phi$ si $x \in [15, \infty \rangle$

19.7 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

19.7.1 Calcular:

$$k = \frac{\sqrt[n]{\log_b a_1 . \log_b a_2 . \log_b a_3 . \log_b a_4 ..... \log_b a_n}}{\sqrt[n]{\log_k a_1 . \log_k a_2 . \log_k a_3 . \log_k a_4 .... \log_k a_n}}$$

$b > 1$, $0 < k < 1$; $n \in \mathbb{N}$ impares ; $a_i > 1$

Solución:

(1°) **Expresando en términos del logaritmo de base 10.**

$$k = -\sqrt[n]{\dfrac{\dfrac{\log a_1}{\log b} \times \dfrac{\log a_2}{\log b} \times \dfrac{\log a_3}{\log b} \times \ldots \times \dfrac{\log a_4}{\log b}}{\dfrac{\log a_1}{\log k} \times \dfrac{\log a_2}{\log k} \times \dfrac{\log a_3}{\log k} \times \ldots \times \dfrac{\log a_4}{\log k}}}$$

(2°) **Luego de simplificar los factores repetitivos:**

$$\Rightarrow k = -\sqrt[n]{\dfrac{\dfrac{1}{(\log b)^n}}{\dfrac{1}{(\log k)^n}}}$$

(3°) **Simplificando el radical**

$$\Rightarrow k = -\sqrt[n]{\dfrac{(\log k)^n}{(\log b)^n}} \quad ; \quad \text{simplificando}$$

$$\Rightarrow k = -\dfrac{\log k}{\log b} \quad ; \qquad k = \log_b k^{-1}$$

(3°) Finalmente

$$\therefore \quad \boxed{k = \log_b \left(\dfrac{1}{k}\right)}$$

19.7.2 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver la ecuación:

$$|x-1|^{\log_3 x^2 - 2\log_x 9} = (x-1)$$

Recuerde:

$$|a| = \begin{cases} a \; ; \; a > 0 \\ -a \; ; \; a < 0 \end{cases} \quad ; \qquad \log_b a = n \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \wedge b \neq 1 \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Mediante la definición de Valor Absoluto asociado a la ecuación:**

$$|x-1| = \begin{cases} (x-1) \; ; \; x-1 > 0 \\ \quad \vee \\ -(x-1) \; ; \; x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \mathbb{R} - \{1\}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(2°) **De igualar Bases:**

$$|x-1| = (x-1) \wedge x-1>0$$

$$\Rightarrow (x-1)^1 = (x-1)^1 \ ; \ x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{x>1}$$

(3°) **De igualar exponentes:**

$$\Rightarrow \log_3 x^2 - 2\log_x 9 = 1 \quad \wedge x>1$$

$$\Rightarrow \log_3 x^2 - 2\left(\frac{2}{\log_3 x}\right) = 1 \quad \wedge x>1$$

$$\Rightarrow \log_3 x - \frac{1}{\log_3 x} = 1 \ ; \ \text{con } a - \frac{1}{a} = 1$$

(4°) **Resolviendo:**

$$x_1 = 3^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad ; \quad x = 3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} < 1$$

$$\therefore \boxed{S = \left\{3^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}}$$

19.7.3 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \log_3 x - \log_9 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x^2 - 3y^2 + 44 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

$$\log_a N = b \iff N = a^b$$

$$\begin{cases} N>0 \\ a \in \langle 0;1\rangle \cup \langle 1;+\infty\rangle \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad ; \quad \log_{n^k} m^E = \frac{E}{k}\log_n m \ ; \ k \neq 0$$

$$|a| = \begin{cases} a \ ; \ a>0 \\ -a \ ; \ a<0 \end{cases}$$

Solución:

(1°) Por definición de logaritmo:

$$\Rightarrow x>0 \quad ; \quad y>0$$

(2°) **Consideremos las ecuaciones:**

De (1):

$$\Rightarrow \log_3 x = \log_{3^2} y = \frac{1}{2}\log_3 y = \log_3 y^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \log_3 x = \log_3 y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = y^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

(3°) **Sustituyendo (α) en (2):**

$$\Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 - 3y^2 + 44 = 0 \quad \wedge\ y > 0$$

$$\Rightarrow |\,y\,| - 3y^2 + 44 = 0 \quad \wedge\ y > 0$$

$$\Rightarrow y - 3y^2 + 44 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

(4°) **Resolviendo:**

$3y^2 - y - 44 = 0$

$(3y + 11)(y - 4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4 \quad ; \quad x = y^{1/2} \quad ; \quad y > 0\ ,\ \ x > 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

(5°) **Finalmente**

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(2;4)\}}$$

19.7.4 **Ejemplo Explicativo:**

Calcular:

$k = \log \text{tg}1° \times \log \text{tg}2° \times \log \text{tg}3° \times \ldots \times \log \text{tg}89°$

Solución:

(1°) Para simplificar la multiplicación, analicemos el factor: $\boxed{\log \text{tg}45°}$

(2°) De observar las componentes, en especial tg 45°= 1

$$\Rightarrow \log \text{tg}45° = \log(1) = 0$$

(3°) **En la serie de factores, $\exists$ el factor cero**

$$k = (\log \text{tg}1°)(\log \text{tg}2°)(\log \text{tg}3°) \ldots \underbrace{(0)} \ldots (\log \text{tg}89°)$$

$$\therefore \quad \boxed{k = 0}$$

19.7.5 **Ejemplo Explicativo:**

Resolver:

$$\log \sqrt[3]{75 + 5^{\sqrt{3x-5}}} = \frac{2}{3}$$

Solución:

(1°) **De la ecuación propuesta se obtiene:**

$$\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-5}}} = 10^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad 3x-5 \geq 0 \quad ; \quad 75+5^{\sqrt{3x-5}} > 0$$

(2°) **Elevando al cubo:**

$$75+5^{\sqrt{3x-5}} = 10^2 \quad ; \quad 3x-5 \geq 0 \quad ; \quad 75+5^{\sqrt{3x-5}} > 0$$

$$5^{\sqrt{3x-5}} = 25 = 5^2 \quad ; \quad 3x-5 \geq 0 \quad ; \quad 75+5^{\sqrt{3x-5}} > 0$$

(3°) **De igualar los exponentes:**

$$\sqrt{3x-5} = 2 \quad ; \quad x \geq \frac{5}{3}$$

$$3x-5 = 4 \quad ; \quad x \geq \frac{5}{3}$$

$$3x = 9 \quad ; \quad x \geq \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad x = 3 \quad ; \quad x \geq \frac{5}{3}$$

(4°) **Verificando:**

$$\log\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{4}}} = \log\sqrt[3]{100} = \log 10^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\log 10 \quad \therefore \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

(5°) Concluimos que:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{3\}}$$

19.7.6 **Ejemplo Explicativo:**

Hallar "x", si:

$$10^x + 10^{-x} = 3$$

Solución:

(1°) **Ordenando la ecuación no algebraica:**

$$10^x + \frac{1}{10^x} = 3$$

(2°) **Haciendo el cambio: $10^x = a$ .... (1)**

$$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} = 3$$

(3°) **Eliminando denominadores:**

$$\Rightarrow \quad a^2 + 1 = 3a$$

$\Rightarrow \quad a^2 - 3a + 1 = 0$; por la **fórmula cuadrática**

$$\Rightarrow \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$$

(4°) **Volviendo a (1):**

$10^x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; apliquemos la def. de logaritmo.

$\Rightarrow \quad x = \log\left(\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$; verificando a continuación:

$$10^{\log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)} + 10^{-\log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)} = 3$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3 \pm \sqrt{5}} = 3$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} + \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} = 3$$

$\therefore \quad 3 = 3$

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{ \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) ; \log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \right\}}$$

19.7.7 **Ejemplo Explicativo:**

Hallar el dominio y rango de la función, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = 3^x$$

Solución:

(1°) **Cálculo del dominio:**

Si: $f(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$ por definición de función exponencial.

$\therefore \quad \boxed{\text{Dominio } f(x) = \langle -\infty, \infty \rangle}$

(2°) **Cálculo del rango:**

Despejando "x" a partir del cambio realizado:

$$y = 3^x$$

$$\Rightarrow \quad \log y = x \log 3$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\log y}{\log 3}$$

(3°) **Se tiene aislado "x"**

$\Rightarrow$ $x = \log_3 y$; aplicando la definición de función logarítmica.

$\Rightarrow$ $0 < y < \infty$

$\therefore$ $\boxed{\text{Rango de la función } f(x) = [\, 0;\ \infty >}$

19.7.8 Ejemplo Explicativo:

Hallar el dominio y rango de la siguiente función:

$y = 7^{x^2}$

Solución:

(1°) **Cálculo del dominio:**

Si: $y = 7^{x^2} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$; por definición de función exponencial.

$\therefore$ $\boxed{\text{Dominio de } y = < -\infty, \infty >}$

(2°) **Cálculo del Rango**

Despejando x a partir de la igualdad: $y = 7^{x^2}$

$\Rightarrow$ $\log y = x^2 \log 7$

$\Rightarrow$ $x^2 = \log_7 y$

(3°) Se tiene aislado x

$\Rightarrow$ $x = \sqrt{\log_7 y}$; restringiendo

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_7 y \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \quad y \geq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1) y (2) son equivalentes: $y \geq 1$

(4°) Finalmente

$\therefore$ $\boxed{\text{Rango de } y: [\, 1,\ \infty >}$

19.7.9 Ejercicio Explicativo

Resolver:

$$\log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$x^2 - y^2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Comentario:

En este ejercicio se usa la propiedad para cambiar de base

Sea: $\log_b N \Rightarrow \log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

Solución:

(1°) **Analizando la segunda ecuación proporcionada:**

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad (x+y)(x-y) = 2$$

$$\Rightarrow \quad (x+y) = \frac{2}{(x-y)}$$

(2°) **Reemplazando en (α):**

$$\Rightarrow \quad \log_2 \frac{2}{(x-y)} - \log_3(x-y) = 1 \quad ; \quad \text{con } \log_2 \frac{2}{x-y} = \log_2 2 - \log_2 (x-y)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \log_2 (x-y) - \log_3 (x-y) = 1$$

(3°) **Multiplicando por (-1) y cambiando a base 3**

$$\Rightarrow \quad \frac{\log(x-y)}{\log_3 2} + \log_3 (x-y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\log_3(x-y)}\,[\underbrace{\log_2 3 + 1}_{\neq 0}] = 0 \quad ;$$

(4°) **Finalmente**

$$\Rightarrow \quad \log_3(x-y) = 0 \quad ; \quad x - y = 3^0 \qquad \wedge \; x^2 - y^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad x - y = 1 \; \wedge \; x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}}$$

19.7.10 **Ejercicio Explicativo:**

$$\log \sqrt[\log x]{z} = x \text{ ....} (\text{I})$$

$$x^{x^{x^{x+1}}} . \log_z x = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}-1} \text{ ....} (\text{II})$$

Solución:

(1°) De la ecuación (I):

$$\log(z)^{\frac{1}{\log x}} = x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\log x} . \log z = x \; ; \log z = x \log x$$

$$\Rightarrow \quad \log z = \log x^x \qquad \therefore \quad \boxed{z = x^x} \text{ ....} (\text{III})$$

(2°) **En (III) tomando logaritmos en base "z":**

$\log_z z = \log_z x^x = x\log_z x$

$\therefore \quad 1 = x\log_z x \quad ; \boxed{\log_z x = \dfrac{1}{x} = x^{-1}}$ ....(IV)

(3°) **Sustituyendo (IV) en (II):**

$\Rightarrow \quad x^{x^{x^{x+1}}} . x^{-1} = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}} . x^{-1}$; simplificamos

$\Rightarrow \quad x^{x^{x^{x+1}}} = x^{\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}}$; transformando

$\Rightarrow \quad x^{x^{x^{x}x}} = x^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$; igualando exponentes

$\Rightarrow \quad x^{x^{x}x} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $\left(x^x\right)^{x^x} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(4°) **Por simetría:**

$x^x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \boxed{C.S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$

19.7.11 Ejercicio Explicativo:

Resolver el sistema:

$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$ .... (1)

$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$ .... (2)

$\log_4 z + \log_{16} y + \log_{16} x = 2$ .... (3)

Comentario:

i) $\log_a f(x) + \log_a g(x) + \log_a h(x) = \log_a \left[f(x)\, g(x)\, h(x) \right]$

ii) $\log_a y = n \quad \Rightarrow \quad y = a^n$

Solución:

(1°) **Las ecuaciones se pueden escribir:**

como: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$

$\log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2$ .... (1)

$\log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2$ .... (2)

$\log_{16} z^2 + \log_{16} y + \log_{16} x = 2$ .... (3)

(2°) **A su vez:**

$\log_4 (x^2yz) = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2yz = 16$ .... (α)

$\log_9 (x y^2 z) = 2 \quad \Rightarrow \quad xy^2z = 81$ .... (β)

$\log_{16} (xyz^2) = 2 \quad \Rightarrow \quad xyz^2 = 256$ .... (γ)

(3°) **Multiplicando miembro a miembro (α), (β) y (γ):**

$\Rightarrow \quad x^4 \,.\, y^4 \,.\, z^4 = 2^4 \,.\, 3^4 \,.\, 4^4$

(4°) **Extrayendo raíz cuarta:**

$\Rightarrow \quad xyz = 2 \times 3 \times 4$ .... (μ)

Dividiendo (α) ÷ (μ) : $\quad x = \dfrac{2}{3}$

Dividiendo (β) ÷ (μ) : $\quad y = \dfrac{27}{8}$

Dividiendo (γ) ÷ (μ) : $\quad z = \dfrac{32}{3}$

(5°) **Finalmente el conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{C.S = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3} \right) \right\}}$$

19.7.12 **Ejercicio Explicativo:**

Si: $\log_b N = h$ y $\log_b a = k$

Hallar: $\log_{ab^2} N$

en términos de h y k.

Comentario:

En este ejercicio se utiliza:

$\log_a N = b \quad \rightarrow \quad N = a^b$

$\log_a b^n = n \log_a b$

$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$

Solución:

(1°) **Sea:** $\log_{ab^2} N = x \quad \Rightarrow \quad N = \left(ab^2 \right)^x$

(2°) **Aplicando logaritmos de base "b" a cada miembro se tiene:**

$$\underbrace{\log_k N}_{h} = x(\underbrace{\log_b a}_{k} + 2\underbrace{\log_b b}_{1}) = x(k+2)$$

$$\Rightarrow \quad h = x(k+2) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{k+2}$$

(3°) **Finalmente:**

$$\boxed{\log_{ab^2} N = \frac{h}{k+2}}$$

19.7.13 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular x

$$9^{\log_x(x^2-10x+25)} = 13^{2\log_x \sqrt{x} - 1}$$

Solución:

(1°) **Ejecutando en el exponente de la base 13:**

$$\Rightarrow \quad 9^{\log_x(x^2-10x+25)} = 13^{\log_x(\sqrt{x})^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 9^{\log_x(x^2-10x+25)} = 13^{\log_x x - 1}$$

$$9^{\log_x(x^2-10x+25)} = 13^{1-1} = 13^0 = 1$$

(2°) **Ordenando para igualar exponentes de base 9:**

$$9^{\log_x(x^2-10x+25)} = 9^0 \quad \forall \ x > 0 \ , \ x \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad \log_x(x^2 - 10x + 25) = 0$$

(3°) **Se tendrá la ecuación algebraica:**

$$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 1 \quad \forall \ x>0 \ , \ x\neq 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 10x + 24 = 0 \quad \forall \ x>0 \ , \ x\neq 1$$

$$(x-4)(x-6) = 0 \quad \forall \ x>0 \ , \ x\neq 1$$

$$x = 4 \ \text{ó} \ x = 6 \quad \forall \ x>0 \ , \ x\neq 1$$

(4°) **Finalmente el conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{4, 6\}}$$

19.7.14 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular:

$$E = a^{\left(\frac{1+\log_a b}{1+\log_b a}\right)\log_b 5} + b^{\left(\frac{1+\log_b a}{1+\log_a b}\right)\log_a 55}$$

Solución:

(1°) **Transformando el exponente de cada potenciación:**

$$E = a^{\left(\frac{\log_a a+\log_a b}{\log_b b+\log_b a}\right)\log_b 5} + b^{\left(\frac{\log_b b+\log_b a}{\log_a a+\log_a b}\right)\log_a 55}$$

$$\Rightarrow \quad E = a^{\left(\frac{\log_a ab}{\log_b ab}\right)\log_b 5} + b^{\left(\frac{\log_b ab}{\log_a ab}\right)\log_a 55} = a^{\frac{\frac{\cancel{\log(ab)}}{\log a}}{\frac{\cancel{\log(ab)}}{\log b}}\cdot\log_b 5} + b^{\frac{\frac{\cancel{\log(ab)}}{\log b}}{\frac{\cancel{\log(ab)}}{\log a}}\log_a 55}$$

$$\Rightarrow \quad E = a^{\frac{\log b}{\log a}\cdot\frac{\log 5}{\log b}} + b^{\frac{\cancel{\log a}}{\log b}\cdot\frac{\log 55}{\cancel{\log a}}}$$

(2°) **Aplicando propiedad:** cambio de base

$$E = (ab)^{\frac{\log_{ab} 5}{\log_{ab} ab}} + (ab)^{\frac{\log_{ab} 5}{\log_{ab} ab}} = a^{\frac{\log 5}{\log a}} + b^{\frac{\log 55}{\log b}}$$

$$E = \cancel{(ab)^{\log_{ab} 5}} + \cancel{(ab)^{\log_{ab} 5}} = a^{\log_a 5} + b^{\log_b 55}$$

(3°) Finalmente

$E = 5 + 55$

$\therefore \quad \boxed{E = 60}$

19.7.15 **Ejercicio Explicativo:**

Sabiendo que:

$\log_a(\log_a b) - \log_a(\log_a c) = 1$

Calcular:

$E = \log_a(\log_b a) - \log_a(\log_c a)$

Solución:

(1°) **Transformando en la condición:**

$$\Rightarrow \quad \log_a\left\{\frac{\log_a b}{\log_a c}\right\} = 1$$

(2°) **Por definición:**

$$\Rightarrow \frac{\log_a b}{\log_a c} = a$$

$$\log_a b = a \log_a c \quad \Rightarrow \quad \log_a b = \log_a c^a$$

(3°) **Aislando "b":**

$$\boxed{b = c^a} \text{..............................} (1)$$

(4°) **En la expresión pedida, transformando:** $E = \log_a \left\{ \dfrac{\log_b a}{\log_c a} \right\}$

(5°) **Cambiando la base de los logaritmos a base "a":**

$$E = \log_a \left\{ \frac{\dfrac{\log_a a}{\log_a b}}{\dfrac{\log_a a}{\log_a c}} \right\} \quad ; \text{ simplificando:}$$

$$E = \log_a \left(\frac{\log_a c}{\log_a b} \right) \text{..............................} (2)$$

(6°) En (1) tomando log en base "a":

$$\boxed{\log_a b = a \log_a \mathbf{c}} \text{..............................} (3)$$

(7°) **Sustituyendo (3) en (2):** $E = \log_a \left\{ \dfrac{\log_a c}{a \log_a c} \right\}$; simplificando

$$E = \log_a \left(\frac{1}{a} \right) = \log_a \left(a^{-1} \right) = -1 \log_a a$$

(8°) **Finalmente:**

$$\boxed{E = -1}$$

19.7.16 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver la siguiente ecuación:

$$\log.\sqrt{7x+4} + \log\sqrt{2x+3} = 1 + \log 1.5$$

Solución:

(1°) **Aplicando las propiedades del logaritmo, resulta:**

$$\Rightarrow \log \sqrt{7x+4} \,.\, \sqrt{2x+3} = \log 10 + \log 1.5 \quad \wedge \quad 7x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+3 \geq 0$$

$$\Rightarrow \log\sqrt{(7x+4)(2x+3)} = \log 10\times 1.5 \quad \wedge \quad x\geq -4/7 \quad \wedge \quad x\geq -3/2$$

(2°) Se obtiene a continuación:

$$\Rightarrow \sqrt{14x^2+29x+12} = 15 \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

$$\Rightarrow 14x^2+29x+12 = 225 \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

$$\Rightarrow 14x^2+29x-213 = 0 \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

$$\Rightarrow (14x+71)(x-3) = 0 \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

(3°) **Igualando cada factor a cero, tenemos:**

$$14x+71 = 0 \Rightarrow x = -\frac{71}{14} \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

$$x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad \wedge \quad x\geq -3/2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3}$$

(4°) **Finalmente se tendrá:**

$$\boxed{C.S. = \{3\}}$$

19.7.17 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular:

$$F = \sqrt{mb^{\log_a x}+(m-2)x^{\log_a b}+1}$$

Para:

$$x = (2m)^{\log_b a}\ ; \quad \text{si} \quad m<0$$

Comentario:

(i)

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x \Rightarrow x\geq 0 \\ -x \Rightarrow x<0 \end{cases}$$

(ii)

$$a^{\log_b m} = m^{\log_b a}$$

Solución:

(1°) **Sumando términos semejantes:**

$$\Rightarrow F = \sqrt{mx^{\log_a b}+(m-2)x^{\log_a b}+1}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{x^{\log_a b}(2m-2)+1} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

(2°) **A su vez:** $\log_a b = \left[\underbrace{(2m)^{\log_b a}}_{x} \right]^{\log_a b} = 2m$ $\boxed{x^{\log_a b} = 2m}$ ....(β)

(3°) **Sustituyendo (β) en (α):**

$$\Rightarrow \quad F = \sqrt{\underbrace{2m}(2m-2)+1}$$

$$\Rightarrow \quad F = \sqrt{4m^2 - 4m + 1}$$

$$\Rightarrow \quad F = \sqrt{(2m-1)^2} \quad \Rightarrow \quad |2m-1| = \begin{cases} 2m - 1 & \Rightarrow \quad 2m - 1 \geq 0 \\ \\ -(2m-1) & \Rightarrow \quad 2m - 1 < 0 \end{cases}$$

(4°) **Se logra:**

$$|2m-1| = \begin{cases} 2m - 1 & \Rightarrow \quad m \geq \dfrac{1}{2} \\ \\ -2m + 1 & \Rightarrow \quad m < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(5°) **Según la condición $m < \frac{1}{2}$**

$$\therefore \quad \boxed{F = 1 - 2m}$$

19.7.18 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$x^{\log_5 x} - \left(\frac{5}{\sqrt[12]{x}} \right)^{12} = 0$$

Solución:

(1°) **Dominio de la ecuación: x > 0**

$$\Rightarrow \quad x^{\log_5 x} = \frac{5^{12}}{x} \; ; \text{ tomando logaritmos en base 5.}$$

$$\Rightarrow \quad \log_5 \left(x^{\log_5 x} \right) = \log_5 \left(\frac{5^{12}}{x} \right) \quad \wedge \quad x > 0$$

(2°) **Transformando se obtiene:**

$$\Rightarrow \quad \log_5^2 x = 12 - \log_5 x \qquad \wedge \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \log_5^2 x + \log_5^x - 12 = 0 \qquad \wedge \quad x > 0$$

$$\begin{array}{l} \log_5 x \quad +4 \\ \log_5 x \quad -3 \end{array}$$

(3°) **Factorizando se logra:**

$(\log_5 x + 4)(\log_5 x - 3) = 0 \quad \wedge \quad x > 0$

* $\log_5 x = -4 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{1}{625}}$

* $\log_5 x - 3 = 0 \rightarrow \quad \log_5 x = 3$

$\boxed{x = 125}$

(4°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{C.S. = \left\{125, \frac{1}{625}\right\}}$$

19.7.19 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log 8^{\log x} - \log x^x = \log 2^{\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Solución:

(1°) **Ordenando según las propiedades del logaritmo:**

$\Rightarrow \quad \log 8^{\log x} - \log x^x = \log 2^{\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{x}\right)}$

$\Rightarrow \quad \log x \,.\, \log 8 - x \log x = \log 2^{\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{x}\right)} \quad ; \qquad \log_b a = \log_{\left(\frac{1}{b}\right)}\left(\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow \quad \log x(\log 8 - x) = \log x(\log 2) \; ;$

(2°) **Factorizando:**

$\Rightarrow \quad \log x(\log 8 - x - \log 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \log x = 0 \qquad v \qquad \log 8 - x - \log 2 = 0$

$\Rightarrow \quad \log x = 0 \qquad v \qquad x = \log 8 - \log 2$

(3°) **Aislando x:**

$x = 10^0 \qquad v \qquad x = \log\left(\dfrac{8}{2}\right)$

$x = 1 \qquad v \qquad x = \log 4$

Los cuales verifican la igualdad propuesta

(5°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{S = \{1; \log 4\}}$

19.7.20 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_{2\sqrt{5}}400+\log_x 2\sqrt{5} = 3\log_x 20+\frac{3}{2}$$

Solución:

(1°) **Al ordenar:**

$$\Rightarrow \quad \log_{2\sqrt{5}}400+\log_x 2\sqrt{5} - 3\log_x 20 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \log_{2\sqrt{5}}400+\log_x\left(\frac{2\sqrt{5}}{20^3}\right)=\frac{3}{2} \quad ; \quad \log_{2\sqrt{5}}400 = \log_{(2\sqrt{5})^2}(400)^2$$

$$= \log_{20}20^4=4$$

(2°) **Luego de simplificar:**

$$\Rightarrow \quad 4+\log_x\left(\frac{2\sqrt{5}}{20^3}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \log x\left(\frac{2\sqrt{5}}{20^3}\right) = -\frac{5}{2}$$

(3°) **Por definición de logaritmo**

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{5}}{20^3} = x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\frac{2\sqrt{5}}{20^3}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{20^6}{20}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(20^5\right)^{\frac{1}{5}} = 20$$

(4°) **Observemos que x = 20 verifica la igualdad propuesta.**

$$\therefore \quad \boxed{S = \{20\}}$$

19.7.21 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$x^{\frac{\log_5 \log_5 x}{\log_5 x}} = 5$$

Recuerde:

* $\dfrac{\log_b N}{\log_b M} = \dfrac{\log N}{\log M} = \log_M N$

Además:

* $b^{\log_b x} = x$

Solución:

(1°) **En relación al exponente:**

$$\Rightarrow \frac{\log_5(\log_5 x)}{\log_5(x)} = \frac{\log(\log_5 x)}{\log(x)} = \log_x(\log_5 x) = \log_x(\log_5 x)$$

(2°) La ecuación será:

$$\Rightarrow \quad x^{\log_x(\log_5 x)} = 5 \; ; \quad \log_5 x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \log_5 x = 5$$

$$x = 5^5$$

Dicho valor verifica la igualdad.

(3°) Finalmente:

$\therefore \quad \boxed{S = \{3125\}}$

19.7.22 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_{x-8}(x^2 - 16) = 2$$

Recuerde:

Si: $\log_y x \quad \Rightarrow \quad x > 0 \;;$

$0 < y < 1$

ó $y > 1$

Solución:

(1°) **Aplicando la definición de logaritmo:**

$$\Rightarrow \quad x^2 - 16 = (x-8)^2 \quad \wedge \quad x^2 - 16 > 0 \quad \wedge \quad [(x-8>0 \wedge x-8 \neq 1)]$$

(2°) **Resolviendo:**

$$x^2 - 16 = x^2 - 16x + 64 \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle \quad \wedge \quad [(x>8 \vee x \neq 9)]$$

$$-16 = -16x + 64 \quad \wedge \quad x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle \quad \wedge \quad [x>8 \,,\, x \neq 9]$$

$$16x = 80 \quad \wedge \quad x>8 \;;\; x \neq 9$$

$$x = 5 \quad \wedge \quad x>8 \;;\; x \neq 9$$

(3°) **Verificando en efecto:**

$\log_{5-8}(25 - 16) = 2$

$\log_{-3} 9 = 2$; La base es negativa

(4°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{S = \{\ \}}$

19.7.23 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log x - 2 = \frac{1}{2}[\log 18 - 2\log 25 + \log 8]$$

Recuerde:

log10	=	1
log 100	=	2
log 1 000	=	3

Solución:

(1°) **Ordenando:**

$$\Rightarrow \log x - 2 = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{18\times 8}{5^4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x}{100}\right) = \log\left(\frac{18\times 8}{5^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2°) **Por definición de igualdad logarítmica:**

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x}{100}\right) = \log\left(\frac{3\times 4}{5^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{100} = \frac{3\times 4}{5^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\times 4}{5^2}\times 100$$

$$\Rightarrow x = 48$$

Observemos que dicho valor verifica la ecuación:

(3°) **Finalmente**

$$\therefore \quad \boxed{S = \{48\}}$$

19.7.24 **Ejercicio Explicativo:**

Si se cumple que:

$$a^a \log_2 a + \sqrt{2} = 0$$

Resolver:

$$\log_{2a} x + \log_a x^2 = 4a$$

Recuerde:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Solución:

(1°) A partir de la condición:

$$\Rightarrow \quad a^a \log_2 a = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \log_2\left(a^{a^a}\right) = -\sqrt{2}$$

(2°) **Por definición de logarítmo:**

$$\Rightarrow \quad a^{a^a} = 2^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

(3°) **En la ecuación:**

$$\Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 = 1 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\log_{\frac{1}{2}} x = 1$$

$$\Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4°) **Finalmente**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$$

19.7.25 **Ejercicio Explicativo:**

Calcular:

$$E = \left(25^{-\log_{\frac{1}{5}} 125}\right) \times \left(243^{-\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}}\right) + \left(11^{\log 1000^{\log_{11} 7}}\right) \times \left(\frac{1}{7}\right)^{18 \log_{\frac{1}{343}} \frac{1}{\sqrt{7}}}$$

Recuerde:

(i) $m^{\log_b x}$; $x > 0,\ m > 0$; (iii) $\log_b a = -\log_{\frac{1}{b}} a$

(ii) $b^{\log_b x}$ x; $x > 0$; (iv) $\log_a a = 1$; $a > 0$

Solución:

(1°) **Simplificando por partes:**

$$\Rightarrow \quad 25^{-\log_{\frac{1}{5}}125} = 25^{\log_5 5^3} = 25^3 = 5^6 \text{ .... (I)}$$

(2°) **Además**

$$\Rightarrow \quad 243^{-\log_3 5} = 5^{-\log_3 243} = 5^{-5\log_3 3} = 5^{-5} \text{ .... (II)}$$

(3°) **Con el siguiente elemento:**

$$11^{\log 1000^{\log_{11}7}} = 11^{\log 10^{3\log_{11}7}} = 11^{3\log_{11}7\,\log 10} = 11^{3\log_{11}7} \text{ .... (III)}$$

(4°) **Con el último elemento**

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{18\log_{\frac{1}{343}}\frac{1}{\sqrt{7}}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{18\log_{343}\sqrt{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{18}{3\times 2}\log_7 7} = 7^{-3} \text{ .... (IV)}$$

(5°) **Sustituyendo (I), (II), (III), (IV) sobre "E":**

$\Rightarrow \quad E = 5^6 \times 5^{-5} + 7^3 \times 7^{-3}$

$\Rightarrow \quad E = 5 + 7^3 \times 7^{-3}$

$\Rightarrow \quad E = 5 + 1$

(6°) Finalmente.

$\therefore \quad \boxed{E = 6}$

19.7.26 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -5$

Recuerde:

Si: $\log_b m > p \; ; \; b > 1 \wedge m > 0$

$\Rightarrow \quad m > b^p$

Solución:

(1°) **Ordenando:**

$\Rightarrow \quad -\log_3(2x+5) < -5$

$\Rightarrow \quad \log_3(2x+5) > 5$

$$\begin{cases} 2x + 5 > 3^5 \text{ .... (I)} \\ 2x + 5 > 0 \text{ .... (II)} \end{cases}$$

(2°) **De (1):** $2x + 5 > 243$

$2x > 238$

$x > 119$

(3°) Finalmente:

$\therefore \quad \boxed{S = \{x \,/\, x \in \langle 119; \infty \rangle\}}$

19.7.27 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

Recuerde:

Si: $\log_b x > m \; ; b > 1$

$\Rightarrow \quad x > b^m$

Solución:

(1°) **Restringiendo:**

$3x + 2 > 0$ .... (1)

$1 - 2x > 0$ .... (2)

(2°) **Luego al recomponer:**

$$\Rightarrow \quad \log_2\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right) > 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x+2}{1-2x} > 4 \text{ ....(3)}$$

(3°) **Resolvemos el sistema (1), (2) y (3)**

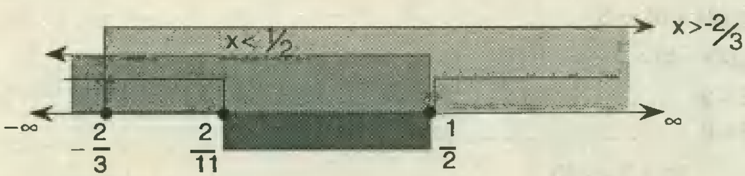
De (1): $\boxed{x > -\frac{2}{3}}$

De (2): $\boxed{x < \frac{1}{2}}$

De (3): $\dfrac{3x+2}{1-2x} - 4 > 0 \; ; \; \dfrac{11x-2}{1-2x} > 0 \; ; \; \dfrac{11x-2}{2x-1} < 0$

(4°) **Graficando:**

$(11x-2)(2x-1) < 0 \quad ; \quad x = \dfrac{2}{11} \quad ; \quad x = \dfrac{1}{2}$



(5°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle \frac{2}{11} ; \frac{1}{2} \right\rangle}$

19.7.28 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_3|3-4x| > 2$$

Recuerde:

Si: $\log_b x < m \quad ; \quad x>0 \wedge \ b>1$

$\Rightarrow \quad x < b^m$

Solución:

(1°) **Restringiendo:**

$\Rightarrow \quad |3-4x| > 0$ ....(1)

Además:

$\Rightarrow \quad |3-4x| > 3^2$ ....(2)

(2°) **De (2):** (Debido a que (1) está contenido en (2))

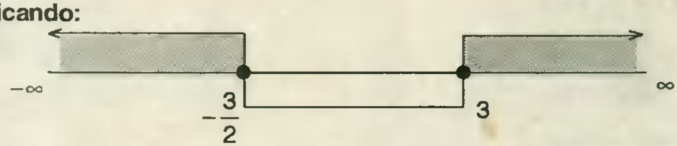
$\Rightarrow \quad |3-4x|^2 > 81$

$\Rightarrow \quad (3-4x)^2 - 81 > 0$

$\Rightarrow \quad (3-4x-9)(3-4x+9) > 0$

$(2x+3)(x-3) > 0 \ ; \ x = 3 \ ; \ x = -\dfrac{3}{2}$

(3°) **Graficando:**



(4°) **Finalmente**

$\therefore \quad \boxed{x \in \left\langle -\infty; -\dfrac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle 3, \infty \right\rangle}$

19.7.29 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_2\left(\left|\frac{x-2}{x-5}\right| + 7\right) > 3$$

Recuerde:

$\begin{cases} \log_b a > m \ ; \ b>1 \ \wedge \ a>0 \\ \Rightarrow \quad a > b^m \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Si:} \quad |x| > a \ ; \ a>0 \\ |x|^2 > a^2 \\ \Rightarrow \quad x^2 > a^2 \end{cases}$

Solución:

(1°) **De la condición:**

$$\left|\frac{x-2}{x-5}\right|+7>2^3$$

$$\left|\frac{x-2}{x-5}\right|>1$$

$$\left(\frac{x-2}{x-5}\right)^2>1^2$$

$$\left(\frac{x-2}{x-5}\right)^2-1>0$$

(2°) **Por ser una diferencia de cuadrados.**

$$\left(\frac{x-2}{x-5}-1\right)\left(\frac{x-2}{x-5}+1\right)>0$$

$$\left(\frac{3}{x-5}\right)\left(\frac{2x-7}{x-5}\right)>0$$

$$\frac{2x-7}{(x-5)^2}>0$$

$$2x-7>0 \quad ; \quad x\neq 5$$

$$x>\frac{7}{2} \quad ; \quad x\neq 5$$

(3°) **Finalmente**

$$\therefore \quad \boxed{x\in\left\langle \frac{7}{2},\infty\right\rangle-\{5\}}$$

19.7.30 **Ejercicio Explicativo**

Resolver:

$$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}-\frac{1}{x}>0$$

Asumiendo que $x>1$.

Recuerde:

(i) Si: $\log_n m>p \quad ; \quad m>0 \quad ; \quad n>1$

$\Rightarrow \quad m>n^p$

(ii) Si: $b^x>b^y \; ; \; b>1$

$\Rightarrow \quad x>y$

Solución:

(1°) **Ordenando:**

$$x^{2-\log_2{}^2 x - 2\log x} > x^{-1} \quad \wedge \quad x > 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 - \log_2{}^2 x - 2\log_2 x > -1 \quad \wedge \quad x > 1$$

(2°) **Se logra la desigualdad:**

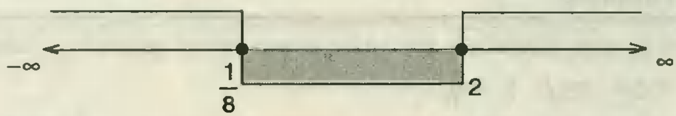
$$\log_2{}^2 x + 2\log_2 x - 3 < 0 \qquad \wedge \quad x > 1$$

$$(\log_2 x + 3)(\log_2 x - 1) < 0 \qquad \wedge \quad x > 1$$

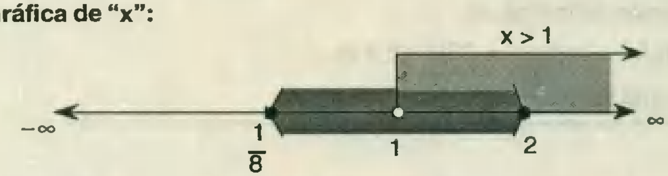
(3°) **Aplicando la regla de áreas:**

$$\log_2 x = -3 \quad ; \quad \log_2 x = 1 \qquad \wedge \quad x > 1$$

$$x = \frac{1}{8} \quad ; \quad x = 2 \qquad \wedge \quad x > 1$$



(4°) **Gráfica de "x":**



(5°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{x \in \langle 1; 2 \rangle}$

19.7.31 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$(e^x - 3)(e^x - 5) = 35$$

Recuerde:

(i) Si: $b^x = m$ $\Rightarrow x = \log_b m$	(ii) Si: $e^x = m$ $\Rightarrow x = \ln(m)$

Solución:

(1°) **Ordenando:**

$$e^{2x} - 8e^x + 15 = 35$$

(2°) **Factorizando:**

$$e^{2x} - 8e^x - 20 = 0$$

$$\begin{array}{ll} e^x & -10 \\ e^x & 2 \end{array}$$

(3°) **De cada factor:**

$e^x = 10$ .... (1)

$e^x = -2$ .... (2)

De (1): $x = \ln 10$

De (2): $x \notin \mathbb{R}$

(4°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{S = \{\ln 10\}}$

19.7.32 **Ejercicio Explicativo:**

Tres números enteros positivos **a**, b y c e IN; en progresión geométrica, tales que:

$a < b < c \quad ; \quad \log_2 a \,,\ \log_2 b \quad y \quad \log_2 c$

están en progresión aritmética, si:

$3\,(\log_2 a)\,.\,(\log_2 b)\,.\,(\log_2 c) = 32(a + b + c)$

Calcular el valor de "a".

Solución:

(1°) **El dato:**

$\log_2 a$, $\log_2 b$ y $\log_2 c$ implica que **a**, b y **c**

son potencias de 2; además por ser una P.G.

$\Rightarrow \boxed{b^2 = ac}$ .... (1)

(2°) **La igualdad propuesta:**

$3\log_2 a \,.\, \log_2 b \,.\, \log_2 c = 32(a + b + c)$ .... (2)

Debe de ser resuelta mediante selección debido a ser una ecuación trascendente:

(3°) **Seleccionando:** $a = 16 \,;\, b = 64 \,;\, c = 256$

$\Rightarrow \log_2 a = 4 \,;\, \log_2 b = 6 \,;\, \log_2 c = 8$

En (2):

$3(4)(6)(8) = 32(4 + 6 + 8)$

$32 \times 18 = 32 \times 18$

(4°) Finalmente:

$\therefore \quad \boxed{a = 16}$

19.7.32 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_{\left(\frac{x}{2}\right)} 8 + \log_{\left(\frac{x}{4}\right)} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$$

Solución:

(1°) **Dominio de valores admisibles:**

$$\log\left(\frac{x}{4}\right) > 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Rightarrow \quad 3\log 2\left(\frac{\log\left(\frac{x^2}{8}\right)}{\log\frac{x}{2}\times\cancel{\log\frac{x}{4}}}\right) < \frac{2\log x}{\log x - 2\log 2} = \frac{2\log x}{\cancel{\log\left(\frac{x}{4}\right)}}$$

(2°) **Trasladando "2 log x" al primer miembro:**

$$\Rightarrow \quad 3\log 2\left(\frac{2\log x - 3\log 2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)}\right) - 2\log x < 0 \quad \wedge \quad \log\left(\frac{x}{4}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\log 2(2\log x - 3\log 2) - 2\log x(\log x - \log 2)}{\log\left(\frac{x}{2}\right)} < 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{4} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2\log^2 x - 3\log x\log 2 - 9\log^2 2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)} < 0 \qquad \wedge \quad x > 4$$

(3°) **Se logra una inecuación cuadrática**

$$\Rightarrow \quad \left(2\log^2 x + 3\log x + 9\log^2 2\right) > 0 \ ; \ \log\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \qquad \wedge \quad x > 4$$

(4°) **En relación al discriminante.**

$\Delta = 9 - 72 = -63$. La inecuación se verifica para todo valor admisible establecido.

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} > 0,\ \frac{x}{4} > 0 \ ; \ \log_2 x^2 - 4 \neq 0 \ ; \ \frac{x}{2} \neq 1 \ ,\ \frac{x}{4} \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad x > 0 \ ,\ x > 0 \ ; \ \log_2 x^2 \neq 0 \quad ; \ x \neq 2 \ ,\ x \neq 4$$

$$\Rightarrow \quad x > 0 \ ,\ x > 0 \ ; \quad x^2 \neq 16 \quad ; \ x \neq 2 \ ,\ x \neq 4$$

$$\Rightarrow \quad x > 0 \ ,\ x > 0 \ ; \quad x \neq 4 \quad ; \ x \neq 2 \ ,\ x \neq 4$$

$$\therefore \quad \boxed{x \in \mathbb{R}^+ - \{2, 4\}}$$

19.7.34 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x-10} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x-10}$$

Solución:

(1°) Ordenando:

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}^{\,x-10} + \sqrt{4-\sqrt{15}}^{\,x-10} = 8$$

(2°) Por ser: $(4+\sqrt{15})$ y $(4-\sqrt{15})$ recíprocos

$$\Rightarrow \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x-10}{2}} + \frac{1}{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x-10}{2}}} = 8$$

(3°) **Haciendo el cambio:** $\boxed{\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x-10}{2}} = a}$ ....(I)

$$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{a} = 8$$

(4°) **Resolviendo la ecuación obtenida:**

$$\Rightarrow \quad a^2 - 8a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \frac{8}{2} \pm \frac{2\sqrt{15}}{2} \quad \begin{cases} a = 4+\sqrt{15} \\ a = 4-\sqrt{15} \end{cases}$$

(5°) **Restituyendo en (I):**

$$\Rightarrow \quad a = \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x-10}{2}} = 4+\sqrt{15} \;;\; \frac{x-10}{2} = 1 \;,\; x = 12$$

$$\Rightarrow \quad a = \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x-10}{2}} = \left(4+\sqrt{15}\right)^{-1} \;;\; \frac{x-10}{2} = -1 \;,\; x = 8$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{12, 8\}}$$

19.7.35 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_3\left(-x^2-8x-14\right) . \log_{\left(x^2+4+4x\right)} 9 = 1$$

Solución:

(1°) **Obtenemos el dominio de la ecuación:**

$$\begin{cases} -x^2 - 8x - 14 > 0 \text{ ....} (I) \\ x^2 + 4x + 4 > 0 \text{ ....} (II) \\ x^2 + 4x + 4 \neq 1 \text{ ....} (III) \end{cases}$$

Lo cual implica la limitación:

$$x \in \left\langle -4-\sqrt{2}, -4+\sqrt{2} \right\rangle ó \left\langle -5.4142, -2.58 \right\rangle - \{-3\} \text{ ....} (I)$$

(2°) **Ordenando la ecuación:**

$$\Rightarrow \quad \frac{\log\left(-x^2-8x-14\right)}{\log 3} \times \frac{\log 9}{\log\left(x^2+4x+4\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log\left(-x^2-8x-14\right)^8}{\log 3} \times \frac{2\log 3}{\log\left(x^2+4x+4\right)} = 1$$

(3°) **Transponiendo:**

$$\log(-x^2 - 8x - 14) = \frac{1}{2}\log(x^2 + 4x + 4)$$

$$\Rightarrow -x^2 - 8x - 14 = (x^2 + 4x + 4)^{1/2} : \boxed{x + 2 < 0} \text{ (limitación I)}$$

$$\Rightarrow -x^2 - 8x - 14 = -(x + 2) \wedge x+2<0 \wedge x \neq -3$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \qquad \wedge x+2<0 \wedge x \neq -3$$

$$x = -3 , x = -4 \qquad \wedge x+2<0 \wedge x \neq -3$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{-4\}}$$

19.7.36 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_{\frac{1}{2}x}\left(x^2\right) - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$$

Recuerde:

Al definir el logaritmo:

$$\log_b N = x \Rightarrow \begin{cases} N > 0 \\ b > 0 , b \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Obtenemos el dominio de valores admisibles**

$x^2 > 0$ .... (I)

$x^3 > 0$ .... (II)

$\sqrt{x} > 0$ .... (III)

$\frac{1}{2}x > 0\ ,\ \frac{1}{2}\ x \neq 1$ .... (IV)

$16x > 0\ ,\ 16x \neq 1$ .... (V)

$4x > 0\ ,\ 4x \neq 1$ .... (VI)

$$\Rightarrow\quad x > 0\ ,\ x \neq 2\ ,\ x \neq \frac{1}{16}\ ,\ x \neq \frac{1}{4}$$

(2°) **Realizando las sentencias:**

$$\frac{2\log x}{-\log 2 + \log x} - \frac{42\log x}{4\log 2 + \log x} + \frac{20\log x}{2\log 2 + \log x} = 0$$

$\Rightarrow$ $\log x = 0\ ,\ x = 1$ de simplificar la ecuación:

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\log x - \log 2} + \frac{10}{\log x + 2\log 2} = \frac{21}{\log x + 4\log 2}$$

(3°) **Se logra la siguiente ecuación:**

$2\log^2 x - 3\log x \log 2 - 2\log^2 2\ = 0$

$(2\log x + \log 2)(\log x - 2\log 2)\ = 0$

$\log x\ =\ \log 2^{-1/2}\ ,\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\log x\ =\ \log 2^2\ ,\ x = 4$

$$\therefore\quad \boxed{S\ =\ \left\{4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$$

19.7.37 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_7 \log_5 \left(\sqrt{x+5} + \sqrt{x}\right)\ =\ 0$$

Recuerde:

A partir de:

$\log_b x\ =\ m$

$\Rightarrow\quad x\ =\ b^m$

Solución:

(1°) **De la ecuación:**

$$\log_7 \log_5 \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right) = 0 \; ; \; \sqrt{x+5}+\sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow \; \log_5\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right) = 7^0 \; ; \; \sqrt{x+5}+\sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow \; \sqrt{x+5}+\sqrt{x} = 5^1 \; ; \; \sqrt{x+5}+\sqrt{x} > 0$$

$$; \; x+5>0 \, , \, x>0$$

(2°) **Se obtiene la ecuación:**

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)^2 = 5^2 \qquad \wedge \; x>-5 \, , \, x>0$$

$$\Rightarrow \; 2x+5+2\sqrt{x(x+5)} = 25 \; \wedge x>0$$

$$\Rightarrow \; 2\sqrt{x(x+5)} = 20-2x \qquad \wedge x>0$$

$$\Rightarrow \; x(x+5) = (10-x)^2 \qquad \wedge \; x>0$$

$$\Rightarrow \; x^2+5x = 100+x^2-20x \; \wedge \; x>0$$

$$\Rightarrow \; 25x = 100 \qquad \wedge \; x>0$$

$$\Rightarrow \; x = 4 \qquad \wedge \; x>0$$

(3°) Finalmente se tendrá:

$\therefore$ $\boxed{S = \{4\}}$ Luego de la verificación.

19.7.38 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\log_x (x+2) + \log_{(x+2)} x = \frac{5}{2}$$

Recuerde:

$$\log_b N = \frac{\log N}{\log b} = \frac{1}{\frac{\log b}{\log N}} = \frac{1}{\log_N b}$$

Solución:

(1°) **Ordenando:**

$$\log_x (x+2) + \frac{1}{\log_x (x+2)} = \frac{5}{2} \quad \wedge \quad x>0 \, , \, x \neq 1 \quad \wedge \quad x+2>0$$

Haciendo: $\log_x (x+2) = a$

$$\Rightarrow \; a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \quad 2a^2 - 5a + 2 = 0$

$$\begin{matrix} 2a & \times & -1 \\ a & & -2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad a = 2 \quad ; \quad a = \dfrac{1}{2}$

(2°) **Restituyendo:**

$\Rightarrow \quad \log_x (x+2) = 2 \ , \ \log_x (x+2) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x + 2 = x^2 \qquad ; \qquad x + 2 = x^{1/2}$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \qquad x - \sqrt{x} + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \ ; \qquad \sqrt{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \quad x = 2 \ , \ x = -1 \quad ; \qquad x > 0 \ , \ x \neq 1 \ , \ x > -2$

$\therefore \quad \boxed{S = \{2\}}$

19.7.39 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2.50 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ \qquad\qquad xy = 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Recuerde:

Si: $\log_b a$

$$\Rightarrow \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{1}{\log_a b}$$

Solución:

(1°) **Restringiendo el dominio de las incógnitas**

$y > 0 \ , \ y \neq 1 \ ; \ x > 0 \ , \ x = 1$

(2°) **Al ordenar:**

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \quad 2 \log^2_y x - 5 \log_y x + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (2 \log_y x - 1)(\log_y x - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad \log_y x = 1/2 \ \text{ó} \ \log_y x = 2$

$\Rightarrow \quad x = y^{1/2} \quad \text{ó} \quad x = y^2$

(3°) **Se tendrá los sistemas siguientes:**

$x = y^{1/2} \ \wedge \ xy = 8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$

$\Rightarrow \quad y^{1/2} y = 8 \ , \ y^{3/2} = 8 \ , \ y = 4$

$\Rightarrow x = 4^{1/2}, x = 2 \qquad \therefore \qquad 1^{er}$ Par : $\boxed{(2, 4)}$

(II) $\quad x = y^2, \quad xy = 8$

$\Rightarrow \quad y^2y = 8, \quad y = 2$

$\Rightarrow x(2) = 8, \quad x = 4 \qquad \therefore \qquad 2^{do}$ Par : $\boxed{(4, 2)}$

$\therefore \quad \boxed{S = \{(2,4)(4,2)\}}$

19.7.40 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema siguiente:

$5^{\log x} - 3^{\log y} = 0 \quad \text{..................} \quad (1)$

$(3x)^{\log 3} - (5y)^{\log 5} = 0 \quad \text{..................} \quad (2)$

Recuerde:

Si: $b^{\log N}$

$\Rightarrow \quad b^{\log N} = N^{\log b}$

Solución:

(1°) **De la primera ecuación:**

$x^{\log 5} = y^{\log 3}$

$\Rightarrow y = x^{\frac{\log 5}{\log 3}} \quad \text{...} \ (3)$

(2°) **Sustituyendo (3) sobre la ecuación (2)**

$\Rightarrow (3x)^{\log 3} - \left(5x^{\log_3 5}\right)^{\log 5} = 0$

$\Rightarrow (3x)^{\log 3} = \left(5x^{\log_3 5}\right)^{\log 5}$

$\Rightarrow 3x = \left(5x^{\log_3 5}\right)^{\frac{\log 5}{\log 3}}$

$\Rightarrow 3x = 5^{\log_3 5}\, x^{\log^2_3 5}$

$\Rightarrow x^{1-\log_3^2 5} = 5^{\log_3 5} \div 3$

$\Rightarrow x = \left(\sqrt[-\log^2{}_3 5+1]{\frac{5^{\log_3 5}}{3}}\right) \text{..............................} (4)$

(3°) Sustituyendo: (4) en (3)

$\Rightarrow y = \left(\sqrt[-\log^2{}_3 5+1]{\frac{5^{\log_3 5}}{3}}\right)^{\log_3 5}$

$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(\sqrt[-\log^2{}_3 5+1]{\frac{5^{\log_3 5}}{3}},\ \sqrt[-\log_3 5+\log_5 3]{\frac{5^{\log_3 5}}{3}}\right)\right\}}$

19.7.41 **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \log(2x+6) > 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 11x - x^2 - 28 > 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

(i) La definición de logaritmo:

$$\log_b N = x \Rightarrow \begin{matrix} N > 0 \\ b > 0,\ b \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

(ii) Para la desigualdad logarítmica:

$\log_b N > m \quad , \quad b > 1$

$\Rightarrow \quad N > b^m$

Solución:

(1°) Limitando a la definición de logaritmo y ordenando el sistema:

$2x + 6 > 0$ .... (A)

$2x + 6 > 10^1$ .... (B)

$x^2 - 11x + 28 < 0$ .... (C)

(2°) Resolviendo el sistema equivalente:

de (A) y (B): $2x + 6 > 10$; $x > 2$ .... (D)

de (C): $(x - 4)(x - 7) < 0$; $4 < x < 7$ .... (E)

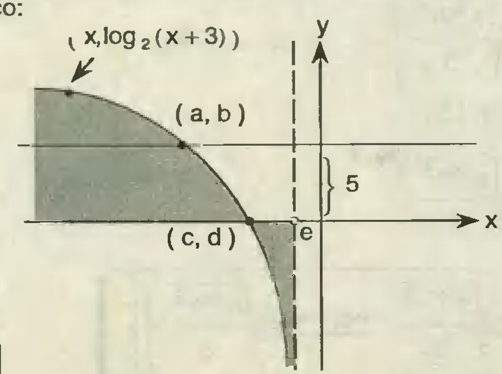
(3°) El sistema se verifica entre la intersección de las componentes (D) y (E)

$\therefore \quad \boxed{x \in \langle 4,7 \rangle}$

19.8 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS:

CAPITULO : EL LOGARITMO

(1) A partir del gráfico:



Calcular:

$a + b + c + d + e$

Rpta : 14

(2) Resolver:

$$\log\left(\frac{x^3}{27}+8\right)-\log_9\left(\frac{x}{3}+2\right)=\log_9 7$$

Rpta: { -3, 9 }

(3) Resolver:

$$8+\log_3\left(4^{\log_3 3x}\right)=\log_3\left(36^{\log_3 3x}\right)$$

Rpta: { 27 }

(4) Resolver:

$$2\left(3^{\frac{2}{5}x+1}\right)-13\left(6^{\frac{x}{5}}\right)+6\left(2^{\frac{2}{5}x}\right)=0$$

Rpta: { -5, 5 }

(5) Resolver:

$$2\log\left(\sqrt{5x+\frac{5x}{24}}+\sqrt{\frac{5x}{24}}\right)=\log 3-\log 2$$

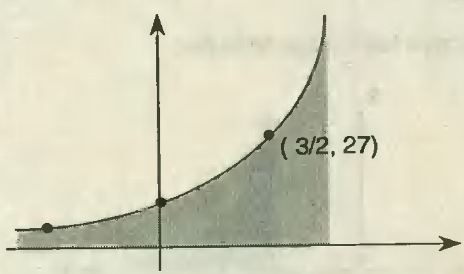
Rpta: { 2 }

(6) Resolver:

$$\log\sqrt{\frac{7}{3}x+5}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{3}x+7\right)=1+\log\frac{9}{2}$$

Rpta: { 10 }

(7) A partir del gráfico de cierta función exponencial:

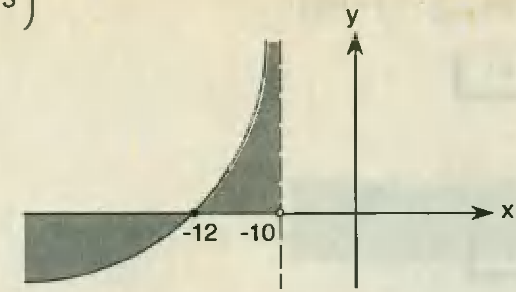


Hallar la regla de correspondencia

Rpta: $f(x)=9^x$

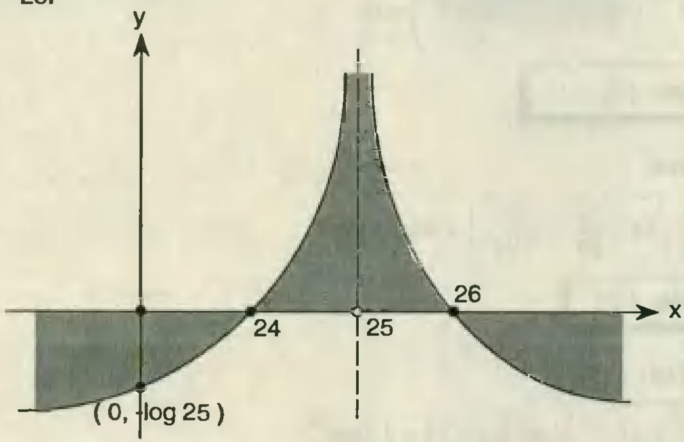
(8) Obtener la gráfica de la función cuya regla es:

$$f(x) = -\log\left(-\frac{x}{2} - 5\right)$$



Rpta:

(9) Obtener la gráfica de la función cuya regla es:
$f(x) = -\log|x - 25|$

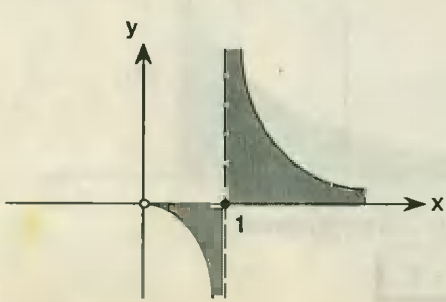


Rpta:

(11) Hallar el dominio de la función cuya regla de correspondencia es:
$f(x) = -\log(-x^2 - x + 240)$

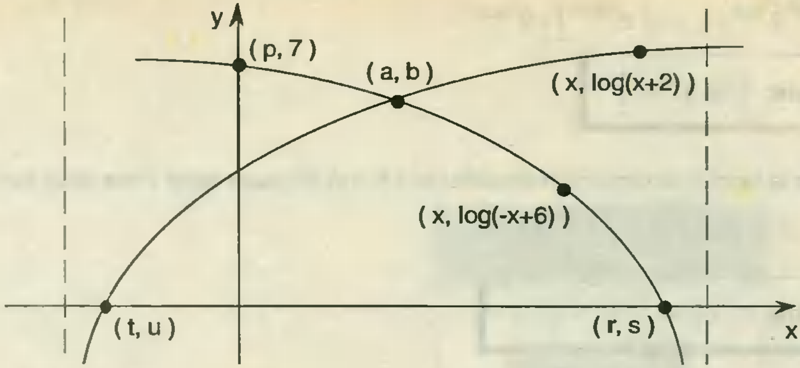
Rpta: $D_f = \langle -16, 15 \rangle$

(12) Hallar la gráfica de la función cuya regla viene dada por:
$f(x) = \log_x 100$



Rpta:

(13) A partir del gráfico de las logarítmicas:



Calcular: a + b + p + q + r + s + t + u

Rpta: $6 + \log 24$

(14) Hallar el dominio de la función cuya regla viene dada por:

$$f(x) = \log\left[1-\log\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{2}x+16\right)\right]$$

Rpta: $x \in \langle 20, 30 \rangle$

(15) Resolver la ecuación:

$$2\log(\log [\![x]\!]) = \log(7-2\log[\![x]\!])-\log 5$$

Rpta: $x \in [10, 11\rangle$

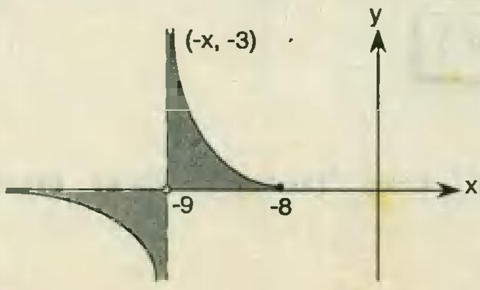
(16) Resolver:

$$\sqrt[7]{e^{-3x}} - 3\sqrt[7]{e^{-2x}} + 4\sqrt[7]{e^{-x}} = 4$$

Rpta: $\{7 \ln 2\}$

(17) Obtener la gráfica de la función cuya regla es:
$F(x) = \log_{-x-8} 12$

Rpta:



(18) Resolver:

$$x^{\log_3 2}\, 3^{\log x} + 9 = 3\left(2^{\log_3 x}\right) + 3^{\log x+1}$$

Rpta: $\left\{10, 3^{\log_2 3}\right\}$

(19) Hallar la función inversa correspondiente a la función cuya regla viene dada por:

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Rpta: $f^*(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

(20) Resolver el sistema:

$\log(9x^2 + y^2) - 1 = \log 13$ .... (1)

$\log\left(\frac{3x+y}{3x-y}\right) = 3\log 2$ .... (2)

Rpta: $\{(3,7)\}$

(21) Resolver:

$$\operatorname{Colog}_2\left(9^{x-1}+7\right) = \operatorname{Colog}_2\left(3^{x-1}+1\right) - 2$$

Rpta: $\{1,2\}$

(22) Calcular:

$$\operatorname{Antilog}_2{}^2\, 3 + \operatorname{Antilog}_{729}{}^2\, 1/3 + \log \operatorname{antilog} 11 + \log_{100}{}^9 \operatorname{antilog}_{\sqrt{10}} 4$$

Rpta: 157

(23) Resolver:

$$\operatorname{Colog} x^{\operatorname{Colog} x} - \operatorname{Colog} x^5 = 24$$

Rpta: $\left\{10^{-8}, 10^3\right\}$

(24) Calcular:

$$\operatorname{Colog}_2\left(\log 10000^4\right) - \operatorname{Colog}_{\sqrt{3}}{}^4(\log 1000)^3 + 5\operatorname{Colog}_{49} 625 \times \operatorname{Colog}_{3125} 343$$

Rpta: 1306

CAPITULO 20

ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

20.1 SISTEMA DE ECUCIONES SIMULTANEAS

Definición.- Un sistema de ecuaciones simultáneas es aquel grupo de ecuaciones que se verifican mediante un único conjunto solución común.

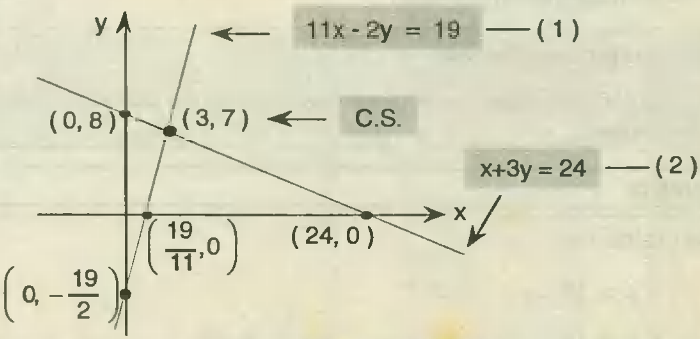
Ejemplo:

Sea:

$$\begin{cases} x + 3y = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 11x - 2y = 19 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \Rightarrow \text{C.S.} = \{(3;7)\}$$

Se muestra un sistema de ecuaciones simultáneas y el conjunto solución correspondiente.

Para abundar en detalles, el sistema anterior responde gráficamente del modo siguiente:



La intersección representa el elemento común y está asociado al conjunto solución correspondiente.

EL CONJUNTO SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS CONTIENE A TODOS LOS GRUPOS ORDENADOS QUE VERIFICAN A LAS ECUACIONES CORRESPONDIENTES.

20.2 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

20.I **De acuerdo al conjunto solución o consistencia.**
Pueden ser:

20.I.1 **Sistemas consistentes.-** Cuando el sistema admite soluciones; usualmente se les denomina también sistemas compatibles.

Ejemplo (a):

$$\begin{cases} x + y = 17 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x - y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \Rightarrow \quad C.S. = \{(15,2)\}$$

Es un sistema consistente (limitado).

Ejemplo (b):

$$\begin{cases} x + y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x + 2y = 26 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \Rightarrow \quad C.S. = \{(0,13),(4,9),(-1,14)\ldots\}$$

Es un sistema consistente (ilimitado).

Los sistemas consistentes pueden ser a su vez:

20.I.1.a.- **Sistemas Consistentes Limitados.-**
Cuando el C.S. posee un número limitado de soluciones.

20.I.1.b.- **Sistemas Consistentes ilimitados.-**
Cuando el C.S. posee un número ilimitado de soluciones, también se les denomina sistemas **indeterminados.**

20.I.2.- **Sistemas Inconsistentes.-**

Cuando el C.S. carece de elementos; a estos se les denomina también absurdos o incompatibles.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \Rightarrow \quad C.S. = \{\ \}$$

Es un sistema inconsistente, o absurdo o incompatible.

20.II.- DE ACUERDO AL NUMERO DE INCOGNITAS.

20.II.1.- **Sistemas determinados.-** Cuando el número de ecuaciones independientes es igual que el número de incógnitas; siendo **ecuaciones independientes** aquellas en las cuales no existe proporcionalidad entre los coeficientes de las incógnitas.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 9 \text{.........}(1) \\ 11x + 29y = 40 \text{.......}(2) \end{cases}$$

Las ecuaciones componentes son **independientes** pues:

$$\frac{2}{11} \neq \frac{7}{29}$$

No existe proporcionalidad entre los coeficientes de las incógnitas.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13 \text{..................}(1) \\ 12x + 20y = 15 \text{..................}(2) \end{cases} \quad ; \quad \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$$

Las ecuaciones componentes **son dependientes** debido a existir proporcionalidad entre los coeficientes de las incógnitas.

20.II.2.- **Sistemas Indeterminados**

Ocurre cuando el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 9z = 13 \text{..............}(1) \\ x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{5}z = \frac{1}{7} \text{..............}(2) \end{cases}$$

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas; se tendrá infinitas soluciones.

20.II.3. **Sistemas sobre determinados**

Cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas.

Ejemplo:

Sea:

$$\begin{cases} x + y = 15 \text{.......}(1) \\ x - y = 5 \text{..........}(2) \\ 13x + 6y = 160 \text{......}(3) \\ x + 2y = 20 \text{........}(4) \\ -6x + 7y = -25 \text{......}(5) \end{cases} \Rightarrow \text{C.S.} = \{(10, 5)\}$$

Es un sistema sobre determinados pues hay más ecuaciones independientes que incógnitas y todas se verifican mediante el par (10, 5).

20.III.- CLASIFICACION DEL SISTEMA DE ECUACIONES DE ACUERDO AL GRADO DE LAS INCOGNITAS.

20.III.1. **Sistemas de Primer Grado.**

Si las ecuaciones componentes tienen incógnitas de 1er grado únicamente.

20.III.- **Sistemas cuadráticos o de Grado Superior.**

Si las ecuaciones poseen una incógnita por lo menos de 2º o mayor grado.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y^2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x - 7y = -6 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C.S. = \{ (1, 1) ; (-62, -8) \}$$

Es un sistema cuadrático de ecuaciones simultáneas.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C.S. = \left\{ (1,2), (2,1) \right\}$$

Es un sistema de grado superior de ecuaciones simultáneas.

20.IV.- DE ACUERDO A LA RACIONALIDAD

20.IV.1.- **Sistema de ecuaciones racionales.**

Si las incógnitas carecen de radicales que afectan a la incógnita o incógnitas.

Ejemplo:

Sea: $$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{I}) \\ y - \dfrac{1}{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{II}) \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones racionales.

20.IV.2.- **Sistemas de ecuaciones irracionales**

Si las incógnitas muestran radicales que lo afectan.

Ejemplo:

Sea: $$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8\sqrt{2} \ldots\ldots(1) \\ x + \sqrt[3]{y} = 74 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$ Es un sistema de ecuaciones irracionales

20.V.- DE ACUERDO A LA NATURALEZA ALGEBRAICA.

20.V.1.- **Sistema de ecuaciones algebraicas.**

Si las incógnitas poseen naturaleza algebraica.

Ejemplo:

Sea:

$$\begin{cases} x + y = 2 \text{ ....} (1) \\ xy + y^2 + x = 3 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones algebraicas.

20.V.2.- **Sistema de Ecuaciones no Algebraicas o Trascendentes.**

Si las incógnitas no poseen naturaleza algebraica.

Ejemplo:

Sea:

$$\begin{cases} x + \log y = 4 + \sqrt[x]{x-1} + \ln x \\ x^y + \mathrm{Sen}(x+y) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones no algebraicas, por la presencia del logaritmo, la exponencial y la expresión trigonométrica seno.

20.3 SISTEMAS EQUIVALENTES

Definición.- Aquellos sistemas de ecuaciones que poseen conjuntos soluciones iguales y no vacíos.

Ejemplo:

Sean:

$$\begin{cases} x + y = 18 \text{ ....} (1) \\ x - y = 4 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 13x + 4y = 171 \text{ ....} (\mathrm{I}) \\ 21x + 11y = 308 \text{ ....} (\mathrm{II}) \end{cases} \Rightarrow \text{C.S.} = \{(11, 7)\}$$

Son equivalentes pues ambos poseen conjunto solución común.

Ejemplo:

Sean:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \text{ ....} (1) \\ 4x + 2y = 3 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \text{ ....} (\mathrm{I}) \\ 6x + 2y = 7 \text{ ....} (\mathrm{II}) \end{cases} \Rightarrow \text{C.S.} = \{\ \}$$

No son equivalentes a pesar de tener el conjunto solución común vacio.

Ejemplo:

Hallar el valor de a y b de modo que los sistemas:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{40+b}{13} \\ x - y = \dfrac{38-b}{13} \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} y + x = \dfrac{2a+b+2}{14} \\ 7x + 14y = a + b + 14 \end{cases}$$

Sean equivalentes.

Solución:

(1°) **Resolviendo el primer y segundo sistema:**

$$S_1 = \left\{\left(3, \frac{b+1}{13}\right)\right\}, \quad S_2 = \left\{\left(\frac{a}{7}, \frac{2+b}{14}\right)\right\}$$

(2°) **Por definición de equivalencia.**

$\Rightarrow \quad 3 = \dfrac{a}{7} \quad , \quad a = 21$ **(1^{as} componentes iguales)**

$\Rightarrow \quad \dfrac{b+1}{13} = \dfrac{2+b}{14}; \quad 14b + 14 = 26 + 13b$ **(2^{as} componentes iguales)**

(3°) **Finalmente, para la equivalencia:**

$\boxed{a = 21}$ y $\boxed{b = 12}$

20.4 SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS DE PRIMER GRADO

Definición.- Se denomina de este modo, a todo aquel sistema en el cual la ecuaciones componentes tienen incógnitas de 1^{er} grado, a estos sistemas se les denomina también sistemas lineales.

METODOS DE RESOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL

20.4.I.- **Método de Igualación:** (Para un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas).

Regla:

(1°) Se aisla una incógnita común de cada una de las ecuaciones, obteniéndose las ecuaciones explícitas correspondientes.

(2°) Se igualan las ecuaciones explícitas, obteniéndose una ecuación resolvente, obteniéndose el valor de una de las incógnitas o componentes.

(3°) Se obtiene el valor de la otra incógnita para obtener el par ordenado que conforma el conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + 1) - (x + y)(x + y - 1) = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I}) \\ (x + 2y)(x + 2y + 7) - (x + 2y)(x + 2y + 6) = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II}) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Simplificando la 1° ecuación; mediante la regla distributiva.**

$\Rightarrow \quad (x+y)^2 + (x+y) - (x+y)^2 + (x+y) = 6$

$\Rightarrow \quad 2(x+y) = 6 \quad , \boxed{x+y = 3}$ ....(III)

(2°) **Simplificando la 2° ecuación; mediante la regla distributiva:**

$\Rightarrow \quad (x+2y)^2 + 7(x+2y) - (x+2y)^2 - 6(x+2y) = 5$

$\Rightarrow \quad \boxed{x+2y = 5}$ ....(IV)

(3°) **Se dispone del sistema equivalente:**

$$\begin{cases} x+y = 3 & \text{.......................................(III)} \\ x+2y = 5 & \text{.......................................(IV)} \end{cases}$$

el cual se resolverá por **Igualación**

(4°) **Aislando y de (III) y (IV)**

De (III) : $y = 3 - x$ ....(V)

De (IV) : $y = \dfrac{5-x}{2}$ ....(VI)

(5°) **Igualando:** $3 - x = \dfrac{5-x}{2}$

(6°) **Resolviendo la ecuación en x:**

$6 - 2x = 5 - x$

$6 - 5 = 2x - x$

$\therefore \quad \boxed{1 = x}$

(7°) **Obtenemos y:** A partir de (V) sustituyendo el valor obtenido: $x = 1$

$\Rightarrow \quad y = 3 - 1$

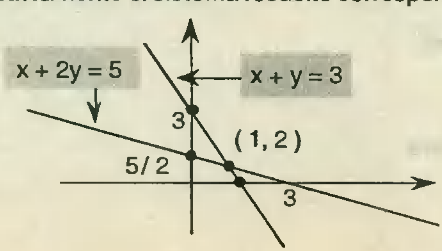
$\therefore \quad \boxed{y = 2}$

(8°) **El par ordenado será:** (1, 2)

(9°) El conjunto solución es finalmente:

$$\boxed{C.S. = \{(1,2)\}}$$

(10°) Geométricamente el sistema resuelto corresponde a:



20.4.II. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN (VALIDO PARA SISTEMAS DE 2 ECUACIONES Y 2 INCOGNITAS)

REGLA.-

(1°) Se aisla una de las incógnitas a partir del criterio de ver la que resulte del menor coeficiente o la más simple de aislar.

(2°) Al sustituir sobre la otra ecuación se obtiene una componente del par ordenado.

(3°) De sustituir sobre la ecuación de incógnita aislada se completa el par ordenado, el cual constituye el conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 13x + y = 33 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}) \\ 11x + 17y = 141 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Aislando "y" a partir de la 1° ecuación:**

$13x + y = 33$

$\Rightarrow \quad y = 33 - 13x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$

(2°) **Sustituyendo (III) sobre (II)**

$11x + 17(33 - 13x) = 141$

(3°) **Resolviendo la ecuación reducida o de incógnita única:**

$\Rightarrow \quad 11x + 561 - 221x = 141$

$\Rightarrow \quad -210x = 141 - 561$

$\Rightarrow \quad -210x = -420$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-420}{-210}$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

(4°) Sustituyendo, el valor hallado $x = 2$, sobre (III):

$y = 33 - 13(2)$

$y = 33 - 26$

$y = 7$

(5°) El par que resuelve el sistema será:

$(2, 7)$

(6°) Finalmente el conjunto solución será:

$\therefore \quad \boxed{S = \{(2,7)\}}$

20.4.III. METODO DE ADICION Y SUSTRACCION O REDUCCION (PARA UN SISTEMA DE 2 ECUACIONES Y 2 INCOGNITAS)

REGLA:

Este método tiene la finalidad de poder lograr una incógnita común en ambas ecuaciones tal que sus coeficientes sean opuestos, para ello se siguen los pasos siguientes:

(1°) **Una vez que el sistema esté ordenado en la forma:**

$$\begin{cases} ax + by = c \text{ .... (A)} \\ qx + ry = t \text{ .... (B)} \end{cases}$$

Elegimos a la incógnita "y" por eliminarse de modo que ésta deberá tener los coeficientes opuestos en ambas ecuaciones.

(2°) Obtenemos el M.C.M. de "b" y "r"

$\Rightarrow$ $M.C.M._{(b,r)} = br$

(3°) Multiplicamos la ecuación (A) por "r" que resulta de dividir el $\boxed{MCM \div b}$

$\Rightarrow$ $arx + br\,y = cr$ .... (A')

Multiplicamos la ecuación (B) por "b" que resulta de dividir el $\boxed{MCM \div a}$ y esta misma ecuación por (-1)

$\Rightarrow$ $bq\,x + br\,y = bt$ .... (B')

$\Rightarrow$ $(-bq)x + (-br)y = (-bt)$ .... (B")

(4°) Finalmente se logra el sistema

$$(ar)x + (br)y = cr$$
$$(-bq)x + (-br)y = (-bt)$$

o su equivalente:

$$\begin{cases} (ar)x + (MCM)y = cr \text{ .... (A')} \\ (-bq)x + (-MCM)y = (-bt) \text{ .... (B")} \end{cases}$$

(5°) Este sistema nos proporciona una ecuación de una sola incógnita si se les suma, el cual es el objetivo central.

(6°) Si se eligiera **x** como la incógnita a tener coeficientes opuestos se tendrá:

$$\begin{cases} MCM_{(a,q)}x + (bq)y = cq \text{ .... (D)} \\ -MCM_{(a,q)}x + (-ar)y = (-at) \text{ .... (E)} \end{cases}$$

El cual tiene también la opción de ser reducida de inmediato luego de la suma.

Ejemplo:

Resolver mediante el método de reducción el sistema de ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} 3x + 14y = 132 \text{ .... (I)} \\ 11x + 35y = 337 \text{ .... (II)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Elegimos a "x" como la incógnita que deberá ser reducida; para ello sus coeficientes son: 3 y 11**

$\Rightarrow \boxed{MCM_{(3,11)} = 33}$

(2°) **Multiplicando la ecuación (I) y (II) respectivamente por 11 y 3 los cuales resultan de dividir: MCM ÷ 3 = 11 y MCM ÷ 11 = 3, por lo que resultará luego:**

$$\begin{matrix} \text{Coeficientes} \\ \text{Opuestos} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 33x + 154y = 1452 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III}) \\ -33x - 105y = -1011 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{IV}) \end{cases}$$

(3°) **Sumando:** (III) y (IV)

$$\Rightarrow \quad 0x + 49y = 441$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{441}{49}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = 9}$$

(4°) **Sustituyendo el valor hallado:** $y = 9$ sobre (I) por tener los coeficientes más simples:

$$3x + 14(9) = 132$$

$$3x = 132 - 126$$

$$3x = 6$$

$$\boxed{x = 2}$$

(5°) El conjunto solución del sistema será finalmente:

$$\boxed{S = \{(2,9)\}}$$

A modo de comentario, los sistemas de ecuaciones poseen conjunto solución cuyos elementos son pares o grupos ordenados; redundando en afirmar que los sistemas carecen de raíces.

20.4.IV.- METODO DE LA ELIMINACION DE NEWTON.

Usualmente utilizado para resolver sistemas lineales de 3 incógnitas y 3 ecuaciones. Sea:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ px + qy + rz = t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ mx + ny + pz = u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Se trata de obtener el sistema equivalente mediante reducciones sucesivas que adopte la forma:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ Mx + Ky = H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ Rx = V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{cases}$$

En el cual se observa que la 5ª ecuación proporciona la 1ª componente del grupo ordenado y permite obtener las otras si se considera a (4) y (3) sucesivamente.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x + y + 9z = 83 \text{ ....} (1) \\ 5x + 12y + 9z = 155 \text{ ....} (2) \\ x + 2y + 4z = 47 \text{ ....} (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Eliminemos "z" para lo cual restamos las ecuaciones (2) - (1):**

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 12y + 9z = 155 \\ -x - y - 9z = -83 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{4x + 11y = 72} \text{ ....} (4)$$

(2°) **Eliminemos "z" entre (1) y (3), para lo cual dispongamos del MCM de los coeficientes 9 y 4 $\Rightarrow$ MCM = 36, por lo que los coeficientes apropiados serán 4 y 9 respectivamente:**

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{De } 4 \times (1): \ 4x + 4y + 36z = 332 \\ \text{de } -9 \times (3): \ -9x - 18y - 36z = -423 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 14y = -91} \text{ ....} (5)$$

(3°) **Eliminemos "y" entre (4) y (5) para ello dispongamos de:**

$$\begin{cases} 4x + 11y = 72 \text{ ....} (4) \\ -5x - 14y = -91 \text{ ....} (5) \end{cases}$$

El MCM de 11 y 14 es: 154; los coeficientes necesarios serán:

$$\text{MCM} \div 11 = 14$$
$$\text{MCM} \div 14 = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14 \times (4): \ 56x + 154y = 1008 \\ 11 \times (5): -55x - 154y = -1001 \end{cases}$$

Sumando : $\boxed{x = 7}$ .... (6)

(4°) **Se logra el sistema equivalente o sistema de Newton**

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 9z = 83 \text{ ....} (1) \\ 4x + 11y = 72 \text{ ....} (4) \\ x = 7 \text{ ....} (6) \end{cases}$$

(5°) **A partir de la última ecuación que proporciona: x = 7, sustituyendo en (4):**

$$\Rightarrow 4(7) + 11y = 72$$
$$\Rightarrow 28 + 11y = 72$$
$$\Rightarrow 11y = 44$$
$$\Rightarrow \boxed{y = 4}$$

(6°) Sustituyendo : $\boxed{x = 7}$, $\boxed{y = 4}$ 1ª y 2ª componentes sobre la ecuación (1)

$$\Rightarrow \quad 7 + 4 + 9z = 83$$
$$\Rightarrow \quad 9z = 83 - 11$$
$$\Rightarrow \quad 9z = 72$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{z = 8}$$

(7°) Finalmente tendremos:

$$\begin{array}{lccc} & x & y & z \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{La terna ordenada :} & (7, & 4, & 8) \end{array}$$

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{(7,4,8)\}}$$

20.4.V.- MÉTODO DE GABRIEL KRAMER O DE LOS DETERMINANTES DE LAS MATRICES CUADRADAS.

20.4.V.1.- **Teorema:**

Sea el sistema de incógnitas **x** e **y**

$$\begin{cases} ax + by = c \text{ ....} (1) \\ px + qy = r \text{ ....} (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta s},} \quad \boxed{y = \frac{\Delta y}{\Delta s}\ ,\ \Delta s \neq 0}$$

Donde:

Δs : Determinante del sistema.

Δx : Determinante de x

Δy : Determinante de y

x, y : Incógnitas.

A su vez:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ r & q \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 0{,}85x + 3{,}72y = 46{,}02 \text{ ....} (1) \\ 0{,}41x + 2{,}27y = 27{,}43 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al teorema expuesto obtengamos "x" (1ª componente).

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} 46,02 & 3,72 \\ 27,43 & 2,27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,85 & 3,72 \\ 0,41 & 2,27 \end{vmatrix}}$$

(2°) **Desarrollando los determinantes:**

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(46,02)(2,27)-(27,43)(3,72)}{(0,85)(2,27)-(0,41)(3,72)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{104,4654-102,0396}{1,9295-1,5252}$$

$$x = \frac{2,4258}{0,4043} \;, \quad \boxed{x=6}$$ **1ª Componente.**

(3°) **Obtengamos "y" ó 2ª componente reiterando el teorema:**

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} 0,85 & 46,02 \\ 0,41 & 27,43 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,85 & 3,72 \\ 0,41 & 2,27 \end{vmatrix}}$$

(4°) Desarrollando los determinantes

$$y = y = \frac{(0,85)(27,43)-(0,41)(46,02)}{0,4043}$$

$$y = \frac{23,3155-18,8682}{0,4043}$$

$$y = \frac{4,4473}{0,4043} \;, \quad \boxed{y=11}$$ 2ª Componente

(5°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{S = \{(6,11)\}}$$

20.4.V.2.- METODO DE KRAMER PARA UN SISTEMA DE 3 ECUACIONES Y 3 INCOGNITAS.

Sea:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = m_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ b_1x + b_2y + b_3z = m_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ c_1x + c_2y + c_3z = m_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \;, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s} \;, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta s} \quad ; \quad \Delta s \neq 0$$

Donde: Δx, Δy, Δs son los determinantes de las incógnitas y el sistema.

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + 1{,}21y + 8z = 83{,}42 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 1{,}31x + 2y + 9z = 95{,}31 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 4x + y + 3{,}14z = 37{,}40 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) De acuerdo al teorema de Kramer:

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 83{,}42 & 1{,}21 & 8 \\ 95{,}31 & 2 & 9 \\ 37{,}40 & 1 & 3{,}14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1{,}21 & 8 \\ 1{,}31 & 2 & 9 \\ 4 & 1 & 3{,}14 \end{vmatrix}}$$

(2°) Desarrollando los determinantes:

$$\Rightarrow x = \frac{(83{,}42)(2)(3{,}14)+(95{,}31)(1)(8)+(1{,}21)(9)(37{,}40)-(37{,}40)(2)(8)-(1)(9)(83{,}42)-(95{,}31)(1{,}21)(3{,}14)}{(1)(2)(3{,}14)+(1{,}31)(1)(8)+(1{,}21)(9)(4)-(4)(2)(8)-(1)(9)(1)-(1{,}31)(1{,}21)(3{,}14)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{523{,}8776 + 762{,}48 + 407{,}286 - 598{,}40 - 750{,}78 - 362{,}120814}{6{,}28 + 10{,}48 + 43{,}56 - 64 - 9 - 4.977214}$$

$$x = \frac{-17{,}657214}{-17.657214} = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 1}$$

(3°) Es recomendable, que el uso de los determinantes se limite, de modo que si sustituimos la componente: $\boxed{x = 1}$ sobre (1) y (2) tendremos:

$$\begin{cases} 1 + 1{,}21y + 8z = 83{,}42 \\ 1{,}31 + 2y + 9z = 95{,}31 \end{cases}$$

En el sistema de dos ecuaciones:

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}21y + 8z = 82{,}42 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 2y + 9z = 94 \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{cases}$$

(4°) Aplicando Kramer a (4) y (5)

$$\Rightarrow \; y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} 82,42 & 8 \\ 94 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,21 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}}$$

(5°) Desarrollando los determinantes

$$\Rightarrow \; y = \frac{(82,42)(9)-(94)(8)}{(1,21)(9)-(2)(8)}$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{741,78-752}{10.89-16}$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{-10,22}{-5,11}$$

$\Rightarrow \; \boxed{y = 2}$ 2ª Componente.

(6°) Sustituyendo las componentes obtenidas $x = 1$, $y = 2$ sobre la ecuación (1)

$$\Rightarrow \; 1 + 1,21(2) + 8(z) = 8,42$$

$$\Rightarrow \; 8z = 83,42 - 1 - 2,42$$

$$\Rightarrow \; 8z = 80$$

$\Rightarrow \; \boxed{z = 10}$ 3ª Componente

(7°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{S = \{(\underset{x}{\underset{\downarrow}{1}},\ \underset{y}{\underset{\downarrow}{2}},\ \underset{z}{\underset{\downarrow}{10}})\}}$$

20.4.VI.- METODO GRAFICO PARA EL SISTEMA DE 2 ECUACIONES SIMULTANEAS DE 2 INCOGNITAS DE 1ER GRADO

(1°) Sobre un sistema de ejes coordenados graficar cada una de las ecuaciones de 1er grado.

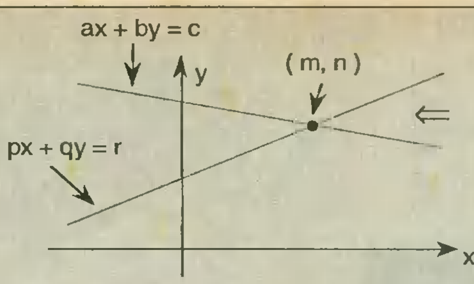
(2°) La intersección de las gráficas, define el par ordenado que constituye el conjunto solución del sistema.

(3°) A modo de discusión, este método tiene tres variantes posibles.

1er Caso: Si las gráficas se intersectan, existe solución única y el sistema será consistente limitado.

Ilustración: Sea el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$$

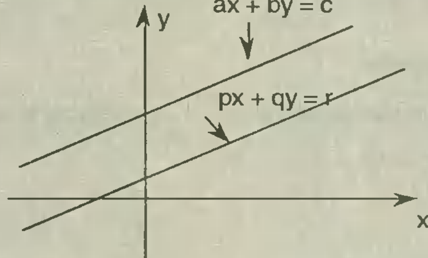


⇐ Constituye elemento único del conjunto solución, del sistema consistente limitado.

Relación: $\boxed{\dfrac{a}{p} \neq \dfrac{b}{q} \neq \dfrac{c}{r}}$

ó Relación de **Independencia** del sistema consistente limitado.

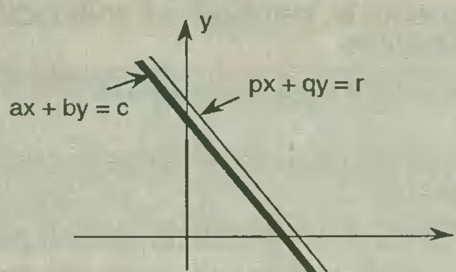
2do Caso: Si las gráficas resultan **paralelas**, no existe intersección por lo tanto no hay solución, el sistema será inconsistente.



Relación: $\boxed{\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} \neq \dfrac{c}{r}}$

o **relación de la dependencia del sistema inconsistente.**

3er Caso: Si las gráficas resultan **superpuestas**, existen infinitos puntos comunes y se entenderá que el conjunto solución tendrá infinidad de pares que verifican el sistema.



Relación: $\boxed{\dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}}$

Relación de la dependencia del sistema consistente ilimitado.

VEASE: Los ejercicios resueltos # 26 y # 27

20.4.VII.- METODO DEL ELIMINANTE DE BEZOUT (PARA UN SISTEMA DE 2 X 2)

(1°) Sea el Sistema de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} ax + by = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ px + qy = r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

(2°) **Se eligen dos parámetros m y n de modo que permitan eliminar una de las incógnitas del sistema:**

(3°) Multiplicando **m por la 1ª** y **n por la 2ª** ecuación respectivamente.

$$\Rightarrow \quad amx + bmy = mc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\Rightarrow \quad pnx + qny = rn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(4°) Sumando:

$$\boxed{(am + pn)x + (bm + qn)y = mc + rn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(5°) **Eliminando x con:** $am + pn = 0$ .... (6)

Se logra: $(bm + qn)y = mc + rn$ .... (7)

(6°) Utilizando (6) y (7) se logran obtener las componentes de los pares ordenados para establecer el conjunto solución.

Ejemplo:

Resolver mediante la eliminante de Bezout.

$$\begin{cases} 2x + 13y = 93 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 12x + 9y = 75 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Elegimos 2 parámetros m y n tales que permiten eliminar a "x".**

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \times m: \ 2mx + 13my = 93m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ (2) \times n: \ 12nx + 9ny = 75n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{cases}$$

(2°) **Sumando (3) y (4)**

$$\Rightarrow \boxed{(2m + 12n)x + (13m + 9n)y = 93m + 75n} \ldots\ldots (5)$$

(3°) **En la ecuación (5), consideramos que (2m+12n) es el eliminante de Bezout en relación a x.**

$$\Rightarrow 2m + 12n = 0, \quad \boxed{m = -6n}$$

(4°) **En la ecuación (5):**

$$\Rightarrow 0x + [13(-6n) + 9n]y = 93(-6n) + 75n \ \ldots\ldots\ldots (6)$$

(5°) **Resolviendo la ecuación (6):**

$$\Rightarrow [-78n + 9n]y = -558n + 75n$$

$$-69ny = -483n$$

$$y = \frac{-483n}{-69n}$$

$$\boxed{y = 7} \qquad \textbf{2ª Componente}$$

(6°) A partir de la ecuación (1), con $\boxed{y = 7}$

$\Rightarrow \quad 2x + 13(7) = 93$

$\Rightarrow \quad 2x = 93 - 91$

$\Rightarrow \quad 2x = 2$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$

(7°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{\text{C.S.} = \{(1,7)\}}$$

20.5. CONSISTENCIA DE UN SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES.

Teorema: Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ mx + ny = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Tales que:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

I.- Si: $\Delta s = 0 \,;\, \Delta x \neq 0 \,,\, \Delta y \neq 0$
El sistema será **absurdo o inconsistente**.

II.- Si: $\Delta s = \Delta x = \Delta y = 0$
El sistema será **consistente ilimitado o indeterminado**.

III.- Si: $\Delta s \neq 0 \wedge \Delta x \neq 0 \,,\, \Delta y \neq 0$
El sistema será, **consistente limitado.**

* Este análisis es análogo para un sistema de $n \times n$, $n > 2$.

Ejemplo:

Si el sistema:

$(m - 3)x + (m + 2)y = 2m + 3$

$(m - 1)x + (3m - 1)y = 5m + 1$

Es indeterminado, hallar el valor de "m" ; $m > 1$.

Solución:

(1°) Mediante el teorema

$\Delta s = 0 \,;\; \Delta x = \Delta y = 0$

$$\Rightarrow \Delta s = \begin{vmatrix} m-3 & m+2 \\ m-1 & 3m-1 \end{vmatrix} = 0$$

(2°) **Resolviendo:**

$\Rightarrow$ $(m-3)(3m-1)-(m+2)(m-1) = 0$

$\Rightarrow$ $3m^2-10m+3-m^2-m+2 = 0$

$\Rightarrow$ $2m^2-11m+5 = 0$

$\Rightarrow$ $(m-5)(2m-1) = 0\ ;\ m = 5\ ,\ m = 1/2$

(3°) **Con: $m = 5\ ,\ m > 1$**

Verificando el sistema:

$$2x+7y = 13$$
$$4x+14y = 26$$

Se trata de un sistema indeterminado por la dependencia de los coeficientes.

$\therefore$ $\boxed{m = 5}$

20.6. SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS DE GRADO SUPERIOR

Definición.- Son aquellos sistemas de ecuaciones en los cuales una de sus incógnitas por lo menos es de 2° grado o mayor.

Particularmente si en el sistema se aplica la definición y este resulta de 2° grado se le denomina sistema cuadrático.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x^2+19y^2+21xy+x+y = 43 \text{ .... } (1) \\ 7x^2+8y^2+32xy+11x+9y = 67 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Es un sistema cuadrático, de acuerdo a la definición.

20.6.1 RESOLUCION DE SISTEMAS CUADRATICOS

20.6.1. **1° CASO: Sistemas cuadráticos que comprenden una ecuación lineal.**

Se resuelve mediante sustituciones sucesivas, hasta lograr el conjunto solución correspondiente.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x^2+11y^2 = 45 \text{ .... } (1) \\ x+y = 3 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Se trata de un sistema cuadrático, con una ecuación lineal.**

(2°) **De la 1ª ecuación:**

$y = 3-x$ .... (3)

(3°) Sustituyendo (3) sobre (1)

$$\Rightarrow \quad x^2 + 11(3 - x)^2 = 45$$
$$\Rightarrow \quad 12x^2 - 66x + 54 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 11x + 9 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (2x - 9)(x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 1 \ , \quad x = 9/2$$

(4°) Se han obtenido dos primeras componentes, por ello obtengamos sus segundas correspondientes componentes:

Si: $x = 1$ Sustituyendo en la ecuación (3) se logra: $y = 3 - 1 = 2$

$\therefore$ $\boxed{\text{El par será: } (1, 2)}$

Si: $x = 2$ Sustituyendo en la ecuación (3) se logra: $y = 3 - 2 = 1$

$\therefore$ $\boxed{\text{El par será: } (2, 1)}$

(5°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{S = \{ (1, 2) , (2, 1) \}}$$

Comentario:

Los sistemas cuadráticos que poseen una ecuación lineal, son las más simples de resolver.

20.6.2. 2° CASO: Sistemas cuadráticos que comprenden ecuaciones de la forma:

$ax^2 + by^2 = c$, x e y incógnitas

Se resuelven como si fueran sistemas lineales.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} 3x^2 + 7y^2 = 34 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x^2 + 11y^2 = 47 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) Adopta la forma de un sistema lineal, si se hace el cambio:
$x^2 = m \quad \wedge \quad y^2 = n$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m + 7n = 34 \\ 4m + 11n = 47 \end{cases}$$

(2°) Aplicando la regla de Kramer:

$$\Rightarrow \ x^2 = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} 34 & 7 \\ 47 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{(34)(11)-(47)(7)}{(11)(3)-(4)(7)}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{374-329}{33-28}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{45}{5} = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

(3°) **Obtengamos y:**

$$\Rightarrow y^2 = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 34 \\ 4 & 47 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{(3)(47)-(4)(34)}{(3)(11)-(4)(7)}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{141-136}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$$

(4°) **Obtengamos los pares ordenados:**

$\Rightarrow$ (3, 1) , (3, -1) , (-3, 1) , (-3, -1)

Finalmente:

$$\therefore \boxed{S = \{(3,1)(3,-1)(-3,1)(-3,-1)\}}$$

20.6.3. **3° CASO: Sistemas cuadráticos homogéneos**

Son aquellos sistemas en los cuales las ecuaciones comprenden el modelo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

Se resuelve mediante el cambio: $y = mx$, el cual permitirá obtener una reducción del sistema en términos de m.

Ejemplo:

Resolver el sistema cuadrático:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 5xy = 44 \text{ .... } (1) \\ x^2 + 7y^2 - 11xy = 31 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Se trata de un sistema cuadrático homogéneo, por lo que hacemos el cambio:**

$$y = mx \text{ .... } (3)$$

(2°) **Realizamos la sustitución de la ecuación (3) sobre (1) y (2) de modo que lograremos reducir el sistema posteriormente:**

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3(mx)^2 + 5x(mx) = 44 \text{ .... } (4) \\ x^2 + 7(mx)^2 - 11x(mx) = 31 \text{ .... } (5) \end{cases}$$

(3°) **Ejecutando las sentencias:**

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3m^2x^2 + 5mx^2 = 44 \text{ .... } (4) \\ x^2 + 7m^2x^2 - 11mx^2 = 31 \text{ .... } (5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2 + 3m^2 + 5m)x^2 = 44 \text{ .... } (4) \\ (1 + 7m^2 - 11m)x^2 = 31 \text{ .... } (5) \end{cases}$$

(4°) **Dividiendo (4) ÷ (5)**

$$\Rightarrow \frac{\left(2+3m^2+5m\right)x^2}{\left(1+7m^2-11m\right)x^2} = \frac{44}{31}$$

Se logra la ecuación reducida o resolvente del sistema

$$\Rightarrow \frac{2+3m^2+5m}{1+7m^2-11m} = \frac{44}{31}$$

(5°) **Resolviendo la ecuación en "m"**

$$\Rightarrow 62 + 93m^2 + 155m = 44 + 308m^2 - 484m$$

$$\Rightarrow 215m^2 - 639m - 18 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} m & & -3 \\ 215m & & 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow m = 3 \quad ó \quad m = -6/125$$

(6°) **Los valores obtenidos se sustituyen sobre (4) y (3)**

Si: m = 3: $(2 + 3(3)^2 + 5(3))x^2 = 44$

$$44x^2 = 44$$

$$x^2 = 1$$

$$\boxed{x = \pm 1}$$

m = 3 sustituido sobre (3)

$$\Rightarrow \boxed{y = 3x} \text{ .... } (6)$$

Obtengamos los pares que resuelven al sistema con (6)

Si: $x = 1$: $y = 3(1) = 3 \quad \Rightarrow \boxed{1°\text{Par} = (1, 3)}$

Si: $x = -1$: $y = 3(-1) = -3 \quad \Rightarrow \boxed{2°\text{Par} = (-1, -3)}$

(7°) Si: $m = -\dfrac{6}{215}$: $\left(1+7\left(-\dfrac{6}{215}\right)^2 - 11\left(-\dfrac{6}{215}\right)\right)x^2 = 31$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{252}{46225}+\frac{66}{215}\right)x^2 = 31$$

$$\Rightarrow \left(\frac{60667}{46225}\right)x^2 = 31$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{46225}{1957}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{215}{\sqrt{1957}}$$ m sustituido sobre (3)

$\Rightarrow$ $m = {}^{-6}\!/_{215}$ sustituido sobre 3

$$\Rightarrow y = \frac{-6}{215} \quad \text{.................................(8)}$$

Obtengamos los pares que resuelven el sistema con (8):

$$\Rightarrow x = \frac{215}{\sqrt{1957}} \quad , y = -\frac{6}{215}\times\frac{215}{\sqrt{1957}} = \frac{-6}{\sqrt{1957}}$$

$$\boxed{1^r \text{ Par: } \left(\frac{215}{\sqrt{1957}}, \frac{-6}{\sqrt{1957}}\right)}$$

Si: $x = -\dfrac{215}{\sqrt{1957}}$: $y = -\dfrac{6}{215}\times\dfrac{-215}{\sqrt{1957}} = \dfrac{-6}{\sqrt{1957}}$

2° Par: $\left(\dfrac{-215}{\sqrt{1957}}, \dfrac{-6}{\sqrt{1957}}\right)$, no verifica el **sistema**.

(8°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\boxed{S = \left\{ (1,3)(-1,-3)\left(\frac{215}{\sqrt{1957}}, \frac{-6}{\sqrt{1957}}\right)\right\}}$$

20.6.4 **4° CASO: Sistemas cuadráticos simétricos o cíclicos**

Definición.- Son aquellos sistemas cuadráticos de 2 ecuaciones y 2 incógnitas en los cuales la permutación de sus incógnitas, hace que el sistema permanezca inalterable.

Para resolver estos sistemas se hace el cambio siguiente:

$x = U + V$ .... (1)

$y = U - V$ .... (2)

Los cuales hacen que el sistema se reduzca y permite obtener los pares correspondientes.

Ejemplo:

Resolver:

$$x^2 + y^2 - x - y = 2 \text{ ....} (1)$$
$$xy + x + y = 5 \text{ ....} (2) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) En el sistema consignado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 2 \text{ ....} (1) \\ xy + x + y = 5 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Probando la simetría

"x" se permuta con "y"

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - y - x = 2 \text{ ....} (1) \\ yx + y + x = 5 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

(2°) El sistema cuadrático no se alteró por lo que concluimos que el **sistema es simétrico**; realizamos el cambio:

$$x = U + V \text{ ....} (3)$$
$$y = U - V \text{ ....} (4)$$

U y V son parámetros auxiliares.

(3°) **Sustituyendo (3) y (4) en (1) y (2), se tendrá:**

$$\begin{cases} (U+V)^2 + (U-V)^2 - (U+V) - (U-V) = 2 \text{ ....} (5) \\ (U+V)(U-V) + (U+V) + (U-V) = 5 \text{ ....} (6) \end{cases}$$

(4°) **Simplificando:**

De (5)

$$\Rightarrow 2(U^2 + V^2) - U - V - U + V = 2$$
$$\Rightarrow 2U^2 + 2V^2 - 2U = 2$$
$$\boxed{U^2 + V^2 - U = 1} \text{ ....} (5)$$

De (6)

$$\Rightarrow U^2 - V^2 + U + V + U - V = 5$$
$$\Rightarrow \boxed{U^2 - V^2 + 2U = 5} \text{ ....} (6)$$

(5°) **Resolviendo el sistema compuesto por (5) y (6)**

Sumando:

$$\Rightarrow 2U^2 + U = 6$$
$$\Rightarrow 2U^2 + U - 6 = 0$$
$$\Rightarrow (2U - 3)(U + 2) = 0$$
$$\Rightarrow U = -2 \text{ ó } U = 3/2$$

(6°) **Proseguimos en el sistema (5) y (6)**

Si: U = -2: En la ecuación (5)

$$\Rightarrow \quad (-2)^2 + V^2 - (-2) = 1$$

$$V^2 + 6 = 1$$

$$V^2 = -5$$

$$V = i\sqrt{5} \;,\; V = -i\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ No generan componentes reales.

Si: U = 3/2: En la ecuación (6)

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 + V^2 - \left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{4} + V^2 - \frac{3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad V^2 = 1 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} \quad , V = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ Pares: } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) ; \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

(7°) A partir de los valores dados en los pares, restituimos x e y:

Con: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(x, y) = (2, 1)}$$

Con: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(x, y) = (1, 2)}$$

(8°) Finalmente

$$\therefore \quad \boxed{S = \{ (2, 1) , (1, 2) \}}$$

Comentario:

En todo sistema simétrico si el par (m, n) $\in$ S.

$\Rightarrow$ (n, m) $\in$ S

20.6.5. **5° CASO: Sistemas Trascendentes:**

Definición.- Aquellos en los cuales las incógnitas están afectadas de sentecias que involucran operaciones fuera de las 6 fundamentales.

Estas se resuelven usualmente mediante sutituciones **hasta lograr una ecuación resolvente o de una sola incógnita**.

Ejemplo:

Resolver:

$$\begin{cases} x^{x^2+6y^2-5xy} = 1 \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}) \\ y^{x-3y} = 1 \ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **A partir de la ecuación (I)**

$$x^{x^2+6y^2-5xy} = x^0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+6y^2-5xy = 0} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{III})$$

(2°) **A partir de la ecuación (II)**

$$\Rightarrow y^{x-3y} = y^0$$

$$\Rightarrow \boxed{x-3y = 0} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

(3°) **Resolviendo el sistema compuesto por III y (IV) que comprende una ecuación de 1^er^ grado:**

$$\boxed{x = 3y} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{V})$$

(4°) **De (V) sobre (III)**

$$\Rightarrow (3y)^2+6y^2-5y = 0$$
$$\Rightarrow 9y^2+6y^2-5y = 0$$
$$\Rightarrow 15y^2-5y = 0$$
$$\Rightarrow 5y(3y-1) = 0$$
$$\Rightarrow y = 0\,,\ y = 1/3$$

(5°) Obtenemos los pares del sistema:

Si: y = 0: Sustituido en V

$$\Rightarrow x = 3(0) = 0$$

$$\therefore \boxed{1^r \text{ Par: } (0,0)}$$

Si: y = 1/3: Sustituido en V

$$\Rightarrow x = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\therefore \boxed{2^\circ \text{ Par: } \left(1, \frac{1}{3}\right)}$$

(6°) El par (0, 0) no verifica el sistema

(7°) Verificando el par (1, 1/3)

$$1^{1+6\left(\frac{1}{9}\right)-5\left(\frac{1}{3}\right)}=1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-3\left(\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=1$$, este par verifica el sistema

(8°) Finalmente:

$$\therefore \quad \boxed{C.S.=\left\{\left(1,\frac{1}{3}\right)\right\}}$$

20.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

CAPITULO: SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS.

20.7.1. Ejercicio Explicativo:

Resolver mediante el uso de los determinantes, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax+y = a+1 \text{ .... } (1) \\ x+ay = a^2+\dfrac{1}{a} \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Recuerde:

El Teorema de Gabriel Kramer

Sea el sistema $\begin{cases} a_1x+a_2y = c_1 \text{ .... } (\mathrm{I}) \\ b_1x+b_2y = c_2 \text{ .... } (\mathrm{II}) \end{cases}$

Las incógnitas "x" e "y" se obtienen por las reglas

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\Delta_Y}{\Delta_s}} \quad ; \quad \boxed{y=\frac{\Delta_X}{\Delta_s}}$$

Donde:

$$\begin{cases} \Delta_Y = \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} & \text{Determinante de y} \\ \\ \Delta_X = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix} & \text{Determinante de x.} \\ \\ \Delta_S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & \text{Determinante del } \textbf{sistema} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **De acuerdo al Teorema de Kramer**

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

(2°) **Las incógnitas serán:**

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_Y}{\Delta_s} \quad ; \quad y = \frac{\Delta_X}{\Delta_s}$$

(3°) Realizando las sentencias en relación a "x"

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^2 + \frac{1}{a} & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a - a^2 - \frac{1}{a}}{a^2 - 1} = \frac{a - \frac{1}{a}}{a^2 - 1} = \frac{\cancel{a - \frac{1}{a}}}{a\left(\cancel{a - \frac{1}{a}}\right)} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{1}{a}}$$ **1ra componente**

(4°) Realizando las sentencias en relación a "y"

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a+1 \\ 1 & a^2 + \frac{1}{a} \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-(a+1) + \left(a^3 + 1\right)}{a^2 - 1} = \frac{-a + a^3}{a^2 - 1} = -a\frac{\left(a^2 - 1\right)}{a^2 - 1} = -a$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \ a}$$ **2da componente**

(5°) El conjunto solución será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{a}, \ a\right)\right\}}$$

20.7.2. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x - y = 11 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Recuerde:

(I) La ecuación cuadrática:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(II) La ecuación cuadrática se resuelve mediante preliminarmente factorización.

Solución:

(1°) **Se trata de un sistema cuadrático.**

De (2): $\boxed{y = 3x - 11}$ ....(3)

(2°) **Se obtiene una ecuación reducida si se constituye (3) en (1):**

$x^2 + (3x - 11)^2 = 13$

$x^2 + 9x^2 - 66x + 121 = 13$

$10x^2 - 66x + 108 = 0$

(3°) **De resolver la ecuación cuadrática se logra:**

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{18}{5} & \Rightarrow \quad y_1 = -\dfrac{1}{5} \\ x_2 = 3 & \Rightarrow \quad y_2 = -2 \end{cases}$$

(4°) **El conjunto solución será finalmente:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(\frac{18}{5}, -\frac{1}{5}\right); (3, -2)\right\}}$$

20.7.3. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6 & \text{......................} \quad (1) \\ x + 2y = -5 & \text{......................} \quad (2) \end{cases}$$

Recuerde:

El conjunto solución de todo sistema de ecuaciones está compuesto por grupos ordenados.

Solución:

(1°) **Resolviendo en "xy":**

De (1): $x^2y^2 + xy - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (xy + 3)(xy - 2) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \;\; v \\ xy = -3 \end{cases}$$

(2°) Se obtienen los sistemas componentes siguientes:

i) $\begin{cases} xy = 2 \text{ ....} (\alpha) \\ x + 2y = 5 \text{ ....} (\gamma) \end{cases}$ ii) $\begin{cases} xy = -3 \text{ ....} (\beta) \\ x + 2y = -5 \text{ ....} (\theta) \end{cases}$

(3°) Resolviendo cada sistema:

i) $y = \dfrac{2}{x}$ en (γ) ii) $y = -\dfrac{3}{x}$ en (θ)

$x + \dfrac{4}{x} = 5$ $x - \dfrac{6}{x} = -5$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ $x^2 + 5x - 6 = 0$

(4°) Se logra para cada caso:

$$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \qquad x_3 = -6 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -2 \qquad x_4 = 1 \Rightarrow y_4 = -3$$

x_1y_1 no satisfacen la ecuación (2):

(5°) El sistema tendrá por conjunto solución a:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{(-1,-2);\left(-6,\frac{1}{2}\right);(1,-3)\right\}}$$

20.7.4. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x^2 - y = 1 \text{ .... } (1) \\ x - y = -5 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **El sistema cuadrático se reduce si restamos las ecuaciones: (1) y (2)**

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$

(2°) Las 2as componentes de los pares se logran con la Ec. (2)

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 8$$
$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 3$$

(3°) El conjunto solución será finalmente:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(3,8);(-2,3)\}}$$

20.7.5. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} xy = 2 \text{ .... } (1) \\ xz = 3 \text{ .... } (2) \\ x^2 + z^2 = 10 \text{ .... } (3) \end{cases}$$

Recuerde:

Se denomina ecuación reducida de un sistema a la ecuación de una incógnita resultante del sistema en mención.

Solución:

(1°) Obteniendo la ecuación reducida del sistema

(2°) Aislando "z" de la 2ª ecuación

$$\boxed{z = 3/x} \text{ .... } (4)$$

(3°) **Sustituyendo (4) en (3)**

$$x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 10 \;\Rightarrow\; x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+3)(x+1)(x-1) = 0$$

(4°) **Se logra el siguiente grupo ordenado al considerar (1) y (4)**

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 & \Rightarrow & y_1 = \dfrac{2}{3} & \Rightarrow & z_1 = 1 \\ x_2 = -3 & \Rightarrow & y_2 = -\dfrac{2}{3} & \Rightarrow & z_2 = -1 \\ x_3 = 1 & \Rightarrow & y_3 = 2 & \Rightarrow & z_3 = 3 \\ x_4 = -1 & \Rightarrow & y_4 = -2 & \Rightarrow & z_4 = -3 \end{cases}$$

(5°) **El conjunto solución será finalmente:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(3, \frac{2}{3}, 1\right); \left(-3, -\frac{2}{3}, -1\right); (1, 2, 3); (-1, -2, -3)\right\}}$$

20.7.6. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} y - x = 3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y - z = 4 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Obteniendo la ecuación reducida del sistema.**

De (1): $y = 3 + x$ .... (α)

De (2): $z = (y - 4)$ .... (β)

De (α) y (β):

$\boxed{z = (x - 1)}$ .... (δ)

(2°) **Sustituyendo (α), (β) sobre (3)**

$$\Rightarrow x^2 + (3 + x)^2 + (x - 1)^2 = 30$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 10)(x - 2) = 0 \;;\quad x = 2, \; x = -\frac{10}{3}$$

(3°) **Los elementos necesarios para conformar el conjunto solución serán:**

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{10}{3} & y_1 = -\dfrac{1}{3} & z_1 = -\dfrac{13}{3} \\ x_2 = 2 & y_2 = 5 & z_2 = 1 \end{cases}$$

(4°) **Finalmente el conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(-\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{13}{3}\right); (2, 5, 1)\right\}}$$

20.7.7. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = 4{,}80 \text{ .... } (1)$$

$$\sqrt{x^2 - 2y^2} = 1 \text{ .... } (2)$$

Solución:

(1°) **La ecuación (1) muestra la diferencia de recíprocas por lo que conviene realizar el cambio:**

$$\boxed{\frac{x+y}{x-y} = a} \text{ .... } (3)$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} = \frac{24}{5} \ ; \quad x \neq y \ , \ x^2 - 2y^2 > 0$$

$$\Rightarrow 5a^2 - 24a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = 5 \ , \ a = -\frac{1}{5}$$

(2°) **Retornando a la relación:** $\frac{x+y}{x-y} = a$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = 5 \quad ; \quad y = \frac{2}{3}x \text{ .... } (4)$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = -\frac{1}{5} \quad ; \quad y = -\frac{3}{2}x \text{ .... } (5)$$

(3°) **Sustituyendo (4) en (2):**

$$x^2 - \frac{8}{9}x^2 = 1 \ , \ \frac{1}{9}x^2 = 1 \ ; \ x^2 = 9 \ , \ \boxed{x = \pm 3}$$

(4°) **Para obtener las parejas ordenadas, utilicemos (4) y (5):**

Si: $x = 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(3) = 2 \quad \therefore \quad \boxed{(3, 2)}$

Si: $x = -3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}(-3) = 2 \quad \therefore \quad \boxed{(-3, -2)}$

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{(3,2),(-3,-2)\}}$$

20.7.8. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = -15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Para obtener la ecuación reducida:**

$$y = mx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(2°) **Sustituyendo (3) en (1) y (2):**

$$x^2 + m^2x^2 = 34 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$mx^2 = -15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(3°) **Dividiendo (4) ÷ (5)**

$$\frac{\cancel{x^2}\left(1+m^2\right)}{m\cancel{x^2}} = \frac{34}{-15} \quad \Rightarrow \quad -15 - 15m^2 = 34\,m$$

$$\Rightarrow \quad 15m^2 + 34m + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (5m+3)(3m+5) = 0\,;\ m = -\frac{5}{3}\ ,\ m = -\frac{3}{5}$$

(4°) **En busca de los pares:**

Si: $m = -\frac{5}{3}$:

En (5) : $-\frac{5}{3}x^2 = -15\,, \quad x^2 = 9\,, \quad x = \pm 3$

En (3) : $y = -\frac{5}{3}(3) = -5 \quad \therefore \quad \boxed{(3, -5)}$

$y = -\frac{5}{3}(-3) = 5 \quad \therefore \quad \boxed{(-3, 5)}$

(5°) **Si:** $m = -\frac{3}{5}$:

En (5) : $\left(-\frac{3}{5}\right)x^2 = -15\,, \quad x^2 = 25\,, \quad x = \pm 5$

Sustituyendo x = 5, x = -5 sobre (3) : $y = -\frac{3}{5}(5) = -3 \quad \therefore \quad \boxed{(5, -3)}$

$y = -\frac{3}{5}(-5) = 3 \quad \therefore \quad \boxed{(-5, 3)}$

(6°) Finalmente:

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{(3,-5)(-3,5)(5,-3)(-5,3)\}}$$

20.7.9. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$(2x + y - 1) \div (3x + 2y + 11) = 1 \div 2$ .... (1)

$(5x - 3y + 4) \div (6x - 3y + 3) = 3 \div 4$ .... (2)

Solución:

(1°) **Consideraciones:**

$3x + 2y + 11 \neq 0 \quad \vee \quad 6x - 3y + 3 \neq 0$

(2°) **De la ecuación (1):**

$\Rightarrow \quad 4x + 2y - 2 = 3x + 2y + 11$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = 13}$

(3°) **De la ecuación (2):**

$\Rightarrow \quad 20x - 12y + 16 = 18x - 9y + 9$

$\Rightarrow \quad 2x - 3y + 7 = 0$ .... (3)

(4°) **A partir de: x = 13 sustituyendo sobre (3):**

$26 - 3y + 7 = 0 ; \quad \boxed{y = 11}$

(5°) Finalmente el conjunto solución será:

$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{(13, 11)\}}$

20.7.10. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\underbrace{2 - \frac{1}{3}(x + 5y)}_{(\alpha)} = \underbrace{4x + 2y + 5}_{(\beta)} = \underbrace{\frac{1}{4}[4 - 3(x - 7) + 10y - 27]}_{(\gamma)}$$

Solución:

(1°) **De (α) y (β):**

$13x + 11y + 9 = 0$ .... (1)

(2°) **De (β) y (γ):**

$19x - 2y + 22 = 0$ .... (2)

(3°) **De (1) y (2):**

$x = -\dfrac{52}{47} \quad ; \quad y = \dfrac{23}{47}$

(4°) El conjunto solución:

$\therefore \quad \boxed{C.S. = \left\{\left(-\dfrac{52}{47}, \dfrac{23}{47}\right)\right\}}$

20.7.11. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$(x + 2y - 3)(3x - 2y - 7) = 0$ .... (1)

$(2x - y - 4)(x - 2y + 5) = 0$ .... (2)

Recuerde:

El teorema del factor nulo.

Si: $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0 \quad \forall\ (a, b) \in \mathbb{R}$.

Solución:

(1°) A partir del sistema

i) $x + 2y - 3 = 0 \quad \vee \quad 3x - 2y - 7 = 0$

ii) $2x - y - 4 = 0 \quad \vee \quad x - 2y + 5 = 0$

(2°) Conformando los sistemas:

$$(\alpha)\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ 2x - y - 4 = 0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Resolviendo:

$x = 11/5 \quad , \quad y = 2/5$

$\therefore \left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$

$$(\beta)\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ x - 2y + 5 = 0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Resolviendo:

$x = 6 \quad , \quad y = 11/2$

$\therefore \left(6, \dfrac{11}{2}\right)$

$$(\gamma)\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ x - 2y + 5 = 0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Resolviendo:

$x = -1 \quad , \quad y = 2$

$\therefore (-1, 2)$

$$(\delta)\begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \ \ldots\ldots\ (1) \\ 2x - y - 4 = 0 \ \ldots\ldots\ (2) \end{cases}$$

Resolviendo:

$x = 1 \quad , \quad y = -2$

$\therefore (1, -2)$

(3°) Finalmente el sistema tendrá por conjunto solución:

$$\therefore \boxed{S = \left\{\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right); \left(6, \frac{11}{2}\right); (-1, 2); (1, -2)\right\}}$$

20.7.12. **Ejercicio Explicativo:**

Para qué valor de "a" el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + |a - 3|y = 73 \text{ .... } (1) \\ \quad x - y = -7 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Posee como solución al par ordenado: (3, 10)

Solución:

(1°) Sustituyendo: $x = 3 \wedge y = 10$ En (1)

$\Rightarrow \quad 3 + |a - 3|(10) = 73$

$|a - 3| = 7$ .... (a)

(2°) **Resolviendo:**

$(a - 3)^2 = 49 \quad ; \quad a^2 - 6a - 40 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 10 \quad ; \quad a = -4$

$\therefore$ Si a es 10 ó -4 el conjunto solución será (3, 10)

20.7.13. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2 \text{ .... } (1) \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Recuerde:

Se denomina ecuación reducida a toda aquella que resulta de un sistema y que a su vez posee una sola incógnita.

Solución:

(1°) **A fin de obtener la ecuación reducida, sumemos (1) + (2):**

$\Rightarrow \quad 3x^2 + 3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

$x_2 = -2$

(2°) **Obtenemos y:**

Para $x_1 = 1$ en (1):

$y^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad ; \quad y_2 = -1$

$\therefore \quad (1, 0) \quad ; \quad (1, -1)$

Para $x_2 = -2$ en (1):

$y^2 + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 0 \quad ; \quad y_4 = -1$

$\therefore \quad (-2, 0) \quad ; \quad (-2, -1)$

(3°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\therefore \quad \boxed{C.S. = \{(1,0)(1,-1)(-2,0)(-2,-1)\}}$$

20.7.14. Ejercicio Explicativo:

Determinar el valor de "b" y "B" que permite al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 10x - (4 + [\![b]\!])\ y = \dfrac{|B|}{4} & \text{.....................}\ (1) \\ 2x - (2[\![b]\!] - 19)\ y = \dfrac{|B| + 22}{60} & \text{.....................}\ (2) \end{cases}$$

Tener ∞ pares (x, y) que la verifiquen.

***Recuerde*:**

Sea: $ax + by = c$

$px + qy = r$

Será indeterminado si: $\Leftrightarrow \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = \dfrac{c}{r}$

Solución:

(1°) **De acuerdo al enunciado se deberá cumplir que las ecuaciones serán dependientes:**

$$\Rightarrow \frac{10}{2} = \frac{-(4 + [\![b]\!])}{-(2[\![b]\!] - 19)} = \frac{\frac{|B|}{4}}{\frac{|B| + 22}{60}} \text{.....................}(1)$$

(2°) **Resolviendo:**

$$\Rightarrow 5 = \frac{4 + [\![b]\!]}{2[\![b]\!] - 19}$$

$$\Rightarrow 10[\![b]\!] - 95 = 4 + [\![b]\!]$$

$$\Rightarrow 9[\![b]\!] = 99$$

$$\Rightarrow [\![b]\!] = 11$$

$$\therefore \quad \boxed{b \in [11, 12\rangle}$$

(3°) Además:

$$5 = \frac{\frac{|B|}{4}}{\frac{|B|+22}{60}} \quad ; \quad \frac{5\times 4}{60} = \frac{|B|}{|B|+22}$$

$\Rightarrow |B|+22 = 3|B| \ , \ |B| = 11$

$\therefore \ \boxed{B = 11 \text{ ó } B = -11}$

20.7.15. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x \div y = 3 \div 4 & \text{.....................} \ (1) \\ (x-1) \div (y+2) = 1 \div 2 & \text{.....................} \ (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Transformando el sistema**
De (1) y (2):

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \quad ; \quad y \neq 0 & \text{.....................} \ (3) \\ \dfrac{x-1}{y+2} = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad y \neq -2 & \text{.....................} \ (4) \end{cases}$$

(2°) Se obtiene:

De (3) y (4) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 & \text{.....................} \ (\alpha) \\ 2x - y - 4 = 0 & \text{.....................} \ (\gamma) \end{cases}$

(3°) Resolviendo el sistema compuesto por (α) y (γ)

$(\alpha) - (2\gamma)$ $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$

(4°) El conjunto solución será:

$\therefore \ \boxed{S = \{(6, 8)\}}$

20.7.16. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 7x - 3y - 8 = 0 & \text{.....................} \ (1) \\ 4x + 9y + 24 = 0 & \text{.....................} \ (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) Reduciendo el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 21x - \cancel{3y} - 24 &= 0 \\ 4x + \cancel{9y} + 24 &= 0 \end{aligned}\right\}$$
$$\overline{\qquad 25x = 0 \qquad}$$

(2°) Se logra a continuación

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

(3°) Finalmente:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(0, -\frac{8}{3}\right)\right\}}$$

20.7.17. **Ejercicio Explicativo:**

Determinar las ternas de valores cuyos elementos satisfacen al sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5z^2 = 0 \text{ ....} (1) \\ 7x^2 - 3y^2 - 15z^2 = 0 \text{ ....} (2) \\ 5x - 4y + 7z = 6 \text{ ....} (3) \end{cases}$$

$x, y, z \in \mathbb{N}$.

***Recuerde*:**

Si: $ax + by + cz = 0$ .... (1)

$mx + ny + pz = 0$ .... (2)

$$\Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ n & p \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}$$

Es un corolario del **Teorema del Gabriel Kramer.**

Solución:

(1°) Las ecuaciones (1) y (2) permiten aislar x^2, y^2, z^2, mediante el corolario referido .

(2°) Para el sistema se tendrá:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5z^2 = 0 \\ 7x^2 - 3y^2 - 15z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -15 \end{vmatrix}} = \frac{y^2}{-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -15 \end{vmatrix}} = \frac{z^2}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{30+15} = \frac{y^2}{45+35} = \frac{z^2}{-9+14} \quad \text{.........................} (4)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = z^2 \quad \text{.........................} (5)$$

(3°) Se logra tener:

$$\Rightarrow \boxed{z = +\frac{x}{3} \quad ; \quad y = +\frac{4}{3}x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(4°) La ecuación reducida será:

$$\Rightarrow \; 5x - 4\left(\frac{4}{3}x\right) + 7\left(\frac{x}{3}\right) = 6 \text{ , de reemplazar (5) sobre (3)}$$

$$\Rightarrow \; 15x - 16x + 7x = 18 \quad ; \quad x = 3$$

(5°) **Finalmente:**

$$\Rightarrow \text{ de (5) : } z = \frac{3}{3} = 1 \quad ; \quad y = \frac{4}{3} = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(3;4;1)\}}$$

20.7.18. Ejercicio Explicativo:

Resolver el sistema:

$$|x+1| + |y-1| = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$|x+1| - 4y = -4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$x, y \in Z$

Solución:

(1°) **Restando las ecuaciones (1) y (2)**

$$\Rightarrow \; |y-1| + 4y = 9$$

Si: $|a| = b \;\wedge\; b \geq 0$

$\Rightarrow \quad a = b \;\vee\; -a = b$

$$\Rightarrow \; |y-1| = 9 - 4y \;\wedge\; 9 - 4y \geq 0$$

$$\Rightarrow \; (|y-1|)^2 = (9-4y)^2 \;\wedge\; y \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \; (y-1)^2 - (9-4y)^2 = 0 \;\wedge\; y \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \; (8-3y)(5y-10) = 0 \;\wedge\; y \leq \frac{9}{4}$$

Se logra:

$$y_1 = \frac{8}{3} \quad ; \quad \boxed{y_2 = 2} \quad \wedge \quad y \leq \frac{9}{4}$$

(2°) **Sustituyendo en (2): $y_2 = 2$**

$|x+1| = 4$; ambos miembros al cuadrado

$$(x+1)^2 - 4^2 = 0$$
$$(x+5)(x-3) = 0$$

De aquí:

$$\begin{cases} x_1 = -5 & \Rightarrow (-5,2) \\ x_2 = 3 & \Rightarrow (3,2) \end{cases}$$

(3°) Finalmente el conjunto solución será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(-5,2);(3,2)\}}$$

(4°) Observe que la componente $y = 8/3$ es inconsistente con $y \leq 9/4$

20.7.19. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y} + \dfrac{4}{2x-3y} = 5 \text{ ....} (1) \\ \dfrac{15}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-3y} = 5 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Recuerde:

$$\frac{a}{b} \exists \quad \forall\, b \neq 0 \;\; ; \;\; (a, b) \in \mathbb{R}$$

Solución:

(1°) **Restricciones del sistema**

$$\begin{cases} 2x + y \neq 0 \text{ ....} (\alpha) \\ 2x - 3y \neq 0 \text{ ....} (\beta) \end{cases}$$

De (α) y (β): $\quad x \neq 0$
$\quad y \neq 0$

(2°) Restando las ecuaciones (1) y (2) del modo:
3(1) - (2):

$$\Rightarrow \frac{10}{2x-3y} = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x - 3y = 1} \text{ ....} (\gamma)$$

(3°) A su vez tendremos, en relación a (2) y (1):
2(2) - (1):

$$\frac{25}{2x+y} = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y = 5} \text{ ....} (\theta)$$

(4°) Resolviendo el sistema compuesto por (γ) y (θ):

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2,1)$$

(5°) Finalmente el conjunto solución será:

$\therefore \quad \boxed{S = \{(2,1)\}}$

20.7.20. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + \dfrac{9}{y} = 21 \text{ ....}(1) \\ \dfrac{18}{y} = 17 - 3x \text{ ....}(2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Restricción del sistema (1), (2)**

$\boxed{y \neq 0}$

(2°) **Reduciendo:**

$\Rightarrow$ 2(1) - (2):

Se logra:

$8x = 25 + 3x \quad \Rightarrow \boxed{x = 5}$

(3°) **Reemplazando en (2): x = 5**

$\Rightarrow \dfrac{18}{y} = 17 - 3(5)$

$\Rightarrow \boxed{y = 9}$

(4°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{S = \{(5, 9)\}}$

20.7.21. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \text{ ....}(1) \\ 3x - y = 15 \text{ ....}(2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Aislando "y" de la ecuación (2):**

$\Rightarrow \boxed{y = 3x - 15}$ ....(3)

(2°) **Sustituyendo (3) en (1):**

$$x^2 + (3x - 15)^2 = 25$$
$$\Rightarrow 10x^2 - 90x + 200 = 0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

(3°) **Para obtener los pares, sustituimos $x_1 = 4$ en (3):**

$$\Rightarrow y = 3(4) - 15$$
$$\boxed{y = -3} \Rightarrow \textbf{Par: } (4, -3)$$

Además sustituyendo $x_2 = 5$ en (3):

$$\Rightarrow y = 3(5) - 15$$
$$\boxed{y = 0} \Rightarrow \textbf{Par: } (5, 0)$$

(4°) **Finalmente:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(4,-3),(5,0)\}}$$

20.7.22. **Ejercicio Explicativo:**

Si:

$$\begin{cases} a(y+z) = x \text{ ....} (1) \\ b(z+x) = y \text{ ....} (2) \\ c(x+y) = z \text{ ....} (3) \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones simultáneas en x, y, z.

Calcular:

$E = ab + ac + bc + 2abc$

Comentario:

El corolario del Teorema de Kramer:

Sea:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \text{ ....} (1) \\ px + qy + rz = 0 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}$$

Solución:

(1°) Al ordenar:

$$\begin{cases} x - ay - az = 0 \text{ ....} (4) \\ bx - y + bz = 0 \text{ ....} (5) \\ -cx - cy + z = 0 \text{ ....} (6) \end{cases}$$

(2°) Según el corolario de Kramer:

$$\Rightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} -a & -a \\ -1 & b \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} 1 & -a \\ b & b \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ b & -1 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-ab-a} = \frac{y}{-b-ab} = \frac{z}{-1-ab} \text{ ....} (7)$$

(3°) De (7): $y = \left(\dfrac{-b-ab}{-ab-a}\right)x \ , z = \left(\dfrac{-1+ab}{-ab-a}\right)x \text{........} (8)$

Sustituyendo (8) en (6):

$$\Rightarrow -cx - c\left(\frac{-b-ab}{-ab-a}\right)x + \left(\frac{-1+ab}{-ab-a}\right)x = 0$$

(4°) Ejecutando las sentencias luego de simplificar x:

$-c(-ab - a) - c(-b - ab) - 1 + ab = 0$

$abc + ac + bc + abc + ab - 1 = 0$

$\therefore \quad \boxed{E = ab + ac + bc + 2abc = 1}$

20.7.23. Ejercicio Explicativo:

Se da el sistema relacionado por la serie de razones:

$$k = \underbrace{\frac{nx+(n+1)y}{3n+1} = \frac{(n-1)x+ny}{3n-2} = \frac{(n-2)x+(n-1)y}{3n-5} = \dots = \frac{x+2y}{4}}_{\text{"n" términos}}$$

Hallar: xy; $x, y \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{N}$; $k = 1$

Solución:

(1°) Si escribimos la serie de razones a partir del último término:

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{4} = \frac{2x+3y}{7} = \frac{3x+4y}{10} = \dots\dots = \frac{nx+(n+1)y}{3n+1}$$

(2°) Considerando las condiciones: k = 1

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{4} = 1 \ ; \ \frac{2x+3y}{7} = 1$$

(3°) **Se obtiene el sistema:**

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & \text{.....................} \ (1) \\ 2x + 3y = 7 & \text{.....................} \ (2) \end{cases}$$

(4°) **Resolviendo:**

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 & \text{.....................} \ (1) \times 2 \\ 2x + 3y = 7 & \text{.....................} \ (2) \end{cases}$$

(5°) **Se obtiene:**

$y = 1$

$\Rightarrow$ En (1): $x + 2(1) = 4$

$x = 2$

(6°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{xy = 2}$

20.7.24. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema:

$3[\![x]\!] + [\![y]\!] = 13$ ....(1)

$[\![x]\!] - [\![y]\!] = 3$ ....(2)

Recuerde:

$[\![x]\!] = n \quad \Rightarrow \quad n \leq x < n + 1$; $[\![x]\!]$ es el máximo entero.

Donde: n # entero $\in \mathbb{Z}$

Solución:

(1°) **El sistema se puede reducir al realizar lo siguiente:**

$\Rightarrow$ (1) + (2): $[\![x]\!] = 4$ ....(3)

$\Rightarrow$ (2) - (1): $[\![y]\!] = 1$ ....(4)

(2°) **De acuerdo a la definición de máximo entero.**

De (3):

$4 \leq x < 5$

De (4):

$1 \leq y < 2$

$\therefore \quad \boxed{S = \{(x,y)/4 \leq x < 5 \ ; \ 1 \leq y < 2\}}$

20.7.25. **Ejercicio Explicativo:**

Determinar el valor de "a" que permite al sistema:

$$\begin{cases} x + (2 - |a|)y = \dfrac{3}{2}a & \text{.....................(1)} \\ 2x - (3a - 14)y = 3a & \text{.....................(2)} \end{cases}$$

Tener infinitas soluciones.

***Recuerde*:**

(1°) En un **sistema indeterminado** de 2 x 2 como:

$$\begin{cases} ax + by = c & \text{.....................(I)} \\ mx + ny = p & \text{.....................(II)} \end{cases}$$

Deberá verificarse que:

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \text{cte}}$$

(2°) Si: $|a| = b \quad , \quad b > 0$

$\Rightarrow \quad a^2 = b^2$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la condición:**

$$\frac{1}{2} = \frac{2-|a|}{-(3a-4)} = \frac{\frac{3}{2}a}{3a} \quad \text{.....................(1)}$$

(2°) **Resolviendo (1):**

$$\frac{1}{2} = \frac{2-|a|}{-3a+14}$$

$\Rightarrow \quad 4 - 2|a| = -3a + 14$

$\Rightarrow \quad 2|a| = 3a - 10 \; ; \; 3a - 10 \geq 0$

(3°) **De acuerdo al Teorema:**

$$4a^2 = (3a - 10)^2 \qquad \wedge \qquad a \geq \frac{10}{3}$$

$$(2a - 3a + 10)(2a + 3a - 10) = 0 \qquad \wedge \qquad a \geq \frac{10}{3}$$

$$a = 10 \; ; \; a = 2 \qquad \wedge \qquad a \geq \frac{10}{3}$$

$\therefore$ $\boxed{a = 10 \text{ Permite que el sistema sea indeterminado.}}$

20.7.26. **Ejercicio Explicativo:**

¿Para qué valor de "m" el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + my = 4 & \text{.....................(1)} \\ x - 2y = 3 & \text{.....................(2)} \end{cases}$$

es inconsistente?

***Recuerde*:**

Un sistema inconsistente o absurdo se caracteriza por:

$$\begin{cases} \Delta s = 0 & \text{..............................(I)} \\ \Delta x \neq 0 & \text{..............................(II)} \\ \Delta y \neq 0 & \text{..............................(III)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Para que se verifique la condición, se deberá cumplir el sistema siguiente:**

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ....(1)}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & m \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ....(2)}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ....(3)}$$

(2°) **Resolviendo dicho sistema:**

De (1): $-2 - m = 0 \qquad \therefore \qquad m = -2$

En (2): $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 6 = -2 \neq 0$

De (3): $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$

(3°) **Finalmente:**

$\therefore$ $\boxed{m = -2 \text{ para la inconsistencia}}$

(4°) **Verificación:** con $\boxed{m = -2}$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 & \text{..................................(1)} \\ x - 2y = 3 & \text{..................................(2)} \end{cases}$$

Al restar:

$$\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -x + 2y = -3 \\ \hline 0 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $0 = 1$ **UN ABSURDO**

20.7.27. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 - 5(y - x) = 502 & \text{.....................} \ (1) \\ 3xy + 7(x - y) = 77 & \text{.....................} \ (2) \end{cases}$$

$x, y \in Z$.

Comentario:

Este ejemplo nos muestra como los sistemas escapan a la posibilidad de ser resueltos por los métodos para los casos standares (homogéneos, simétricos, etc.); por lo cual será necesario sin embargo de lo anterior, buscar la ecuación reducida mediante cambios razonables.

Solución:

(1°) De (1) - 6 (2) Se logra una ecuación virtualmente reducida:

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 + 5(x - y) = 502 \text{ ....} (1) \\ \underline{18xy + 42(x - y) = 462} \text{ ....} 6 \times (2) \\ \text{Restando: } 9(x - y)^2 - 37(x - y) = 40 \end{cases}$$

(2°) **Haciendo el cambio**

$x - y = z$ ....(3)

$\Rightarrow$ $9z^2 - 37z - 40 = 0$

$\Rightarrow$ $9z^2 - 37z - 40 = 0$; aplicando aspas

$$\begin{array}{ccc} 9z & & 8 \\ & \times & \\ z & & -5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $(z - 5) (9z + 8) = 0$

$\Rightarrow$ $z = 5 \ \vee \ z = \dfrac{-8}{9}$

(3°) **Se tiene el sistema siguiente:**

Si: $z = x - y = 5$

Sustituido sobre (2)

$\Rightarrow$ $3xy + 7(5) = 77$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 5 \text{ ....} (\alpha) \\ xy = 14 \text{ ....} (\beta) \end{cases}$$

(4°) Resolviendo el sistema (α), (β).

$\Rightarrow$ de (α): $\boxed{y = x - 5}$ ....(γ)

$\Rightarrow$ En (β): $x(x - 5) = 14$

$\Rightarrow$ Se obtiene: $x^2 - 5x - 14 = 0$; $x = 7$; $x = -2$

(5°) **Los pares ordenados serán: (7; 2); (-2; -7)**

(6°) **Si: $z = \frac{-8}{9}$:**

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{-8}{9} \text{ ....} (\delta) \\ \\ xy = \dfrac{749}{27} \text{ ....} (\varepsilon) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Los elementos de los pares ordenados de (δ) y (ε) no pertenecen a Z.

(7°) **El conjunto solución será únicamente:**

$\therefore$ $\boxed{S = \{(7; 2); (-2; -7)\}}$

20.7.28. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 20 \text{ ....} (1) \\ x^4 + y^2 = 20 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{R}$.

Solución:

(1°) **Igualando:**

(1) = (2):

$\Rightarrow x^2 + y^4 = x^4 + y^2$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = x^4 - y^4$

$\cancel{(x^2 - y^2)} = \cancel{(x^2 - y^2)}(x^2 + y^2)$

(2°) **Logramos las ecuaciones siguientes:**

(i) $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow y = |x|$

(ii) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$ .... (3)

(3°) **Posteriormente:**

De (i): $x > 0 \Rightarrow y = x$ .... (4)

$\vee$

$x < 0 \Rightarrow y = -x$ .... (5)

(4°) **De (4) en (1):** $x^4 + x^2 - 20 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \qquad x_3, x_4 \notin \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases} \qquad \therefore \boxed{S = \{(2;2); (-2;-2)\}}$$

(5°) De (ii): $1 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$

En (2): $x^4 - x^2 - 19 = 0$

$$\left\{ x_5 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{77}}{2}} \quad ; \quad x_6 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{77}}{2}} \right.$$

$\therefore \quad \boxed{\{x_5, x_6\} \notin [-1, 1]}$

(6°) **Finalmente:**

$\therefore \quad \boxed{S = \{(2, 2); (-2, -2)\}}$

20.7.29. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^{x^2-y^2+8x+1} = 1 & \text{.....................(1)} \\ 2^y = 8(2^x) & \text{.....................(2)} \end{cases}$$

***Recuerde*:**

$a^n = a^k \quad ; \quad a \neq \{(0; 1)\}$

$\Rightarrow \quad n = k$

Además: $1 = m^0 \quad ; \quad m \neq 0$

Solución:

(1°) **Para lograr la ecuación reducida del sistema realizamos lo siguiente:**

De (1):

$x^{x^2-y^2+8x+1} = x^0$; siempre que $x \neq 0 \wedge x \neq 1$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 8x + 1 = 0$ ....(α)

(2°) **Además podemos tener:**

De (2):

$2^y = 2^{3+x}$

$\Rightarrow \quad y = 3 + x$ ....(β)

(3°) **Posteriormente:**

(β) en (α):

$x^2 - (3 + x)^2 + 8x + 1 = 0$

(4°) **Resolviendo se logra: $2x - 8 = 0$**

$\Rightarrow \quad x = 4$;

$\Rightarrow \quad y = 3 + 4 = 7$

$\therefore \quad \boxed{S = \{(4; 7)\}}$

20.7.30. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = 35 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

***Recuerde*:**

En todo sistema cuadrático F(x, y) homogéneo, es importante el cambio: $y = Kx$

Solución:

(1°) **Por ser un sistema cuadrático homogéneo:**

Hacemos: $y = Kx \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$

$\Rightarrow\ x^2 - K^2x^2 = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$

$Kx^2 = 35 \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$

(2°) **De dividir (B) entre (C):**

$$\Rightarrow \frac{x^2\left(1-k^2\right)}{kx^2} = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{1-k^2}{k} = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow 35K^2 + 24K - 35 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 7K & -5 \\ 5K & 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow (7k - 5)(5k + 7) = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{5}{7} \quad \text{ó} \quad K = -\frac{7}{5}$$

(3°) **Obtenemos los pares ordenados correspondientes:**

$\Rightarrow$ Si $K = \frac{5}{7}$ en (C): $\frac{5}{7}x^2 = 35 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 7$

De A: $y = \frac{5}{7}(\pm 7) = \pm 5$

$\therefore$ $\boxed{\text{Pares: } (7, 5), (-7, -5)}$

(4°) Si: $K = -\frac{7}{5}$ en (C): $-\frac{7}{5}x^2 = 35$, $x^2 = -25$, $x \in C$

$$\therefore \boxed{S = \{(7,5),(-7,-5)\}}$$

20.7.31. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$x^2 + y^2 + 4(x - y) = 122$ ....(1)

$3(x - y) + xy = 57$ ....(2)

Solución:

(1°) Poniendo al sistema en función de **(x - y)** y de **xy** se tendrá que previamente sumando "-2xy" a la ecuación (1)

$x^2 + y^2 - 2xy + 4(x - y) = 122 - 2xy$

$\Rightarrow (x - y)^2 + 4(x - y) = 122 - 2xy$ ....(3)

Además:

$3(x - y) + xy = 57$ ....(4)

(2°) Eliminando xy, luego de multiplicar por -2 a la ecuación (4):

$\Rightarrow (x - y)^2 + 4(x - y) = 122 - 2xy$ ....(3')

$\Rightarrow -6(x - y) - 2xy = -114$ ....(4')

Sumando: (3'+4')

$\Rightarrow (x - y)^2 - 2(x - y) - 8 = 0$

(3°) Resolviendo en x - y:

$[(x - y) - 4] [(x - y) + 2] = 0$

$x - y = 4$ ó $x - y = -2$ ....(5)

(4°) Se tendrá a su vez los sistemas, luego de considerar la ecuación (4)

$\Rightarrow 3(4) + xy = 57 \quad \Rightarrow xy = 45$

$\Rightarrow x - y = 4 , xy = 45$

$\Rightarrow (9, 5), (-5, -9)$ ....(6)

(5°) De modo análogo:

$x - y = -2 \quad \Rightarrow xy = 63$

$\Rightarrow (7, 9) , (-9, -7)$ ....(7)

(6°) De (6) y (7)

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(9, 5),(-5,-9),(7, 9),(-9,-7)\}}$$

20.7.32. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver y verificar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{y} = 31 \text{ ....(1)} \\ \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{11}{y} = -27 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Haciendo el cambio sgte.:**

$$\frac{1}{y} = B \ \wedge \ \frac{1}{x} = A$$

$\Rightarrow$ Reemplazando en el sistema:

$5A + 7B = 31$ .... (I)
$3A - 11B = -27$ .... (II)

(2°) **Resolviendo el sistema obtenido:**

$$\begin{array}{rcl} 3 \times (5A + 7B) & = & (31)\,3 \\ 5 \times (3A - 11B) & = & (-27)\,5 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 15A + 21B = 93 \\ 15A - 55B = -135 \\ \hline \Rightarrow \quad 76B = 228 \end{array}$$

$\therefore \quad \boxed{B = 3}$

De (I) : $5A + 7(3) = 31$, $\boxed{A = 2}$

(3°) **Reemplazando en (1) los resultados obtenidos:**

$$\frac{1}{x} = 2 \quad x = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{1}{y} = 3 \quad y = \frac{1}{3}$$

(4°) **El conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}}$$

20.7.33. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{17}{4} \text{ ....(1)}$$

$$x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 \text{ ....(2)}$$

Solución:

(1°) **Condición esencial:**

$x^2 - y^2 \geq 0$

(2°) **La ecuación (1) posee elementos recíprocos, por lo que el cambio siguiente resulta apropiado:**

$$\boxed{a = \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}} \text{ ....(3)}$$

$$\Rightarrow \ a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow\ 4a^2 - 17a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow\ (4a - 1)(a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow\ a = 4\ ,\quad a = \frac{1}{4}$$

(3°) **Retornando al cambio en (3)**

$$\Rightarrow a = \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = 4\ ,\quad y = \pm\frac{4}{5}x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Asimismo:

$$\Rightarrow a = \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{1}{4}\ ;\ y = \pm\frac{4}{5}x$$

(4°) **A partir de (2):**

$$\left(x^2+xy+4\right) + \sqrt{x^2+xy+4} - 56 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+xy+4}+8\right)\left(\sqrt{x^2+xy+4}-7\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+xy+4} = -8}_{x,\ y\ \in\ \phi}\ ;\quad \sqrt{x^2+xy+4} = 7\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

(5°) **En síntesis disponemos del sistema:**

$$\begin{cases} x^2 + xy + 4 = 49\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5) \\ y = \pm\frac{4}{5}x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6) \end{cases}$$

(6°) **De sustituir (4) en (5)**

$$x^2 + \frac{4x^2}{5} = 45$$

$$\frac{9x^2}{5} = 45$$

$$\therefore\quad \boxed{x = \pm 5}$$

(7°) **En busca de los pares ordenados:**

Si: $x = 5$: Sustituyendo en (4)

$$\Rightarrow\ y = \frac{4}{5}(5)\ ,\quad y = 4 \qquad \therefore\ \boxed{(5, 4)}$$

Si: $x = -5$: Sustituyendo en (4)

$$\Rightarrow\ y = \frac{4}{5}(-5)\ ,\quad y = -4 \qquad \therefore\ \boxed{(-5, -4)}$$

Si: $y = -\dfrac{4}{5}$ sustituyendo en (5)

$$x^2 - \frac{4}{5}x^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{5} = 45 \quad , \quad x = \pm 15$$

Si : $x = 15$ en (4)

$$y = \pm\frac{4}{5}(\pm 15) = \pm 12 \qquad \therefore \quad \boxed{(15, -12)\ ,\ (-15, 12)}$$

(8°) El conjunto solución será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(5,4),(-5,-4),(15,-12),(-15,12)\}}$$

20.7.34. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = x^2y^2 + 13 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1) \\ x^2 + y^2 = xy + 3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases} \qquad x \neq -\sqrt{2+\sqrt{3}} \ ; \ x \neq -\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Solución:

(1°) **De (2) al cuadrado:**

$$(x^2 + y^2)^2 = (xy + 3)^2$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = x^2y^2 + 6xy + 9 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

(2°) **De sustituir (1) en (3), pues:**

$$\Rightarrow x^4 + y^4 = x^2y^2 + 13$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2y^2} + 13 + 2x^2y^2 = \cancel{x^2y^2} + 6xy + 9$$

$$\Rightarrow 2x^2y^2 - 6xy + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2y^2 - 3xy + 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} xy & \diagdown\!\!\!\diagup & -2 \\ xy & & -1 \end{array}$$

$$xy = 2 \ \text{ó} \ xy = 1$$

(3°) **Se tendrán los sistemas siguientes:**

$$xy = 2 \ ; \ x^2 + y^2 = 5 \quad \Rightarrow \ (2, 1)\ ,\ (-2, 1)$$

$$xy = 1 \ ; \ x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

(4°) **El conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{(2,1),(-2,-1),\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}\right),\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right\}}$$

20.7.35. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ xy = 12^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ yz = 8^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Ordenando la ecuación (#1)**

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{xy+xz+yz}{xyz} = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(2°) **Sustituyendo (2) y (3) en (4):**

$$\Rightarrow \frac{1}{12}+xz+\frac{1}{8} = 9\times 8^{-1}x$$

$$\Rightarrow xz-\frac{9}{8}x = -\frac{5}{24} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(3°) **De dividir (2) y (3)**

$$\Rightarrow \frac{xy}{yz} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\text{ó } x = \frac{2}{3}z$$

(4°) **de (5) y (6):** $\frac{2}{3}z^2 - \frac{9}{8}.\frac{2}{3}z = -\frac{5}{24}$; $(8z-5)(2z-1) = 0$

(5°) De lograr las ternas: $\boxed{\text{C.S.} = \left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{12},\frac{1}{5},\frac{5}{8}\right)\right\}}$

20.7.37. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} 2|x| - 3|y| + 4|z| = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ |x| + 2|y| - 3|z| - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3|x| + |y| - 2|z| - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Hacemos el cambio de:**

$|x| = a\,,\ |y| = b\,,\ |z| = c$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 2a - 3b + 4c &= 0 \\ a + 2b - 3c &= 2 \\ 3a + b - 2c &= 3 \end{aligned}$$

(2°) **Aplicando la regla de Kramer se logra:**

$a = |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 2$

$b = |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2$

$c = |z| = 1 \Rightarrow z = \pm 1$

(3°) **Obtenemos las ternas ordenadas:**

$$\therefore \boxed{S = \underbrace{\{(1,2,1),(1,2,-1),(1,-2,1),(-1,2,1),(1,-2,-1),(-1,-2,-1),(-1,-2,1),(-1,2,-1)\}}_{\text{8 ternas}}}$$

20.7.37. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+5}{-2} \text{ ....} (1) \\ x + 3y - 4z = -13 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) **Reduciendo a términos de (z)**

$$\Rightarrow x = \frac{z+5}{-2} \text{ ....} (3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4(z+5)}{-2} + 3 \text{ ....} (4)$$

Lo cual origina la ecuación siguiente:

de (3) y (4) en (2):

$$\Rightarrow \frac{z+5}{-2} + 3\left[\frac{4}{-2}(z+5) + 3\right] - 4z = -13$$

(2°) **Resolviendo:** $13z + 8z + 21 = 0\,,\quad 21z + 21 = 0$

$\Rightarrow \boxed{z = -1}$

(3°) **Sustituyendo el valor obtenido en (3) y (4)**

$$x = \frac{-1+5}{-2} = -2 \qquad\qquad y = \frac{4(-1+5)}{-2} + 3 = -5$$

(4°) **El conjunto solución será:**

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(-2,-5,-1)\}}$$

20.7.38. **Ejercicio Explicativo:**

Dado el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3xy = 4(x+y) \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5yz = 12(y+z) \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 2xz = 3(x+z) \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Determinar el conjunto solución.

Solución:

(1°) **Al ordenar:**

$$\frac{3}{4} = \frac{x+y}{xy}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{y+z}{yz}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x+z}{xz}$$

(2°) **Homogenizando en el 1r miembro y descomponiendo en el 2°.**

$$\Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

(3°) **Sumando y simplificando:**

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad z = 6$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} = \frac{1}{x} + \frac{5}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{6}{12} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{11}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{3}{12} \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \{(2, 4, 6)\}}$$

20.7.39. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x - 33 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

(1°) $5x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x - 33 = 0$ .... (1)

$x + y = 3$ .... (2)

en (γ) : $\underbrace{5x^2 + 2xy - 3y^2} = 4x + 33$

$(5x - 3y)(x + y) = 4x + 33$ .... (3)

(2°) Luego de sustituir (2) en (3)

$\Rightarrow (5x - 3y)(3) = 4x + 33$

$\Rightarrow 15x - 9y = 4x + 33$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 11x - 9y = 33 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ 9x + 9y = 27 \;\ldots\ldots\ldots\ldots 9(2) \end{cases}\right\} \text{Sumando:}$$

$20x = 60$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$\therefore$ $\boxed{\text{C.S.} = \{ (3, 0) \}}$

20.7.40. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 5y^2 = 6 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 5x + 6y = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$x, y\ m \in Q$

Solución:

(1°) Hacemos el cambio:

$\boxed{y = mx}$ ......(I) y sustituyendo en la ecuación: (1)

$\Rightarrow 3x^2 + 2x(mx) + 5(mx)^2 = 6$

$\Rightarrow 3x^2 + 2mx^2 + 5m^2x^2 = 6$

$\Rightarrow x^2(3 + 2m + 5m^2) = 6$ .... (3)

(2°) **Sustituyendo en (2), y = mx**

$5x + 6mx = 1$

$\Rightarrow x^2(5 + 6m)^2 = 1^2$ .... (4)

(3°) De dividir (4) y (3)

$$\Rightarrow \frac{x^2\left(3 + 2m + 5m^2\right)}{x^2\left(25 + 60m + 36m^2\right)} = \frac{6}{1}$$

$\Rightarrow 3 + 2m + 5m^2 = 150 + 360m + 216m^2$

$\Rightarrow 211m^2 + 358m + 147 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 211m & \times & 147 \\ m & & 1 \end{array}$$

$(m + 1) (211 m + 147) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m = -1} \quad ; \quad \boxed{m = -\frac{147}{211}}$$

(4°) Las parejas serán (-1, 1) y $\left(\frac{211}{173}, -\frac{147}{173}\right)$

$$\therefore \quad \boxed{S = (-1,1), \left(\frac{211}{173}, -\frac{147}{173}\right)}$$

20.7.41. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\ 1/12 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4x^2 + 9y^2 = 5 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$x, y \in Q$

Solución:

(1°) **Al ordenar el sistema:**

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{25}{2} \quad ; \quad \text{con } \boxed{\frac{x}{y} = m} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\Rightarrow m + \frac{1}{m} = \frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 25m + 12 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 4m & -3 \\ 3m & -4 \end{array}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{4} \quad , \quad m = \frac{4}{3}$$

(2°) **Cálculo de parejas:**

$$\Rightarrow \text{Si: } \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \quad \wedge \quad 4x^2 + 9y^2 = 5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Si: } \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \quad \wedge \quad 4x^2 + 9y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x \in Q$$

(3°) El conjunto solución será:

$$\therefore \quad \boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)\right\}}$$

20.7.42. **Ejercicio Explicativo:**

Resolver:

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{y^2}{(1+xy)^2}=\dfrac{17}{4} \quad ....(1) \\ y^{-2}-3x^2=-2 \quad ....(2) \end{cases}$$

$x, y, \in Q$

Solución:

(1°) **Ordenando la 1ª ecuación:**

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{\dfrac{1+xy}{y}}\right)^2=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2}=\frac{17}{4} \quad ; \text{ con el cambio } \boxed{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2=a}$$

$$\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{17}{4} \quad ; \quad 4a^2-17a+4=0$$

$$\Rightarrow a=4 \quad , \quad a=\frac{1}{4}$$

(2°) **Restituyendo:** $x+\dfrac{1}{y}=\pm 2 \quad ; \quad x+\dfrac{1}{y}=\pm\dfrac{1}{2}$

(3°) **Se dispondrán de los siguientes sub-sistemas**

$$\Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{y}=2 \ \wedge \ \frac{1}{y^2}-3x^2=-2}$$

$$\Rightarrow (1,1), \left(-3, \frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{y}=-2 \wedge \frac{1}{y^2}-3x^2=-2}$$

$$\Rightarrow (-1,-1), \left(3, -\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{y^2}-3x^2=-2 \quad ; \quad x}$$

$$\Rightarrow x \notin Q$$

$$\Rightarrow \boxed{x+\frac{1}{y}=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{y^2}-3x^2=-2}$$

$$\Rightarrow \quad x \in Q$$

$$\therefore \quad \boxed{S=\left\{(1,1),\left(-3,\frac{1}{5}\right),\left(-3,-\frac{1}{5}\right),(-1,-1)\right\}}$$

20.7.43. **Ejemplo Explicativo:**

Los coeficientes de "x" e "y" del sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{cases} (a+3b)x+y = 3b-2a \text{ ....} (1) \\ (2x+(3a+7b)y = 5b^{b-a}+10a+5 \text{ ....} (2) \end{cases}$$

Son 5 y 11 respectivamente.

Calcular : $a+b+x+y$

Solución:

(1°) **Del enunciado se desprende:**

Coef. de x: $a+3b = 5$ .... (3)

Coef. de y: $3a+7b = 11$ .... (4)

(2°) **Resolviendo el nuevo sistema:**

de (3): $a = 5-3b$ .... (5)

En (4): $3(5-3b)+7b = 11$

$$15-2b = 11$$

$$\therefore \quad \boxed{b=2}$$

En (5):

$$a = 5-3(2)$$

$$\therefore \quad \boxed{a=-1}$$

(3°) **El sistema original será:**

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x+y = 3(2)-2(-1) = 8 \\ 2x+11y = 5(2)^3+10(-1)+5 = 35 \end{cases}$$

(4°) **Que al ser resuelto:** $\boxed{x=1}$; $\boxed{y=3}$

$$\therefore \quad \boxed{a+b+x+y=5}$$

20.8. PROBLEMAS PROPUESTOS:

CAPITULO: SISTEMA DE ECUACIONES SIMULTANEAS.

(1) Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y+1}=\dfrac{5}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{y+1}=\dfrac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Obtener el conjunto solución:

Rpta: $\{(2,3)\}$

(2) Un padre y su hijo pintaron un muro en 2 2/9 días. A la semana siguiente pintaron otro muro igual, trabajando primero el padre solo durante 3 días y continuando el hijo también solo durante 1 1/4 días. ¿Cuánto tardará cada uno en pintar un muro de similares características a los anteriores?

Rpta: Padre: 4 días.
Hijo: 5 días.

(3) Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}=\dfrac{1}{15} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 15\sqrt{x+y}+15\sqrt{x-y}=8\left(x^2-y^2\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

, obtener xy

Rpta: 136

(4) Hallar el conjunto solución del sistema cuadrático:

$$\begin{cases} (x-y)(9-x)=10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ (x-y)(12-y)=20 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Rpta: $S=\{(4,2);(11,16)\}$

(5) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+4=0 \\ (x-y)^2-(x-y)-2=0 \end{cases}$$

Rpta: $\{(0,1), (3/2,-1/2), (3/2,5/2), (3,1)\}$

(6) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

Rpta: $S=\{(2,1),(1,2)\}$

(7) Resolver:

$$\begin{cases} 10x + 1 = \dfrac{1}{2y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\[2ex] 10x - 1 = \dfrac{1}{4y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Rpta: (3/10, 1/8)

(8) Resolver:

$$\begin{cases} 2x + 3\sqrt{y} = 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 8x - 2\sqrt{y} = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Rpta: (5, 4)

(9) La edad en años de una tortuga es mayor en 20 que el cuadrado de un número N; y menor en 5 que el cuadrado del número sgte. a N. ¿Cuántos años tiene la tortuga?

Rpta: 164

(10) Un obrero trabajó durante 2 meses con su hijo en una misma empresa el primer mes, por 14 días del padre y 24 del hijo recibieron 118 soles, el segundo mes por 21 días del padre y 19 del hijo recibieron 143 soles.
Hallar los jornales correspondientes.

Rpta: S/. 5 y 2

(11) Resolver:

$$\begin{aligned} 5xy &= 12(x + y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}) \\ 5yz &= 18(y + z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{II}) \\ 13xz &= 36(x + z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{III}) \end{aligned}$$

Rpta: 6, 9 y 4

(12) Pedro le dice a Simón: "Tengo 2 veces la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tú tengas la edad que yo tengo la suma de las edades será 63.
¿Cuál es la edad de Simón?

Rpta: 16

(13) En un grupo de conejos y gallinas el número de patas excede en 14 al doble del número de cabezas.
¿Cuántos conejos y gallinas hay?

Rpta: 7 conejos , 0 gallinas.

(14) La suma, diferencia y producto a 2 números están en la misma relación que los números 5, 3 y 16. Hallar los números.

Rpta: 4 y 16

(15) Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando en los lomos pesados sacos. Comentaba el caballo de su enojosa carga a lo que el mulo le dijo: "de que te quejas, si yo te tomaría un saco, mi carga sería el doble de la que te queda.
En cambio si te diera un saco, mi carga se igualaría a la que me queda. ¿Cuántos sacos llevaba cada uno?

Rpta: 5 y 7

(16) ¿Para que elvalor de "q" el siguiente sistema no tiene solución?

$$\{2x - 5y = 3\ ;\ qx + 3y = 7\}$$

Rpta: -6/5

(17) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x + 3y - 2z = 11 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 3x - 2y + 4z = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Rpta: (3, 2, -1)

(18) Resolver:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a + b$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a$$

Rpta: $\{a(a+b)\ ;\ b(a-b)\}$

(19) Carlos tiene "b" billetes, los cuales hacen un total de "5b" soles, siendo algunos de ellos de 5 soles y los otros de 10 soles.
El número de billetes de 5 soles es:

Rpta: b

(20) Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y - 5 = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Rpta: $S = \left\{(2,3), \left(\frac{5}{2}, 3\right)\right\}$

CAPITULO 21

LA MATRIZ

21.1 *Definición*: Se denomina matriz a todo arreglo rectangular de elementos del conjunto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en filas y columnas.

21.1.1 **Notación:**

(i) A las matrices se les designa con letras mayúsculas (A, B, C, D...)

(ii) A los elementos de la matríz se las designa por a_{ij}
donde: i es la **fila i-ésima**
j es la **columna j-ésima**

(iii) A los elementos de la matríz se les encierra mediante un paréntesis o corchetes.

Ejemplo:

Sea la matríz

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 13 & 3 & 0 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)_{3\times 5} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Big\} \text{Filas} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \longleftarrow \text{Columnas} \longrightarrow \end{array}$$

Donde: "A" representa una matríz

Además : $a_{11} = 13$ Elemento de la 1ª fila y primera columna
$a_{12} = 3$ Elemento de la 1ª fila y segunda columna
$a_{13} = 0$ Elemento de la 1ª fila y tercera columna
$a_{14} = -5$ Elemento de la 1ª fila y cuarta columna
$a_{15} = 8$ Elemento de la 1ª fila y quinta columna

$a_{21} = 2$ Elemento de la 2ª fila y primera columna
$a_{22} = 4$ Elemento de la 2ª fila y segunda columna
$a_{23} = 1$ Elemento de la 2ª fila y tercera columna
$a_{24} = 6$ Elemento de la 2ª fila y cuarta columna
$a_{25} = 3$ Elemento de la 2ª fila y quinta columna

$a_{31} = 1$ Elemento de la 3ª fila y primera columna
$a_{32} = 9$ Elemento de la 3ª fila y segunda columna
$a_{33} = 1$ Elemento de la 3ª fila y tercera columna
$a_{34} = 2$ Elemento de la 3ª fila y cuarta columna
$a_{35} = -2$ Elemento de la 3ª fila y quinta columna

21.1.2 ***Comentario***

a) Los elementos de una matriz además de ser elementos del conjunto $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pueden ser elementos del conjunto de vectores, pueden ser reglas funcionales, tensores, etc.

b) **Una matriz no está asociado a un valor numérico,** el determinante de una matriz si esta asociado a un valor.

21.1.3 ORDEN DE UNA MATRIZ

Definición.- Está definido por la expresión: "m x n"

donde: m.-Es el número de filas de la matriz; $m \in \mathbb{N}$

n.- Es el número de columnas de la matriz, $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

Sea B es una matriz tal que:

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 21 \\ 11 & 9 & 5 \\ 8 & 33 & 31 \end{pmatrix}$$

donde B posee: 3 filas y 3 columnas

$\Rightarrow$ B es una matríz de 3 x 3

Ejemplo:

Sean D una matríz tal que:

$$D = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 11 & 5 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 7 & 2 & 4 & 9 & 11 \\ 1 & 5 & 8 & 3 & 7 & 5 & 3 & 13 \end{pmatrix}}^{\text{8 columnas}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}\right\} \begin{matrix} 3 \\ \text{filas} \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ D es una matríz de orden 3 x 8

21.4 NOTACION ABREVIADA DE UNA MATRIZ

Sea la matriz A tal que:

$A = [a_{ij}]$ m x n ; $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow i \in [1, m]$; $i \in \mathbb{N}$

$j \in [1, n]$; $j \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

Sea $B = [a_{ij}]_{2\times 7}$

Se interpretará como que:

(1°) Es una matriz de orden 2 x 7 es decir posee **2 filas y 7 columnas.**

(2°) El "desarrollo" de esta notación será en consecuencia: $\mathbf{1 \leq i \leq 2\ ;\ 1 \leq j \leq 7}$

$$\Rightarrow\ B = [a_{ij}]_{2\times 7} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \Big\}\, \begin{array}{c} 2 \\ \text{filas} \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \\ \text{7 columnas} \end{array}$$

Ejemplo:

Sea $E = [a_{ij}]_{1\times 5}$

Se interpretará como que:

(1°) Es una matriz de orden 1 x 5 es decir posee **1 fila y 5 columnas.**

(2°) El "desarrollo" de esta notación sería asociado a las limitaciones: $i = 1\ ;\ 1 \leq j \leq 5$

$\Rightarrow\ E = (a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \ a_{14}\ \ a_{15})$

Ejemplo:

En la matriz:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{a-4}{3} & \dfrac{m-n}{5} & \dfrac{x+y}{x} & b+m & a^2 \\ \dfrac{3b+7}{11} & \dfrac{m+n}{6} & x+y & b+y & b^2 \\ \dfrac{a+b}{10} & \dfrac{mn}{2} & \dfrac{a+x}{6} & \dfrac{b+8}{4} & x^2 \end{pmatrix}$$

Se verifica que los elementos: a_{33}, a_{13}, a_{11} son 4, 6 y 9 respectivamente. Además $b+y$ es -95

Calcular: $a_{34} + a_{21} + a_{35} + a_{25}$

Solución:

(1°) De acuerdo a la notación matricial:

$$H = \begin{pmatrix} \boxed{\dfrac{a-4}{3}} & \dfrac{m-n}{5} & \boxed{\dfrac{x+y}{x}} & b+m & a^2 \\ \dfrac{3b+7}{11} & \dfrac{m+n}{6} & x-y & b+y & b^2 \\ \dfrac{a+b}{10} & \dfrac{mn}{2} & \boxed{\dfrac{a+x}{6}} & \dfrac{b+8}{4} & x^2 \end{pmatrix}$$

a_{13}: Elemento de la1^{ra} fila y 3ra columna

a_{33}: Elemento de la3^{ra} fila y 3ra columna

a_{11}: Elemento de la 1ra fila y 1ra columna

(2°) **De acuerdo a los datos**

$$a_{33} = \frac{a+x}{6} = 4 \quad \text{.....................................} \quad (\text{I})$$

$$a_{13} = \frac{x+y}{x} = 6 \quad \text{.....................................} \quad (\text{II})$$

$$a_{11} = \frac{a-4}{3} = 9 \quad \text{.....................................} \quad (\text{III})$$

(3°) **Resolviendo:**

De la ecuación "III"; por tener una sola incógnita

$$\frac{a-4}{3} = 9$$

$$\Rightarrow \; a - 4 = 27$$

$$\Rightarrow \; \boxed{a = 31}$$

De la ecuación I; con $(a = 31)$

$$\Rightarrow \; \frac{31+x}{6} = 4$$

$$\Rightarrow \; 31 + x = 24$$

$$\Rightarrow \; \boxed{x = -7}$$

De la ecuación II, con $(x = -7)$

$$\Rightarrow \; \frac{-7+y}{-7} = 6$$

$$\Rightarrow \; -7 + y = -42$$

$$\Rightarrow \; \boxed{y = -35}$$

(4°) Del dato:

$b + y = -95$, con $(y = -35)$

$$\Rightarrow \; -35 + b = -95$$

$$\Rightarrow \; \boxed{b = -60}$$

(5°) De acuerdo a lo solicitado, a partir de la matriz, tendremos:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a-4}{3} & \frac{m-n}{5} & \frac{x+y}{x} & b+m & a^2 \\ \frac{-3b+7}{11} & \frac{m+n}{6} & x-y & b-m & b^2 \\ \frac{a+b}{10} & \frac{mn}{2} & \frac{a+x}{6} & \frac{b+8}{4} & x^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow a_{25} \\ \rightarrow a_{35} \end{array}$$

$\frac{-3b+7}{11} \rightarrow a_{21}$ $\qquad$ $\frac{b+8}{4} \rightarrow a_{34}$

(6°) **Con los resultados obtenidos: a = 31, b = 60, x = - 7 y y = - 35**

$$\Rightarrow a_{34} = \frac{b+8}{4} = \frac{-60+8}{4} \; ; \; \boxed{a_{34} = -13}$$

$$\Rightarrow a_{21} = \frac{-3b+7}{11} = \frac{-3(-60)+7}{11} \; ; \; \boxed{a_{21} = 17}$$

$$a_{35} = x^2 = (-7)^2 \; ; \; \boxed{a_{35} = 49}$$

$$a_{25} = b^2 = (60)^2 \; ; \; \boxed{a_{25} = 3600}$$

$$\therefore \; \boxed{a_{34} + a_{21} + a_{35} + a_{25} = 3653}$$

21.2 IDENTIDAD DE MATRICES

Definición: Dos matrices son **idénticas o iguales** si se verifica simultáneamente que:

(a) Tienen igual orden

(b) Sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Son iguales pues se verifica la definición:

a) **Poseen igual orden 3 x 2**

b) **Los elementos correspondientes son iguales**

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \wedge \; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Ejemplo:

Calcular m, x, y, z

de modo que las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} x-1 & 11 \\ 14 & z \\ y-8 & 19 \end{pmatrix} \quad y \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & X+5 \\ m-2 & 16-z \\ 15 & x+13 \end{pmatrix} \text{; sean idénticas}$$

Solución:

(1°) **Por definición de identidad de matrices, se cumple que son del mismo orden 3 x 2**

(2°) **También deberá cumplirse que: los elementos correspondiente deberán ser iguales.**

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 11 \\ 14 & z \\ y-8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & X+5 \\ m-2 & 16-z \\ 15 & x+13 \end{pmatrix}$$

(3°) Para efectos del ejercicio:

$x - 1 = 5$, pues $p_{11} = q_{11}$ .... (I)

$14 = m - 2$, pues $p_{21} = q_{21}$ .... (II)

$y - 8 = 15$, pues $p_{31} = q_{31}$ .... (III)

$z = 16 - z$, pues $p_{22} = q_{22}$ .... (IV)

(4°) Resolviendo

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 6}$

$\Rightarrow$ $\boxed{m = 16}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 23}$

$\Rightarrow$ $\boxed{z = 8}$

(5°) **Verificando**; para ello sustituimos los valores obtenidos **sobre P y Q**.

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 6-1 & 11 \\ 14 & 8 \\ 23-8 & 19 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 6+5 \\ 16-2 & 16-8 \\ 15 & 6+13 \end{pmatrix}$$

En efecto:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 8 \\ 15 & 19 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 14 & 8 \\ 15 & 19 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{P y Q son idénticos}}$

21.3 CLASES DE MATRICES

21.3.1 Matriz Cuadrada

Definición: Una matriz se denomina **cuadrada** cuando se verifica la condición siguiente: n° de filas es igual que el n° de columnas.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Es una matriz cuadrada de 2 x 2 pues el n° de filas es igual que el n° de columnas.

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

No es una matríz cuadrada pues el orden es 3 x 4
(el n° de filas no es igual que el n° de columnas.)

21.3.1 *Comentario*

Usualmente a la **matríz cuadrada** $\mathbf{A}_{n \times n}$ se le designa mediante A_n

Ejemplo:

Cual es el orden de la siguiente matríz cuadrada:

$$A_{(15 - m) \times (19 - 2m)}$$

Solución:

(1°) Por definición de **matriz cuadrada**:

$$\# \text{ filas} = 15 - m$$

$$\# \text{ de columnas} = 19 - m$$

$$\Rightarrow \boxed{\# \text{ de filas} = \# \text{ de columnas}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \quad 15 - m = 19 - 2m \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

(2°) **Resolviendo:**

$$2m - m = 19 - 15$$

$$\boxed{m = 4}$$

(3°) **De (I) con m = 4:**

$$\Rightarrow \# \text{ filas} = \# \text{ columnas} = 15 - 4 = 11$$

(4°) **Finalmente la matriz A será:**

$$\boxed{A_{11 \times 11} \text{ de orden } 11 \times 11}$$

21.3.1.1 Diagonales de una Matriz Cuadrada

Toda matriz cuadrada(y únicamente ellas) se caracterizan por tener diagonal principal, que tiene por extremos a los elementos a_{11} y a_{nn}

Ejemplo:

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

21.3.2 **La Matríz Nula**

Definición: Es toda aquella matríz en la cual todos sus elementos son neutros aditivos.

Ejemplo:

Son matrices nulas

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21.3.3 **La Matríz Diagonal**

Definición: Es aquella matriz cuadrada en la cual los elementos son iguales a cero **con excepción de los elementos de la diagonal principal.**

Ejemplos:

Son matrices diagonales.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} ; \ N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

No son matrices diagonales

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

21.3.4 **La Matríz Escalar**

Definición: Es toda **matríz diagonal** en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo:

Son matrices escalares:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} ; \ B = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

21.3.5 **La Matriz Identidad**

Definición: Es toda **matriz escalar** en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales a uno.

Ejemplo:

Son matrices identidad los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

No son matrices identidad los siguientes:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcular a, b y m. de modo que la siguiente sea una matriz identidad.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2a}{5} - 15 & 20 - b & 40 - a \\ \frac{a}{2} - b & \frac{3b}{5} - 11 & \frac{m}{4} - 11 \\ \frac{a}{10} - \frac{b}{5} & \frac{a}{40} - 1 & \frac{4m}{11} - 15 \end{pmatrix}$$

Indique: $a + b \div m$

Solución:

(1°) Por definición de **matriz identidad** los elementos de la diagonal principal **son elementos neutros multiplicativos** y los **restantes deberán ser elementos neutros aditivos.**

(2°) En consecuencia:

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{2a}{5} - 15 & 20 - b & 40 - a \\ \frac{a}{2} - b & \frac{3b}{5} - 11 & \frac{m}{4} - 11 \\ \frac{a}{10} - \frac{b}{5} & \frac{a}{40} - 1 & \frac{4m}{11} - 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2a}{5} - 15 = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (I)$$

$$\frac{3b}{5} - 11 = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (II)$$

$$\frac{4m}{11} - 15 = 1 \text{ .... (III)}$$

(3°) **Resolviendo el sistema:**

De (I) : $\frac{2a}{5} = 16 \quad \therefore \boxed{a = 40}$

De (II) : $\frac{3b}{5} = 12 \quad \therefore \boxed{b = 20}$

De (III) : $\frac{4m}{11} = 16 \quad \therefore \boxed{m = 44}$

(4°) **Verificando los valores hallados;para ello los sustituimos sobre M.**

$$\Rightarrow \; M = \begin{pmatrix} \frac{2\times 40}{5} - 15 & 20 - 20 & 40 - 40 \\ \frac{40}{2} - 20 & \frac{3(20)}{5} - 11 & \frac{44}{4} - 11 \\ \frac{40}{10} - \frac{20}{5} & \frac{40}{40} - 1 & \frac{4(44)}{11} - 15 \end{pmatrix}$$

Ejecutando las sentencias en cada elemento de la matriz.

$$\Rightarrow \; M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que resulta

(5°) Finalmente:

$$\boxed{a + b + m = 104}$$

21.3.6 **La Matriz Fila o Vector Fila**

Definición: Es toda matriz de orden $1 \times m$ **(tienen una fila y m columnas).**

Ejemplo:

Sea $M = [\, a_{ij} \,]_{1 \times 6}$

$\Rightarrow \quad M = [\, a_{11} \; a_{12} \; a_{13} \; a_{14} \; a_{15} \; a_{16} \,]_{1 \times 6}$

$\Rightarrow \quad M$ es una matriz fila

Ejemplo:

La matriz B es una matriz fila

$\Rightarrow \; B = [\, 6 \;\; 13 \;\; 19 \;\; 24 \,]_{1 \times 4}$

21.3.7 **La Matriz Columna o Vector Columna**

Definición: Es toda matriz de orden m x 1 (tienen m filas y **una sola columna)**

También se dice que una matriz columna es la transpuesta de una matriz fila.

Ejemplo:

La matriz A es una matriz columna o vector

$$A = \begin{pmatrix} 95 \\ 14 \\ 31 \\ 51 \\ 9 \end{pmatrix}_{5\times 1}$$ tiene 5 filas y **una sola columna.**

21.3.8 **La Matriz Triangular Superior**

Definición: Es toda **Matriz Cuadrada** en la cual los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

Analíticamente: A es una matriz triangular superior, si $a_{ij} = 0$ con $i > j$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 29 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$ Es una matriz triangular Superior

21.3.9 **La Matriz Triangular Inferior**

Definición: Es **toda matriz cuadrada** en la cual los elementos **por encima de la diagonal principal son iguales a cero.**

Analíticamente: "A" es una matríz triangular inferior si $a_{ij} = 0$; si $i < j$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 4 & 19 & 0 \\ 21 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$ Es una matriz triangular inferior.

21.4 **TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ (A^t)**

Definición: La matriz transpuesta A^t,correspondiente a una matriz "$A_{m\times n}$" **es aquella obtenida de transformar las filas en columnas o la iésima fila en iésima columna.**

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 29 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 29 \end{pmatrix}$. A^t es la Transpuesta de la matriz A

21.4.1 Propiedad:

Si la matriz A es de orden m x n $\Rightarrow$ el orden de la transpuesta A^t es n x m

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 8 & 9 & 11 \\ 7 & 4 & 3 & -8 & -17 & -21 \end{pmatrix}_{2\times 6}$

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 8 & -8 \\ 9 & -17 \\ 11 & -21 \end{pmatrix}_{6\times 2}$$

La 1ª fila se transformó en la 1ª columna

La 2ª fila se transformó en la 2ª columna

21.4.1.1 Otras Propiedades de la Matriz Transpuesta.

Si A y B son matrices y A^t y B^t son las transpuestas se verifica lo siguiente:

(1°) $(A^t)^t = A$; "La transpuesta de una transpuesta es la matríz original"

(2°) $(AB)^t = A^t B^t$

(3°) $(A + B)^t = A^t + B^t$

(4°) $(A - B)^t = A^t - B^t$

(5°) $(cA)^t = cA^t$; $c \in \mathbb{R}$

(6°) Si A es una matriz cuadrada

$\Rightarrow (A + A^t)^t = A + A^t$ **Simétrica**

$(A - A^t)^t = -(A - A^t)$ **Antisimétrica**

(7°) **Toda Matriz Cuadrada** "A" se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$$

21.4.2 La Matriz Simétrica

Definición: Sea A una matríz cuadrada; si: $A = A^t$

$\Rightarrow$ A es una matriz simétrica

21.4.2.1 ***Comentarios :***

En toda matriz simétrica:

(1°) La matriz deberá ser cuadrada.

(2°) Cuando se realiza el algoritmo de la matriz transpuesta, los elementos de la diagonal principal no se alteran, por lo que se dice que la diagonal principal se comporta como un eje y los elementos simétricos son iguales.

(3°) Los elementos a_{ij} verifican que: $a_{ij} = a_{ji}$

(4°) Si una matriz es simétrica, no tiene sentido calcular la matríz transpuesta por redundar en la misma.

Ejemplo:

La siguiente es una matriz simétrica pues los elementos simétricos son iguales

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 29 \\ 11 & 7 & 49 \\ 29 & 49 & 10 \end{bmatrix}, \text{ pues } A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & \boxed{29} \\ 11 & 7 & 49 \\ \boxed{29} & 49 & 10 \end{bmatrix}$$

Diagonal
Principal

21.4.3 Matriz Antisimétrica

Definición: Sea "A" una matriz cuadrada

Si: $A = -A^t$

$\Rightarrow$ A es una matriz **Antisimétrica**

Comentarios:

1°.- **Una matriz antisimétrica es siempre cuadrada.**

2°.- **Los elementos de la diagonal principal son todos elementos neutros aditivos.**

3°.- **Los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son opuestos o en forma equivalente :**

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

4°.- **Para obtener la transpuesta de una matriz antisimétrica, bastará escribir el opuesto de la matriz.**

Ejemplo:

La matriz M es antisimétrica:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -17 \\ 13 & 0 & -29 \\ 17 & 29 & 0 \end{bmatrix} \text{ pues: } M = \begin{bmatrix} 0 & -13 & -17 \\ 13 & 0 & -29 \\ 17 & 29 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal
Principal

Los elementos simétricos son opuestos entre sí.
La diagonal principal está compuesta por elementos nulos.

21.5 ALGEBRA DE MATRICES

Definición: Se refiere a las operaciones que se pueden realizar entre las matrices para lo cual consideremos las siguientes: adición y multiplicación.

21.5.1 Adición de Matrices

Definición: Sean las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

La adición de matrices será:

$$\Rightarrow \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

21.5.1.1 ***Comentarios***

(1°) Para realizar la suma o adición de matrices, **estas tienen que tener el mismo orden.**

(2°) La regla establecida significa que la matriz resultante tiene por elementos los que resultan de sumar correspondientemente.

Ejemplo:

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 20 & 15 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$$

Solución

(1°) Según la definición de adición de matrices.

$$\Rightarrow \quad A + B = \begin{bmatrix} 2+10 & 7+40 \\ 3+20 & 8+15 \\ 4+30 & 11+25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \boxed{A + B = \begin{bmatrix} 12 & 47 \\ 23 & 23 \\ 34 & 36 \end{bmatrix}}$$

21.5.1.2 **Axiomas y propiedades de la Adición de Matrices**

Si A, B y C son matrices

1°.- $A + B = B + A$ **Conmutatividad**

2°.- $(A + B) + C = A + (B + C)$ **Asociatividad**

3°.- $k(A + B) = kA + kB$; $k \in \mathbb{R}$ o **k escalar**

4°.- $(k + r)A = kA + rA$; $k, r \in \mathbb{R}$ **o escalares**

5°.- $(kr)A = k(rA)$; $k, r \in \mathbb{R}$ o **escalares**

6°.- $1A = A$

7°.- $-A = (-1)A$; $-A$ es el opuesto de la matríz A

8°.- $A - B = A + (-B)$; La diferencia de A y B es la **suma** de A y el opuesto de B

Ejemplo:

Sean $M = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 14 & 11 & 21 \\ 9 & 12 & 30 \end{pmatrix}$

Obtener: M - N

Solución:

(1°) De acuerdo a lo establecido para la diferencia de dos matrices

$$M - N = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 10 & 20 \\ 14 & 11 & 21 \\ 9 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M - N = \begin{pmatrix} 11-3 & 4-10 & 8-20 \\ 1-14 & 3-11 & 9-21 \\ 7-9 & 15-12 & 12-30 \end{pmatrix}$$

(2°) Finalmente:

$$M - N = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -12 \\ -13 & -8 & -3 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

21.5.2 Multiplicación de Matrices

21.5.2.1 **Multiplicación de un escalar por una Matriz.**

Definición: Sea la matriz: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y "k" un escalar o número real.

$$\Rightarrow kA = [ka_{ij}]_{m \times n} \quad \forall\, i, j$$

Semánticamente:

"Cada elemento de la matriz será multiplicado por el escalar k, o que el escalar k el distributivo sobre cada elemento de la matríz.

Ejemplo:

Sea : $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$ y $k = -6$; obtener kM

Solución

$\Rightarrow$ Según lo establecido

$$\Rightarrow kM = -6\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \\ 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Distribuyendo el escalar k sobre cada elemento de la matríz :

$$kM = \begin{pmatrix} 2(-6) & 7(-6) & 9(-6) \\ 5(-6) & 6(-6) & 10(-6) \\ 11(-6) & 4(-6) & 15(-6) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{kM = \begin{pmatrix} -12 & -42 & -54 \\ -30 & -36 & -60 \\ -66 & -24 & -90 \end{pmatrix}}$$

21.5.2.2 **Multiplicación de un vector Fila por un Vector Columna**

Definición: Sean:

$$A = [\,a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_n\,] \quad y \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se establece la multiplicación de A y B como:

$$\Rightarrow \quad A \times B = [\,a_1a_2 + a_2b_2 + a_3b_3 \dots + a_n b_n\,] = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

De la definición:

Para poder ejecutar la multiplicación de dos vectores **mediante la definición** deberá verificarse las siguientes condiciones:

(I) El " **multiplicando" deberá ser un vector fila** de n elementos y el **"multiplicador"** deberá ser un **vector columna también de n elementos.** En caso contrario la multiplicación carece de sentido.

(II) La multiplicación de un vector fila y un vector columna está asociado con un escalar o número real.

(III) Finalmente el algoritmo de la multiplicación de un vector fila por un vector columna es una suma de productos binarios de los elementos de ambos vectores de la forma "$a_i b_i$" es decir "primero de la fila por primero de la columna "más ..." iésimo de la fila por el iésimo de la columna.

Ejemplo:

Sean: $A = (6\ 8\ 11)_{1\times3}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}_{3\times1}$

Obtener: $A \times B$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la definición de la multiplicación de un vector fila por un vector columna.**

$$\Rightarrow A \times B = (6 \quad 8 \quad 11)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(2°) Ejecutando

$$A \times B = \big((6)(3) + (8)(7) + (11)(10)\big)$$
$$A \times B = (18 + 56 + 110)$$
$$A \times B = (184)$$

(3°) Finalmente:

$$\boxed{A \times B = (6 \quad 8 \quad 11)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = [184] = 184}$$

21.5.2.3 **Multiplicación de dos Matrices**

Definición: Sean las matrices:

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y

$B = [b_{jk}]_{n\times p}$

$$\Rightarrow A \times B = [a_{ij}]_{m\times n} \times [b_{jk}]_{n\times p} = [C_{ik}]_{m\times p}$$

Tal que:

C_{ik} = Es el producto de la "i ésima" fila de la matriz A por la k ésima columna de B

21.5.2.3.1 Comentarios a la Definición de la Multiplicación de Matrices.

(1°) La multiplicación entre dos matrices está definido solo entre aquellos que tienen multiplicando de orden "$m \times n$" y multiplicador de orden $n \times p$.

Esquemáticamente.

$$\boxed{A_{m\times n} B_{n\times p} = [C]_{m\times p}}$$

(2°) **Redundando:** el producto de matrices sólo será posible cuando el n° de columnas de A. sea igual que el número de filas de B (en cada caso "n")

(3°) Los elementos de C_{ik} de la matriz producto se logran mediante el algoritmo:

$$\boxed{C_{ik} = \text{(fila i de A por columna k de B)}}$$

También:

$$C_{ik} = [\, a_{i1}\; a_{i2} \,\ldots\, a_{ij} \ldots\, a_{in} \,] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \\ b_{ik} \\ \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

(4°) Esquema de la multiplicación.

fila i de la matriz A ; columna k de la matriz B

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A\,m\times n} \times \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1k} & \cdots\cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2k} & \cdots\cdots b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{ik} & \cdots\cdots b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots & b_{nk} & \cdots\cdots b_{np} \end{bmatrix}}_{B\,n\times p}$$

21.5.2.4 Axiomas y Propiedades de la Multiplicación de Matrices.

Si A, B y C son matrices

(1°) $AB \neq BA$ ∄ Conmutatividad de producto matricial en general.

(2°) $(A + B)C = AC + BC$

(3°) $C(A + B) = CA + CB$

(4°) $A(BC) = (AB)C$ ∃ Asociatividad

(5°) $OA = 0$

(6°) Si: $A \times B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

(7°) Si: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$

Ejemplo:

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Multiplicar: A por B

Solución:

(1°) **De acuerdo a la definición de la multiplicación de matrices.**

$$A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$$

(2°) **Obtenemos los elementos de C.**

$$C_{11}: \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{c_{11}=400} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$C_{12}: \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{c_{12}=274} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

$$C_{21}: \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{c_{21}=250} & \boxed{c_{22}=158} \end{pmatrix}$$

$$C_{22}: \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{c_{22}=158} \end{pmatrix}$$

(3°) **Finalmente :**

$$A \times B = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 13 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 400 & 274 \\ 250 & 158 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo:

Ejecutar la siguiente multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Solución:

(1°) Por definición de la multiplicación de matrices:

$$A_{3\times 3} \times B_{3\times 1} = C_{31}$$

Es decir la matriz producto tendrá 3 filas y una sola columna.(vector columna).

(2°) Ejecutando el algoritmo de la multiplicación.

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_{11}: \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\times 6 + 4\times 8 + 6\times 5 \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \leftarrow c_{11}$$

$$\Rightarrow c_{21}: \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ 7\times 6 + 9\times 8 + 2\times 5 \\ \boxed{} \end{pmatrix} \leftarrow c_{21}$$

$$\Rightarrow c_{31}: \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 13\times 6 + 10\times 8 + 5\times 5 \end{pmatrix} \leftarrow c_{31}$$

(3°) Finalmente:

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 13 & 10 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 \\ 124 \\ 183 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow c_{11} \\ \leftarrow c_{21} \\ \leftarrow c_{31} \end{matrix}$$

Ejemplo:

Calcular a, b, c y d si se cumple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 4} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}_{4\times 1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

Solución:

(1°) Mediante la definición de la multiplicación de matrices, se tiene

$$A_{4\times 4} \times B_{4\times 1} = C_{4\times 1}$$

En efecto la matriz resultante será de orden 4×1

(2°) Ejecutando las sentencias del algoritmo de la multiplicación tendremos:

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

(3°) **Donde:**

$$C_{11} = (2\ 3\ 5\ 7) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 4 + 18 + 35 + 70 = 127$$

$$C_{21} = (4\ 5\ 3\ 9)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 8 + 30 + 21 + 90 = 149$$

$$C_{31} = (6\ 3\ 2\ 8)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 12 + 18 + 14 + 80 = 124$$

$$C_{41} = (4\ 10\ 3\ 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = 8 + 60 + 21 + 20 = 109$$

(4°) Se dispone en consecuencia de:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 \\ 149 \\ 124 \\ 109 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

que luego de igualar:

$$\therefore \boxed{a = 127\ ,\ b = 149\ ,\ C = 124\ ,\ d = 109}$$

21.5.2.4 La Potenciación de Matrices

Definición: Si "A" es una matriz cuadrada

$$\Rightarrow A^{o} = I\ ;\ A^2 = A \times A\ ,\ A^3 = A \times A \times A\ , \ldots ; A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ factores}}$$

Comentarios:

(1°) Si A es una matriz cuadrada
$\Rightarrow A \,.\, A^n = A^{n+1}$

(2°) Si A es una matriz cuadrada
$\Rightarrow A^m \,.\, A^n = A^n \,.\, A^m\ ,\ m\ ,\ n \in \mathbb{N}$

(3°) Si A y B son conmutables
$\Rightarrow A^m$ y B^m también conmutan

Ejemplo:

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}$; obtener: A^2

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición de potenciación de matrices.

$$A^2 = A \times A$$

(2°) En consecuencia:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

(3°) Mediante la multiplicación de matrices:

$$C_{11} = (2\ 7\ 9)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 + 35 + 27) = 66$$

$$C_{12} = (2\ 7\ 9)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (14 + 14 + 36) = 64$$

$$C_{13} = (2\ 7\ 9)\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = (18 + 56 + 99) = 173$$

$$C_{21} = (5\ 2\ 8)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (10 + 10 + 24) = 44$$

$$C_{22} = (5\ 2\ 8)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (35 + 4 + 32) = 71$$

$$C_{23} = (5\ 2\ 8)\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = (45 + 16 + 88) = 149$$

$$C_{31} = (3\ 4\ 11)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (6 + 20 + 33) = 59$$

$$C_{32} = (3\ 4\ 11)\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (21 + 8 + 44) = 73$$

$$C_{33} = (3\ 4\ 11)\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = (27 + 32 + 121) = 180$$

(4°) Finalmente; al sustituir sobre $(C_{ij})_{3\times 3}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 66 & 64 & 173 \\ 44 & 71 & 149 \\ 59 & 73 & 180 \end{pmatrix}$$

21.5.3 Los Determinantes

Definición: Sea A una matriz cuadrada, el determinante de dicha matríz: **| A |** ó **det(A)** es la regla funcional que al actuar sobre los elementos de A originan un único valor numérico.

Ejemplo:

El determinante de la matriz cuadrada:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es det(M) = - 60

21.5.3.1 Determinante de una Matriz de Orden 2

Sea: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ D. SECUNDARIA, D. PRINCIPAL.

$\Rightarrow$ $\det(A) = |A| = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$

"El det (A) es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria"..

Ejemplo:

Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}$$

Solución:

(1°) Mediante la definición

$$\det A = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 9 & 17 \end{bmatrix} = (5)(17) - (9)(13) = 85 - 117$$

(2°) Finalmente:

$\therefore$ $\boxed{\det(A) = -32}$

21.5.3.2 **Determinante de una Matriz Cuadrada de Orden 3**

Definición: Sea la matriz cuadrada $A = [\, a_{ij} \,]_3$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

21.3.2.1 **Regla de Sarrus:**

Sea la matriz cuadrada $A = [\, a_{ij} \,]_3$

$$\Rightarrow \det [\, a_{ij} \,]_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}$$

$$\begin{matrix} & & & - & - & - \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ & & & + & + & + \end{matrix}$$

$= \sum$ producto de 3 en 3 de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas $-$ $\sum$ producto de 3 en 3 de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz siguiente mediante la regla de **Sarrus.**

$$M = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Solución:

(1°) **De acuerdo a la regla de Sarrus.**

$$M = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

(2°) **Transcribimos las dos primeras columnas al lado derecho de la matriz.**

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 & 3 \\ 7 & 11 \\ 2 & 10 \end{matrix}$$

(3°) **Calculamos los productos de los elementos paralelos a la diagonal principal.**

$$\begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} 15 & 3 \\ 7 & 11 \\ 2 & 10 \end{matrix} = (15)(11)(13) + (3)(9)(2) + (4)(7)(10) = 2479$$

(4°) Calculamos los productos de los elementos paralelas a la diagonal secundaria y tomando los opuestos:

$$\left(\begin{matrix}15 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 9\\ 2 & 10 & 13\end{matrix}\right)\begin{matrix}15 & 3\\ 7 & 11\\ 2 & 10\end{matrix}$$

$= \text{op}[(2)(11)(4)] + \text{op}[(10)(9)(15)] + \text{op}[13 \times 7 \times 3]$

$= -88 - 1\,350 - 273$

$= -1\,711$

(5°) Finalmente

$$\therefore \ \det\begin{pmatrix}15 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 9\\ 2 & 10 & 13\end{pmatrix} = 2\,479 - 1\,711 = 768$$

21.5.4 Algebra de los Determinantes

(1°) En toda matriz cuadrada se verifica que:

$$\det(A) = \det(A^t)$$

"El determinante de una matríz es igual que el determinante de la correspondiente matriz transpuesta"

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 19 & 33\end{bmatrix}$ y $A^t = \begin{bmatrix}2 & 19\\ 5 & 33\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det A = 2 \times 33 - 19 \times 5$, y , $\det(A^t) = 2 \times 33 - 5 \times 19$

$\boxed{\det(A) = -29}$ y, $\boxed{\det(A^t) = -29}$

$\therefore \ \boxed{\det(A) = \det(A^t) = -29}$

(2°) El determinante de una matriz A se transforma **en el opuesto** si dos filas o dos columnas se permutan entre sí.

(3°) Si la matriz "B" resulta de la matriz "A", al trasladar una fila o columna "k" lugares

$$\Rightarrow \boxed{\det(B) = (-1)^k \det(A)}$$

Ejemplo:

A partir del ejemplo desarrollado:

$$A = \det\begin{pmatrix}15 & 3 & 4\\ 7 & 11 & 9\\ 2 & 10 & 13\end{pmatrix} = 768$$

Trasladando la fila (15 3 4) dos lugares: k = 2

$$\Rightarrow \boxed{\det} \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 3 & 4 \\ 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \end{pmatrix}}_{k = 2 \text{ lugares}} \Rightarrow B = (-1)^2 \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 2 & 10 & 13 \\ 15 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^2 (768)$$

$\boxed{B = 768}$; $\boxed{\det B = (-1)^2 \times 768 = 768}$

(4°) Si en una matriz cuadrada, los elementos de una fila o columna son múltiplos de otra fila o columna; el determinante de dicha matriz es igual que cero.

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & 22 \\ 5 & 55 \end{bmatrix}$ La 2^{da} columna es múltiplo de la 1^{ra}

$\Rightarrow A = (2)(55) - (5)(22)$

$\Rightarrow A = 110 - 110$

$\therefore \boxed{\det(A) = 0}$

(5°) Si en una matriz "A" todos los elementos de una fila o columna son iguales a cero, implica que el determinante de dicha matriz será igual a cero.

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}$

Por tener los elementos de la fila iguales a cero, el determinante de la matriz será igual a cero.

En efecto:

$\Rightarrow \det A = 0 \times 15 - 21 \times 0$

$\therefore \boxed{\det A = 0}$

(6°) Si los elementos de una fila o columna de una matriz "M" son multiplicados por un escalar "k", el valor del determinante de dicha matriz quedará multiplicado por "k".

Ejemplo:

Sea : $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$; $\det A = 11$

multiplicando por 6 a los elementos de la primera fila

$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 18 & 30 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \det(A') = 66$

pues se tendrá que:

$$\Rightarrow \det A' = 18 \times 7 - 2 \times 30$$
$$= 126 - 60 = 66$$

$\Rightarrow$ Finalmente se concluye que:

$$\boxed{\det(A') = 6 \det(A)}$$

(7°) Si a los elementos de una fila o columna de una matriz "A" se le suma o resta el múltiplo de una **línea paralela**, el determinante de la matriz A no se altera.

Ejemplo:

Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 21 & 5 \end{pmatrix}, \det(A) = -107$$

Sumando a la 2ª fila un múltiplo de la 1ª :

$\underbrace{80 \quad 70}_{\text{múltiplo de la 1ra línea paralela}}$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 21 & 5 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{2a fila}} \quad ; \det(A) = -107$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 21+80 & 70+5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 101 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = (8)(75) - (101)7$$

$$\Rightarrow \det(A) = 600 - 707 \quad ; \det(A) = -107$$

$$\therefore \boxed{A = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 101 & 75 \end{vmatrix} = -107}$$

(8°) El determinante de la matriz identidad es la unidad.

Ejemplo:

Sea: $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 1 \times 1 - 0 \times 0$$

$$\therefore \boxed{\det A = 1}$$

(9°) En toda matriz triangular superior o inferior el determinante es igual que el producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo:

Sea la matriz triangular inferior

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 39 & 5 & 0 \\ 41 & 59 & 17 \end{pmatrix}$$

$\det M = (3)\times(5)\times(17)$

$\therefore \boxed{\det M = 255}$

Ejemplo:

Sea la matriz triangular superior

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 23 & 37 \\ 0 & 11 & 41 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det N = 2\times 11 \times 19$

$\therefore \boxed{\det N = 418}$

(10°) Si en una matriz cuadrada los elementos de una fila o columna constan de dos sumandos, el determinante de dicha matriz puede expresarse como la suma de otros dos determinantes según la regla:

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{pmatrix} m_1 + a_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 + a_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 + a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$; una matriz cuadrada

$$\Rightarrow \det A = \det\begin{pmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Dicha regla puede utilizarse para componer o descomponer un determinante.

Ejemplo:

Sea la matríz : $\begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 18 & 11 & 7 \\ 15 & 21 & 29 \end{pmatrix}$; según la regla :

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 10+2 & 4 & 3 \\ 12+6 & 11 & 7 \\ 14+1 & 21 & 29 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 12 & 11 & 7 \\ 14 & 21 & 29 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 11 & 7 \\ 1 & 21 & 29 \end{pmatrix}$$

(11°) En toda matriz diagonal $D = [d_{ij}]_n$, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\Rightarrow \ \det(D) = d_{11}\,d_{12}\,d_{13} \ldots d_{1n}$$

Ejemplo:

Sea: $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$

$\det D = 5 \times 7 \times 23$

$\therefore \ \boxed{\det D = 805}$

(12°) Para toda suma de matrices:

$A + B$

Se verifica en general: $\boxed{\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)}$

(13°) Si A y B son matrices cuadradas de orden n:

$$\Rightarrow \ \det(AB) = \det A \times \det B$$

21.5.5 **Menores y Cofactores de una Matriz Cuadrada**

Definición: Sea una matriz cuadrada de orden "n", se denomina menor "M_{ij}" a la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de eliminar todos los elementos de la fila i y la columna j de "A", en consecuencia:

a) El determinante $\det(M_{ij})$ se llama **Menor Complementario del elemento** a_{ij} de la matriz A.

b) Se define por cofactor **del elemento** a_{ij} que se representa mediante A_{ij} a la matriz cuadrada.

$$\underbrace{A_{ij}}_{\text{cofactor}} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{signo}} \underbrace{\det(M_{ij})}_{\text{Menor}}$$

Ejemplo:

Sea: $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 8 \\ 21 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

(1°) **El menor del elemento** a_{13} **será** M_{13}

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 8 \\ 21 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

(2°) **De suprimir la 1ª fila y 3ª columna**

$$\det(M_{13}) = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 21 & 11 \end{pmatrix} = 99 - 84 = 15$$

(3°) El cofactor del elemento a_{13} será A_{13}

$$\Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 21 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 21 & 11 \end{pmatrix}$$

21.5.6 Teorema (Relativo al Desarrollo del determinante de una Matriz por medio de sus Cofactores).

El determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier línea (fila o columna) por sus correspondientes cofactores.

Simbólicamente : Sea A una matríz cuadrada

$$\Rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \underbrace{(A_{jk})}_{\text{cofactor de } A_{kj}}$$

Si "k" es la fila elegida

$$\Rightarrow \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} [A_{kj}]$$

Si "j" es la columna elegida

Ejemplo

Calcular det (M) si :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 10 & 12 & 19 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

mediante los cofactores de los elementos de la 1ra fila.

Solución:

(1°) De acuerdo al teorema:

$k = 1$; $n = 3$ (orden)

$$\det M = \sum_{J=1}^{3} a_{1j} (A_{1j})$$

$$\Rightarrow \det M = a_{11} \underbrace{A_{11}}_{\substack{\text{cof de} \\ a_{11}}} + a_{12} \underbrace{A_{12}}_{\substack{\text{cof de} \\ a_{12}}} + a_{13} \underbrace{A_{13}}_{\substack{\text{cof de} \\ a_{13}}}$$

(2°) Con $a_{11} = 5$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 9$

$$\Rightarrow \det M = 5(-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 12 & 19 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + 3(-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 10 & 19 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + 9(-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$= 5(1)(96-76)+3(-1)(80-133)+9(1)(40-84)$

$= 100 + 159 - 396$

$\therefore \boxed{\det M = -137}$

21.5.7 **Matriz de los Cofactores**

Definición: Si M es una matriz cuadrada de orden "n", tal que A_{ij} es el cofactor de a_{ij}:

$$\Rightarrow \text{Cofact } M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots\cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} \cdots\cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \\ A_{n1} & A_{n2} \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Se denomina la matriz de los cofactores de M.

21.5.8 **Matriz Adjunta**

Definición: Sea M una matriz cuadrada cuya matríz de cofactores es "cofact M". A la **transpuesta** de este último: **$(\text{Cofact } M)^t$ se le denomina matriz** adjunta de A.

Simbólicamente:

Si M es una matriz cuadrada

$$\Rightarrow \boxed{\text{Adj } M = (\text{cofact } M)^t}$$

Ejemplo:

Sea la matriz: $M = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

obtener la matriz adjunta de M.

Solución:

(1°) Obtengamos la matriz de los cofactores.

$$\Rightarrow \text{Cofact. }(M) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}5 & (-1)^{1+2}7 \\ (-1)^{2+1}9 & (-1)^{2+2}11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Cofact. }(M) = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}$$

(2°) Finalmente: $\text{Adjunta } M = (\text{cofact } M)^t = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -9 & 11 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

$$\therefore \boxed{\text{Adjunta }(M) = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}}$$

Ejemplo:

Sea la matríz: $A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 13 \end{bmatrix}$

Obtener la matríz adjunta de M

Solución:

(1°) De acuerdo a la definición obtenemos, la matriz de los cofactores.

$$\Rightarrow \text{Cofact. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

(2°) **Por definición de cofactor**

$$\boxed{\underbrace{A_{ij}}_{\text{Cofac.}} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{signo}} \underbrace{[M_{ij}]}_{\text{Menor}}}$$

$$\text{Cofac } A = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} & (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} & (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(3°) Desarrollando las sentencias se logra que la matriz de los cofactores es:

$$\text{Cofact } A = \begin{bmatrix} 17 & -75 & 37 \\ 6 & 115 & -74 \\ -8 & -30 & 37 \end{bmatrix}$$

(4°) **Debemos de utilizar la definición:**

$$\boxed{\text{Adjunta } M = (\text{cofact } M)^t} \text{ .... (I)}$$

(5°) Obtenemos la transpuesta de la matriz cofact. M :

$$\Rightarrow (\text{Cofact } M)^t = \begin{bmatrix} 17 & -75 & 37 \\ 6 & 115 & -74 \\ -8 & -30 & 37 \end{bmatrix}^t$$

(6°) **Ejecutando según la def. de transpuesta.**

$$(\text{Cofact } M)^t = \begin{bmatrix} 17 & 6 & -8 \\ -75 & 115 & -30 \\ -37 & -74 & 37 \end{bmatrix}$$

(7°) **Finalmente:**

$$\therefore \boxed{\text{Adjunta }(M) = \begin{bmatrix} 17 & 6 & -8 \\ -75 & 115 & -30 \\ -37 & -74 & 37 \end{bmatrix}}$$

21.5.9 **La Matriz Inversa**

Teorema: **(Relativo a la obtención de una matriz inversa.)**

Sea A una matriz cuadrada; det (A) ≠ 0, la matriz inversa de A, A^{-1} está definido por la regla.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Adj}A) \wedge \det(A) \neq 0$$

Ejemplo:

Calcular la matriz inversa de M

siendo: $M = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

(1°) **De acuerdo al teorema de la matriz inversa de M es M^{-1}**

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \, . \, \text{Adj}(M)} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\text{I})$$

(2°) **Obtengamos det (M):**

$$\Rightarrow \det(M) = 11 \times 5 - 7 \times 9 =$$

$$\boxed{\det(M) = -8} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (\text{II})$$

(3°) **Obtengamos la matriz adjunta de M**

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = (\text{Cof } M)^t$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}5 & (-1)^{1+2}7 \\ (-1)^{2+1}9 & (-1)^{2+2}11 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}^t$$

(4°) **Ejecutando la sentencia para la transpuesta.**

$$\boxed{\text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

(5°) **Sustituyendo (II) y (III) en (I)**

$$\Rightarrow M^{-1} = \underbrace{\frac{1}{-8}}_{\det(M)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}}_{\text{Adj}(M)}$$

$$\therefore \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/8 & 9/8 \\ 7/8 & -11/8 \end{pmatrix}}$$ Es la matríz inversa de M.

Ejemplo:

Calcular la matríz inversa de M

Siendo: $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

(1°) **Mediante el teorema de la matriz inversa de M:**

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \text{Adj}(M) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

(2°) **Obtengamos det (M)**

$$\Rightarrow \det(M) = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(M) = \underbrace{24 + 231 + 30}_{285} - \left(\underbrace{330 + 84 + 6}_{420} \right)$$

$$\boxed{\det(M) = -135} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

(3°) **Obtengamos Adj (M) es decir aplicando la definición:**

$$\boxed{\text{Adj}(M) = (\text{Cofact } M)^t}$$

$$\Rightarrow \text{Adj } M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

(4°) **Obtengamos los cofactores:**

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = -15$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -9$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = 75$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = -51$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = -18$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = -60$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 21$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 18$$

(5°) **Sustituyendo el conjunto de los cofactores obtenidos sobre III.**

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -15 & 12 & -9 \\ 75 & -51 & -18 \\ -60 & 21 & 18 \end{pmatrix}^t$$

(6°) **Realizamos la sentencia para la transpuesta**

$$\Rightarrow \text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -15 & 75 & -60 \\ 12 & -51 & 21 \\ -9 & -18 & 18 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

(7°) Sustituyendo (II) y (IV) sobre (I)

$$\Rightarrow \ M^{-1} = \underbrace{\frac{1}{-135}}_{\det(M)} \begin{pmatrix} -15 & 75 & -60 \\ 12 & -51 & 21 \\ -9 & -18 & 18 \end{pmatrix}$$

(8°) Multiplicando el escalar - 1/135 por la matriz.

$$\Rightarrow \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{135} & \frac{-75}{135} & \frac{60}{135} \\ \frac{-12}{135} & \frac{51}{135} & \frac{-21}{135} \\ \frac{9}{135} & \frac{18}{135} & \frac{-18}{135} \end{pmatrix}$$

(9°) Finalmente obtendremos la matriz inversa.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -5/9 & 4/9 \\ -4/45 & 17/45 & -7/45 \\ 1/15 & 2/15 & -2/15 \end{pmatrix}$$

Teorema: (Relativo de sistema de n ecuaciones lineales simultáneas y n incógnitas resuelto por el método matricial.)

El sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Es equivalente a la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Ejemplo:

Resolver por el método matricial:

$11x_1 + 7x_2 = 47$ .... (1)

$13x_1 + 9x_2 = 57$ .... (2)

Solución:

(1°) **De acuerdo al método matricial señalado en el teorema**

$$\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}$$

(2°) **Aislando la matriz de las incógnitas:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}^{-1}_{2\times 2}}_{\text{matriz inversa}} \times \begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}_{2\times 1} \text{ .... } (3)$$

(3°) Cálculo de la matriz inversa mediante la regla:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\operatorname{Adj}(M);\ \det(M) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}} \cdot \operatorname{Adj}\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(99-91)} \times \begin{bmatrix} 9 & -13 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{8} \times \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -13 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 9/8 & -7/8 \\ -13/8 & 11/8 \end{bmatrix}} \text{ .... } (\text{II})$$

(4°) **Sustituyendo (II) en (I)**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/8 & -7/8 \\ -13/8 & 11/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 47 \\ 57 \end{bmatrix}$$

(5°) **Ejecutando la multiplicación de matrices**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}\times 47 + \left(-\frac{7}{8}\right)57 \\ -\frac{13}{8}(47) + \frac{11}{8}(57) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{423}{8} - \frac{399}{8} \\ -\frac{611}{8} + \frac{627}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{8} \\ \frac{16}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(6°) **Por la igualdad de matrices**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \; x_1 = 3 \; , \; x_2 = 2$

$\therefore \; \boxed{S = \{(3,2)\}}$

21.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

CAPITULO: Matrices

(1) Si se verifica que:

$$2/3\begin{pmatrix} a & 6m-2 \\ b & 26n \\ c & 30p \end{pmatrix} = -13\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 1 & -160 \end{pmatrix}$$

Calcular: a, b, c, m, n y p

Rpta: a = - 78, b = - 156, c = - 117, m = - 573, n = - 9/4, p = 104

(2) Si M es una matriz triangular inferior, calcular a y b

$$\begin{pmatrix} a+b & a+6 & b+9 \\ a-b & 2a & a+b+15 \\ 2a-b & 4b & 7a \end{pmatrix}$$

Rpta: a = - 6 , b = - 9

(3) Calcular m, n y p de modo que A sea una matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a-8 & p-b & m-a \\ a-5 & b+9 & n-b \\ 5-a & b-2 & -2c+5 \end{pmatrix}$$

Rpta: m = 5 , n = 2, p = 2

(4) Calcular r, s y t , de modo que E sea una matriz escalar:

$$E = \begin{pmatrix} r-4 & b/3 & b-10 \\ a/2 & s-8 & 10-s \\ 6-r & r+s-16 & t-9 \end{pmatrix}$$

Rpta: r = 6 , s = 10 , t = 9

(5) Calcular el valor del determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 10 & 30 & 1 \\ 5 & 15 & 4 \\ 3 & 9 & 379 \end{bmatrix}$$

Rpta: Cero

(6) Calcular a, b y c si:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 21 \\ 15 & 14 \\ 8 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-21 & a \\ b & a-10 \\ c-15 & c \end{pmatrix}$$

Rpta: $a = 28$, $b = 26$, $c = 28$

(7) Calcular el determinante de la matriz:

$$M = 13\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Rpta: Cero

(8) Obtener Σa_{ij} luego de sumar:

$$-2\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rpta: 55

(9) Ejecutar el producto de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\begin{pmatrix} 41 & 112 \\ 73 & 195 \end{pmatrix}$

(10) Hallar la matriz de los cofactores de M:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$; Indicar Σa_{ij}

Rpta: $\Sigma a_{ij} = 10$

(11) Hallar la matriz inversa de

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rpta: $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

(12) Hallar la matriz inversa de A:

$$A = 2\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 3/2 & 5/2 & 0 \\ 2 & 1 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Rpta: $\begin{pmatrix} 1 & 3/7 & -4/7 \\ -3/5 & -2/35 & 12/35 \\ -14/35 & -8/35 & 13/35 \end{pmatrix}$

(13) Resolver:

$$\det\begin{pmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{pmatrix} = 0$$

Rpta: $S = \{1\}$

(14) Calcular: a, b, c y d si:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Rpta: $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 2$

(15) Obtener la matríz inversa de las incógnitas del sistema:

$3x + 4y + 5z = 15$ .... (I)

$x + y + z = 4$ .... (II)

$2x + y + 3z = 8$ .... (III)

Rpta: $\begin{pmatrix} -2 & -7 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

CAPITULO 22

EL ALGEBRA COMERCIAL

El progreso de toda sociedad trae consigo el perfeccionamiento de los negocios y de su estrutura centralque es la transacción económica.

De otro lado y más contemporáneamente en la economía en sus diversas formas, se manejan formulando, leyes y reglas generales originando los intereses, las anualidades, que posteriormente lo estudia de modo más amplio la ingeniería económica mediante la matemática financiera.

22.1 EL INTERES

Definición: Es el diseño pagado por la utilización de una cantidad de dinero ajeno denominado capital.
El interés puede ser simple o compuesto.

22.2 EL CAPITAL O CAPITAL INICIAL

Definición: Es el valor permanente de una cantidad de dinero en relación a los intereses que esta puede producir.

22.3 EL INTERES SIMPLE

Definición: El interés simple se caracteriza porque el capital que produce los intereses es el mismo durante todo el tiempo que dura el préstamo.

(El interés simple no incrementa el capital durante el tiempo de imposición).

22.4 EL INTERES COMPUESTO

Definición: El interés es compuesto, cuando cumplido cada período fijado, los intereses producidos, se suman al capital para producir mayores intereses en el período siguiente.

Ejemplo:

Una persona consigue el préstamo de 2000 $ de cierta entidad financiera, el cual exige la devolución de dicho capital en 5 meses a un interés mensual del 8% en la modalidad del interés compuesto.

CAPITAL	:	$ 2 000
# PERIODOS	:	5 meses
% INTERES	:	8% compuesto

22.5 **EL INTERES COMPUESTO**

Teorema: Sea "C" un capital impuesto a la tasa fija periódica "r" durante "n" períodos; el monto "M" al cual se transforma dicho capital por efecto del interés compuesto será:

$$\boxed{\begin{array}{l} M = C(1+r)^n\ ; \\ M = C + I \end{array}}$$

Donde:

C = Capital impuesto
r = tasa de interés fija de cada período
n = N° de períodos de capitalización
M = monto al cual se transforma el capital "C" al cabo de "n" períodos, o capital final.
I = Intereses generados durante los "n" períodos de capitalización.

Demostración:

De acuerdo a la definición de interés compuesto y con las notaciones establecidas.

1er Período:

Capital Inicial : C
Intereses Ganados : Cr
Capital Final : $C + Cr = C(1+r)$

2do Período:

Capital Inicial : $C(1+r)$
Intereses Ganados : $r\left[C(1+r)\right]$
Capital Final : $C(1+r) + r\left[C(1+r)\right] = C(1+r)^2$

3er Período:

Capital Inicial : $C(1+r)^2$
Intereses Ganados : $r\left[C(1+r)^2\right]$
Capital Final : $C(1+r)^2 + r\left[C(1+r)^2\right] = C(1+r)^3$

....

N° Período:

Capital Inicial : $C(1+r)^{n-1}$
Intereses Ganados : $r\left[C(1+r)^{n-1}\right]$
Capital Final : $C(1+r)^{n-1} + r\left[C(1+r)^{n-1}\right] = C(1+r)^n$

En general al cabo de n períodos el monto constituido será:

$$\therefore\ \boxed{M = C(1+r)^n}$$

Ejemplo:

Se prestan 3 000 soles, durante 6 meses, si se impone dicha suma al interés compuesto del 7%.
¿Cuál será el interés que genere esta suma?
¿Cuál será el monto generado?

Solución:

(1°) Los datos son:
C = 3 000 soles

$n \;=\; 6$ meses

$\% I = 7\%$; $r = 0.07$

$M_6 = ??$, $I = ??$

(2°) De acuerdo a la regla.

$M_n = C + I = C(1+r)^n$

$\Rightarrow \; M_6 = 3\,000 + I = 3\,000(1+0.07)^6$ .... (1)

(3°) De la ecuación (1)

$M_6 = 3\,000 + I = 3\,000(1.07)^6$

$M_6 = 3\,000 + I = 3\,000(1,5007)$

$M_6 = 3\,000 + I = 4\,502$

(4°) Finalmente:

Interés generado = 1 502
en 6 meses

Monto generado = 4 502
en 6 meses

22.6 LA ANUALIDAD O IMPOSICION

Definición: La anualidad o imposición es la cuota constante que se paga periódicamente en una fecha fija, durante un tiempo limitado para constituir un capital o pagar una deuda, en ambos casos el mecanismo es a interés compuesto.

Las anualidades pueden ser:

- Anualidades o imposiciones de capitalización (a_c)
- Anualidades o imposiciones de Amortización (a_a)

22.6.I.-LA ANUALIDAD O IMPOSICION DE CAPITALIZACION (a_c)

Teorema: La cuota periódica "a_c" para informar un capital "C", luego de hacer los "n" pagos al principio de cada período y estando beneficiado dichas imposiciones al interés compuesto de tasa r, vendrá dado por:

$$a_c = \frac{cr}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

Donde: C = Capital que desea componerse

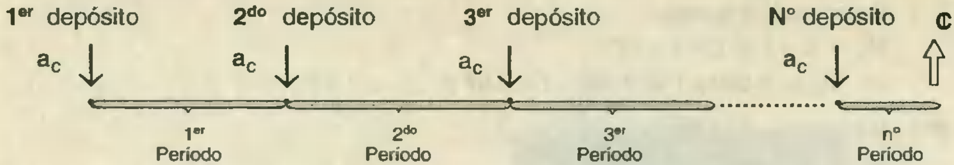
r = tasa de interes

n = n° de períodos

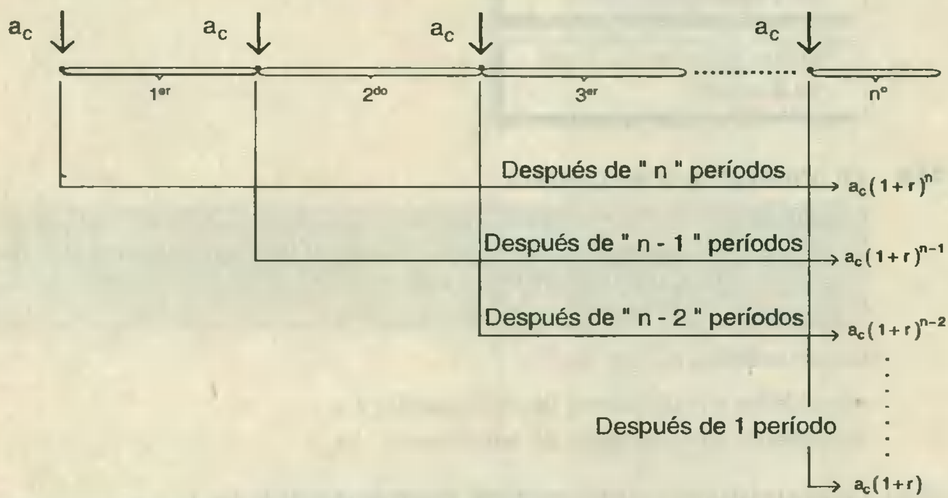
a_c = unidad de capitalización o cuotas periódicas

Demostración:

(1) Sobre un segmento ilustremos los "n" depósitos "a" realizados al inicio de cada período y C al final del "n" período.



(2) Ilustrando los capitales finales de cada depósito a_c como resultado del interés compuesto.



(3) De aplicar la definición de anualidad de capitalización:

$$\boxed{\sum \text{ capitales finales de } a_c = \text{capital a conformarse } C}$$

$$\Rightarrow \; a_c(1+r)^n + a_c(1+r)^{n-1} + a_c(1+r)^{n-2} + \ldots + a_c(1+r) = C \text{ .... } (1).$$

(4) En esta ecuación es desconocido " a_c " ; observemos que la misma es una ecuación de 1er grado, por lo que resolviendo tendremos:

$$\Rightarrow \; a_c(1+r)\underbrace{\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} + \ldots + 1\right]}_{\text{Serie Geométrica}} = C$$

$$\Rightarrow \; a_c(1+r)\left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)-1}\right] = C$$

Despejando a_c de ésta

$$a_c\,(1+r)[(1+r)^n-1] = Cr \qquad \therefore \quad \boxed{a_c = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}}$$

a_c es la cuota periódica o imposición o anualidad que al ser pagada al principio de cada uno de los "n" períodos y estar beneficiada de interés compuesto de tasa "r" logra conformar el capital "c".

Ejemplo:

Se desea conformar en 10 meses 4 000 $, bajo la modalidad de cuotas de capitalización. Si la entidad financiera paga un interés del 2% mensual.

De cuánto deben de ser dichas cuotas de capitalización mensuales, pagadas al principio de cada mes.

Solución:

(1°) Por tratarse de cuotas de capitalización, se tendrá:

$$\Rightarrow \quad a_c = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}$$

(2°) Según los datos:

C = 4 000 $ (capital a conformar)

r = 0.02 (tasa de interés)

n = número de períodos

$$\Rightarrow \quad a_c = \frac{4{,}000 \times 0.02}{(1+0.02)\left[(1+0.02)^{10}-1\right]}$$

$$\Rightarrow \quad a_c = 4\,000\,\{0.090\} \qquad \Rightarrow \qquad a_c = 360$$

(3°) Finalmente se deberán aportar 360 $ cada mes a fin de conformar los 4 000 $ en 10 meses.

21.6. LA ANUALIDAD O IMPOSICION DE AMORTIZACION (a_a)

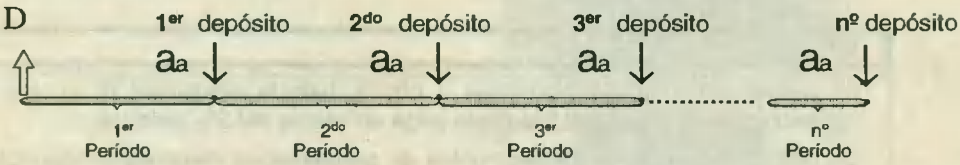
Teorema: Sea "D" la deuda actual que se desea pagar juntamente con los intereses de tasa "r" que ésta genere, pagando durante "n" períodos una anualidad o imposición de amortización "a_a" al final de los mismos que a su vez estén a interés compuesto de tasa "r"; la anualidad "a_a" que permite dicha amortización viene dado por la igualdad.

$$a_a = D\left[\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\right]$$

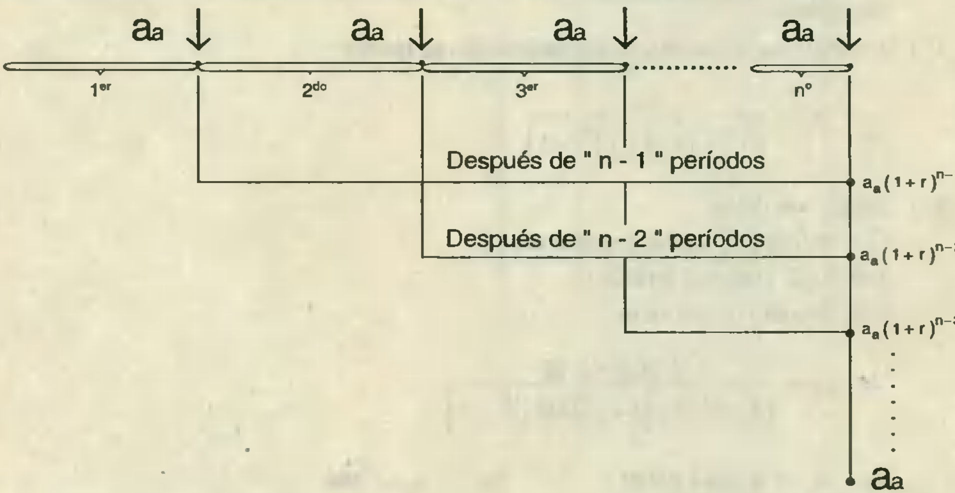
Donde :	a_a = Anualidad de amortización o cuotas periódicas
	r = Tasa de interés fija de cada período
	n = N° de períodos de amortización
	D = Monto de la deuda

Demostración:

(1) Sobre un segmento ilustremos los "n" depósitos "a_a" realizados al final de cada período y "D" al principio del 1^er período.



(2) Ilustrando los capitales finales a los cuales se transforma cada depósito "aa"



Observar que la última anualidad se deposita el último día del último período y no gana intereses.

(3) En el gráfico anterior, la deuda "D" estuvo impuesta durante n perídos por lo que se transforma en el capital final.

$$\boxed{D(1+r)^n}$$

(4) De aplicar la definición de anualidad de amortización:

$$\boxed{\sum \text{ de capitales finales de } a_a = \text{Deuda "D" más sus intereses.}}$$

$$\Rightarrow \quad a_a(1+r)^{n-1} + a_a(1+r)^{n-2} + a_a(1+r)^{n-3} + \ldots + a_a = D(1+r)^n$$

En esta ecuación es desconocido únicamente a_a, asi mismo se trata de una ecuación de 1^er grado por lo que al resolver :

$$\Rightarrow a_a\Big[\underbrace{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots\ldots+1}_{\text{Serie Geométrica}}\Big]=D(1+r)^n$$

$$\Rightarrow a_a\left[\frac{(1+r)^n-1}{\underbrace{(1+r)-1}_{r}}\right]=D(1+r)^n \quad\Rightarrow\quad a_a\left[(1+r)^n-1\right]=D(1+r)^n\, r$$

$$\therefore\ \boxed{a_a=D\left[\frac{(1+r)^n\, r}{(1+r)^n-1}\right]}$$

Ejemplo:

Se compra un grupo electrógeno en 3 500 $, la empresa comercial lo cede en crédito, para ser pagado en 9 meses, cobrando interés compuesto del 4% mensual, si el plan de pagos establece iniciar la amortización al final de cada mes.

Calcular las cuotas de amortización mensual.

Solución:

(1°) Datos del problema.

D = 3 500 $ (deuda por amortizar)

r = 0,04 (tasa de interés)

n = 9 meses (período de la deuda)

a_m = cuotas mensuales de amortización

(2°) De acuerdo al teorema de la amortización.

$$\Rightarrow a_m=D\left[\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\right] \quad\Rightarrow\quad a_m=3500\left[\frac{0.04(1+0,04)^9}{(1+0,04)^9-1}\right]$$

$$\Rightarrow a_m=3500\left[\frac{0,04\times 1,09^9}{1,04^9-1}\right] \quad\Rightarrow\quad a_m=3500\left[\frac{0,04\times 1,4233}{1,4233-1}\right]$$

$$\Rightarrow a_m=3\,500\,[\,0.1345\,] \qquad \therefore\ \boxed{a_m=471}$$

(3°) Finalmente:

Debemos amortizar mensualmente: 471 $

21.7 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

21.7.1 Ejercicio Explicativo

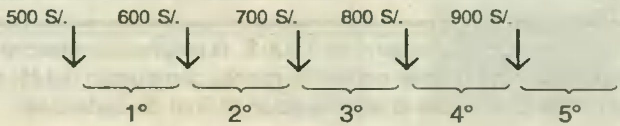
Se tiene un programa de depósitos en el banco, el cual paga una tasa de $r = 0.05$ mensual de interés compuesto.

Al principio se deposita S/. 500 el cual se incrementa en S/. 100 cada mes y durante 5 meses.

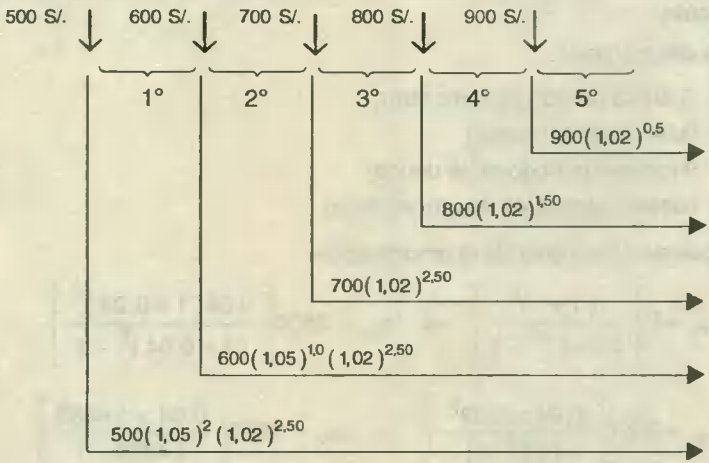
Hallar el interés acumulado, considerando que a partir del inicio del 3er mes la tasa disminuye a 0.02 mensual y que el dinero se va a retirar a la mitad del 5º mes.

Solución:

(1°) Haciendo un esquema del flujo a realizarse:



(2°) Por ser un proceso a interés compuesto.



(3°) Se deberá verificar que : $\sum m = \sum c + \sum I$

$$\sum m = 908.96 + 824.12 + 735.53 + 661.97 + 579.22$$

$$\sum m = 3\,709.8 = 500 + 600 + 700 + 800 + 900 + I \quad \therefore \quad \boxed{I = 210}$$

21.7.2 Ejemplo Explicativo

Calcular la anualidad que se ha de pagar mensualmente por una deuda de S/. 4 500 el cual exige un interés del 4% mensual y se termine de pagar en 8 meses.

Solución:

(1°) Adjuntando los datos:

D = 4 500 S/.

$r = 0.04$ I/mes

$n = 8$ meses

$a_a = ??$

(2°) A partir de la definición de anualidad.

$$a_a = \frac{Dr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Rightarrow a_a = \frac{4500 \times 0.04 \times (1.04)^8}{(1.04)^8 - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_a = 668.375 \ \frac{\text{soles}}{\text{mes}}}$$

Ejemplo Explicativo

En cuántos años se triplicará un capital colocado al interés compuesto y una tasa del 3% mensual.

Recuerde:

La fórmula del interés compuesto viene dado por :

$$M = C + I = C(1+r)^n$$

Solución:

(1°) Datos:

Capital = C ; $r = 0{,}03$; Monto = 3C

(2°) Se tendrá:

$$\Rightarrow 3C = C(1+r)^n \Rightarrow 3\cancel{C} = \cancel{C}(1+0{,}03)^n$$

(3°) Resolviendo en n : $\Rightarrow 3 = 1.03^n$

$$\Rightarrow \log 3 = n \log(1{,}03) \Rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}477121}{0{,}012284}$$

$$n = 37.16 \text{ meses} \Rightarrow \# \text{ de años} = \frac{37{,}16}{12} \approx 3 \text{ años}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{se triplica en casi 3 años}}$

21.8 Ejercicios y Problemas Propuestos

CAPITULO: EL ALGEBRA COMERCIAL

(1) En cuantos años, lo más aproximadamente posible, al 15% de interés compuesto, se duplica su capital, considérese: $\log 2 = 0{,}301030$; $\log 1{,}15 = 0{,}0607$

Rpta: Aproximadamente 5 años.

(2) Que capital se puede pedir prestado, si es posible pagar al final de cada año x soles, durante "n" años al 100% de interés compuesto?

$$\textbf{Rpta:}\quad c = \frac{x\left[(1-r)^n - 1\right]}{r(1-r)^n}$$

(3) Para formar un capital C, dentro de " n " años, que cantidad " x " se debe depositar al principio de cada año al r % de interés compuesto?

Rpta: $x = \dfrac{cr}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$

(4) Para que un capital colocado al 100 % de interés compuesto aumente en un K % en "n" años se requiere que " r " valga.

Rpta: $\sqrt[n]{1+0.01K} - 1$

(5) El 1° de enero de 1 905 deposité al 5% de interés compuesto anual la suma de 200 000 soles. Al fin del año 1 968 ¿Qué capital habré formado?

Rpta: 242 000 soles

(6) Para formar un capital A dentro de 4 años, que cantidad "x" debe depositarse al comienzo de cada año al 100 r % al interés compuesto.

Rpta: $\dfrac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^4 - 1\right]}$

(7) Calcular, cual es la anualidad a que depositada durante "n" años a interés compuesto, amortiza una deuda D más sus intereses compuestos.

Rpta: $\dfrac{D(1+r)^n - r}{(1+r)^n - r}$

(8) Se estima una mezcladora de concreto sufre una depreciación del 10% por cada año de uso, respecto al precio que tuvo al comenzar cada año.
Si al cabo de 4 años su precio es de S/. 131 220. Entonces el costo original de la mezcladora fue de:

Rpta: S/. 200 000

(9) Para este problema pueden usarse los siguientes datos:

$\log 2 = 0{,}30103$; $\log 3 = 0{,}47712$

$\log 4 = 0{,}60206$

$\log 1{,}01 = 0{,}00432$; $\log 1{,}02 = 0{,}00860$

$\log 1{,}03 = 0{,}01283$; $\log 1{,}04 = 0{,}01703$

La población de un estado crece cada año en 1/100 de lo que era el año precedente. ¿La población se habrá duplicado en cuántos años?

Rpta: 70 años

(10) Dos poblaciones A y B tienen en la actualidad 9 167 360 y 143 240 habitantes respectivamente, suponiendo una disminución anual de A en 1/8 de sus habitantes. Dentro de cuánto tiempo las dos poblaciones tendrán el mismo número de habitantes.

Rpta: 6 años

(11) ¿Cuál fue el capital que, colocado al 120% de interés anual y capitalizado trimestralmente, después de 9 meses se transformó en I/. 10 985.

Rpta: 5 000

CAPITULO 23

LA FUNCION INTEGRAL

23.1 ***Definición:*** La operación $\int_a$ denominada integración y leída "Las integrales de a" está definida por, $G = \int_a f$; donde "G"es la función con regla de correspondencia $G_{(x)} = \int_a^x f$; el dominio de "G"es el conjunto de todas las "x" para los que la integral está definida.

La operación inversa a la derivación es la antiderivación o integración, por lo que la definición anterior la expresamos como:

Definición: Una función F se denomina Integral de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ paratodo valor de x en I.

Ejemplo:

Seaf (x) $= x^4$ la regla de correspondencia original.

$\Rightarrow$ f (x) $= 4x^3$ es la derivada de la función f (x).

$\Rightarrow$ f '(‹) $= x^4$ es la integral de f'(x).

Para fines de ilustración exclusivamente, obtengamos la función original f (x) para ello utilicemos el cálculo integral.

(1°) **Integrando:**

$f'(x) = 4x^3$; es la derivada

(2°) $\Rightarrow \int f'(x)dx = \int 4x^3 dx$; escribiendo la simbología de la integración.

$$\Rightarrow f(x) = 4\frac{x^{3+1}}{3+1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4\left(\frac{x^4}{4}\right)$$

$\therefore \boxed{f(x) = x^4}$ Es la regla de correspondencia original o integral de f'(x) o antiderivada de f'(x).

Estrictamente hablando ésta debiera ser tomada como la integral indefinida y ser representada como : $f(x) = x^4 + c$

La derivación e integración son algoritmos recíprocos.

23.2 LA INTEGRAL INDEFINIDA

Definición: F(x) es la integral definida de f(x) (continua y derivable)

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ y denotada por: $F(x) = \int f(x)dx$

23.3 **Comentario:**

Si se nos plantea : $\int x^2dx$

Corrientemente significa la x^2dx siguiente interrogante:

A) El resultado de aplicar el algoritmo de la derivada a cierta regla funcional fue . x^2, ¿cuál fue dicha regla original?

B) Para lograr responder a tal interrogante se utiliza el **algoritmo de integración.**

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

C) Verificando podremos decir que la regla funcional fue: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ por lo que insistiendo en su derivada será:

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2}{3} + 0 \quad \therefore \quad f'(x) = x^2$$

D) Usualmente las integrales fundamentales se dan en tablas, por lo que preliminarmente podríamos decir que el cálculo integral es una prolongación del álgebra elemental.

Ejemplo:

Sea: $\int x^2\,dx \Rightarrow \int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + k$

Verificando:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + k\right) = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$$

Ejemplo:

Sea: $\int \cos x\,dx \Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x + k) = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}x) + \frac{d}{dx}(k) \quad \Rightarrow \quad \cos x$$

Ejemplo:

Sea: $\int \sqrt{x}\,dx \Rightarrow \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$

Verificando:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k\right) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{d}{dx}(k) \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo:

Sea: $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x + k$$

Verificando:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sen } x + k) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ (Mediante tablas).

Ejemplo:

Sea: $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + k$$

Verificando:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } x + k) = \frac{1}{1+x^2}$$

23.4 Propiedades Básicas de la Integral

En el estudio de las sumas finitas se estableció que:

1) $$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \quad (1 \leq j \leq n)$$

3) $$\sum_{k=1}^{n} c\,a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$ Si "C" es una constante, se le puede extraer de la integral.

4) $$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$ La sumatoria es distributiva.

5) Si: $a_k \leq b_k$ ($k = 1, ..., n$) implica $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$

6) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

La integral definida tiene propiedades que son análogas a la $\sum$ o sumatoria.

(I) Si $c \in [a, b]$ y f es integrable en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(II) Si $c \in [a, b]$ y f es integrable en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

(III) Si f es integrable en $[a, b]$ y c es una constante, entonces "cf" es integrable en $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b cf = c\int_a^b f}$$

(IV) Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g}$$

(V) Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \le g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, entonces:

$$\boxed{\int_a^b f \le \int_a^b g}$$

(VI) Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable es $[a, b]$

$$\boxed{\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|}$$

23.5 TABLA DE INTEGRALES DE USO FRECUENTE

(1) $\int dx = x + c \;;\; \int a\,dx = ax + c$

(2) $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$; (excepto para $m = -1$)

(3) $\int e^x dx = e^x + c \;;\; \int e^{ax+b} dx = \dfrac{e^{ax+b}}{a} + c$

(4) $\int (\operatorname{Ln} x)\, dx = x(\operatorname{L.} x - 1) + c \;;\; \int (\log_a x)\, dx = x(\log_a x - \log_a e) + c$

(5) $\int \dfrac{dx}{x} = \operatorname{Ln} x + c \;;\; \int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\operatorname{Ln}(ax+b) + c$

(6) $\int (\operatorname{sen} x)\, dx = -\cos x + c \;;\; \int (\cos x)\, dx = \operatorname{sen} x + C$

(7) $\int (\operatorname{tg} x)\, dx = -\operatorname{Ln}(\cos x) + C \;;\; \int (\cot x)\, dx = \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} x) + C$

(8) $\int \sec x dx = \operatorname{Ln}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right] + c \;;\; \int (\operatorname{cosec} x)\, dx = \operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + c$

(9) $\int (\sec^2 x)\, dx = \operatorname{tg} x + C \;;\; \int -\csc^2 x\, dx = \operatorname{ctg} x + C$

(10) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx = \sec x + C \;;\; \int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\csc x + C$

(11) $\int (\operatorname{sen}^2 x)\, dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C \;;\; \int (\cos^2 x)\, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$

(12) $\int (\operatorname{arc\,sen} x)\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2} + c$

(13) $\int (\operatorname{arc\,cos} x)\, dx = x \operatorname{arc\,cos} x - \sqrt{1 - x^2} + c$

(14) $\int \dfrac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + c \;;\; \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{a} + c$

(15) $\int \dfrac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,cos} x + c \;;\; \int \dfrac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x}{a} + c$

(16) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + c \;;\; \int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a} + c$

(17) $\int \dfrac{-dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,ctg} x + a \;;\; \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{x}{a} + c$

(18) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + c \;;\; \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \dfrac{x}{a} + c$

(19) $\int \dfrac{-dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,csc} x + c \;;\; \int \dfrac{-dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arc\,csc} \dfrac{x}{a} + c$

(20) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Ln}\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + c \;;\; \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 + a} \right) + c$

(21) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Ln}\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) + c$

(22) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + c$

(23) $\boxed{\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{Ln}\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c \quad ; \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\operatorname{Ln} a} +}$

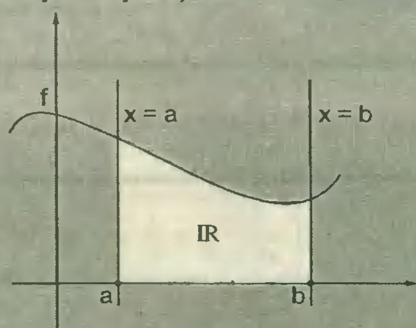
(24) $\boxed{\int \frac{(2ax + b)\, dx}{ax^2 + bx + d} = \operatorname{Ln}\left(ax^2 + bx + d\right) + c}$

23.6 DEFINICION DE AREA

Dada una función "F", F > 0 en [a, b], definimos:

$$\boxed{\mathbb{R} = \{ (x, y) / x \in [a, b] \ \wedge \ y \in [0, f(x)] \}}$$

A IR se le denomima "región bajo f de hasta b"; IR es la región limitada por la gráfica de f, de las rectas x = a y x = b y el eje x.



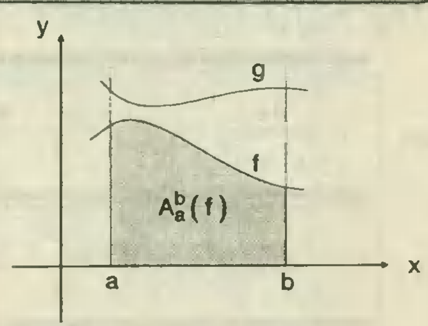
Denotando:

$$\boxed{\text{Area } \mathbb{R} = A_a^b(f)}$$

cuya lectura será: área de la región IR por debajo de la curva "f" y el eje x y comprendida entre "a" y "b" la misma que posee las siguientes propiedades.

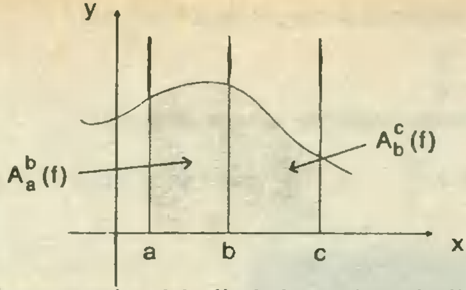
(i) $\boxed{\text{Si: } f(x) \leq g(x) \ \forall \ x \in [a, b] \ \Rightarrow \ A_a^b(f) \leq A_a^b(g)}$

"Una función positiva menor que otra genera a su vez un área menor correspondiente."



(ii) $\boxed{A_a^c(f) = A_a^b(f) + A_b^c(f) \quad \forall \ c \in [a, b]}$

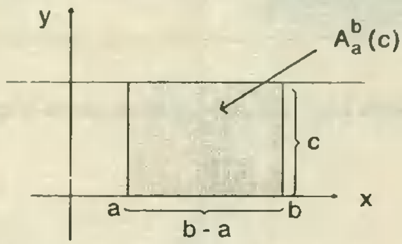
"El área de la región IR puede descomponerse en regiones parciales."



Una de las aplicaciones usuales del cálculo integral es el cálculo de áreas bajo curvas funcionales.

(iii) $\boxed{A_a^b(c) = c(b-a) \quad c \geq 0}$

Esto último implica que si $c > 0$ el área del rectángulo es igual al largo por el ancho.



$$\boxed{\Rightarrow \quad A_a^b(c) = c(b-a)}$$

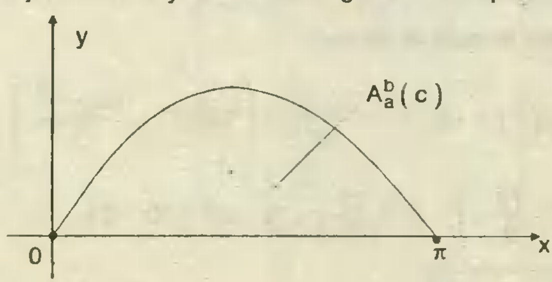
(iv) $\boxed{A_a^b(f) = \int_a^b f\, df}$

23.6.1 Ejemplo Explicativo

Encuéntrese el área bajo la curva de la función seno desde $x = 0$ hasta $x = \pi$

Solución:

(1°) Por la definición de área bajo una curva y de acuerdo al gráfico correspondiente.



$$\Rightarrow \quad A_a^b(c) = \int_0^\pi \text{sen } x \; dx$$

(2°) En esta igualdad realizamos la integral del 2° miembro :

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \cos x \Big]_0^{\pi}$$

(3°) Evaluamos el 2° miembro mediante la regla de Barrow :

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$\Rightarrow \; -(-1)-(-1) = 1+1 = 2$$

$$\therefore \; \boxed{A_a^b(c) = 2}$$

23.6.2 **Ejemplo Explicativo**

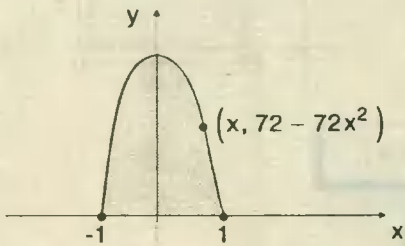
Encuentre el área bajo la curva de la función cuadrática de regla:

$f(x) = 72 - 72x^2$

desde $x = -1$ hasta $x = 1$

Solución:

(1°) Por la definición de área bajo una curva y de acuerdo al gráfico correspondiente:



(2°) La expresión del área será:

$$\Rightarrow \; A_{-1}^{1}(c) = \int_{-1}^{1} (72 - 72x^2)\, dx$$

$$= \left(72x - 72\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{1}$$

(3°) Mediante la regla de Barrow

$$\Rightarrow A_{-1}^{1}(c) = 72(1) - \frac{72(1)^3}{3} - \left(72(-1) - \frac{72(-1)^3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 72 - \frac{72}{3} - \left(-72 + \frac{72}{3}\right) = 72 - 24 + 72 - 24$$

$$\therefore \; \boxed{A_{-1}^{1}(c) = 96}$$

23.7 METODOS DE INTEGRACION

En esta sección consideramos dos métodos de integración:

(i) Integración por partes

(ii) Integración por sustitución.

La integración por partes se basa en la regla para diferenciar el producto de funciones y la integración por sustitución en la regla para diferenciar la composición de funciones.

(i) **Integración por partes**

Suponiendo que las funciones U y V tienen derivadas continuas sobre un intervalo I. Por la regla para derivar el producto de reglas funcionales:

$D(UV) = U'V + UV'$ sobre el intervalo I

Por ser UV', $U'V$ y $D(UV)$ continuas sobre I

$\Rightarrow \int D(UV) = \int U'V + \int UV'$

$\therefore \boxed{\int UV' = UV - \int U'V}$ Es meta de integración por partes.

Ejemplo:

Evaluar :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$$

Solución:

(1°) Mediante la integración por partes por no ser inmediata:

Expresando el integrando $\cos^2 x\, dx$ en la forma $U'V$ para ello:

$\boxed{U = \cos x}$ y $\boxed{V = \operatorname{sen} x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U' = -\operatorname{sen} x}$ $\boxed{V' = \cos x}$

$UV' = \cos^2 x$, $UV = \cos x \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow$ $U'V = -\operatorname{sen} x^2$

(2°) Sustituyendo en la regla de integración :

$\int UV' = UV - U'V$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x - \int \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$ .... (I).

(3°) $\Rightarrow$ Acudiendo a: $\boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \cos^2 x\, dx$

(4°) Ordenando:

$\Rightarrow \int 2 \cos^2 x\, dx = \cos x \operatorname{sen} x + x$

(5°) Aislando $\int \cos^2 x\, dx$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{x}{2}$ .... (II).

(6°) En II se realizó la integración ; procederemos a evaluar la integral de acuerdo a la regla de Barrow.

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \operatorname{Cos}^2 x\, dx = \left(\frac{1}{2} \operatorname{Cos} x \ \operatorname{sen} x + \frac{x}{2} \right) \Bigg]_0^{2\pi} = \pi}$$

Ejemplo:

Demostrar la igualdad siguiente:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

Demostración:

(1°) Hacemos que : $\boxed{U = x^2}$, $\boxed{V' = \operatorname{sen} x\, dx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U' = 2x}$, $\boxed{V = -\cos x\text{, integrando}}$

(2°) Identificando en la integración por partes :

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int UV' = UV - U'V}$$

$$\Rightarrow \int \underset{U}{\underset{\uparrow}{x^2}}\, \underset{V'}{\underset{\uparrow}{\operatorname{sen} x\, dx}} = \underset{U}{\underset{\uparrow}{x^2}} \underset{V}{\underset{\uparrow}{(-\cos x)}} - \int \underset{U'}{\underset{\uparrow}{2x}} \underset{V}{\underset{\uparrow}{(-\cos x)}}\, dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx} \quad \text{.......... (I).}$$

(3°) En la igualdad (I) no se tiene establecido la integral , por lo que está pendiente una integral intermedia.

$\Rightarrow \int x \cos x\, dx$ mediante integración por partes :

(4°) Haciendo que :

$\boxed{U = x}$, $\boxed{V' = \cos x\, dx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{U' = 1}$, $\boxed{V = \operatorname{sen} x}$

$$\Rightarrow \int \underset{U}{\underset{\uparrow}{x}}\, \underset{V'}{\underset{\uparrow}{\cos x\, dx}} = \underset{U}{\underset{\uparrow}{x}}\, \underset{V}{\underset{\uparrow}{\operatorname{sen} x}} - \int \underset{U'}{\underset{\uparrow}{1}}\, \underset{V}{\underset{\uparrow}{x \operatorname{sen} x}}\, dx$$

$$\Rightarrow \int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \int -\operatorname{sen} x\, dx \quad ; \quad \boxed{\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x}$$

$$\boxed{\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x} \quad \text{.......... (II).}$$

(5°) Sustituyendo (II) en I

$$\Rightarrow \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2 (x \operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

$$\therefore \boxed{\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + c}$$

23.8 EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

23.8.1 Ejercicio Explicativo

Calcular :

$$I = \int_2^8 \frac{1}{16} x^{-3}\, dx$$

Recuerde:

$$I = \int_a^b k\, f(x)\, dx = k\, H(x) \Big]_a^b = k\,[\,H(b) - H(a)\,]$$

Solución:

(1°) Integrando : $I = \dfrac{1}{16} \displaystyle\int x^{-3}\, dx = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{x^{-2}}{-2}\right)$

(2°) Por la regla de Barrow : $\displaystyle\int_2^8 \frac{1}{16} x^{-3}\, dx = \frac{1}{16}\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)_2^8$

(3°) Evaluando : $I = \left[\dfrac{1}{16} \times \dfrac{8^{-2}}{2} - \dfrac{1}{16} \times \dfrac{2^{-2}}{-2}\right] \quad \therefore\ I = \dfrac{15}{2018}$

23.8.2 Ejercicio Explicativo

Calcular:

$$\int_2^8 6x^2\, dx$$

Solución:

(1°) Por ser una integral definida :

$$\int_2^8 6x^2\, dx = 6\int_2^8 x^2\, dx$$

$$\Rightarrow\ 6\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Bigg|_2^8 = 6\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^8$$

(2°) Por la regla de Barrow

$$\frac{6}{3}\left[\,x^3 - 2^3\,\right] = 2\,[\,512 - 8\,] = 1008$$

23.8.3 Ejercicio Explicativo: Cálculo Integral

Calcular :

$$I = \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$$

Donde : $x > 0$

Recuerde:

(i) $\int f_0(x)+f_1(x)+\ldots.f_n(x)dx = \int f_0(x)+\int f_1(x)+\ldots\int f_n(x)dx$

(ii) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$

Solución:

(1°) Separando en sumandos de integrales :

$$I = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{-3}}{3} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c$$

$$I = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{-4}\,dx + \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

(2°) Integrando cada sumando :

$$I = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3x^3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$$

$$\therefore\ I = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$$

23.8.4 **Ejercicio Explicativo: Cálculo Integral**

Calcular:

$$I = \int x^2\sqrt{x+1}\,dx \ \wedge\ 1+x>0$$

Recuerde:

Se aplica las siguientes propiedades:

(i) Cambio de variable

(ii) $\int f_0(x)\,dx + \int f_1(x)\,dx = \int [f_0(x)+f_1(x)]\,dx$

(iii) $\int [g(x)]^n g'(x) > dx = \dfrac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ donde : $g'(x) = \dfrac{dg(x)}{dx}$

Solución:

(1°) Sea $\boxed{t = \sqrt{x+1}}$ entonces $\boxed{t^2 = 1+x}$

$\rightarrow \boxed{x = t^2-1} \quad \rightarrow \quad \boxed{dx = 2t\,dt}$

(2°) Sustituyendo en la integral :

$$I = \int \underbrace{(t^2-1)^2}_{x^2}\,\underbrace{t.2t\,dt}_{\sqrt{(x+1)}\,dx}$$

(3°) $I = \int 2(t^2-1)^2\,t^2\,dt \quad \rightarrow \quad I = \int 2(t^4-2t^2+1)\,t^2\,dt$

(4°) Descomponiendo la integral :

$$I = \int 2t^6\,dt - \int 4t^4\,dt + \int 2t^2\,dt$$

(5°) $I = 2\int t^6\,dt - 4\int t^4\,dt + 2\int t^2\,dt$

$$I = \frac{2}{7}t^7 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + c$$

(6°) Sustituyendo t por la equivalencia : $\boxed{t = \sqrt{x+1}}$

$$\boxed{I = \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+1}\right)^7 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + c}$$

23.8.5 **Ejercicio Explicativo**

Calcular :

$$\ln\left(\left(\int_3^5 e^{x^2+x-12}\,.\,(2x+1)\,dx\right)+1\right)$$

Solución:

(1°) Integrando lo contenido en el 1er parentesis :

$$\int_3^5 e^{x^2+x-12}\,(2x+1)\,dx = e^{x^2+x-12}\Big]_3^5$$

$$\Rightarrow e^{25+5-12} - e^{9+3-12} = e^{18} - e^{0} = e^{18} - 1$$

(2°) Cálculo de la expresión contenido en el 2° parentesis :

$\ln(e^{18} - 1 + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln(e^{18}) = 18}$

$$\therefore \boxed{\ln\left(\int_3^5 e^{x^2+x-12}\,(2x+1)\,dx + 1\right) = 18}$$

23.8.6 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$\int_1^2 \left(1+x^3\right)^5 x^2\,dx$$

Solución:

(1°) Haciendo el cambio:

$u = 1 + x^3$ .... (1).

$du = 3x^2\,dx$ .... (2).

(2°) Sustituyendo la integral propuesta en términos de "u"

$$\int_1^2 \left(1+x^3\right)^5 x^2\,dx = \int_1^2 u^5\,\frac{du}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}\int_1^2 u^5\,du$$

(3°) Evaluando :

$$\frac{1}{3}\frac{u^6}{6}\Big]_1^2 = \frac{1}{18}\left(x^3+1\right)^6\Big]_1^2 = \frac{1}{18}\left(9^6 - 2^6\right) = \frac{1}{18}(531377)$$

$$\therefore \boxed{\int_1^2 \left(1+x^3\right)^5 x^2\,dx = 29520.94}$$

23.8.7 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$\int_2^4 \frac{16}{x^5}\,dx$$

Solución:

(1°) Por ser una integral definido:

$$\int_2^4 \frac{16}{x^5}\,dx = 16\int_2^4 \frac{1}{x^5}\,dx = 16\int_2^4 x^{-5}\,dx$$

$$16\left(\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right)\Big]_2^4 = 16\left(\frac{x^{-4}}{4}\right)\Big]_2^4 = 16\left(\frac{1}{x^4}\right)\Big]_2^4$$

(2°) Aplicando la regla de Barrow

$$\Rightarrow -4\left(\frac{1}{4^4}-\frac{1}{2^4}\right) = -\frac{4}{4^4}+\frac{4}{2^4} = -\frac{1}{64}+\frac{1}{4}$$

$$\therefore \boxed{\int_2^4 \frac{16}{x^5}\,dx = \frac{15}{64}}$$

23.8.8 **Ejercicio Explicativo**

Calcular : $\int_{-30}^{60} (40+x)^{-1}\,dx$

Solución:

(1°) Por ser una integral definida:

$$\int_{-30}^{60} (40+x)^{-1}\,dx = \int_{-30}^{60} \frac{dx}{(40+x)}$$

(2°) Integrando :

$$\ln(40+x)\Big|_{-30}^{60}$$

(3°) Por Regla de Barrow

$$\Rightarrow \ln(40+60) - \ln(40-30) = \ln 100 - \ln 10 = \ln\left(\frac{100}{10}\right)$$

$$\therefore \boxed{\int_{-30}^{60} (40+x)^{-1}\,dx = \ln 10}$$

23.8.9 **Ejercicio Explicativo**

Calcular :

$$\int_{-2}^{2}\left(18-9x^2\right)dx$$

Solución:

(1°) Descomponiendo la integral :

$$\int_{-2}^{2}\left(18-9x^2\right)dx \;=\; \int_{-2}^{2}18\,dx-\int_{-2}^{2}9\,x^2\,dx$$

(2°) Integrando cada integral :

$$18\int_{-2}^{2}dx-9\int_{-2}^{2}x^2\,dx \;=\; 18(x)\Big|_{-2}^{2}-9\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

(3°) Según Barrow :

$$\Rightarrow\; 18\left[2-(-2)\right]-\frac{9}{3}\left[2^3-(-2)^3\right] \;=\; 18(4)-\frac{9}{3}\times(16) \;=\; 72-48$$

$$\therefore\; \boxed{\int_{-2}^{2}\left(18-9x^2\right)dx = 24}$$

23.8.10 **Ejercicio Explicativo**

Determinar la familia de primitivas de la regla función al derivada :

$F'(x) = x^3+x^2+x+5$

Solución:

(1°) Debemos de calcular:

$$\int F'(x)dx = F(x)+c\,,\quad \text{donde}:\; \int\left(x^3+x^2+x+5\right)dx = F(x)+c$$

$$\Rightarrow\; \int x^3\,dx+\int x^2\,dx+\int x\,dx+\int 5\,dx = F(x) \;\Rightarrow\; \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+5x+c = F(x)+c$$

(2°) La función primitiva será :

$$\therefore\; \boxed{F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+5x+c}$$

23.8.11 **Ejercicio Explicativo**

Calcular :

$$\int_{0}^{\pi/4}\operatorname{Cos}x\;dx$$

Solución:

(1°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{Cos } x \, dx = \text{Sen } x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx = \text{sen } x$

(2°) Según Barrow :

$$\Rightarrow \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{Sen}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{\pi/4} \text{Cos } x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

23.8.12 **Ejercicio Explicativo**

Calcular:

$$K = {\scriptstyle \int_2^4 x^4 dx}\sqrt{\frac{\left(\int_1^2 \frac{1}{x} dx\right)^{-1}}{}\sqrt{\int_1^{993} e^{x-1} \, dx + 1}}$$

Solución:

(1°) Efectuando por partes:

$$\int_2^4 x^4 \, dx = \frac{x^5}{5}\Big]_2^4 = \frac{1}{5}\left(4^5 - 2^5\right) \quad \therefore \quad \boxed{\int_2^4 x^4 \, dx = \frac{1}{5}(992)} \quad \text{.................. (A)}$$

(2°) Además :

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big]_1^2 = \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} \quad \therefore \quad \boxed{\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2} \quad \text{.................. (B)}$$

(3°) Finalmente :

$$\int_1^{993} e^{x-1} \, dx = e^{x-1} \Big]_1^{993} = e^{993-1} - e^{1-1} \quad \therefore \quad \boxed{\int_1^{993} e^{x-1} \, dx + 1 = e^{992}} \quad \text{..... (C)}$$

(4°) Cálculo de "k"; sustituyendo A,B y C :

$$K = \frac{992}{5}\sqrt{{\scriptstyle 1/\text{luz}}\sqrt{e^{992}}} = e^{992 \times \frac{1}{992} \times \ln 32} = e^{\text{luz}} = 2$$

$$\therefore \boxed{k = 2}$$

23.9 EJERCICIOS PROPUESTOS
CAPITULO: LA INTEGRAL

(1) Evalúese : $\int_{-3}^{5}\left(x-1^{2}\right)dx$

Rpta: $\dfrac{128}{3}$

(2) Evalúese : $\int_{0}^{\pi/2}\cos 3x\,dx$

Rpta: $-\dfrac{1}{3}$

(3) Evalúese : $\int_{0}^{2\pi} x\,\text{sen}x\,dx$

Rpta: -2π

(4) Evalúese : $\int_{0}^{\pi}\text{sen}^2 x\,dx$

Rpta: $\dfrac{\pi}{2}$

(5) Evalúese : $\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$

Rpta: $\dfrac{2}{9}$

(6) La velocidad v (t) en el instante t de una particula que viaja a lo largo de una recta es $v(t) = t + \cos t$. ¿cuál es la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ al instante $t = 4\pi$?

Rpta: $8\pi^2$

(7) Evalúese la siguiente integral : $\int_{-1}^{3} 2\left(x^3+4\right)dx$

Rpta: 72

(8) Evalúese la integral : $\int_{0}^{8} x^3\,dx$

Rpta: $\dfrac{8^{14}}{14}$

(9) Calcular la integral : $\int_{0}^{\pi/4} \cos 2x\ dx$

Rpta: $\frac{1}{2}$

(10) Calcular la integral : $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x\ dx$

Rpta: $\frac{1}{3}$

(11) Calcular la integral : $\int_{4}^{0} u\left(u^2+2\right)du$

Rpta: -80

(12) Calcular la integral : $\int_{0}^{0.997} \frac{1}{(1-x)^2}\ dx$

Rpta: $332\frac{1}{3}$

(13) $\int_{0}^{2\pi} \cos^2 x\ dx$

Rpta: π

(14) Calcular la integral indefinida : $\int x\left(1+x^2\right)^{1/2} dx$

Rpta: $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) Calcular la integral indefinida : $\int x^2\sqrt{x+1}\ dx$

Rpta: $\frac{2}{205}\left(15x^2-12x+8\right)\left(x+1\right)^{3/2}+c$

(16) Calcular : $\int \frac{1}{(ax+b)^3}\ dx$

Rpta: $\frac{b}{2a^2(ax+b)^2}-\frac{1}{a^2(ax+b)}+c$

(17) Calcular : $\int_0^5 x^2 \sqrt{x+1}\, dx$

Rpta: 90,10

(18) Calcular : $\int_0^1 \frac{x}{(x-2)^3}\, dx$

Rpta: $\frac{1}{4}$

(19) Hallar la fórmula para la siguiente integral : $\int (2x+1)(x^2+x+1)^3\, dx$

Rpta: $\frac{1}{4}(x^2+x+1)^4 + c$

(20) Hallar la fórmula para la siguiente integral : $\int (2x+5)^5\, dx$

Rpta: $\frac{1}{12}(2x+1)^5$

CAPITULO 24

LA PROBABILIDAD

En el siglo XVII y como resultado de las investigaciones sobre diversos juegos de azar (ruletas, dados, cartas, loterías) se inicia el estudio de la teoría de la probabilidad, en su perfeccionamiento han aportado diversas personalidades científicos y matemáticos de gran celebridad.

Sin embargo el establecimiento de las bases axiomáticas se realiza a mediados del presente siglo. Este desarrollo axiomático, denominado teoría moderna de la probabilidad, precisa los conceptos y los ubica sobre una sólida plataforma matemática.

24.1 LA PROBABILIDAD

Definición: La probabilidad es el estudio de los experimentos aleatorios.

24.2 EXPERIMENTO ALEATORIO

Definición: Es aquella experiencia en la cual bajo las mismas condiciones, los resultados son diferentes

Ejemplo:

Si se lanza una moneda al aire puede obtenerse cara o sello.

Ejemplo:

En una rifa en la cual hay 100 boletos de los cuales hay 2 premiados, si se dispone de 3 de ellos, no se sabe si saldrán premiados.

24.3 FENOMENO ALEATORIO

Definición: Es aquel desencadenado por las leyes del azar.

Ejemplo:

Si una criatura nace, el sexo puede ser femenino o masculino.

24.4 PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN SUCESO.

Definición.- Es la razón comprendida entre 0 y 1 tal que compara el N° de elementos de un suceso y el N° de elementos de espacio muestral, es decir:

$$P_{(A)} = \frac{n_{(A)}}{n_{(s)}} = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Donde:
- A: Es el suceso A
- $n_{(A)}$: Es el número de elementos favorables al suceso A
- $n_{(S)}$: Es el número de elementos lógicos y posibles del espacio muestral.
- $P_{(A)}$: Es la probabilidad de ocurrencia del suceso A.

24.5 ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO (S)

Definición: Es el conjunto de todos los resultados lógicos posibles de obtener, de un experimento o fenómeno aleatorio.

Ejemplo:

Se tira una moneda al aire 2 veces, el espacio muestral de los resultados será:

S = { cc, cs, ss, sc } ; donde c = cara ; s = sello.

En este caso: n(s) = 4

Ejemplo:

Tres personas A, B, C compiten en la final de una competencia; de no existir empates, ¿cual será el espacio muestral de los resultados finales?.

S = { ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA }

En este caso: n(s) = 6

24.6 SUCESO O EVENTO DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.

Definición: Es aquel **subconjunto del espacio muestral** de dicho experimento, tal que sucede satisfaciendo condiciones particulares prefijadas.

Ejemplo:

En el experimento de la competencia de 3 personas A, B y C de espacio muestral.

S = { ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA }

Son eventos:

x = { m / m es el suceso que gane B }
⇒ x = { BAC, BCA } ; n(x) = 2

y = { m/m es el suceso que pierde C }
⇒ y = { ABC, ACB, BAC, BCA } ; n(y) = 4

z = { m / m es el suceso que B llega inmediatamente luego de C }
⇒ z = { ACB, CBA } ; n(z) = 2

Ejemplo:

Hallar la probabilidad obtener una carta con figura, al extraer un ejemplar de la baraja; no considere al Jocker.

Solución:

(1°) **El espacio muestral de este experimento sin el jocker es el conjunto de todas las cartas de la baraja.**

$\Rightarrow \quad n(s) = 52$

(2°) **En el conjunto de cartas hay 12 con figura; es el suceso que nos interesa y la denominamos como A.**

$\Rightarrow \quad n(A) = 12$

(3°) **En consecuencia la probabilidad del suceso "A" será:**

$$P_{(A)} = \frac{n_{(A)}}{n_{(s)}}$$ (Por definición de probabilidad de un suceso).

$$\Rightarrow \quad P_{(A)} = \frac{12}{52}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{(A)} = \frac{3}{13}}$$

Ejemplo:

En el experimento de escoger un ticket de entre 30 numerados del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de obtener uno que sea múltiplo de 5?

Solución:

(1°) **En relación al espacio muestral S = { m / m son los resultados posibles}**

$\Rightarrow \boxed{n(s) = 30}$

(2°) **En relación al evento:**

A = { m / m es múltiplo de 5 entre 1 y 30 }

$\Rightarrow A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$\Rightarrow \boxed{n(A) = 6}$

(3°) **En relación a la probabilidad.**

$$\Rightarrow \quad P_{(A)} = \frac{n_{(A)}}{n_{(s)}}$$ (Por definición de probabilidad de un suceso)

$$\Rightarrow \quad P_{(A)} = \frac{6}{30}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{(A)} = \frac{1}{5}}$$

24.7 AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

Sea S un espacio muestral y P(A) la probabilidad del evento A:

24.7.1 **AXIOMA P1:** Para todo evento A

$0 \leq P(A) \leq 1$

24.7.2 **AXIOMA P2:** Para el espacio muestral S

$P(S) = 1$

24.7.3 **AXIOMA P3:** Si A y B son eventos mutuamente excluyentes.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ ;\ P(A \cap B) = 0$

24.7.4 **TEOREMA # 1:** Si ϕ es el conjunto vacío

$\Rightarrow P(\phi) = 0$

La probabilidad del vacío es cero.

Demostración:

(1°) Sea A un conjunto y ϕ el conjunto vacío.
A y ϕ son disjuntos o excluyentes.

(2°) $A \cup \phi = A$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cup \phi)$

$\Rightarrow P(A) = P(A) + P(\phi)$

$\therefore \boxed{P(\phi) = 0}$

24.7.5 **TEOREMA # 2:** Si A' es el complemento del evento A de un espacio muestral S.

$\Rightarrow P(A) + P(A') = 1$

Demostración:

(1°) El espacio muestral "S" será:

$S = A \cup A'$; A y A' son disjuntos o excluyentes.

$\Rightarrow P(s) = P(A \cup A')$

(2°) $P(s) = P(A) + P(A')\ ;\ P(S) = 1$

$\therefore \boxed{P(A) + P(A') = 1}$

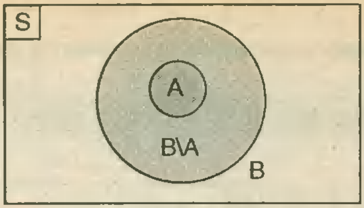
24.7.6 **TEOREMA # 3:** Sean A y B dos eventos de un espacio muestral S.

Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Demostración:

(1°) Por ser $A \subset B$

B se puede descomponer en los eventos A y B/A mutuamente excluyentes, de acuerdo al diagrama:



$(B/A <> B\text{-}A)$

$\Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(B\backslash A)\ ;\ P(B/A) \geq 0$

$\therefore \quad \boxed{P(B) \geq P(A)}$

24.7.7 TEOREMA # 4

Si A y B son dos eventos de un espacio muestral S.

$\Rightarrow P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B) \quad ; \quad P(A\backslash B) = P(A - B)$

Demostración:

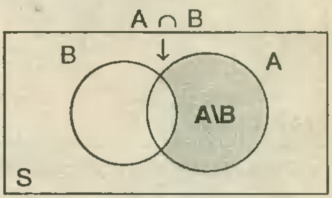
(1°) A se puede descomponer en los eventos mutuamente excluyentes. $A \backslash B$ y $A \cap B$, es decir:

(2°) $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$

$\Rightarrow \quad P(A) = P[(A/B) \cup (A \cap B)]$

$\Rightarrow P(A) = P(A/B) + P(A \cap B)$

$\therefore \quad \boxed{P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)}$



24.7.8 TEOREMA # 5

Si A y B son dos eventos de un espacio muestral S.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

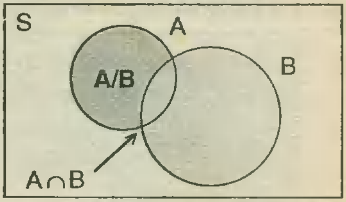
Demostración:

(1°) La unión de A y B se puede descomponer en los eventos A\B y B mutuamente excluyentes:

(2°) $\Rightarrow P(A \cup B) = \underbrace{P(A/B)} + P(B)\ ;\ P(A/B) = P(A) - P(A \cap B)\ ;\ A/B <> A - B$

$= \underbrace{P(A) - P(A \cap B)} + P(B)$

$\therefore \quad \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$



24.7.8.1 COROLARIO (Relativo al teorema # 5)

Para los eventos A, B y C de un espacio muestral S

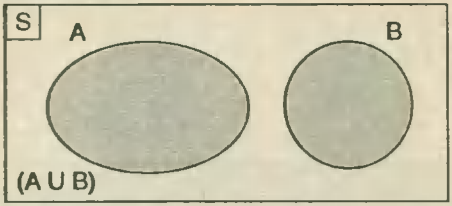
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

24.7.8 ALGEBRA DE LOS EVENTOS

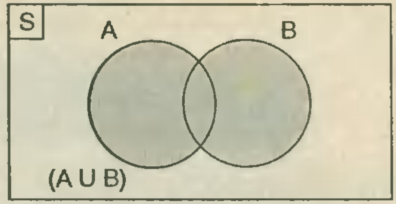
Los eventos pueden combinarse para formar nuevos eventos, utilizando las operaciones mediante conjuntos.

(1°) "A U B" es el evento que sucede sí y sólo si A o B o ambos suceden.

Simbolizando:



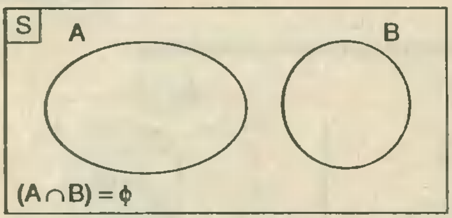
Para dos sucesos excluyentes



Para dos sucesos no excluyentes

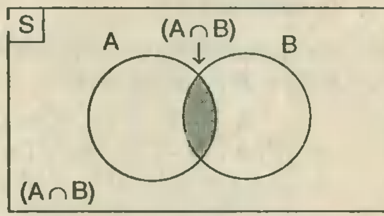
(ii) "$A \cap B$" es el evento que ocurre sí y sólo si A y B ocurren simultáneamente.

Simbolizando:



Para dos eventos excluyentes

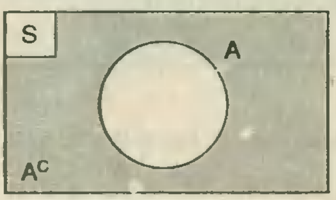
$P(A \cap B) = 0$



Para dos eventos no excluyentes

$P(A \cap B) \neq 0$

(iii) A^C (complemento de A) es el evento que sucede sí y sólo si A no sucede.



Para un evento A, el complemento es el área sombreada.

24.8. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

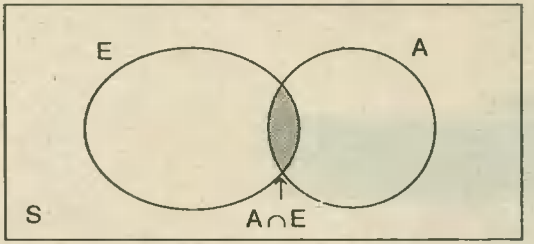
Definición .- Sea E un evento arbitrario de un espacio muestral S con $P(E) > 0$. La probabilidad de que un evento A sucede una vez que E haya sucedido o, en otros términos la probabilidad condicional de A dado E y denotado por $P(A/E)$ se define como:

$$\boxed{P_{(A/E)} = \frac{P_{(A \cap E)}}{P_{(E)}} \quad ; \quad P_{(E)} \neq 0} \quad ; \ P(A/E) \neq P(A \setminus E)$$

ó $$P_{(A \cap E)} = P_{(A/E)} \cdot P_{(E)}$$

$P_{(A/E)}$ Mide la probabilidad relativa de A con relación al suceso E.

Esquema:



$$\Rightarrow P(A \cap E) = P(A/E) \times P(E)$$

Ejemplo:

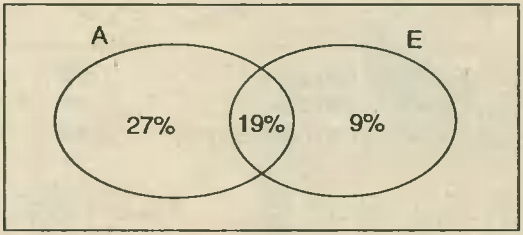
En cierta comunidad universitaria, el 46% de la población tiene cabellos crespos, el 28% tiene ojos claros, el 19% tienen cabellos crespos y ojos claros. Al seleccionar aleatoriamente una persona que tiene cabello crespo. ¿Cuál es la probabilidad que tenga también ojos claros?

Solución:

(1°) En un diagrama de Venn inscribimos.

A	: Población con cabellos crespos	(46%)
E	: Población con ojos claros	(28%)
$A \cap E$	: Población de cabellos crespos y ojos claros	(19%)

(2°) **Diagrama**



(3°) **Del gráfico:**

$P_{(A)} = \dfrac{46}{100}$ **Probabilidad de lograr uno de cabellos crespos.**

$P_{(E)} = \dfrac{28}{100}$ **Probabilidad de lograr uno de ojos claros.**

$P_{(A \cap E)} = \dfrac{19}{100}$ **Probabilidad de lograr uno de cabello crespos y ojos claros.**

(4°) **De acuerdo a la notación:**

P(E/A) : Es la probabilidad de obtener una persona de ojos claros si esta tiene cabellos crespos.

$$\Rightarrow P_{(E/A)} = \frac{P_{(E \cap A)}}{P_{(A)}}$$

(5°) **Sustituyendo datos:**

$$\Rightarrow P_{(E/A)} = \frac{\frac{19}{100}}{\frac{28}{100}} = \frac{19}{28}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{(E/A)} = \frac{19}{28}}$$

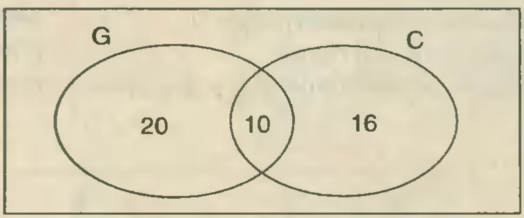
Ejemplo:

De un total de 100 pacientes 30 tienen gripe, 26 tienen cólicos y 10 tienen al mismo tiempo gripe y cólicos.

Si se escoge al azar un paciente con gripe, hallar la probabilidad que tenga también cólicos.

Solución:

(1°) **En un diagrama**



Donde:

G	: Pacientes con gripe	:	30
C	: Pacientes con cólicos	:	26
$G \cap C$	: Pacientes con cólico y gripe	:	10

(2°) **Se tiene:** $P_{(G)} = \frac{30}{100}$, $P_{(C)} = \frac{26}{100}$; $P_{(G \cap C)} = \frac{10}{100}$

(3°) **Se desea:** $P_{(C/G)}$ la probabilidad de obtener un paciente con cólicos dado que tiene gripe.

$$\Rightarrow P_{(C/G)} = \frac{P_{(C \cap G)}}{P_{(G)}}$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{10/100}{30/100}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{(C/G)} = \frac{1}{3}}$$

24.9. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

24.9.1 Ejemplo Explicativo:

Se lanza un dado y una moneda, de este experimento aleatorio se pide:

(a) El espacio muestral (S)

(b) El evento A = { caras y números pares}
B = { caras o sellos y números primos }
C = { sellos y números impares }

(c) Indicar cual de los sucesos A, B y C son mutuamente excluyentes.

Solución:

(1°) **Si denominamos C y S a la cara y sello respectivamente el espacio muestral estará compuesto del modo siguiente:**

S = { C1, C2, C3, C4, C5, C6, S1, S2, S3, S4, S5, S6 }

(2°) **Para determinar el evento A escogemos aquellos elementos de S que constan de una cara C y un número par, luego:**

A = { C2, C4, C6 }

(3°) **Para obtener B escogemos aquellos puntos de S que constan de pareja un número primo.**

B = { C2, C3, C5, S2, S3, S5 }

(4°) **Para obtener C escogemos aquellos que constan de un sello y un número impar**

C = { S1, S3, S5 }

(5°) Hallamos $A \cap B = \{ C2 \}$ $\therefore$ A y B no son excluyentes
$A \cap C = \phi$ $\therefore$ A y C son excluyentes
$B \cap C = \{ S3, S5 \}$ $\therefore$ B y C no son excluyentes

24.9.2 Ejemplo Explicativo:

Un concejo estudiantil esta formado por 12 hombres y 16 mujeres. Se elige un comité de 6 personas, ¿cuál es la probabilidad de que dicho comité esté formado por 3 hombres y 3 mujeres?

Solución:

(1°) S = Conjunto de todos los comités de 6 personas que se puede formar con 28 personas.
(2°) E = Conjunto de todos los comités con 3 hombres y 3 mujeres.

(3°) $\Rightarrow$ $n_{(S)} = C_6^{28}$ .... (1)

$n_{(E)} = C_3^{12} \times C_3^{16}$ .... (2)

(4°)
$$p_{(E)} = \frac{C_3^{12} \times C_3^{16}}{C_6^{28}} = \frac{\dfrac{12\times 11\times 10}{3!} \times \dfrac{16\times 15\times 14}{3!}}{\dfrac{28\times 27\times 26\times 25\times 24\times 23}{6!}}$$

$$p_{(E)} = \frac{(2\times 11\times 10)\times(16\times 5\times 7)}{28\times 9\times 13\times 5} = \frac{11\times 5\times 16}{9\times 13\times 23}$$

$\therefore$ $p_{(E)} = 0.327$, es la probabilidad que el comité esté formado por 3 hombres y 3 mujeres.

24.9.4 Ejemplo Explicativo:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par o un número primo al lanzar un dado?.

Solución:

(1°) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{2, 4, 6\}$

$E_2 = \{2, 3, 5\}$; $E_1 \cap E_2 = \{2\} \neq \phi$

(2°) $P(E_1) = \dfrac{3}{6}$

$P(E_2) = \dfrac{3}{6}$; $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{6}$

(3°) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ ....(1)

$$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3+3-1}{6} = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ $\boxed{P(E_1 \cup E_2) = \dfrac{5}{6}}$

24.9.5 Ejemplo Explicativo:

En una bolsa que contiene bolas, 2 son blancas, 3 son rojas y 4 son celestes, se extrae una de ellas al azar. Hallar la probabilidad "p" de modo que:

a) La bola extraída sea roja
b) La bola extraída no sea roja
c) Sea blanca
d) Sea roja o celeste

Solución:

(1°) **Sea "p_a" la probabilidad de que la bola extraída sea roja.**

$$\Rightarrow p_a = \frac{\text{Casos Favorables (3 rojas)}}{\text{Casos Posibles }(3+2+4)} = \frac{3}{3+2+4} = \frac{3}{9}$$

$\therefore$ $\boxed{p_a = \dfrac{1}{3}}$

(2°) **Sea "q_a" la probabilidad de que la bola extraída no sea roja.**

$$\Rightarrow p_a + q_a = 1$$

$$\frac{1}{3} + q_a = 1$$

$$\therefore \boxed{q_a = \frac{2}{3}}$$

(3°) **Sea "p_b" la probabilidad de que la bola extraída sea blanca**

$$\Rightarrow p_b = \frac{\text{Casos Favorables } (2 \text{ blancas})}{\text{Casos Posibles } (3+2+4)} = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \boxed{p_b = \frac{2}{9}}$$

(4°) **Sea "p" la probabilidad de que la bola extraída sea roja o celeste.**

$$\Rightarrow p = \frac{\text{Casos Favorables } (3 \text{ rojas} + 4 \text{ celestes})}{\text{Casos Posibles } (3+2+4)} = \frac{3+4}{3+2+4}$$

$$\therefore \boxed{p = \frac{7}{9}}$$

24.9.6 **Ejemplo Explicativo:**

En una caja se disponen de 4 bolas verdes y 2 amarillas una segunda caja contiene 3 bolas verdes y 5 amarillas.

Se extrae una bola de cada caja.
Determinar la probabilidad "p" de que:

a) las dos bolas extraídas sean verdes
b) Las dos bolas extraídas sean amarillas.

***Recuerde*:**

La probabilidad de que se produzcan dos o más sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades que tienen cada uno de ellos.

Solución:

(1°) **Sean p_1 y p_2 las probabilidades para que las bolas extraídas sean verdes.**

$$\Rightarrow p_1 = \frac{\text{Casos Favorables } (4 \text{ Verdes})}{\text{Casos Posibles } (4+2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{\text{Casos Favorables } (3 \text{ Verdes})}{\text{Casos Posibles } (3+5)} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow p = p_1 \times p_2 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$$

La probabilidad de que las bolas extraídas sean verdes será:

(2°) Sean p_1 y p_2 las probabilidades para que las bolas extraídas sean amarillas.

$$\Rightarrow \quad p_1 = \frac{\text{Casos Favorables (2 Amarillas)}}{\text{Casos Posibles }(4+2)} = \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow \quad p_2 = \frac{\text{Casos Favorables (5 Amarillas)}}{\text{Casos Posibles }(5+3)} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad p = p_1 \times p_2 = \frac{2}{6} \times \frac{5}{8}$$

$$\therefore \quad \boxed{p = \frac{5}{24}}$$

24.9.7 **Ejemplo Explicativo:**

En una caja se tienen 5 bolas blancas y 6 negras, en otra caja se tienen 4 bolas blancas y 8 negras. Determinar la probabilidad p de que al extraer una bola de cada caja se obtenga una blanca y una negra.

Solución:

(1°) **Sea p_1 la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra.**

$\Rightarrow$ de la primera caja : $p_\alpha = \dfrac{5 \text{ blancas}}{5+6} = \dfrac{5}{11}$

$\Rightarrow$ de la segunda caja : $p_\beta = \dfrac{8 \text{ negras}}{4+8} = \dfrac{2}{3}$

Por ser sucesos independientes : $p_1 = \dfrac{5}{11} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{33}$ ....(1)

(2°) **Sea p_2 la probabilidad de que la primera bola sea negra y la segunda sea blanca.**

$\Rightarrow$ de la primera caja : $p_\alpha = \dfrac{6 \text{ negras}}{5+6} = \dfrac{6}{11}$

de la segunda caja : $p_\beta = \dfrac{4 \text{ blancas}}{4+8} = \dfrac{4}{12}$

Por ser sucesos independientes : $p_2 = \dfrac{6}{11} \times \dfrac{4}{12} = \dfrac{2}{11}$ ....(2)

(1) y (2) se excluyen mutuamente por lo que:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{10}{33} + \frac{2}{11}$$

$$\therefore \quad \boxed{p = \frac{16}{33}}$$

24.9.8 Ejemplo Explicativo:

Obtener un esquema de espacio muestral de la experiencia aleatoria en el lanzamiento de dos dados y calcular la probabilidad de obtener un nueve en el primer lanzamiento.

Solución:

(1°) El espacio muestral consta de 36 elementos que se disponen en la siguiente tabla de doble entrada:

PRIMER DADO

SEGUNDO DADO		⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
	⚀	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	⚁	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	⚂	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	⚃	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,3)	(6,4)
	⚄	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	⚅	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

(2°) Elemento solicitado A se logra describiendo:

A = { (6,3), (3,6), (5,4), (4,5) }

$\Rightarrow$ n(S) = 36 espacio muestral

$\Rightarrow$ n (A) = 4 evento, lograr 9 en el primer lance.

(3°) La probabilidad del suceso A será:

$$\Rightarrow p_{(A)} = \frac{4}{36}$$

$$\therefore \quad \boxed{p_{(A)} = \frac{1}{9}}$$

24.9.9 **Ejemplo Explicativo**

Hallar la probabilidad de obtener 8 puntos tirando 2 dados al aire una sola vez.

Solución:

(1°) Calculamos el espacio muestral

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \ldots\ldots\ldots (6,5), (6,6) \}$$

$\longleftarrow$ 36 términos $\longrightarrow$

(2°) Calculamos los elementos del evento en el cual la suma de las caras es 8.

$$A = \{ (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) \}$$

$\longleftarrow$ 5 $\longrightarrow$

(3°) Calculamos la probabilidad correspondiente:

$$P_{(A)} = \frac{\#\text{ Casos Favorables}}{\#\text{ Casos Posibles}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{(A)} = \frac{5}{36}}$$

24.10 EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO : LA PROBABILIDAD

(1) Se escogen tres lámparas entre 15 de las cuales 5 son defectuosas. Hallar la probabilidad de que:

a) Ninguna sea defectuosa
b) Una exactamente sea defectuosa
c) Una por lo menos sea defectuosa.

Rpta: a) $\frac{24}{91}$ b) $\frac{45}{91}$ c) $\frac{67}{91}$

(2) Se sacan dos cartas al azar de una baraja que contiene de 52 cartas. Hallar la probabilidad de que:

a) las dos sean espadas b) Una espada y la otra corazón.

Rpta : a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{13}{102}$

(3) Un salón de estudiantes conste de 10 hombres y 20 mujeres de los cuales la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen ojos castaños. Hallar la probabilidad de que una persona escogida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

Rpta: $\frac{2}{3}$

(4) Tres estudiantes A, B y C intervienen en una prueba de natación. A y B tienen la misma probabilidad de ganar y el doble de la de C. Hallar la probabilidad de que gane B o C.

Rpta: $\frac{3}{5}$

(5) Sean A y B eventos con $P(A) = \frac{3}{8}$

$P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Calcuar: (i) $P(A \cup B)$
(ii) $P(A^C)$

Rpta: (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

(6) Sean A y B eventos con:

$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A^C) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Calcular:

(i) $P(A)$, (ii) $P(B)$ (iii) $P(A \cap B^C)$

Si,

Rpta: (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{1}{12}$

(7) Un aula de clases está conformada por 5 estudiantes de primero, 4 de segundo, 8 del penúltimo y 3 del último año. Se escoge un estudiante al azar para representar la clase. Hallar la probabilidad de que el estudiante sea:

(i) De segundo
(ii) Del último año

Rpta: (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{3}{20}$

(8) Tres tornillos y tres tuercas están en una caja. Si se escogen dos piezas al azar, hallar la probabilidad de sacar un tomillo y una tuerca.

Rpta: $\frac{3}{5}$

(9) De los 10 niños de una clase, 3 tienen ojos azules. Si se escogen dos niños al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que?

(i) Los dos tengan ojos azules
(ii) Ninguno tenga ojos azules

Rpta: (i) $\frac{1}{15}$ (ii) $\frac{7}{15}$

(10) Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen tres estudiantes de la clase al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean niños?.

Rpta: $\dfrac{11}{28}$

(11) Una caja contiene 7 bolas rojas y 3 bolas blancas. Se sacan 3 bolas de la caja una tras otra. Hallar la probabilidad de que los dos primeras sean rojas y la tercera blanca.

Rpta: $\dfrac{7}{40}$

(12) Los estudiantes de una clase se escogen al azar, uno tras otro, para presentar un examen. Hallar la probabilidad de que niños y niñas queden alternados si: (i) la clase consta de 4 niños y 3 niñas. (ii) la clase consta de 3 niños y 3 niñas.

Rpta: (i) $\dfrac{1}{35}$ (ii) $\dfrac{1}{20}$

(13) En cierta facultad 25% de los estudiantes desaprobaron matemática, 15% química y 10% desaprobaron los dos cursos. Se selecciona un estudiante al azar.
(i) Si desaprobó química. ¿Cuál es la probabilidad de que desapruebe matemática?
(ii) Si desaprobó matemática. ¿Cuál es la probabilidad de que desapruebe química?

Rpta: (i) $\dfrac{2}{3}$ (ii) $\dfrac{2}{5}$

(14) Sea los eventos A y B con $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$ y $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

Calcular:

(i) $P(A/B)$

(ii) $P(B/A)$

(iii) $P(A \cup B)$

Rpta: (i) $\dfrac{3}{4}$ (ii) $\dfrac{1}{2}$ (iii) $\dfrac{7}{12}$

(15) Tres caballos a, b y c corren juntos sus probabilidades de ganar son respectivamente $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{6}$ ó $P(a)=\dfrac{1}{2}$, $P(b)=\dfrac{1}{3}$ y $P(c)=\dfrac{1}{6}$, si los caballos corren dos veces. Hallar la probabilidad de que **a** gane la segunda.

Rpta: $\dfrac{1}{12}$

BIBLIOGRAFIA

"Algebra 1".- Armando Rojo - Silvia Sánchez - El Ateneo - Editorial - Argentina.

"Matemática 6° curso".- Constantino Marcos, Jacinto Martínez. Ediciones S.M. España.

"Lecciones de Cálculo 1".- Cruse/Lehman. Fondo Educativo Interamericano S.A.- México.

"Matematiques Elementaires".- Combes - Benoit - Marel - Monjallon - Bacckus. París Librairie Vuibert.- Francia.

"Higer Algebra".- Christ's College, Cambridge, Trinity College, Cambridge. Inglaterra.

"Algebra y Trigonometría".- Raymond A. Barnett. Merryt College USA.

"Introducción a la Teoría de Conjuntos".- Lia Oubiña. Editorial Universitaria - Argentina.

"Teoría de Matrices".- A. Mary Tropper. Hig. Holborn, Londres.

"Matemática Moderna 1".- Editorial Bruño. La Paz - Bolivia.

"Algebra y Análisis de Funciones Elementales.- Potatov. Alexandronov. Pasichenko. Editorial Mir Moscú.

"Matemáticas Generales".- Dennis Papin. Montaner y Simon S.A. Barcelona.

"Introducción a la Lógica.- Irving Copi. Eudeba S.C.M. Buenos Aires.

"Fundamentos de Matemáticas".- Juan Manuel Silva y Adriana Lazo. Editorial Limusa - México.

"Análisis Matemático Elemental".- Pascual Aceytuno y Montero. Editorial Dossat S.A. Madrid.

"Algebra y Trigonometría".- Vance. Fondo Educativo Interamericano.

"Elementary Mathematics".- Zaitsev, Ryzhikov, Skanovi. Mir - Publishers Moscow.

"Temas Selectos de Matemáticas Elementales".- Dorofeiev-Potopov-Rozov. Editorial Mir Moscú.