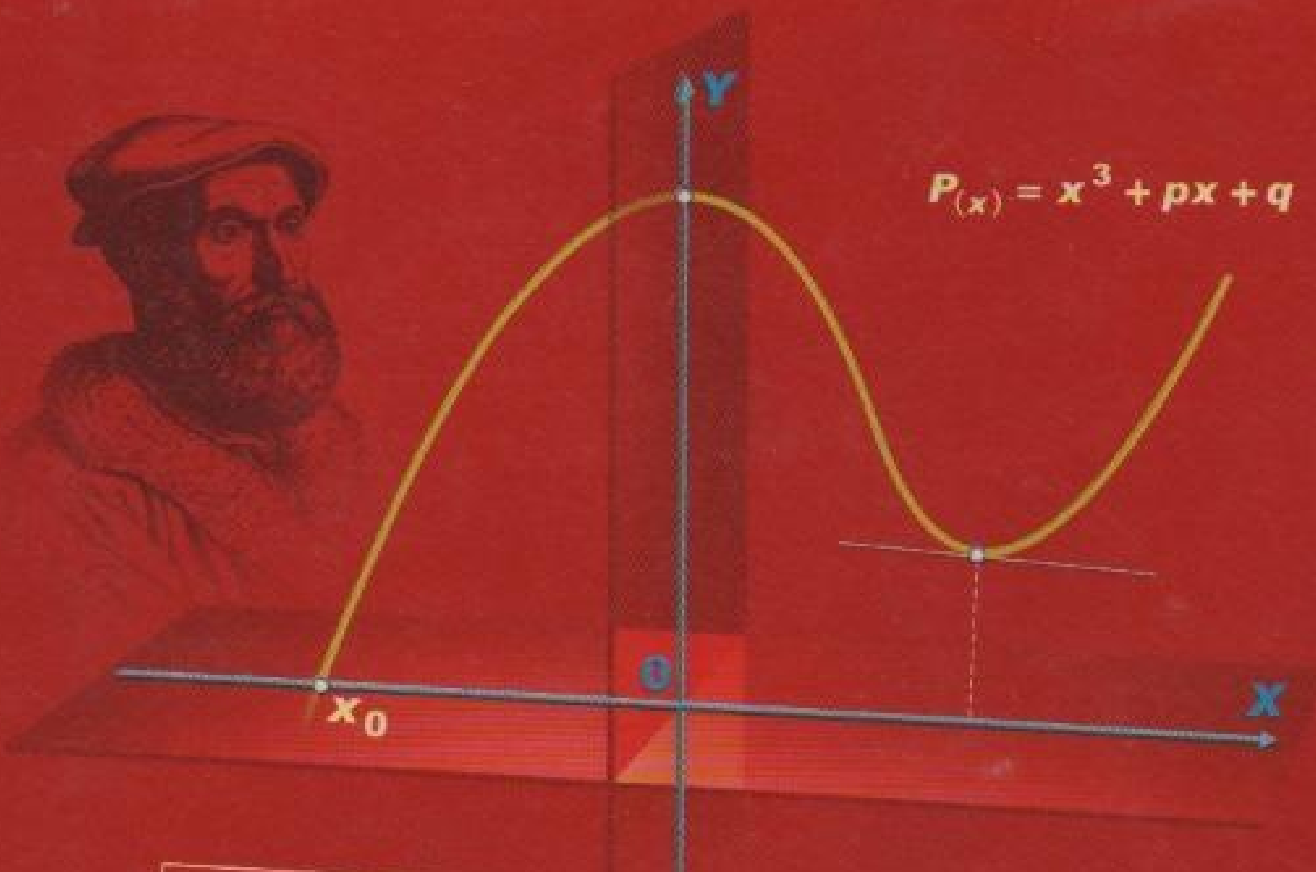
ÁLGEBRA

Y PRINCIPIOS DEL ANÁLISIS

TOMO I



$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\rightarrow P_{(x_0)}=0$$

LUMBRERAS
Editores

Resumen histórico de las grandes etapas de la matemática

LA ETAPA CLÁSICA DEL CERCANO ORIENTE

La geometría y las disciplinas anexas	Fechas	Teoría de los números álgebra
Los babilonios: Cálculo de superficies y de volúmenes; sistemas de unidades de medida, aproximación $\pi=3$; relación de Pitágoras (no demostrada, pero "calculada").	3000 a.n.e. Tabletas cuneiformes.	La numeración sumeria (sexagesimal) y el álgebra (resolución de ecuaciones de 1° y 2° grado por los babilonios). Establecimiento de correspondencias entre conjuntos numéricos (noción moderna de función) por los babilonios.
Conocimientos métricos rudimentarios.	Hacia 1600 a.n.e. Papiro de Rhind (Egipto).	Numeración decimal por yuxtaposición; notación de fracciones.
THALES de Mileto, fundador tradicional de la geometría.	Fin Siglo VIII - principios Siglo VI a.n.e.	
PITÁGORAS y los pitagóricos: "El mundo está regido por los números"; arte de la demostración; teorema llamado "de Pitágoras" (el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos).	550-450 a.n.e.	Aritmogeometría de los pitagóricos. Irracionalidad de $\sqrt{2}$; inconmensurables entre ellas (consecuencia del teorema de Pitágoras).
HIPÓCRATES de Quios: Problemas relativos a la cuadratura de las lúnulas y a la duplicación del cubo de arista dada. Primera tentativa de recopilación del saber geométrico en los *Elementos*. **ANAXÁGORAS**: perspectiva.	Siglo V a.n.e.	
HIPASOS de Metaponte (hacia 460): quizás el verdadero autor del "Teorema de Pitágoras". Se le atribuye la construcción del pentágono y del dodecaedro regular.		**TEODORO** de Cirene, el matemático: descubrimiento de la irracionalidad de: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$.

428 a.n.e. Nacimiento de Platón		
HIPIAS de Elis descubre la cuadratriz.		
ARQUITAS de Tarento (hacia 430-360 a.n.e.): duplicación del cubo.	Siglo IV a.n.e.	Teoría de los números: **ARQUITAS** ha enunciado la imposibilidad de encontrar un número entero como media geométrica entre dos números en la razón $\frac{n}{n+1}$
PLATÓN (428-348/7 a.n.e.): Filosofía de las matemáticas ("los cinco cuerpos platónicos" son los cinco poliedros regulares cuya inscripción es posible en la esfera).		
EUDOXO de Cnido (hacia 406-355 a.n.e.): geometría del espacio; teoría de las proporciones y de la semejanza; método de exhaustión (antepasado del cálculo diferencial).		**TEETETES** (hacia 410-368 a.n.e.): Teoría de los números; estudio de los irracionales. **EUXODO**: Teoría de las proporciones.
ARISTÓTELES (384-322 a.n.e.): Investigaciones sobre el infinito y el continuo. Parece ser que fue el primero en simbolizar las magnitudes que intervienen en los razonamientos matemáticos mediante letras.		
MENECMO (hacia 375-325 a.n.e.): Secciones cónicas: Otros geómetras del siglo IV: Theudios de Magnesia, León, Leodamante. Neóclido, Amiclas de Heraclea, Filipo de Medma, Aristeo, Autolico de Pitana.		**HERMOTIMO** de Colofón: Continuación de los trabajos de Eudoxo y de Teetetes.
EUCLIDES (hacia 315-235 a.n.e. en Alejandría): *Los Elementos* (13 libros): 465 proposiciones: las cuales, 372 son teoremas y 93 "problemas" que recapitulan, metódicamente, todos los conocimientos matemáticos de la Antigüedad (triángulos, semejanzas, proporciones, áreas, volúmenes, construcciones, geometría del espacio).	Siglo III a.n.e.	**EUCLIDES**: Teoría de los números irracionales.
ARQUÍMEDES (287-212 a.n.e.): cuadratura de la parábola; definición del número π (método de los isoperímetros); áreas y volúmenes de los cuerpos redondos; estudios sobre la espiral, las tangentes, los poliedros semirregulares, etc.		**ARQUÍMEDES**: Teoría de los números; sistema de numeración por clase; descubrimiento del cálculo infinitesimal. $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$

APOLONIO de Pérgamo (hacia 262-180 a.n.e.): *Tratado de las cónicas* (elipse, hipérbole, parábola). Otros matemáticos del siglo III: Nicomedes (descubrimiento de la concoide), Diocles (la cisoide para la duplicación del cubo), Perseo, Zenodoro.		**APOLONIO**: Notación de los grandes números; $\pi=3,1416$
HIPSICLÉS: División del círculo en 360 grados.	Siglo III-I a.n.e.	**HIPSICLÉS**: Progresiones geométricas; teoría de los números.
HERÓN de Alejandría: La Metrika, compilación sobre los métodos de medidas y de cálculos aproximados (raíces cuadradas, cúbicas). **MENELAO** de Alejandría: Teorema de las transversales; precursor de la trigonometría esférica.	Siglo I d.n.e.	**HIPARCO** (161-126 a.n.e.): Astrónomo, utiliza las fracciones sexagesimales para medir los ángulos (estas fracciones constituyen el origen de nuestros "grados", "minutos" y "segundos"); precursor de la trigonometría. **NICÓMACO** de Gerasa: *Introducción a la Aritmética* (que tendrá una gran influencia en la Edad Media).
CLAUDIO TOLOMEO (128-168; en Alejandría): Astrónomo, geógrafo, matemático, autor del Almagesto. Fundador de la trigonometría, que utilizó para sus observaciones astronómicas (cálculo de las líneas trigonométricas, fórmulas de adición, etc.).	Siglo II	**TEÓN** de Esmirna (120-180): Exposición de los conocimientos matemáticos útiles para la lectura de Platón. Desarrollo de $\sqrt{2}$.
PORFIRIO (hacia 232-304): Explicación de los Elementos de Euclides. **JÁMBLICO** (hacia 283-330); **PAPPO** (comienzo del siglo IV): Problemas de geometría proyectiva; autor de las *Colecciones matemáticas* (recopilación de problemas y proposiciones).	Siglo III y IV	**TEÓN** de Alejandría (siglo IV): Cálculo con ayuda de fracciones sexagesimales (grados, etc.), extracción de raíces cuadradas. Su hija, Hipatia (muerta en 415), fue una matemática famosa.
PROCLO el Diadoco (410-485): *Comentarios sobre los Elementos de Euclides*. **SIMPLICIO** (siglo VI): Comentarios e investigaciones sobre las teorías de Eudoxo relativas a las esferas homocéntricas. Otros matemáticos: Antemio de Tralles (m. 534), Marino, Eutocio de Ascalón, Isidoro de Mileto: compiladores, restauradores.	Siglo V y VI	**DIOFANTE** (hacia 325-410): Autor de las Aritméticas. Teorema sobre la teoría de los números y, principalmente, teoría de las ecuaciones de 1° y 2° grado (sin duda inspirada en fuentes mesopotámicas). **DOMINUS** de Larisa: Publica una Aritmética euclidiana.

LOS MATEMÁTICOS ÁRABES Y ARABIZADOS

Siglo VIII	Kankah aporta a Bagdad en 766, el Siddhanta, del matemático hindú Brahmagupta, llamado en árabe, el Sindhind. Primeras traducciones importantes: del Sindhind, por Ja'qub ibn Tariq (m. 796) y al-Fazari, del Almagesto; por Muhammad ibn Katir al-Fargani (m. 833), conocido en la Edad Media con el nombre de Alfraganus, de los **Elementos de Euclides** por al-Hajjaj.
Siglo IX	Dominado por la obra de Muhammad ibn Musa al-Kharezmi (o al-Jwarizmi), de Bagdad: *introducción de las matemáticas indias*, obra que trata de la resolución de ecuaciones, titulada: *Al-djabr wa'l mukabala* (*Transposición y reducción*), de donde se originará la palabra "álgebra" en Occidente; el nombre del autor dio origen a la palabra álgebra. Nuevas traducciones: Apolonio por al-Himsi (m. 883), el *Almagesto y los Elementos* por Tabit ibn-Qurra (826-901), Geometría de Ahmed, Hazan y Muhammad Banu Musa (reanudación de las preocupaciones arquimedianas).
Siglo X	Siguen las traducciones, adornadas con comentarios; trabajos originales de al-Battani (877-929), que substituye la noción de cuerda, utilizada hasta entonces en trigonometría, por la de seno y establece la fórmula fundamental de la trigonometría esférica; de Abu'l-Wafa, llamado Albujjani (940-998), un persa, que perfeccionó la trigonometría introduciendo las nociones de tangente, cotangente, secante y cosecante.
Siglo XI	Al-Karchi (m. 1029) publica un tratado de álgebra sobre las ecuaciones del tipo $ax^{2n}+bx^n=c$. Ibn al-Haytam al-Hazin (llamado Alhazen, 987-1038), descubre la prueba del nueve. Al-Biruni rehace el cálculo de las tablas trigonométricas. Al-Hajjami (1044-1123) aborda las ecuaciones del tercer grado utilizando las secciones cónicas y estudia los "postulados" euclidianos; dio, también, la fórmula general del binomio.
Siglo XII	El poeta persa Omar Khayyam (m. hacia 1123) da ciertas soluciones geométricas para las ecuaciones de segundo grado y una clasificación importante de las ecuaciones. Al Tusi (1201-1274) publica un *tratado sobre los triángulos rectángulos y una traducción de los Elementos*. Después del siglo XII, la ciencia "árabe" declina. El soberano Ulug Beg da unas *Tablas* en las que π está calculado con 16 decimales. Al-Kalcadi da un procedimiento de adición para $1^p+2^p+3^p+...+n^p$. El último gran compilador fue Baha al -Din Muhammad al-Amili (1547-1621).

LOS PRIMEROS ALGEBRISTAS Y LOS MATEMÁTICOS DEL SIGLO XII AL SIGLO XVI

1. Transmisión de la herencia griega y árabe, precisiones sobre la teoría de los números (numeración, símbolos, etc.)	
Siglo XII	Gherardo de Cremona (1114-1187), traducciones de los matemáticos árabes (y, a través de ellos, de Euclides y de Tolomeo). Fibonacci, llamado Leonardo Pisano (hacia 1175, después de 1240) introduce en Europa occidental cristiana los métodos de los matemáticos árabes, su sistema de numeración y sus conocimientos algebraicos (1° y 2° grados); estudia las propiedades de la serie 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... (cada término es la suma de los dos términos que le preceden). Su obra lleva el título de Liber abbaci.
Siglo XIII	Thomas Bradwardine (1290-1349), arzobispo de Canterbury, teólogo, se interesa en la geometría "especulativa" y en el cálculo, presiente la noción de logaritmo.
Siglo XIV	Nicolás de Oresme (1325-1382): introduce la representación de un sistema de coordenadas según dos ejes rectangulares.
1464	Regiomontano (1436-1476), astrónomo alemán, perfecciona la trigonometría plana y esférica (su libro de **Triangulis omnimodis**, no se publicará hasta 1553, póstumamente).
1484	Nicolás Chuquet (1445-1500): Triparty sur la science des nombres; uso de los exponentes, regla de los signos (cálculo algebraico); precursor de la noción de logaritmo.
1489	Johann Widmann (S. XV), publica un tratado de aritmética, en el cual emplea, por vez primera, de una forma sistemática, los signos + y –.
2. Los algebristas del Renacimiento: resolución de las ecuaciones de 3° y 4° grado.	
1510	Scipione del Ferro (1465-1526), solución de la ecuación $x^3+px=q$.
1535	Niccoló Fontana, llamado Tartaglia ("El tartamudo") redescubre el método de solución de la ecuación $x^3+px=q$, en ocasión de un torneo de matemáticas, y comunica su descubrimiento a Cardano.
1545	Gerolamo Cardano (1501-1576) publica el Ars magna, tratado en el cual da la fórmula general de solución de la ecuación de tercer grado, llamada *fórmula de Cárdano*, utilizando el método de Tartaglia.
1546	Tartaglia publica *Questi e invenzioni diverse*, que contiene la exposición de su método de tratamiento de las ecuaciones de tercer grado. El alemán Adam Riese (hacia 1499-1559) introduce el signo.
1550	El italiano Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano, descubre el método de solución de las ecuaciones de cuarto grado.

1579	Francois Viéte (1540-1603): Canon mathematicus, que da su forma definitiva a la trigonometría.
1585	Simon Stevin, de Brujas (1548-1620) publica su Arithmetique introducción de la notación decimal para las fracciones, intento de creación de un sistema de unidades fundado en el sistema decimal (precursor de nuestro sistema métrico).
1591	Viete: *Isasoge in artem analyticum*. Empleo de letras para representar cantidades numéricas (empleo de las vocales para representar las incógnitas y de las consonantes para las cantidades conocidas), que permiten resumir todos los métodos de cálculo (hasta entonces expresados laboriosamente) en fórmulas algebraicas. Numerosos descubrimientos sobre la teoría de los números (aproximaciones, representación del número π mediante un producto ilimitado convergente). Tratamiento algebraico de los problemas de geometría.

LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XVII

Invención de la geometría analítica (Descartes), del cálculo diferencial-integral (Leibnitz y Newton), renacimiento de la geometría pura (Desargues), teoría de los números (Bernoulli, Pascal).

Álgebra y teoría de los números; cálculo de probabilidades	Análisis	Geometría
	1604. El astrónomo Jost Burgi elabora *los fundamentos del cálculo logarítmico*.	A principios del siglo XVII: La enseñanza de la geometría se imparte, principalmente a partir del tratado de Clavius, a quien se dio el sobrenombre de "Euclides del Siglo XVI".
	1614. Neper (John Napier): Perfeccionamiento de la noción de logaritmo y de las reglas de cálculo (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*).	
1625. Girard: Enunciado (sin demostración) del teorema fundamental del álgebra.	**1635**. Cavalieri. Geometría de los indivisibles; anuncia el cálculo integral.	**1637**. Descartes: Invención de la geometría analítica (en el tratado cuyo prefacio es el Discurso del método).
	1636. Fermat: Estudio de los máximos y de los mínimos, método de las tangentes; anuncia el cálculo infinitesimal (diferencial). Idea de la geometría analítica.	**1639**. Pascal: Escribe (a los 16 años) el *Tratado sobre las cónicas*.
1651. Fermat: Idea sobre el cálculo de probabilidades. **1654**. Pascal: *Cálculo de probabilidades*.	**1655**. Wallis: *Arithmética infinitorum*, preludio del cálculo integral. Fórmula de Wallis: $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}...\frac{2n}{2n+1}...$ Exponentes negativos y fraccionarios.	**1642-1645**: *Trabajos de Desargues*, que constituyen la base de la geometría proyectiva e inauguran la geometría superior.

1579	Francois Viéte (1540-1603): Canon mathematicus, que da su forma definitiva a la trigonometría.
1585	Simon Stevin, de Brujas (1548-1620) publica su Arithmetique introducción de la notación decimal para las fracciones, intento de creación de un sistema de unidades fundado en el sistema decimal (precursor de nuestro sistema métrico).
1591	Viete: *Isasoge in artem analyticum*. Empleo de letras para representar cantidades numéricas (empleo de las vocales para representar las incógnitas y de las consonantes para las cantidades conocidas), que permiten resumir todos los métodos de cálculo (hasta entonces expresados laboriosamente) en fórmulas algebraicas. Numerosos descubrimientos sobre la teoría de los números (aproximaciones, representación del número π mediante un producto ilimitado convergente). Tratamiento algebraico de los problemas de geometría.

LA MATEMÁTICA EN EL SIGLO XVII

Invención de la geometría analítica (Descartes), del cálculo diferencial-integral (Leibnitz y Newton), renacimiento de la geometría pura (Desargues), teoría de los números (Bernoulli, Pascal).

Álgebra y teoría de los números; cálculo de probabilidades	Análisis	Geometría
	1604. El astrónomo Jost Burgi elabora *los fundamentos del cálculo logarítmico*.	A principios del siglo XVII: La enseñanza de la geometría se imparte, principalmente a partir del tratado de Clavius, a quien se dio el sobrenombre de "Euclides del Siglo XVI".
	1614. Neper (John Napier): Perfeccionamiento de la noción de logaritmo y de las reglas de cálculo (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*).	
1625. Girard: Enunciado (sin demostración) del teorema fundamental del álgebra.	**1635**. Cavalieri. Geometría de los indivisibles; anuncia el cálculo integral.	**1637**. Descartes: Invención de la geometría analítica (en el tratado cuyo prefacio es el Discurso del método).
	1636. Fermat: Estudio de los máximos y de los mínimos, método de las tangentes; anuncia el cálculo infinitesimal (diferencial). Idea de la geometría analítica.	**1639**. Pascal: Escribe (a los 16 años) el *Tratado sobre las cónicas*.
1651. Fermat: Idea sobre el cálculo de probabilidades.	**1655**. Wallis: *Arithmética infinitorum*, preludio del cálculo integral. Fórmula de Wallis: $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdots$ Exponentes negativos y fraccionarios.	**1642-1645**: *Trabajos de Desargues*, que constituyen la base de la geometría proyectiva e inauguran la geometría superior.
1654. Pascal: *Cálculo de probabilidades*.		

1656. Ch. Huygens: *Primer tratado completo sobre el cálculo de probabilidades*.	**1656**. Pascal: *Propiedades del triángulo aritmético* (preliminar al cálculo integral).	**1656**. Trabajos de Huygens sobre la cicloide.
1656. Último teorema de Fermat: La ecuación: $x^n+y^n=z^n$ no tiene soluciones enteras positivas para $n>2$.	**1661**: Primeras ideas de Newton acerca de la posibilidad de un cálculo sobre los infinitamente pequeños.	
	1672-1676: Leibniz inventa el cálculo diferencial e integral.	**1672**. De la Hire: Nuevo método de geometría para las secciones cónicas.
1679. Publicación póstuma de las obras de Fermat.	**1684**. Leibniz: Nuevo método para la determinación de los máximos y de los mínimos.	**1685**. De la Hire: *Secciones cónicas* (desarrollo de la geometría superior).
	1686. Newton: Cálculo de las fluxiones (cálculo diferencial e integral: igual método que Leibniz, notación diferente; descubrimiento independiente de Leibniz, que Newton ignoraba).	
	1687. Newton: *Principie philosophiae*.	
1690. Rolle: *Tratado de álgebra* (método de las cascadas que permite encuadrar las raíces reales de ciertos tipos de ecuaciones).	**1690**. Bernoulli: Cálculo integral, (solución de ecuaciones diferenciales, ecuaciones de Bernoulli).	**1690**. Leibniz introduce la palabra coordenadas.
1690. Jacques Bernoulli: *Cálculo de probabilidades* (leyes de los grandes números, etc.)	**1691**. *Teorema de Rolle*: Una función no puede anularse más de una vez en el intervalo que separa dos raíces reales consecutivas de su derivada.	
1691. Leibniz: Teoría de las determinantes.	**1696**. L'Hospital: Análisis de los infinitamente pequeños para la inteligencia de las líneas curvas (aplicaciones geométricas del análisis). Regla de L'Hospital, el límite del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ que toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ cuando: $x \to x_0$ es $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$	**1694**. De la Hire: *Memoria sobre las epicicloides*.

EL SIGLO XVIII: DESARROLLO DEL ANÁLISIS

Si se exceptúan algunos investigadores aislados, la mayoría de matemáticos, en el siglo XVIII, explotaron el genial descubrimiento de Leibniz y Newton: El cálculo diferencial e integral, que se convierte en una herramienta excepcional para estudiar tantos objetos matemáticos como las funciones de una variable real, las curvas y sus propiedades geométricas, las probabilidades o la mecánica celeste. Con el tiempo, los científicos van perfeccionando el Análisis, sea inventando medios para simplificar los cálculos, sea precisando el rigor de sus definiciones y de sus razonamientos, con los trabajos de Clairaut y de Legendre, se anuncia una geometría nueva. He aquí las etapas esenciales de este período.

1713	Jacques Bernoulli: *Ars conjectandi* (póstumo), sobre las "leyes del azar".
1715	Taylor: *Methodus incrementorum directa et inversa* (Método de los "incrementos" directos e inversos), en el que indica el desarrollo en serie de una función de una variable real (fórmula de Taylor): $f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+...+\frac{h^n}{n!}f^n(x)+R_n(x)$ (R_n es el resto de la fórmula de Taylor).
1716	De Moivre: *Doctrine of Chances*, aplicaciones prácticas del cálculo de probabilidades; teorema de las probabilidades compuestas.
1722	Resolución de ecuaciones diferenciales de la forma $y'=f(x)+yg(x)+y2h(x)$ por Riccati.
1723	Primeros trabajos importantes del matemático suizo Euler, sobre las fracciones continuas cuya abundante obra concierne a todos los aspectos del Análisis; los tratados de Euler sobre el cálculo diferencial e integral, sus innumerables memorias, artículos, etc.; proporcionaron a los matemáticos de los siglos XVIII y XIX un material cuya riqueza todavía es manifiesta en nuestros días.
1725	De Moivre: *Annuities upon life*.
1729	Clairaut: *Recherches sur les courbes a double courbure*.
1730	De Moivre introduce los números imaginarios en trigonometría y establece la fórmula de Moivre: $(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)^n=\cos n\theta+i\,\text{sen}\,n\theta$.
1733	Saccheri: *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Saccheri es el primero en establecer un método (que, por otra parte, no supo utilizar) para probar el valor del postulado de Euclides; es el precursorde los geómetras no euclidianos del siglo siguiente.

1744	Euler: Primera exposición del cálculo de variaciones. El problema que se plantea (y que resolverá Lagrange) es el siguiente: cómo calcular la variación δI de ciertos tipos de integrales en las que figura la función $y(x)$, en la hipótesis en que esta función varíe a su vez δy.
1748	Euler: *Introduction á l'analyse des infiniment petits*. Este tratado es la obra más importante de Euler; hace de la teoría de las funciones y de su tratamiento mediante el cálculo diferencial e integral, la pieza maestra del Análisis.
1750	Cramer: *Introduction á l'etude des courbes algébriques* (uno de los primeros tratados de geometría analítica); método de resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado (método de Cramer) mediante el empleo de determinantes.
1755	Euler: *Instituciones calculi differentialis*.
1760	Landen: Trabajos sobre integrales elípticas.
1766	Monge: Primeras intuiciones que llevarían a la geometría descriptiva (aprox. 1799).
1770	Lambert: Elaboración de la trigonometría esférica. Trabajos sobre las cónicas.
1771	Vandermonde: Investigaciones sobre las ecuaciones de quinto grado.
1772	Lagrange: *Addition á L'algébre d'Euler*; introducción del concepto de invariante. La obra de Lagrange no es tan voluminosa como la de Euler, pero sus fundamentos son de un rigor que se convertirá en modelo de construcción lógica.
1788	Lagrange: *Mécanique analytique*: la mecánica celeste tratada como una rama de análisis. Es la obra más famosa de Lagrange.
1794	Legendre: *Élements de géometrie*: intentos (vanos) para demostrar el postulado de Euclides.
1797-1799	Lagrange: Teoría de las funciones analíticas (1797) y Lecons sur le calcul des fonctions (1799). En estas dos obras Lagrange trata de dar a la noción de función un significado más general partiendo del desarrollo de la fórmula de Taylor (hacia 1715).
1798	Legendre: *Théorie des nombres*.
1800	Monge: *Publicación del Traité de géometrie descriptive*.

EL SIGLO XIX

Este es el siglo de la polémica y de las revoluciones, tanto en matemáticas como en los otros campos de la actividad humana. En su transcurso tiene lugar la creación del álgebra moderna (teoría de los grupos de Galois), el poderoso desarrollo del Análisis (Gauss, Riemann, Poincaré), la reconsideración de la geometría (geometrías no euclidianas) e incluso del análisis, lo cual lleva a Cantor a la elaboración de la teoría de los conjuntos.

Álgebra	Análisis	Geometría
1797. Wessel: Representación geométrica de los números complejos.		
	1797-1799. Lagrange: *Las funciones analíticas*.	
1805. Gauss: *Disquisitiones arithmeticaé*. Estudio de las congruencias, de las formas cuadráticas, de la convergencia de las series, etc.		
	1812. Fourrier: Estudio de las series trigonométricas. **1812**. Laplace: Aplicación del análisis al cálculo de probabilidades, con la *Théorie analytique des probabilités*.	**1803**. Lazare Carnot: *Geométrie de position* (topología). Nacimiento de la geometría moderna. **1806**. *Teorema de Branchon* (geometría proyectiva).
	1821. Cauchy: Cours d'analyse. Cauchy escribió más de 700 memorias. **1824**. Estudio, por el astrónomo Bessel (1784-1846), de las funciones llamadas funciones de Bessel de orden μ y que intervienen en matemáticas aplicadas (especialmente en electricidad).	**1822**. Poncelet: *Traité des propiétés projectives des figures* (edificación de la geometría proyectiva). Investigaciones sobre las transformaciones mediante polares recíprocas.
	1825. Legendre: Primeros trabajos sobre las integrales elípticas.	**1826**. Plücker: Introduce en geometría analítica las coordenadas homogéneas (o coordenadas de Plücker). **1827**. Möbius: *El cálculo baricéntrico*, obra fundamental para la geometría descriptiva. Topología (cinta de Möbius).
1829. *Teorema de Sturm*.	**1829**. Jacobi: Estudio de las funciones elípticas.	**1829**. Lobachevski: La geometría no euclidiana.

1830. *Trabajos de Evariste Galois*, que continúan los de Lagrange, Vander- monde y Gauss, acerca de la teoría de las ecuaciones, sobre el papel de los grupos en la resolución de ecuaciones algebraicas.		
1831. Gauss: Teoría de los números complejos.		
1832. Galois: *Gettre á Auguste Comte*, escrita la noche anterior a su muerte (en un duelo) y en la que resume sus descubrimientos sobre la *teoría de los grupos y las integrales abelianas*.	**1836**. Fundación por Liouville del Journal de Mathématiques pures et appliquées. **1838**. Poisson: Teoría de la probabilidad. **1839**. Boole: *Teoría de las transformaciones analíticas*.	**1833**. Bolyai: Geometría no euclidiana.
1842. Boole: Teoría de la invariancia y de la covariancia.		
1843. Hamilton. Teoría de los cuaternios.		
1844. Grassmann: *Audehnungslehre*, creación de una matemática de tendencia axiomática, en sentido moderno. Al fundar la "nueva álgebra" Grassmann presenta su cálculo sin tener necesidad de precisar si se calcula sobre puntos, líneas o números (la geometría de "n" dimensiones hace pareja con el álgebra de "n" variables).	**1844**. Liouville: Distinción entre funciones algebraicas y funciones trascendentes.	
1845. Cayley: *Teoría de las matrices*.		
1847. Boole: *Análisis matemáticos de la lógica*.		**1847**. Von Staudt: *Geometría de posición*.
1848. Quételet: Fundador de la estadística.	**1851**. Riemann: *Estudio de las funciones de una variable compleja*.	**1852**. Chasles: *Apercu historique sur les méthodes geométriques*.
1854. Boole: *Las leyes del pensamiento*.	**1864**. Weierstrass: *Funciones de una variable compleja*. **1866**. Hermite: Utilización de las funciones elípticas en la resolución de las ecuaciones de 5º grado.	**1854**. Riemann: *Fundamentos de las hipótesis de la geometría* (geometría no euclidiana). **1857**. Riemann: *Edificación de la topología* (llamada entonces analysis situs).

<table>
<tr><td>1870. Jordan: Traité des substitutions des equations algébriques (prolongación de las teorías de Galois).</td><td></td><td>1871. Sophus Lie: Noción de grupo de transformaciones y descubrimiento de la transformación de Lie, que establece unas relaciones inesperadas entre las rectas y las esferas del espacio por una parte y entre las líneas asintóticas y las líneas de curvatura de las superficies por la otra.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1872. Cantor: Teoría de los conjuntos</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1873. Hermite: Trascendencia del número e.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">1873. El matemático peruano Federico Villarreal (1850-1923), nacido en Tucuman, Lambayeque, cuando apenas contaba con 23 años descubrió un nuevo método para elevar un polinomio a cualquier potencia. Dicha investigación le dio renombre universal.

Otro compatriota, gran matemático, Cristóbal de Losada y Puga, le dio profundos estudios al descubrimiento anterior incluso en adelante lo llamó "polinomios villareal", considerándolo realmente nuevo, "absolutamente original y tan perfecto", que aun para el caso de un binomio resultó más fácil, seguro y rápido que el método del binomio de Newton.</td></tr>
<tr><td>1880. Kronecker: Teoría de los grupos; teoría de los cuerpos de números algebraicos.</td><td>1881. Poincaré: Las funciones fuchsianas (funciones trascendentes que permanecen invariables cuando se somete la variable "z" a sustituciones de la forma $\frac{az+b}{a'z+b'}$ con ab'–ba'=1.

Siendo a, a', b, b' reales (estas sustituciones forman un grupo: el grupo fuchsiano). La teoría de las funciones fuchsianas es una generalización de las funciones elípticas.

1882. Lindemann: Trascendencia del número π.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1888. Dedekind: ¿Qué son y qué deben ser los números?

La noción de entero natural puede alcanzarse a partir de las nociones fundamentales de la teoría de los conjuntos.</td><td></td></tr>
<tr><td>1890. Peano: Investigaciones logísticas (la pasigrafía).

1897. Paradoja de Burali-Forti.</td><td>1894. Volterra: Diferenciales hiperbólicas.</td><td>1899. Hilbert: Fundamentos de la geometría.</td></tr>
</table>

EL SIGLO XX

Los trabajos de Cantor y de Dedekind pusieron en orden el conjunto de conocimientos matemáticos, mostraron la naturaleza de los lazos existentes entre el Álgebra, el Análisis y la Geometría y crearon –según la frase de Hilbert– "un paraíso para matemáticos". Sin embargo, se abre a una crisis grave en el Siglo XX, que termina sin que realmente fuera resuelta, en los años 30. Tras esta época, los esfuerzos de los matemáticos se han dirigido principalmente al estudio de las estructuras a los problemas lógicos y a ciertos dominios de las matemáticas aplicadas.

Trabajos de carácter lógico	Álgebra y análisis
1899. Hilbert: Fundamentos de la geometría. **1913**. Russel-Whitehead: *Principia mathematicae*. **1931**. Teorema de Gödel (meta-ma-temátics) sobre la no contradicción de la aritmética).	**1903**. Fredholm: Teoría de las ecuaciones integrales lineales ("determinantes de Fredholm"). **1904**. Lebesgue: *Lecciones sobre la integración y la investigación de las funciones primitivas* ("integrales en el sentido de Lebegue"). **1910**. Axioma de Zermelo. **1910**. Skinitz: Fundador del álgebra moderna. **1916**. Borel: *Cálculo de probabilidades.* **1922**. Elie Cartan: *Teoría de los espacios generalizados*, concepto de un espacio sin curvatura, con paralelismo absoluto. **1939**. Fundación del grupo Nicolas Bourbaki. **1944**. Eilenberg: *Topología algebraica*.

1960. Abraham Robinson (1918-1974) de nacionalidad Alemana, elaboró a lo que ha dado en llamar el ANÁLISIS NO ESTANDAR, utilizando un teorema de lógica y retomando los infinitesimales que nos hará ver que no solo puede servir de base para desarrollar todo el cálculo infinitesimal, sino que tanto las demostraciones de teoremas como sus soluciones pueden hacerse de manera más simple que utilizando el concepto de límite (técnicas con ε y δ).

1975. El ingeniero matemático Benoit Mandelbrot, con el apoyo de las computadoras logra visualizar diversas curvas y superficies raras totalmente irregulares originadas por alteraciones sucesivas de funciones.

Mandelbrot, no solo da el nombre de *Fractales* (del latín FRACTUS; quebrado o roto sino que hace ver la posibilidad de crear una geometría para describir el mundo natural. Aunque sus teorías no fueron asumidas de inmediato el nuevo modelo matemático se ha ido introduciendo en muchas ramas de la ciencia, tales como la geometría, biología, ecología, física, informática, economía, lingüística, incluso la psicología, áreas que estudia la geometría de la naturaleza y los *sistemas caóticos*.

1997. El matemático inglés Andrew Willes de la universidad de Princeton, demostró que la ecuación $a^n+b^n=c^n$ no tiene solución para a, b, c $\in \mathbb{Z}$ y n>2, llamado el "*último teorema de Fermat*" planteado hace 350 años, logró su hazaña después, de casi 10 años de trabajo, aplicó los trabajos de los japoneses Shimura y Taniyama, plasmándolo en un trabajo que ocupa cien páginas.

1998. El matemático peruano César Camacho Manco, resuelve problemas de ecuaciones diferenciales planteado por los matemáticos franceses Briot y Bouquet en 1854, su trabajo y esfuerzo fue reconocido y premiado por el presidente Brasileño Fernando Henrrique Cardoso.

LAS PIRÁMIDES: MANIFESTACIÓN GEOMÉTRICA EGIPCIA

La pirámide de Keops tiene como base un cuadrado perfecto y sus caras son triángulos equiláteros orientados a los cuatro puntos cardinales.

La cara sur está construida de tal modo que recibe perpendicularmente la luz de Sirio y al pasar por el meridiano alumbra un conducto de ventilación que termina en la cámara del Rey.

En la cara norte está la galería de entrada, que conduce a la cámara subterránea; paralela a ella hay otro conducto de ventilación, orientado hacia la estrella polar de la época (Alfa de la constelación del Dragón) que no es la de hoy, ya que el eje del mundo, a causa del movimiento de balanceo de la Tierra, describe un círculo alrededor del polo ideal y es preciso que transcurran veinticinco mil ochocientos años para que vuelva a la misma posición.

La Cámara del Rey está unida por una galería a la de entrada, la cual recibe la luz de la estrella polar en el momento de su paso inferior por el meridiano.

Las dimensiones de la cripta faraónica son proporcionales a 3, 4 y 5, números que según Plutarco representan los dioses Horus, Osiris e Isis, respectivamente.

En el centro de la Cámara del Rey se alza una especie de pilón de granito rojo pulimentado, tallado en ángulos rectos, cuyo volumen es sesenta y nueve mil pulgadas cúbicas piramidales, que es un décimo del cociente de un cubo de cincuenta pulgadas (fracción del eje terrestre), por la densidad media de la Tierra, que a presión normal representa la unidad de peso en la escala de la pirámide, y el volumen exterior del misterioso cofre es doble de su capacidad y coincide con el del Arca de la Alianza, que, según la Biblia, había construido Moisés para guardar las Tablas de la Ley y cuya medida anota en el Éxodo el *historiador* sagrado.

Una leyenda difundida por los autores griegos atribuye la invención de la geometría a los egipcios (siglo IV a.n.e.). Se dice que ésta se debió a la necesidad de volver a encontrar los límites de los campos después de las inundaciones del Nilo.

EVARISTE GALOIS (1811-1832)

La historia de Evariste Galois es probablemente la más triste y lamentable de toda la historia de la matemática.

Entró a los doce años en famoso liceo Louis-le-Grand de París, donde las materias principales era el latín y el griego. Sus resultados en esas asignaturas eran mediocres y decidió seguir un curso optativo de matemáticas; eso cambió el curso de su vida, le entró una exaltación sin precedentes: terminó en dos días obras que se estudiaban en dos años. Leyó y asimiló a todos los maestros de su tiempo, tales como Legendre y Cauchy. Más aún, su genio creador lo llevó a hacer descubrimientos inesperados (descubrió que las ecuaciones de quinto grado, con las que habían tropezado muchos matemáticos famosos, no tienen soluciones generales por radicales).

Los docentes del liceo Louis-le-Grand no reconocieron para nada su talento ni su genio. Estos son los comentarios de algunos de sus profesores:

"No entiendo bien su personalidad, pero veo claramente su engreimiento, ...ha descuidado gran parte de su trabajo de clase, por eso fracasó en los exámenes".

"Su talento, en el que tendríamos que creer, no lo he visto todavía; no llegará a nada, su trabajo solo demuestra extravagancia y negligencia".

Está siempre ocupado en cosas que no debe, la situación empeora cada día".

Un solo profesor sugiere que abandone las otras asignaturas y que se dedique exclusivamente a las matemáticas, dice: "Una locura matemática se ha apoderado de este joven, aquí está perdiendo el tiempo, sólo atormenta a sus maestros; su conducta es pésima, su carácter muy reservado".

Galois quería entrar en l'Ecole Polytechnique, la mejor escuela de matemática de Francia, y se presentó al concurso de ingreso, pero criticó las preguntas, fue insolente con los examinadores y no fue aceptado. Tuvo que volver al liceo.

A los diecisiete años, envió a la Academia de Ciencias una memoria sobre la resolución de ecuaciones algebraicas que contenía "algunas de las ideas matemáticas más importantes del siglo"; desgraciadamente, Galois nunca supo nada más de ese trabajo; es muy probable que Cauchy, el principal matemático francés de la época lo haya perdido.

Se presentó por segunda vez al l'Ecole Polytechnique y por segunda vez se peleó con los examinadores que le cerraron las puertas definitivamente. Envió un segundo trabajo a la Academia; esta vez Poisson, un matemático de prestigio, fue el juez y declaró el trabajo "incomprensible".

En febrero de 1830, a los diecinueve años, fue finalmente admitido en la "Ecole Normale", de menor prestigio que la anterior, pero también tuvo conflictos con los profesores, participó en luchas políticas y fue expulsado a los pocos meses.

Abandonó, casi por completo las matemáticas, se dedicó a la lucha revolucionaria y llegó a ser un líder prestigioso, pero terminó en la cárcel; allí se enamoró de una joven ("une coquette de bas étage") que iba a visitar a otro preso. La relación fue corta y dramática; salió de la cárcel el 29 de mayo de 1832 y murió dos días después en un duelo ridículo (se sospecha que la coquete y la provocación a duelo fueron ardides de la policía). Galois tenía 21 años.

La noche antes del duelo, escribió cartas y unas sesenta páginas de matemáticas. En ellas presentaba su teoría de grupos abstractos, fundando así el álgebra abstracta moderna, que iba a mantener ocupadas a varias generaciones de matemáticos y de físicos.

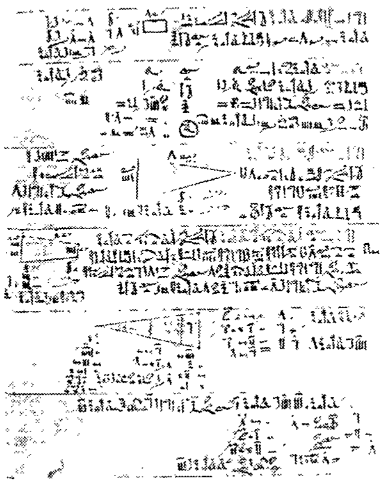
Hermann Weyl, un importante matemático alemán del siglo XX, dijo de este testamento matemático de Galois: "Si se considera la originalidad y la profundidad de las ideas que contiene, es, quizás, el documento escrito más valioso de toda la literatura de la humanidad".

Superando largamente su fama la final frase de su última carta pedía: "Conservad mi recuerdo, ya que el destino no me ha dado suficiente vida para que mi país conozca mi nombre", pues el mejor monumento a su recuerdo es su valioso legado a la humanidad.

Gran enciclopedia - EDUCAR.

CAPÍTULO I

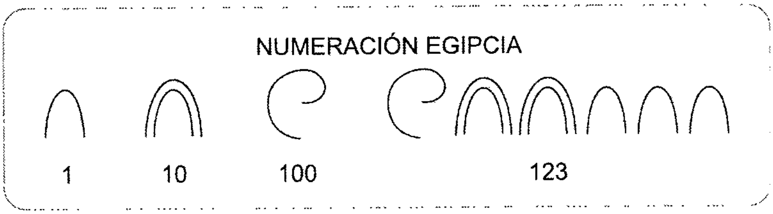
Nociones preliminares



Papiro

Fragmento del papiro adquirido en 1858 por A.H. Rhind a unos campesinos que pretendían haberlo encontrado en las ruinas próximas a Ramesseum, en la orilla izquierda del río Nilo, en Tebas. El papiro de Rhind se remonta a los alrededores de 1600 a.n.e.

Este es el más antiguo documento sobre los conocimientos matemáticos de los egipcios de aquel período.



LECTURA

De Descartes a Newton

La nueva razón, la auténtica revolución del mundo moderno, culminó en los siglos XVII y XVIII con una renovación completa del universo del conocimiento.

Hasta el sigo XVI, la ciencia había permanecido íntimamente ligado a la teología y a la filosofía, las investigaciones empíricas que la habían hecho durante el renacimiento, sobre todo en el terreno de la medicina y en el de la astronomía, habían sido violentamente combatidas por la iglesia y la obra de un Leonardo de Vinci, que intentaba reunir en un conjunto coherente todo el saber de su tiempo quedó como una experiencia aislada, las posiciones religiosas del siglo XVI no favorecieron en nada la expansión de la ciencia.

El gran movimiento intelectual

Comienza en el año 1 620 tiene por artífices a Galileo, Kepler, Descartes, Leibniz y Newton. Profesores de universidad provocan conflictos teológicos, ya que la iglesia, que había condenado a Galileo, no integra el progreso científico en su visión del mundo. Discípulo de Aristóteles, no puede aceptar un mundo en movimiento, regido por leyes matemáticas y, sin embargo, los sabios del siglo XVII con instrumentos de óptica y cálculo perfeccionando demuestran que es el sol el que está en el centro del universo y que la sangre no es un líquido estancado. Sin embargo, para la mayoría de los creyentes ponen la religión "en entredicho". A la muerte de Cristina de Suecia, el grupo de sabios que la rodeaba se dispersa por toda Europa, perseguidos frecuentemente por la contra reforma. Pero los contactos entre científicos se multiplican gracias a un amigo de Descartes, el padre Mersenne, quien se encarga de difundir las ideas mas revolucionarias, empezando por las de Galileo.

I. *Galileo se instaló en Florencia en 1 585. Se dedicó a estudiar principios de Arquímedes.*
II. *Kepler, gracias a su estudio de Marte, este discípulo de Copérnico reinterpreta el movimiento de los planetas: describen una elipse girando alrededor del sol.*
III. *Descartes, introdujo las matemáticas en el seno de las ciencias y la religión.*
IV. *Leibniz, interesado por el derecho, la geología, las matemáticas y la filosofía, dotado de un espíritu enciclopédico refuta la Doctrina de Descartes. Junto con Newton desarrolla el cálculo infinitesimal.*

Fuente: Gran Enciclopedia EDUCAR.

Nociones preliminares

OBJETIVOS:

Hemos considerado este capítulo preliminar porque somos conscientes de que el lector necesita conocer previamente algunos aspectos básicos del álgebra como:

- Realizar operaciones algebraicas elementales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación).
- Familiarizarse con el lenguaje a utilizar en el desarrollo del texto.

De esta manera, el lector estará mejor preparado para aprovechar con mayor eficiencia el desarrollo de los temas subsiguientes.

ADICIÓN - SUSTRACCIÓN

Para definir las operaciones algebraicas partiremos de algunos ejemplos prácticos.

I. Juan tiene 7 caramelos y Ana, 5 caramelos. Si los juntáramos en una sola bolsa tendríamos 12 caramelos en total. Esto se puede simbolizar de la siguiente manera:

$$5\text{car} + 7\text{car} = 12\text{ car} \qquad ó \qquad 5c + 7c = 12c$$

II. Si tuviéramos 6 caramelos y 7 panes y quisiéramos juntarlos en una sola bolsa, sólo diríamos: "se tiene 6 caramelos y 7 panes", es decir , no podría efectuarse operación aritmética alguna.

De donde se concluye lo siguiente:

Para adicionar o sustraer es necesario tomar elementos de un mismo conjunto.

> **NOTA:** Para no escribir el nombre de tal o cual objeto o cantidad de objetos, se les puede asignar ciertas letras equivalentes al nombre.

El ejemplo anterior también se puede expresar de la siguiente forma:

$7x+5x$ y se obtendría $12x$ o en otras circunstancias se tendrá $7xy^3+5xy^3$ y se obtendría $12xy^3$.

Donde:

I. Elementos del mismo conjunto como $\mathbf{7xy^3}$ y $\mathbf{5xy^3}$ se llaman ***términos semejantes***.

II. A la forma de representar mediante una generalización de $7xy^3$ y $5xy^3$ se llaman ***expresiones algebraicas*** que en el capítulo III se verá detalladamente.

III. Para *reducir* dos o más expresiones, éstas deben ser semejantes.

Dos términos se dice que son semejantes en x sí y sólo sí x tiene el mismo exponente en ambos términos de coeficientes no nulos.

Los términos semejantes se pueden reducir por la ley distributiva de multiplicación respecto a la adición por la izquierda o derecha.

$$(a+b)c = ac+bc \qquad\qquad c(m+n) = cm+cn$$

Ejemplo 1

- $3x^5 + 8x^5 = (3+8)x^5 = 11x^5$
- $35x^7 - 22x^7 = (35-22)x^7 = 13x^7$
- $-16x^2 + 11x^2 = (-16+11)x^2 = -5x^2$

Así mismo, diremos que $3x^3y^5$ y $-2x^3y^5$ son semejantes puesto que tienen los mismos exponentes para x y para y respectivamente.

Ejemplo 2

Adicionar $3x^2-8x+1$ con $-2x^2+5x$

Resolución:

Ordenando de acuerdo a sus términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 3x^2 - 8x + 1 \\ -2x^2 + 5x \end{array}\right\} (+) \\ \hline (3-2)x^2 + (-8+5)x + 1 \end{array}$$

El cual es equivalente a $x^2 - 3x + 1$

Ejemplo 3

Sustraer $3x+5$ de $2x^2-8x+3$

Resolución:

Ordenando y reduciendo los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 2x^2 - 8x + 3 \\ 3x + 5 \end{array}\right\} (-) \\ \hline 2x^2 + (-8-3)x + (3-5) \end{array}$$

El cual es equivalente a $2x^2 - 11x - 2$

Ejemplo 4

Dadas las expresiones

$A = 4x^3 - 7xy - 5xy^5$

$B = -6x^3 + 9xy - 3xy^5$

Hallar el equivalente de

I. A + B III. 2A + 3B

II. A - B IV. 4A - 5B

Resolución:

I.

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A = 4x^3 - 7xy - 5xy^5 \\ B = -6x^3 + 9xy - 3xy^5 \end{array}\right\} (+) \\ \hline A+B = (4-6)x^3 + (-7+9)xy + (-5-3)xy^5 \\ \Rightarrow A+B = -2x^3 + 2xy - 8xy^5 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A = 4x^3 - 7xy - 5xy^5 \\ B = -6x^3 + 9xy - 3xy^5 \end{array}\right\} (-) \\ \hline A-B = (4-(-6))x^3 + (-7-9)xy + (-5+3)xy^5 \\ \Rightarrow A-B = 10x^3 - 16xy - 2xy^5 \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{l} 2A = 2(4x^3-7xy-5xy^5) = 8x^3-14xy-10xy^5 \\ 3B = 3(-6x^3+9xy-3xy^5) = -18x^3+27xy-9xy^5 \\ \hline \Rightarrow 2A+3B=(8-18)x^3 + (-14+27)xy + (-10-9)xy^5 \\ \Rightarrow 2A+3B = -10x^3 + 13xy - 19xy^5 \end{array}$$

IV. Ejercicio para el lector.

Ejemplo 5

Dados $P=(c-1)x^2+3x+3y$

$Q=5x^2-3(x+y)$

Si

$P-Q$ se reduce a $6(x+y)$, hallar el valor de c.

Resolución:

Ordenando :

$$\left.\begin{array}{l} P = (c-1)x^2+3x+3y \\ Q = \quad\;\; 5x^2-3x-3y \end{array}\right\}(-)$$
$$\overline{P-Q=(c-1-5)x^2+6(x+y)}$$

De donde $c-1-5=0 \Rightarrow c=6$

Ejemplo 6

Efectuar

$$-8y-\{-7y-[(3y-7x)-(2y-8x)]+5x\}$$

Resolución:

Efectuando por partes:

$$-8y-\{-7y-\underbrace{[(3y-7x)-(2y-8x)]}_{\underbrace{3y-7x-2y+8x}_{(x+y)}}+5x\}$$

$=-8y-\{-7y-[y+x]+5x\}$

$=-8y-\{-7y-x-y+5x\}$

$=-8y-\{-8y+4x\}$

$=-\cancel{8y}+\cancel{8y}-4x$

$=-4x$

sustraer la suma de $3ab-6$ y $3a^2-8ab+5$

Efectuando la adición:

$$\left.\begin{array}{r} 3ab-6 \\ 3a^2-8ab+5 \end{array}\right\}(+)$$
$$\overline{3a^2-5ab-1}$$

II. La suma: $3a^2-5ab-1$ será el sustraendo que debemos restar de a^2

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \\ 3a^2-5ab-1 \end{array}\right\}(-)$$
$$\overline{-2a^2+5ab+1}$$

Recordar:

$$\boxed{-(3a^2-5ab-1)=-3a^2+5ab+1}$$

III. Obteniendo como respuesta: $-2a^2+5ab+1$

Otra forma:

Del enunciado se tiene

$a^2-[(3ab-6)+(3a^2-8ab+5)]$

$=a^2-[\underline{3ab}-6+3a^2-\underline{8ab}+5]$

$=a^2-[-5ab-1+3a^2]$

$=a^2+5ab+1-3a^2$

$=-2a^2+5ab+1$

Ejemplo 8

Simplificar la expresión

$$-[-3a-\{b+[-a+(2a-b)-(-a+b)]+3b\}+4a]$$

Resolución:

Empezaremos simplificando los términos semejantes más internos, es decir, los afectados por los paréntesis.

$$-[-3a-\{b+\underbrace{[-a+(2a-b)-(-a+b)]}_{\underbrace{-a+2a-b+a-b}_{2a-2b}}+3b\}+4a]$$

Luego

$$-[-3a-\underbrace{\{b+[2a-2b]+3b\}}_{\underbrace{b+2a-2b+3b}_{2a+2b}}+4a]$$

$=-[-3a-(2a+2b)+4a]$

$=-[-3a-2a-2b+4a]$

$=-[-a-2b]=a+2b$

Finalmente se tiene $a+2b$

MULTIPLICACIÓN

Es necesario recordar aspectos esenciales de la multiplicación como:

1. Ley de los Signos

$(+)(+)=(+)$ $\quad$ $(-)(+)=(-)$

$(-)(-)=(+)$ $\quad$ $(+)(-)=(-)$

NOTA:

I. La multiplicación de dos signos iguales resulta (+)

II. La multiplicación de dos signos diferentes resulta (-)

2. Propiedades de los Exponentes

$a^m.a^n=a^{m+n}$

$(a.b)^n=a^n.b^n$

$(a^m)^n=a^{m.n}$

$(a^\alpha.b^\beta)^n=a^{\alpha.n}.b^{\beta.n}$

3. Propiedad Distributiva

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

Ejemplo 1

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)$$
$$=am+an+bm+bn$$

Ejemplo 2

Efectuar $(3x^4+5xy^3)(2xy^3-y)$

Resolución:

Efectuando conforme se indica

$$(3x^4+5xy^3)(2xy^3-y)$$

$=3x^4.2xy^3-3x^4.y+5xy^3.2xy^3-5xy^3.y$

$=6x^5y^3-3x^4y+10x^2y^6-5xy^4$

Ejemplo 3

Efectuar $(a^2m+bn^3)(a^3b+mn+abmn^2)$

Resolución:

Distribuyendo como se indica

$$(a^2m+bn^3)(a^3b+mn+abmn^2)$$

$=a^2m.a^3b+a^2m.mn+a^2m.abmn^2+$
$\quad bn^3.a^3b+bn^3.mn+bn^3.abmn^2$

$=a^5bm+a^2m^2n+a^3bm^2n^2+a^3b^2n^3$
$\quad +bmn^4+ab^2mn^5$

4. Propiedad Asociativa

$$\boxed{a.(b.c)=(a.b).c}$$

Ejemplo 1

Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$

Resolución:

$2a^2.3a^3=2.3.a^2.a^3=6a^{2+3}=6a^5$

Ejemplo 2

Efectuar la multiplicación de:

$$(-x^2y)\left(-\frac{2}{3}x^m\right)\left(-\frac{3}{4}a^2y^n\right)$$

Resolución:

$$=(-)(-)(-)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)x^2yx^m a^2y^n$$

$$=-\frac{1}{2}x^{2+m}y^{1+n}a^2$$

Ejemplo 3

Multiplicar $3x^2-5xy+y^3$ por $-2x^3y^4$

Resolución:

$$(3x^2-5xy+y^3)(-2x^3y^4)$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$= -3.2\,x^2.x^3y^4 + 5.2\,xy.x^3y^4 - 2\,y^3.x^3y^4$

$= -6\,x^5y^4 + 10\,x^4y^5 - 2\,x^3y^7$

Ejemplo 4

Multiplicar $(2x+3y^4)$ por $(5x^2-y)$

Resolución:

Aplicando la propiedad distributiva conforme se indica:

$$(2x+3y^4)\,(5x^2-y)$$

$= 2x.5x^2 - 2x.y + 3y^4.5x^2 - 3y^4.y$

$= 10x^3 - 2xy + 15x^2y^4 - 3y^5$

Ejemplo 5

Multiplicar $a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1}$ por a^2-2a

Resolución:

Análogamente conforme se indica:

$$(a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1})\,(a^2-2a)$$

$= a^{m+2}.a^2 - 4a^m.a^2 - 2a^{m+1}.a^2 -$

$\quad a^{m+2}.2a + 4a^m.2a + 2a^{m+1}.2a$

$= a^{m+4} \cancel{-4a^{m+2}} - 2a^{m+3} - 2a^{m+3} +$

$\quad 8a^{m+1} \cancel{+4a^{m+2}}$

$= a^{m+4} - 4a^{m+3} + 8a^{m+1}$

Ejemplo 6

Efectuar $3x(x+3)\,(x-2)\,(x+1)$

Resolución:

Efectuando por partes como se indica en I, II y III:

I. $3x(x+3)=3x^2+9x$

II. $3x(x+3)\,(x-2)$

$$(3x^2+9x)(x-2)$$

$= 3x^3 - 6x^2 + 9x^2 - 18x$

$= 3x^3 + 3x^2 - 18x$

III. $(3x^3+3x^2-18x)(x+1)$

$= 3x^4 + 3x^3 + 3x^3 + 3x^2 - 18x^2 - 18x$

$= 3x^4+6x^3-15x^2-18x$

Ejemplo 7

Reducir $(x+5)\,(2x-3) - (2x+1)\,(x-4)$

Resolución:

Aplicando la propiedad distributiva:

$$(x+5)(2x-3)-(2x+1)(x-4)$$

$= (2x^2-3x+10x-15)-(2x^2-8x+x-4)$

$= 2x^2+7x-15-(2x^2-7x-4)$

$= \cancel{2x^2}+7x-15-\cancel{2x^2}+7x+4$

$= 14x-11$

De donde lo reducido es: $14x-11$

Ejemplo 8

Reducir

$(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$

Resolución:

Aplicando la propiedad distributiva:

$$(2x^3+5xy)(x-y)-(x^3+xy)(2x-5y)$$

$= (2x^4-2x^3y+5x^2y-5xy^2)-(2x^4-5x^3y+2x^2y-5xy^2)$

$= \cancel{2x^4}-2x^3y+5x^2y-\cancel{5xy^2}-\cancel{2x^4}+5x^3y-2x^2y+\cancel{5xy^2}$

$= 3x^3y+10x^2y$

5. Equivalencias Notables

- $(a\pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplos:

Efectuar:

a. $(2x+3y)^2$

b. $(3x^2-5y^4)^2$

c. $(4x+3y)(4x-3y)$

d. $(x^3+5y^4)(x^3-5y^4)$

e. $(x+5)(x+3)$

f. $(2x+1)(2x+5)$

g. $(x-7)(x+5)$

Resolución:

Aplicando las equivalencias notables

a. $(2x+3y)^2 = (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$
$= 4x^2+12xy+9y^2$

b. $(3x^2-5y^4)^2 = (3x^2)^2-2(3x^2)(5y^4)+(5y^4)^2$
$= 9x^4-30x^2y^4+25y^8$

c. $(4x+3y)(4x-3y) = (4x)^2-(3y)^2$
$= 16x^2-9y^2$

d. $(x^3+5y^4)(x^3-5y^4) = (x^3)^2-(5y^4)^2$
$= x^6-25y^8$

e. $(x+5)(x+3) = x^2+(5+3)x+5.3$
$= x^2+8x+15$

f. $(2x+1)(2x+5) = (2x)^2+(1+5)2x+1.5$
$= 4x^2+12x+5$

g. $(x-7)(x+5) = x^2+(-7+5)x+(-7)(5)$
$= x^2-2x-35$

DIVISIÓN

Recordando aspectos básicos:

1. Ley de los Signos

$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

$$\frac{(-)}{(-)}=(+) \qquad \frac{(+)}{(-)}=(-)$$

2. Propiedades en los Exponentes

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a^\alpha}{b^\beta}\right)^n=\frac{a^{\alpha n}}{b^{\beta n}}$$

TEOREMA

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad ; \quad a\neq 0$$

0^{-n} no definido siendo $n>0$

3. Propiedad

$$\boxed{\frac{(a+b)}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}$$

> **NOTA:** Se debe tener presente que la división por cero, no está definido. Por lo tanto, el denominador debe ser diferente de cero.

Ejemplo 1

Dividir $8x^5y^{10}$ entre $-2x^3y^2$

Resolución:

$$\frac{8x^5y^{10}}{-2x^3y^2}=\left(\frac{8}{-2}\right)x^{5-3}\cdot y^{10-2}=-4x^2y^8$$

Ejemplo 2

Dividir $64x^5y^8$ entre $4y^{-2}x$

Resolución:

$$\frac{64x^5y^8}{4y^{-2}x}=\left(\frac{64}{4}\right)x^{5-1}\cdot y^{8-(-2)}$$

$$=16x^4y^{8+2}=16x^4y^{10}$$

TEOREMAS

Sea $xyzwk \neq 0$

I. $\frac{x}{y}=x\left(\frac{1}{y}\right)$

II. $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{w}{k}\right)=\frac{x.w}{y.k}$

III. $\frac{x.y}{w.x}=\frac{y}{w}$

IV. $\frac{x}{y}+\frac{z}{y}=\frac{x+z}{y}$

V. $\frac{x}{y}+\frac{w}{z}=\frac{xz+yw}{yz}$

VI. $\frac{x}{y}\div\frac{w}{z}=\frac{xz}{yw}$

VII. $x+\frac{y}{w}=\frac{xw+y}{w}$

Ejemplo 3

Dividir $3a^5+6a^4b+9a^3b^2$ entre $3a^2$

Resolución:

Aplicando la propiedad distributiva de la división

$$\frac{3a^5+6a^4b+9a^3b^2}{3a^2}=\frac{3a^5}{3a^2}+\frac{6a^4b}{3a^2}+\frac{9a^3b^2}{3a^2}$$

$$=a^3+2a^2b+3ab^2$$

Ejemplo 4

Simplificar $\frac{x^2-4}{6x^2+12x}$, si $x\neq 2$

Resolución:

Recordar:

$$\boxed{6x(x+2)=6x^2+12x}$$

Entonces

$$\frac{x^2-4}{6x^2+12x}=\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{6x\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{6x}$$

Ejemplo 5

Reducir $\frac{x^2-9}{3x^2+11x-4}\cdot\frac{5x+20}{x^2-4x+3}$

Resolución:

De equivalencias algebraicas, recordar:

$$\boxed{\begin{aligned}(x-3)(x-1)&\equiv x^2-4x+3\\(3x-1)(x+4)&\equiv 3x^2+11x-4\end{aligned}}$$

Entonces

$$\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(3x-1)\cancel{(x+4)}}\cdot\frac{5\cancel{(x+4)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}}=\frac{5(x+3)}{(3x-1)(x-1)}$$

Ejemplo 6

Efectuar

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{y-1}{y+1}+\frac{-2xy}{(x-1)(y+1)}$$

Resolución:

Aplicando el teorema (V)

$$\frac{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}{(x-1)(y+1)}+\frac{-2xy}{(x-1)(y+1)}$$

Aplicando el teorema (IV) y efectuando:

$$\frac{xy+x+y+1+xy-x-y+1-2xy}{(x-1)(y+1)}=\frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Ejemplo 7

Reducir $x+1-\dfrac{x^3+5x^2-18}{x^2+5x+6}$

Resolución:

Aplicando el teorema (VII) se tiene

$$\frac{(x+1)\left(x^2+5x+6\right)-\left(x^3+5x^2-18\right)}{x^2+5x+6}$$

Efectuando las multiplicaciones obtendremos:

$$\frac{x^3+5x^2+6x+x^2+5x+6-x^3-5x^2+18}{x^2+5x+6}$$

cuyo equivalente simplificado

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{(x+3)(x+8)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x+8}{x+2}$$

Ejemplo 8

Simplificar

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{x+5}{1-x^2}$$

NOTA: $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$

Resolución:

$$\underbrace{\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{2x-2+3x+3}{x^2-1}+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{5x+1+x+5}{x^2-1}=\frac{6x+6}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{6}{x-1}$$

Ejemplo 9

Efectuar

$$\frac{1+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}{1+\dfrac{x}{y}}$$

Resolución:

Aplicando el teorema VII en el numerador y denominador

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}}{\dfrac{y+x}{y}}=\frac{\left(x^2+y^2+2xy\right)y}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}$$

$$=\frac{(x+y)^2y}{\left(x^2+y^2\right)(x+y)}=\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

Ejemplo 10

Simplificar

$$\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{x+2}}}$$

Resolución:

Las fracciones de esta forma se llaman **continuas** y se simplifican efectuando las operaciones de abajo hacia arriba.

NOTA: $a+\dfrac{b}{c+\dfrac{x}{y}}=a+\dfrac{b}{\dfrac{cy+x}{y}}=a+\dfrac{by}{cy+x}$

Para el ejemplo, considerando la nota se tiene en el denominador:

$$1-\frac{2}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=\frac{x}{x+2}$$

Luego

$$\frac{x-2}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x}{x+2}}}=\frac{x-2}{x-\dfrac{x+2}{x}}$$

$$\frac{x-2}{\dfrac{x^2-x-2}{x}}=\frac{x(x-2)}{x^2-x-2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$$

ECUACIONES Y DESPEJE DE INCÓGNITAS

Se expondrá mediante ejemplos prácticos, utilizando expresiones que se considerarán bien definidas.

Recordar:

a = b si y solo si a + c = b + c
a = b si y solo si a . c = b . c ; c ≠ 0

Ejemplo 1

Hallar x en $\frac{x}{2}=\frac{x}{6}-\frac{1}{4}$

Multiplicando todo por 12 (12 es el mínimo común múltiplo de 2, 6 y 4)

$$\Rightarrow\ 12\left(\frac{x}{2}\right)=12\left(\frac{x}{6}\right)-12\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$6x = 2x-3$$
$$6x-2x = -3$$
$$4x = -3$$
$$x = -3/4$$

Ejemplo 2

De: u = a+(n-1)r, despejar "n"

Resolución:

$u = a+(n-1)r \ \Rightarrow\ (n-1)r = u-a$

(dividiendo ambos miembros entre r)

$$\Rightarrow\ n-1=\frac{u-a}{r}$$

transponiendo términos

$$\Rightarrow\ n=1+\frac{u-a}{r}$$

$$\Rightarrow\ n=\frac{r+u-a}{r}$$

Ejemplo 3

De $\dfrac{t^2}{f}=\dfrac{2}{p'}-\dfrac{3}{p}$ despejar p'

Resolución:

De $\dfrac{t^2}{f}=\dfrac{2}{p'}-\dfrac{3}{p} \Rightarrow \dfrac{t^2}{f}+\dfrac{3}{p}=\dfrac{2}{p'}$

Luego $\dfrac{t^2p+3f}{fp}=\dfrac{2}{p'} \Rightarrow p'=\dfrac{2fp}{t^2p+3f}$

Ejemplo 4

De la expresión $e = V_ot + \dfrac{1}{2}gt^2$

despeje I. g

II. V_o

Resolución:

I. Despejando "g"

$$e=V_ot+\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow e-V_ot=\frac{1}{2}gt^2$$

luego

$$2(e-V_ot)=gt^2 \Rightarrow g=\frac{2(e-V_ot)}{t^2}$$

II. Despejando "V_o"

Multiplicando por 2

$$2e = 2V_ot+gt^2 \Rightarrow 2V_ot = 2e-gt^2$$

$$V_o=\frac{2e-gt^2}{2t}$$

Ejemplo 5

De: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{ab}{x+b}$ despeje b

Resolución:

Recordar: $\boxed{\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D} \Leftrightarrow AD=BC}$

Efectuando $\dfrac{1+a}{x}=\dfrac{ab}{x+b}$

se tendrá

$$(1+a)(x+b) = xab \Rightarrow x + \underline{b} + ax + \underline{ab} = x\,\underline{ab}$$

Luego $x + ax = xab - ab - b$

$$\Rightarrow x(1+a) = b(ax-a-1)$$

$$\therefore\ b=\frac{x(a+1)}{ax-a-1} \quad ; \quad \forall\, ax \neq a+1$$

Ejemplo 6

Despejar $\dfrac{r+q}{q-x}$

de la igualdad: $K=\dfrac{a-1}{1+\sqrt[a-1]{\dfrac{r+q}{q-x}}}$

Resolución:

Es equivalente a $1+\sqrt[a-1]{\dfrac{r+q}{q-x}}=\dfrac{a-1}{K}$

luego

$$\sqrt[a-1]{\frac{r+q}{q-x}}=\frac{a-1}{K}-1$$

de donde $\sqrt[a-1]{\dfrac{r+q}{q-x}}=\dfrac{a-1-k}{k}$ elevando a la (a–1) resulta que:

$$\frac{r+q}{q-x}=\left(\frac{a-1-k}{k}\right)^{a-1}$$

Ejemplo 7

Despejar $P(x)$ de

$$P_{(x)}^2+x+3=4-6x^2-5xP(x)$$

Resolución:

Transponiendo los términos al primer miembro

$$P(x)^2 + 5x\,p(x) + 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{lcl} P(x) & & (3x \quad -1) \\ P(x) & & (2x \quad\ \ 1) \end{array}$$

Por el criterio del aspa simple

$$[P(x) + (3x-1)][P(x) + (2x+1)] = 0$$

de donde

$$P(x) = -3x+1 \quad ó \quad P(x) = -2x-1$$

Ejemplo 8

Efectuar

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)\left(\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-b^2}\right)\left(\frac{x^2-c^2}{x^2-(a+c)x+ac}\right)(x-a)$$

$$\forall x \neq \pm a \quad ; \quad x \neq \pm b \quad ; \quad x \neq \pm c$$

Resolución:

La expresión es equivalente a

$$\left(\frac{1}{\cancel{x-a}}\right)\frac{\cancel{(x-a)}\cancel{(x-b)}}{(x+b)\cancel{(x-b)}}\cdot\frac{(x+c)\cancel{(x-c)}}{\cancel{(x-a)}\cancel{(x-c)}}\cdot\cancel{(x-a)}$$

$$= \frac{x+c}{x+b}$$

Ejemplo 9

Efectuar $\left(\frac{n}{p}+1\right) - \left(1 + \frac{\frac{m+n}{p}+1}{\frac{m+p}{n}+1}\right) + 10$

Resolución:

Efectuando convencionalmente

$$= \frac{n}{p} \cancel{+1} \cancel{-1} - \frac{\frac{\cancel{m+n+p}}{p}}{\frac{\cancel{m+n+p}}{n}} + 10$$

$$= \frac{n}{\cancel{p}} - \frac{n}{\cancel{p}} + 10 = 10$$

Ejemplo 10

Efectuar

$$\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Resolución:

$$= \left(\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\right)\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$$

$$= \left(\frac{b+c+a}{b+c-a}\right)\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b+c+a)}{(b+c-a)}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

Ejemplo 11

Despejar x de: $m = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+9}$

Resolución:

$$m = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+9}$$

$$\Rightarrow m\sqrt{x} + 9m = \sqrt{x} - 1$$

$$\Rightarrow (m-1)\sqrt{x} = -1 - 9m$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{1+9m}{m-1} = \frac{1+9m}{1-m}$$

Luego elevamos al cuadrado

$$x = \left(\frac{1+9m}{1-m}\right)^2$$

Problemas Propuestos

1. Hallar la suma de:

a) $3a+2b-c$; $2a + 3b + c$

b) $a+b-c$; $2a+2b-3c$; $-3a-b+3c$

c) $x+y+z$; $2x-3y+z$; $-4x+5y-2z$

d) x^2-5x+8 ; $-x^2+10x-30$; $-6x^2+5x-50$

e) x^3y-xy^3+5 ; $x^4-x^2y^2+5x^3y-6$; $-6xy^3+x^2y^2+2$

f) $(x^2+y^2-3xy)-(-y^2+3x^2-4xy)$

g) $3x-\left[x+y-\overline{2x+y}\right]$

h) $4x^2+[-(x^2-xy)+(-3y^2+2xy)-(-3x^2+y^2)]$

i) $\left[-a+\left\{-a+(a-b)-\overline{a-b+c}-[-(-a)+b]\right\}\right]$

j) $-[x+\{-(x+y)-[-x+(y-z)-(-x+y)]-y\}]$

k) $2x-\overline{x-2y+\overline{(5x-2y)-\overline{x-y}}}$

l) $-\left[3m+\left\{-m-\left(n-\overline{m+4}\right)\right\}+\{-(m+n)+(-2n+3)\}\right]$

> ———— : símbolo de agrupación llamado barra o vínculo.

2. Hallar el producto de multiplicar:

a) $\left(a^{x-1}-b^{n-1}\right)$ por $(a-b)$

b) $3a^{x\ 1}+a^x-2a^{x\ 2}$ por $a^x-a^{x\ 1}+a^{x\ 2}$

c) $(3xy^2+2x-y)$ por $(x-4xy+1)$

d) $x^my^{n\ 1}+x^{m\ 1}y^n-xy$ por $2+xy+x^2y^2$

3. Efectuar:

a) $(2x+3y-4z)(2x-3y+4z)$

b) $(x+1)(x-2)(4x-1)(3x+5)+11(x-3)(x+7)$

c) $(3x-1)^2-3(2x+3)^2-2x(-x-5)+(x-1)^2$

d) $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)-x(x-3)+2x(x+5)$

4. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $3(x-2)+2(1-x)$

b) $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$

c) $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$

d) $\frac{0,75-x}{3}-\frac{2x+4}{1,5}-x-4\frac{1}{3}$

e) $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-64)]$

f) $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0,5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0,75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}$

5. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{a^2+3a}{4-a^2}-\dfrac{a+1}{3a-6}$

b) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$

c) $\dfrac{a^2-9}{5a^3b^3}\div\left[\dfrac{a+3}{10a^4}\cdot\dfrac{2a-6}{ab^4}\right]$

d) $\dfrac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2+6xy}{(x-y)\left(x^3-y^3\right)+2x^2y^2}$

e) $\dfrac{b-4}{b-2}\div\left(\dfrac{8ab}{b^3-8}+\dfrac{2b}{b^2+2b+9}-\dfrac{b-16}{2-b}\right)-\dfrac{6b+4}{(4-b)^2}$

Efectuar:

a) $\left[\dfrac{x^2\ (a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}\right]\left\{\dfrac{x^2-c^2}{x^2-b^2}\right\}$

b) $\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\div\left(2x-1+\dfrac{15}{x-3}\right)$

c) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\right)\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

d) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}+1\right)\left(\dfrac{x}{x^3-8}\right)}{\dfrac{1}{x^2-2x}}$

e) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{a^2+1}+\dfrac{4}{a^4+1}+\dfrac{8}{a^8-1}$

f) $\dfrac{(a-1)\left(1+a-\sqrt[3]{a^2}\right)}{1+\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a^2}}$

g) $\dfrac{n}{p}+1-\left[1+\dfrac{\dfrac{m+n}{p}+1}{\dfrac{m+p}{n}+1}\right]+2$

h) $\dfrac{\left[m^2+n^2+1+2mn\right]\left[m^2+n^2+2mn-1\right]+1}{(m^2+n^2+2mn)^2}$

7. De las igualdades siguientes, despejar la incógnita x:

a) $\frac{[2a+x(n-1)]n}{2}=5$

b) $3\{10-2[3x-2(x-5)]+7x\}=3x-4$

c) $t=\sqrt{\frac{k^2+n^2+m^2x}{a+x}}$

d) $1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

e) $W=\frac{60vd}{60d+v(t-x)}$

f) $\frac{n}{m}[a(m-x)+bx]=b(n-x)+ax$

g) $y=\frac{1}{2}\left[(b+c)-\sqrt{(b-c)^2-4hcx}\right]$

h) $v=\frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{47}{x}}-1\right)$

i) $v=\frac{a}{1-\sqrt[k+1]{\frac{r-x}{p-x}}}$

j) $\sqrt{\frac{x^2-4h^2}{x^2-4b^2}}=\frac{h}{b\sqrt{2}}$

k) $\frac{3x+5y-z}{3x+5y+z}=\frac{x}{y}-\frac{x}{z}$

l) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}$

m) $a+2=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}}$

n) $V_o x+\frac{1}{2}gx^2=h$

o) $\sqrt[3]{a}\,x+\sqrt[3]{b}\,x=(a+b)(a-b)$

p) $(3x^4+a)^2-(3x^4-a)^2=48a^5b^4$

q) $(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

r) $x^2+2y^2+2z^2=2xy+2xz,\quad \{x,y,z\}\subset\mathbb{R}$

s) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

t) $(x-y+z)^2=2+x^2+y^2+z^2$

u) $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz\ ,\ \{x,y,z\}\subset\mathbb{R}$

v) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

w) $g(x)+x^2f(x)=x^2g(x)+f(x)$

CAPÍTULO

II

Leyes de exponentes

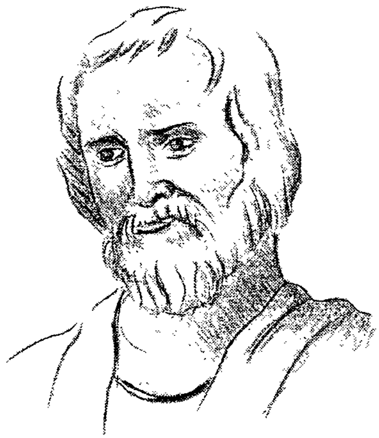
Arquímedes (287 a 212 a.n.e.)

Sin discusión fue el matemático griego más genial. Vivió en Siracusa de 287 al 212 a.n.e. Su padre fue el astrónomo Fidas. Se atribuyen a Arquímedes numerosos inventos, entre ellos el "Tornillo sin fin" detinado a traer el agua subterránea de las minas de Egipto. Participó en la defensa de Siracusa. La originalidad de Arquímedes convirtió junto a Platón, en la flor innata (genio griego. Descubrió las propiedad del número π y las enunció en el lib *Medida del círculo.* En este libro existe importante teorema que afirma "el valor π varía entre:

$3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. Buscó los procedimientos físic de los descubrimientos, dando ensegui una exposición lógica y demostrativa de l resultados obtenidos; llamaba no a intuición y al tanteo, sino a la lógica físic matemática.

En su teoría de los métodos, anticipándo en 2000 años a Newton, descubrió y usó l conceptos básicos del cálculo integral y el uso de sus problemas anticipó creación del cálculo diferencial.

Murió asesinado por un soldado romano la cárcel, mientras resolvía un problema.



$$\left(\frac{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}}{z^{\gamma}}\right)^{n}=\frac{x^{\alpha n}\cdot y^{\beta n}}{z^{\gamma n}}$$

ÁLGEBRA

LECTURA

La historia del cero

Hasta el año 1200 después de Cristo se usó en Europa la numeración romana. Por esa época, un mercader de Pisa, Leonardo Pisano, al volver de un largo viaje por Africa y el Medio Oriente escribió un libro titulado **Liber Abaci**, *donde exponía y proponía emplear la Matemática usada por los árabes, que a su vez la habían aprendido de los hindúes y que no significa otra cosa que* **nada**.

Si bien la obra de Leonardo Pisano fue un hecho revolucionario, debido a que no estaba inventada la imprenta, debieron transcurrir tres siglos para que fuera conocida en toda Europa.

Es interesante señalar que en la América precolombina, más precisamente entre los Mayas, existía la noción de "cero", número que ellos empleaban en su sistema de numeración vigesimal.

Este número es una de las más grandes invenciones del genio humano ya que gracias a él se abandonó la numeración romana, adoptándose la decimal vigente aún en nuestros tiempos y facilitó la ejecución de las operaciones aritméticas.

Fuente: La Nueva Matemática - Ed. Salvat.

Leyes de exponentes

OBJETIVOS
- Buscar una relación entre las definiciones y los teoremas correspondientes a los exponentes de una expresión matemática.
- Aplicar con criterio la notación científica en el cálculo con cantidades muy pequeñas o muy grandes, así: $0{,}0003=3.10^{-4}$ ó $32\,000=3{,}2\,.\,10^{4}$
- Capacitar para reconocer los exponentes mayores de cocientes, productos, potencias o raíces n-ésimas.
- Aplicar la relación de base a base y exponente a exponente en la resolución de las ecuaciones exponenciales.

INTRODUCCIÓN

Veamos la necesidad e importancia de este capítulo a través de algunos ejemplos:

Los números 10, 100, 1000, etc. juegan un papel muy importante en la notación decimal y se llaman potencias de 10. Un modo conveniente de indicar estas potencias es mediante el uso de exponentes:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente; leemos 10^5 como "diez a la quinta potencia". El numeral 5 en 10^5 se llama exponente.

La mayor utilidad de estas formas exponenciales está en el trabajo científico, debido a la necesidad de simplificar los cálculos con números muy grandes o números pequeños. Citamos los siguientes ejemplos:

I. La estrella más cercana, Alfa Centauri, está a 25.000.000.000.000 millas de la tierra que puede simplificarse diciendo Alfa Centauri está a $25\,.\,10^{12}$ millas de la tierra.

II. Entre los años 1 908 – 1 917, el físico norteamericano Robert Andrews Millikan dedujo que la carga negativa del electrón es $-1{,}60\,.\,10^{-19}$ C, del mismo modo su masa es $9{,}11\,.\,10^{-28}$ g.
¿Cómo sería sin la representación exponencial?

III. En la teoría molecular de la materia, Amadeo Avogadro determina una constante llamándola el número de Avogadro, cuyo valor es $6{,}02\,.\,10^{23}$ (602 seguido de 21 ceros).

IV. El radio del núcleo del urano –235 es aproximadamente $7{,}0\,.\,10^{-5}$ Å, siendo cada Å$=10^{-8}$cm.
Vemos la gran utilidad de esta forma exponencial en el trabajo científico.

Para finalizar, planteamos el siguiente problema de astronomía. Se acostumbra describir las distancias entre las estrellas mediante unidades llamadas años luz. Por definición, un año luz es la distancia que recorre la luz en un año (365 días). Si la luz viaja con una velocidad de $3{,}1\,.\,10^{5}$ km/s. aproximadamente ¿cuántos km hay en un año luz?

Definiciones Previas

EXPONENTE NATURAL

Es el exponente entero y positivo que nos indica el número de veces que se repite una expresión como factor.

Ejemplos:

1. $5^6 = \underbrace{5\,.\,5\,.\,.....\,.\,5}_{6\text{ veces}}$

2. $\underbrace{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)....\left(-\frac{x}{y}\right)}_{72\text{ veces}} = \left(-\frac{x}{y}\right)^{72}$

3. $\underbrace{\sqrt[3]{xy}\,.\,\sqrt[3]{xy}\,...\,\sqrt[3]{xy}}_{4n-1\text{ veces}} = \left(\sqrt[3]{xy}\right)^{4n-1}$; $4n-1 \in \mathbf{N}$

4. $\underbrace{\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\,.\,\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\,...\,\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}}_{43\text{ veces}} = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{\sqrt{y}}}\right)^{43}$

5. $\underbrace{\left(\frac{x^3}{p}\right)\left(\frac{x^3}{p}\right).....\left(\frac{x^3}{p}\right)}_{(2p+3q-7)\text{ veces}} = \left(\frac{x^3}{p}\right)^{2p+3q-7}$; $(2p+3q-7)\in\mathbf{N}$

En general:

$$a^n = \begin{cases} a \ ; & \text{Si}: \ n = 1 \\ \underbrace{a\,.\,a\,....\,a}_{\text{"n" veces}} & \text{Si } n \in \mathbf{N} \ ; \ n \geq 2 \end{cases}$$

NOTA

$$\underbrace{\left(\sqrt{xy}\right)\left(\sqrt{xy}\right)....\left(\sqrt{xy}\right)}_{(\sqrt{7}+\sqrt{2})\text{ veces}} \neq \left(\sqrt{xy}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$$

No tiene sentido ya que $(\sqrt{7}+\sqrt{2})$ no es un número natural.

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales.
$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.

EXPONENTE CERO

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es la unidad.

$$\boxed{a^0 = 1 \ ; \ \forall a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0}$$

Ejemplos:

1. $(-4+\sqrt{2})^0 = 1$ **2.** $(\pi+\sqrt{2})^0 = 1$ **3.** $(x^2+y^2+15)^0 = 1$ **4.** $\left.\begin{array}{l}(-425)^0 = 1 \\ -425^0 = -1\end{array}\right\}$ Observación

NOTA 0^0 es indeterminado.

Ejemplo:

$(4-\sqrt{16})^{\sqrt[3]{-8}+2} = (4-4)^{2+2} = 0^0 \Rightarrow$ dicha expresión no está definida.

EXPONENTE NEGATIVO

Nos indica que la base diferente de cero se invierte (inverso multiplicativo).

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

TEOREMA

$$a^{\;n} = \frac{1}{a^{n}} \quad \forall a \neq 0 \;\wedge\; n \in \mathbb{N}$$

Ejemplos:

a) $3^{\;2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

b) $(-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)^3} = \dfrac{1}{-64} = -\dfrac{1}{64}$

c) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-2} = 8^2 = 64$

d) $5^{-2^{\,3}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

Nota: $0^{\,n}$ no está definido $(n \in \mathbb{N})$

EXPONENTE FRACCIONARIO

El exponente fraccionario se expresa como los radicales, donde el denominador de dicho exponente representa el índice del radical.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} = \sqrt[n]{a}^{\,m} \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \geq 2$$

Ejemplos:

1. $4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

2. $8^{10/3} = \sqrt[3]{8^{10}} = \sqrt[3]{8}^{\,10} = 2^{10} = 1\,024$

3. $81^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{81}^{\,3} = 3^3 = 27$

4. Calcular: $4^{-2^{-1}}$

   Resolución:

   Usando las definiciones de exponente negativo y fraccionario, se tiene:

   $$4^{-2^{-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

5. Reducir:

   $$27^{9^{-16^{-2^{-2}}}}$$

Resolución:

Es equivalente a:

$$26^{\left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}}}$$

Se reduce de dos en dos de arriba hacia abajo, como sigue:

- $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$
- $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$
- $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

Finalmente: $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Es una operación matemática que consiste en hallar una expresión llamada potencia, partiendo de otras dos llamadas base y exponente respectivamente.

Identidad Fundamental

$$P = a^n \ ; \ a \in \mathbb{R} \ ; \ n \in \mathbb{N} \ ; \ p \in \mathbb{R}$$

Donde: a : base
n : exponente natural
p : potencia

TEOREMA 1

$$x^m . x^n = x^{m+n} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$x^m . x^n = \underbrace{x . x \ldots x}_{m \text{ veces}} . \underbrace{x . x \ldots x}_{n \text{ veces}}$$

$$\Rightarrow x^m . x^n = \underbrace{x . x \ldots . x}_{(m+n) \text{ veces}} = x^{m+n}$$

Ejemplos:

1. $a^5 . a^6 . a^7 = a^{5+6+7} = a^{18}$

2. $x . x^2 . x^3 \ldots\ldots x^n = x^{1+2+3+ \ldots +}$

Pero: $1+2+3+ \ldots\ldots +n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow x . x^2 . x^3 \ldots\ldots x^n = x^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

3. ¿ $x^{\sqrt{2}+1} = \underbrace{x . x \ldots x}_{(\sqrt{2}+1) \text{ veces}}$?

¿Por qué? . . . .

TEOREMA 2

$$(x^m)^n = x^{m n} \ ; \ x \in \mathbb{R} \wedge m, n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m . x^m . x^m \ldots x^m}_{n \text{ veces}} = x^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ veces}}}$$

$$\Rightarrow (x^m)^n = x^{m.n}$$

Ejemplos:

1. $(x^3)^4 (x^3)^5 = x^{3.4} . x^{3.5} = x^{12} . x^{15} = x^{27}$

2. $(\ldots((x^2)^3)^4 \ldots)^{50} = x^{1.2.3\ldots50} = x^{50!}$

NOTA: 1.2.3 ... 50 = 50!
Se llama **factorial** de 50

3. $((\ldots((x^{-15})^{-14})^{13} \ldots)^{14})^{15} = x^{15(14)\ldots(15)}$
$= x^0 = 1$

$\forall x \neq 0$

NOTA: $(-15)(-14)\ldots(-1)(0)(1)\ldots(15) = 0$

TEOREMA 3

$$(a.b)^n = a^n . b^n \ ; \ a, b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$$(a.b)^n = \underbrace{(ab)(ab)(ab)\ \ldots.\ (ab)}_{\text{n veces}}$$

$$= \underbrace{a.a.a\ \ldots\ a}_{\text{n veces}}\ .\ \underbrace{b.b\ \ldots.\ b}_{\text{n veces}}$$

$$\Rightarrow (a.b)^n = a^n.b^n$$

Ejemplos:

1. $(x.y)^5 = x^5.y^5$
2. $2^3.3^3 = (2.3)^3 = 6^3 = 216$
3. $\left(\sqrt{x}\,y^7 z^8\right)^{16} = \left(\sqrt{x}\right)^{16}\left(y^7\right)^{16}\left(z^8\right)^{16}$
4. $\left(\left(\dfrac{a}{b}\right) c^n\right)^4 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^4 \left(c^n\right)^4$

TEOREMA 4

$$\left(x^a . y^b\right)^n = x^{a.n} . y^{b.n}$$

Ejemplos:

1. $\left(x^5 . y^4\right)^7 = \left(x^5\right)^7 \left(y^4\right)^7 = x^{35} y^{28}$
2. $\left(x^4 a^3 c^2\right)^2 = x^{4.2} . a^{3.2} . c^{2.2} = x^8 a^6 c^4$

TEOREMA 5

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ ;\ m, n \in \mathbb{N} \wedge m \geq n$$

$$a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$a^{x} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} . a^n}{a^n} \quad m\ n$$

Ejemplos:

1. $\dfrac{2^{20}}{2^{16}} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$
2. $\dfrac{a^{3+5x}}{a^{3-5x}} = a^{(3+5x)-(3-5x)} = a^{10x}$

TEOREMA 6

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ ;\ n \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Corolario 1

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad \forall\ a.b \neq 0$$

Ejemplos:

1. $\left(\dfrac{a^\alpha}{b^\beta}\right)^n = \dfrac{(a^\alpha)^n}{(b^\beta)^n} = \dfrac{a^{\alpha n}}{b^{\beta n}}$
2. $\left(\dfrac{2^{30}}{2^{-20}}\right)^2 = \dfrac{2^{60}}{2^{-40}} = 2^{100}$
3. $\left(\dfrac{(a^2)^x}{(b^3)^y}\right)^{-2} = \dfrac{(a^{2x})^{-2}}{(b^{3y})^{-2}} = \dfrac{a^{-4x}}{b^{-6y}} = \dfrac{b^{6y}}{a^{4x}}$

NOTA: Los teoremas expuestos y demostrados para exponentes naturales, pueden ampliarse a exponentes reales. Pero para su demostración es necesario ya otros elementos de matemática superior.

RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN

Dados un número real "**a**" y un número natural **n** mayor que 1, "**b**" se llama raíz n-ésima principal de **a** y se denota por $\mathbf{b}=\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ sí y sólo sí $\mathbf{b}^n=\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{n} \in \mathbf{N}-\{1\}$ bajo la condición de que si **n** es par, entonces $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$.

Así $\sqrt[4]{16} = 2$ ya que $2^4 = 16$ (2 es la raíz principal)

$\sqrt[3]{-8} = -2$ puesto que $(-2)^3 = -8$ (única en $\mathbb{R}$)

Identidad fundamental:

$$\boxed{y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x \;;\; n \in \mathbb{N} \;;\; n \geq 2}$$

TEOREMAS DE RADICACIÓN

TEOREMA 1

$$\sqrt[n]{a \, . \, b} = \sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b} \text{ en } \mathbb{R}$$

Si **n** es par entonces $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \, . \, 2} = \sqrt{16} \, . \sqrt{2} = 4(1{,}41) = 5{,}64$

(Aproximadamente)

2. $\sqrt[3]{a^5 . b^7} = \sqrt[3]{a^5} \, . \, \sqrt[3]{b^7}$

3. ¿ $\sqrt{(-3)(-2)} = \sqrt{-3}\sqrt{-2}$?

¿ Por qué ? . . .

TEOREMA 2

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \;;\; b \neq 0$$

Si **n** es par entonces $a \geq 0 \wedge b > 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}} = \dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{3}{2}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

3. ¿ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{-2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$?

¿Por qué? . . .

TEOREMA 3

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Si: $m.n$ es par $\Rightarrow a \geq 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{x}}} = \sqrt[3.4.2]{x} = \sqrt[24]{x}$

2. ¿ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{-5}}} = \sqrt[24]{-5}$?

¿Por qué? ....

RADICALES SUCESIVOS

$$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n.m]{b}\,.\,\sqrt[n.m.p]{c}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{2\sqrt[5]{7}}} = \sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[4.3]{2}\,.\,\sqrt[4.3.5]{7}$
$= \sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[12]{2}\,.\,\sqrt[60]{7}$

2. $\sqrt[7]{3\sqrt[4]{2\sqrt[5]{5}}} = \sqrt[7]{3}\,.\,\sqrt[7.4]{2}\,.\,\sqrt[7.4.5]{5}$
$= \sqrt[7]{3}\,.\,\sqrt[28]{2}\,.\,\sqrt[140]{5}$

De la fórmula anterior: Si las bases a, b, c son iguales, eso determina a una forma práctica de reducir.

Regla Práctica

I.

$$\sqrt[n]{x^{\alpha}\sqrt[m]{x^{\beta}\sqrt[p]{x^{\gamma}}}} = \sqrt[n.m.p]{x^{(\alpha m+\beta)p+\gamma}}$$

(× + × + × + ...)

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{x^1\sqrt[3]{x^5}} = \sqrt[4.3]{x^{1.3+5}} = \sqrt[12]{x^8}$

2. $\sqrt[3]{x^5\sqrt{x^3}} = \sqrt[3.2]{x^{5.2+3}} = \sqrt[6]{x^{13}}$

3. $\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^5\sqrt[4]{x^1}}} = \sqrt[5.3.4]{x^{(2.3+5)4+1}}$
$= \sqrt[60]{x^{45}}$

4. $\sqrt{2\sqrt[4]{8\sqrt[3]{16}}} = \sqrt{2^1\sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{2^4}}}$

$\sqrt[2.4.3]{2^{(1.4+3)3+4}} = \sqrt[24]{2^{25}}$

II.

$$\sqrt[n]{x^{\alpha}\div\sqrt[m]{x^{\beta}\div\sqrt[p]{x^{\gamma}}}} = \sqrt[nmp]{x^{(\alpha m-\beta)p+\gamma}}$$

(× − × + × − ......)

En los exponentes, los signos se alternan.

Ejemplos:

1. $\sqrt[4]{x^3\div\sqrt[2]{x^1}} = \sqrt[4.2]{x^{3.2-1}} = \sqrt[8]{x^5}$

2. $\sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt{x^1}}}}} =$

$$= \sqrt[2.2.2.2.2]{x^{\{[(1.2-1)2+1]2-1\}2+1}} = \sqrt[32]{x^{11}}$$

3.

$$\sqrt[3]{x^4 \div \sqrt{x^1 \div \sqrt[4]{x^1}}} = \sqrt[3.2.4]{x^{(4\cdot 2-1)4+1}}$$

$$= \sqrt[24]{x^{29}}$$

> **Corolario 2**
>
> $$\sqrt[a.b]{x^{ac}} = \sqrt[b]{x^c}$$
>
> Si **ab** es par $\Rightarrow x \in \mathbb{R}_0^+$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3.5]{x^{3.4}} = \sqrt[5]{x^4}$

2. $\sqrt[3]{2}.\sqrt{3} = \sqrt[3.2]{2^2}.\sqrt[2.3]{3^3} = \sqrt[6]{4}.\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4.27}$

$$= \sqrt[6]{108}$$

Analice cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿ $\sqrt[2.7]{(-5)^{2.3}} = \sqrt[7]{(-5)^3}$?

¿Por qué? ....

b) ¿ $(-16)^{3/4} = \left(\sqrt[4]{-16}\right)^3$?

¿Por qué? ....

c) ¿$(-27)^{4/3} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^4 = (-3)^4 = 81$?

¿Por qué? ....

d) ¿$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6}$?

¿Por qué? ....

Ejemplos aplicativos:

1. Hallar el exponente de x, luego de simplificar

$$\left\{\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\cdot x^2}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}\right\}^{24} \quad ; \ x > 0$$

Resolución:

Usando la regla práctica I

$$\left(\frac{\sqrt[2.2.3]{x^{(3.2+1).3+1}}\cdot x^2}{\sqrt[4.3]{x^{3.3+1}}}\right)^{24} = \left(\frac{\sqrt[12]{x^{22}}\cdot x^2}{\sqrt[12]{x^{10}}}\right)^{24}$$

$$= \left(\sqrt[12]{\frac{x^{22}}{x^{10}}}\cdot x^2\right)^{24} = \left(\sqrt[12]{x^{12}}\cdot x^2\right)^{24} = (x\cdot x^2)^{24}$$
$$= x^{72}$$

Respuesta: El exponente final es 72

2. Reducir:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}\cdot (x^{0,5})^4}{\sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x \div \sqrt{x}}}}}$$

Resolución:

Aplicando las reglas prácticas I y II se tendrá

$$\frac{\sqrt[3.4.2]{x^{(1.4+3)2+1}}\cdot x^{0,5.4}}{\sqrt[2.2.2.2]{x^{((1.2-1)2+1)2-1}}}$$

$$= \frac{\sqrt[24]{x^{15}}\cdot x^2}{\sqrt[16]{x^5}} = x^{\frac{5}{8}+2-\frac{5}{16}} = x^{\frac{37}{16}}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Reducir

$$\frac{\overbrace{5.5....5}^{10\text{ veces}}\ \overbrace{15.15.15....15}^{7\text{ veces}}}{81^2.5^{15}}$$

Resolución:

Por exponente natural

$$\frac{5^{10}.15^7}{81^2.5^{15}}=\frac{5^{10}.5^7.3^7}{(3^4)^2.5^{15}}=5^{10+7\ 15}.\ 3^{7\ 8}$$

$$=5^2 3^{\ 1}=\frac{25}{3}$$

Problema 2

Reducir

$$\frac{2^5.4^5.6^5.8^5.....(2n)^5}{2^5.3^5.4^5.....n^5}\ ;\quad n>10$$

Resolución:

Asociando adecuadamente

$$2^5.\frac{4^5}{2^5}.\frac{6^5}{3^5}.\frac{8^5}{4^5}......\frac{(2n)^5}{n^5}$$

$$=\underbrace{2^5.\ 2^5.\ 2^5.\ 2^5.....2^5}_{n\text{ veces}}=(2^5)^n=32^n$$

Problema 3

Si la expresión $\forall\, a\neq 0$

$$(((a^2)^n)^3)^{4^0}\left(\frac{a^3}{\underbrace{a.a.....a}_{n\text{ veces}}}\right).a^{99^{0^{88^5}}}$$

se reduce a la unidad. Calcular "n".

Resolución:

Se ve que $n\in\mathbb{N}$, luego

$$a^{2.n.3.4^0}.\frac{a^3}{a^n}.a^{99^{0^{88^5}}}=a^{6n}.\frac{a^3}{a^n}.a^1=a^{5n+4}$$

si se reduce a la unidad $(5n+4)=0$; pero no existe $n\in\mathbb{N}$; $5n+4=0$

$\therefore$ no existe tal **n**

Problema 4

Al reducir

$$\frac{(x^2)^3.x^{2^3}.x^{(-2)^3}.x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}.x^{(-2)^0}.x^{2^0}.x^{-2^0}}$$

Indicar el valor de verdad de las proposiciones

I. Se reduce a $x^{25}\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

II. Es equivalente a $x^{25}\leftrightarrow x\neq 0$

Resolución:

Vemos que $x\neq 0$ (por estar en el denominador)

$$\frac{x^{2.3}.x^{2^3}.x^{(-2)^3}.x^{(-2)^4}}{x^{-2^2}.x^{(-2)^0}.x^{2^0}.x^{-2^0}}=\frac{x^6.x^8.x^{-8}.x^{16}}{x^{-4}.x^1.x^1.x^{\ 1}}$$

$$\frac{x^6.x^8.x^{-8}.x^{16}}{x^{-4}.x^1.x^1.x^{-1}}=\frac{x^{6+8-8+16}}{x^{-4+1+1-1}}=\frac{x^{22}}{x^{-3}}=x^{25}$$

Luego I. (F)

II. (V)

Problema 5

Indicar el valor de verdad de las proposiciones

I. $\forall\, x\neq 0$

$$(.....((x^{-9})^{-8})^{-7}....)^9=1$$

II. $4^{-2^{-1}}-3^{-2^{0^{-1^0}}}=6^{\ 1}$

Resolución:

I. $x^{9(\ 8)(\ 7).(\ 1)(0)\ .(9)}$

$=x^0=1\ \forall\, x\neq 0$ .... (V)

II. NOTA: $0^{\ 1}$ no está definido .... (F)

Problema 6

Con respecto a la expresión

$$\left\{\left(2^{-2}.8^{\frac{1}{3}}\right)^{-n}+\left((-2)^{-2}(-8)^{\frac{1}{3}}\right)^{-n}\right\}^0\ ;\quad n\in\mathbb{N}$$

Enunciar el valor de verdad

I. La expresión se reduce a la unidad
II. Para **n** par la expresión es uno
III. Para **n** impar la expresión no está definida

Resolución:

Simplificando

$$\left\{\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{8}\right)^{-n}+\left(\frac{1}{2^2}\cdot\sqrt[3]{-8}\right)^{-n}\right\}^0$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{4}\right)^{-n}+\left(-\frac{2}{4}\right)^{-n}\right\}^0=\{2^n+(-2)^n\}^0$$

Si **n** es par $(2^n+2^n)^0=1$

Si **n** es impar $(2^n-2^n)^0=0^0$ no definido

∴ Concluyendo que

I. (F) II. (V) III. (V)

Problema 7

Simplificar:

$$\frac{3^{2n+1}+9^{n+1}}{9^{n+1}-3^{2n+1}}\ ;\quad n\in\mathbb{N}$$

Resolución:

Descomponiendo $\dfrac{3^{2n}.3+9^n.9}{9^n.9-3^{2n}.3}$

y factorizando 9^n se tiene $\dfrac{9^n(3+9)}{9^n(9-3)}=\dfrac{12}{6}=2$

Problema 8

Simplificar

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}.225}{5^{2n+3}.5^2.4+5^{2n+3}.5^3}}$$

Resolución:

Descomponiendo adecuadamente

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}.225}{5^{2n+3}.5^2.4+5^{2n+3}.5^3}}$$

$$\sqrt[2n+3]{\frac{(225)^{2n+3}.\cancel{225}}{5^{2n+3}.\cancel{(5^2.4+5^3)}}}=\sqrt[2n+3]{\left(\frac{225}{5}\right)^{2n+3}}$$

$$=45$$

Problema 9

Con respecto a la expresión

$$\left(\sqrt[x]{y}\right)^z$$

Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Existe en $\mathbb{R}$; si $x\in\mathbb{N}$
II. Existe en $\mathbb{R}$; si $x>0\ \wedge\ y>0$
III. Existe en $\mathbb{R}$; si $x\in\mathbb{N}\ \wedge\ y>0$
IV. Existe en $\mathbb{R}$; si $\{x,y,z\}\subset\mathbb{Q}$

Resolución:

Para que $\left(\sqrt[x]{y}\right)^z$ exista en $\mathbb{R}$ sólo es necesario

Si $y>0\Rightarrow x$ es cualquier natural

Si $y<0$ sólo que x sea impar $\wedge\ z\in\mathbb{Z}$,

Si $x\in\mathbb{N}\Rightarrow y>0$

Luego se concluye

I. (F) II. (F) III. (V) IV. (F)

Problema 10

Hallar el valor de a^2+b^2 en

$$\sqrt[a-b]{\frac{\sqrt[b]{a^a.b}}{\sqrt[a]{a^b.b}}}=3^{\frac{4}{3}}$$

Resolución:

Transformando a exponentes fraccionarios se tiene

$$\sqrt[a-b]{\frac{a^{\frac{a}{b}}.b^{\frac{1}{b}}}{a^{\frac{b}{a}}.b^{\frac{1}{a}}}}=\sqrt[a-b]{a^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}.b^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}}$$

Simplificando se obtiene

$$\sqrt[\cancel{a-b}]{a^{\frac{a^2\cancel{-b^2}}{ab}} . b^{\frac{\cancel{a-b}}{ab}}} = a^{\frac{a+b}{ab}} . b^{\frac{1}{ab}}$$

$$= \sqrt[ab]{a^{a+b} . b} = \sqrt[3]{3^4}$$

como **a** y **b** son naturales, sólo se verifica en

$$a = 3 \ \wedge \ b = 1$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = 10$$

Problema 11

Siendo $\{m,n\} \subset \mathbb{N}$

Indicar si es verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

I. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

II. $\sqrt[n]{x} = \sqrt[m.n]{x^m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III. $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^{\,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

IV. $\sqrt[n]{x^n y} = x\sqrt[n]{y} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Resolución:

Aparentemente todas las proposiciones son correctas pero no siempre.

I. Si **n** es par y x ó y son negativos no es cierto.
II. Si **m** es par y x negativo no verifica.
III. Si **n** es par y x negativo no cumple.
IV. Si **n** es par y x negativo no cumple.

de donde se obtiene que

I. (F) II. (F) III.(F) IV. (F)

Problema 12

Reducir

$$\left(\sqrt[2^{18}]{\left[\left(x^4\right)^{64^2}\right]^8 . x^{16^4}}\right)^{\frac{4}{3}} \ ; \ x > 0$$

Resolución:

En el radicando

$$\left(\left(x^4\right)^{64^2}\right)^8 . x^{16^4} = x^{2^2.(2^6)^2.2^3} . x^{(2^4)^4}$$

$$= x^{2.2^{16}+2^{16}} = x^{3.2^{16}}$$

Luego

$$\left(\sqrt[2^{18}]{x^{3.2^{16}}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[2^{18}]{x^{2^{18}}} = x$$

Problema 13

Efectuar

$$3^{-1}\sqrt[3]{3^{-1}} . \frac{3^{n+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} . \sqrt[n]{3^{n^2}}} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \ ; \ n \geq 2$$

Resolución:

$$\cancel{3^{-1}} . \sqrt[3]{3^{-1}} . \frac{\cancel{3^n} . 3^{1/3}}{\cancel{3^{-1}} . \cancel{3^n}} = 3^{-1/3} . 3^{1/3} = 3^0 = 1$$

NOTA $\sqrt[n]{3^{n^2}} = 3^n$

Problema 14

Operar

$$\left\{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} + \left[2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

Resolución:

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{25}\right)^{-1} = 5$$

$$\left[2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1} = \left(2 - \frac{5}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

$$\Rightarrow \{5+3\}^{1/6} = 8^{1/6} = (2^3)^{1/6} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

Problema 15

Simplificar

$$\frac{\sqrt{a^3b^3\sqrt[4]{a^2b^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^6b^6}}}}}$$

Resolución:

Recordando que $(a.b)^n = a^n.b^n$

se tendrá

$$\frac{\sqrt{(ab)^3 \,.\, \sqrt[4]{(ab)^2\sqrt[5]{ab}}}}{\sqrt[2.4.6.5]{(ab)^6}} \quad ,$$

haciendo $ab = x$

Tenemos:

$$\frac{\sqrt{x^3\sqrt[4]{x^2\sqrt[5]{x}}}}{\sqrt[40]{x}} = \frac{\sqrt[2.4.5]{x^{(3.4+2)5+1}}}{\sqrt[40]{x}}$$

$$\frac{\sqrt[40]{x^{71}}}{\sqrt[40]{x}} = \sqrt[40]{\frac{x^{71}}{x}} = \sqrt[40]{x^{70}} = \sqrt[4]{x^7}$$

al reponer x por ab se obtiene $\sqrt[4]{(ab)^7}$

Problema 16

Reducir

$$\underbrace{\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\sqrt[70]{x\,.....\sqrt[70]{x\sqrt[69]{x}}}}}}_{\text{71 radicales}}$$

Resolución:

Busquemos alguna ley de formación

$$\sqrt[70]{x^1\sqrt[69]{x}} = \sqrt[70.69]{x^{69+1}} = \sqrt[69]{x} \quad ,$$

si tomamos los dos últimos radicales resulta el último.

De donde puede observarse que esa operación se va repetir, dejando el mismo resultado, entonces, todo se reducirá a $\sqrt[69]{x}$

Problema 17

Simplificar

$$\frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}}{\left(\sqrt{\sqrt[9]{25^{\sqrt[3]{5}}}}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}}$$

Resolución:

Nota: $\left(\sqrt{\sqrt[9]{25}}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \left(\sqrt[18]{5^2}\right)^{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}}$

Luego se tendrá

$$\frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{20}}}{\left(\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}}\right)^{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}} = \frac{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}}{\sqrt[9]{5}^{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}} - 1$$

Problema 18

Calcular aproximadamente cada expresión

$$A = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\,......}}}$$

$$B = \sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\,....}}}$$

$$C = \sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\vdots}}}}}}$$

$$D = \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2\,.....}}}}$$

$$E = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\cdot^{\cdot}}}}$$

Resolución:

Caso de las infinitas veces de una operación.

Usaremos el criterio siguiente

"Infinito es una cantidad inmensamente grande que si quitas 1 ; 2 ; 3 ; .... n ; n ∈ N no se altera, sigue infinito".

Veamos

I. $A = \sqrt{5\underbrace{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}_{A}} \Rightarrow A = \sqrt{5 \cdot A}$

elevando al cuadrado $A^2 = 5A \Rightarrow A = 5$

II. $B = \sqrt{72 + \underbrace{\sqrt{72 + \sqrt{72 + \ldots}}}_{B}}$

$\Rightarrow B = \sqrt{72 + B}$

Al cuadrado $B^2 = 72 + B$

$\Rightarrow B^2 - B = 72$

$\Rightarrow B(B-1) = 9(9-1)$

Por comparación se obtiene $B = 9$

III. $C = \sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{\sqrt[5]{\dfrac{64}{\vdots}}}}}} \Rightarrow C = \sqrt[5]{\dfrac{64}{C}}$

Elevando a la quinta

$\Rightarrow C^5 = \dfrac{64}{C} \Rightarrow C^6 = 64 \Rightarrow C = \sqrt[6]{64}$

$\therefore C = 2$

IV. $D = \sqrt{8\underbrace{\sqrt{2\sqrt{8\sqrt{2\ldots}}}}_{D}}$

$\Rightarrow D = \sqrt{8\sqrt{2 \cdot D}}$

Al cuadrado $D^2 = 8\sqrt{2D}$

al cuadrado $D^4 = 8^2 \cdot 2D$

$\Rightarrow D^3 = 128 \Rightarrow D = \sqrt[3]{128}$

$\Rightarrow D = \sqrt[3]{64 \cdot 2}$

$\therefore D = 4\sqrt[3]{2}$

V. $E = \sqrt[5]{5}^{\overbrace{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}^{E}} \Rightarrow E = \sqrt[5]{5}^{E}$

$\Rightarrow \sqrt[E]{E} = \sqrt[5]{5}$

Por comparación $E = 5$

Problema 19

Calcular el mayor valor de n, si

$$\left(n\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \left[\left[\left(\left(2^{1+\frac{1}{1}}\right)^{1+\frac{1}{2}}\right)^{1+\frac{1}{3}}\right]^{1+\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{10}}$$

Resolución:

$$\left(n\sqrt{n}\right)^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

así mismo, $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}}$

de donde $n\sqrt{n} = 4 \vee n\sqrt{n} = 2$

Como piden el mayor valor de n se tomará

$n\sqrt{n} = 4 \Rightarrow$ al cuadrado:

$n^2 \cdot n = 4^2 \Rightarrow n^3 = 16 \Rightarrow n = \sqrt[3]{16}$

Problema 20

Simplificar

$$\sqrt[n^{n^n}]{n^{n^{n+n^n}}} \cdot \sqrt[n^{n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{n^{n+n^n}}}$$

Resolución:

> **NOTA:** $\sqrt[m]{a^\alpha} \cdot \sqrt[m]{b^\alpha} = \sqrt[m]{(ab)^\alpha}$

En el problema se tendrá

$$\sqrt[n^{n^n}]{n^{\boxed{n^{n+n^n}}}}\cdot\sqrt[n^{n^n}]{\left(\frac{1}{n}\right)^{\boxed{n^{n+n^n}}}}$$

$$=\sqrt[n^{n^n}]{\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)^{\boxed{n^{n+n^n}}}}=1$$

NOTA: $n\cdot\dfrac{1}{n}=1$

Problema 21

Simplificar

$$\frac{\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{(n^2+1)^2}\cdot(n^2+1)^1}\cdot\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{1-(n^2+1)^2}}}{(n^2+1)^{\frac{2}{n^2+1}}}$$

donde: $n\in\mathbb{N}$

Resolución:

NOTA: $\dfrac{\sqrt[m]{a^\alpha}\cdot\sqrt[m]{a^\beta}}{\sqrt[m]{a^\gamma}}=\sqrt[m]{a^{\alpha+\beta-\gamma}}$

En el problema se tiene

$$\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^{(n^2+1)^2+1+1-(n^2+1)^2-2}}=\sqrt[n^2+1]{(n^2+1)^0}=1$$

Problema 22

Reducir la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^7}}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}}}\ ;x>0$$

Resolución:

En el numerador se utilizará la regla práctica en radicales sucesivos

$$\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x^4\sqrt{x^7}}}=\sqrt[5.3.2]{x^{[(2.3)+4].2+7}}$$

$$=\sqrt[30]{x^{27}}=\sqrt[10]{x^9}$$

En el denominador (exponente negativo)

Recuerde: $\dfrac{a}{b}=ab^{-1}$

Luego tenemos

$$\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^6}}}{x}}}{x^2}}=\sqrt[3]{x^{-2}\cdot\sqrt[4]{x^{-1}\cdot\sqrt[5]{x^{-6}}}}$$

Usando la regla práctica

$$\sqrt[3.4.5]{x^{(-2.4-1).5-6}}=\sqrt[60]{x^{-51}}=\sqrt[20]{x^{-17}}$$

Luego se tiene

$$\frac{\sqrt[10]{x^9}}{\sqrt[20]{x^{-17}}}=\frac{\sqrt[20]{x^{18}}}{\sqrt[20]{x^{-17}}}=\sqrt[20]{x^{18-(-17)}}=\sqrt[20]{x^{35}}=\sqrt[4]{x^7}$$

Problema 23

Hallar el exponente de x en

$$S=\underbrace{\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\ .....\ \sqrt[4]{x^3}}}}}_{97\text{ radicales}}$$

Resolución:

Utilizaremos una ley que nos permita hallar una regla de formación (**método inductivo**).

Si fuera 1 radical

$$\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$$

Si fuera 2 radicales

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}=\sqrt[16]{x^{15}}=x^{\frac{15}{16}}$$

Si fuera 3 radicales

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3\sqrt[4]{x^3}}}=\sqrt[64]{x^{63}}=x^{\frac{63}{64}}$$

Veamos la formación de sus exponentes

$$\frac{3}{4}\ ;\ \frac{15}{16}\ ;\ \frac{63}{64}\ ....$$

$$\frac{4^1-1}{4^1}\ ;\ \frac{4^2-1}{4^2}\ ;\ \frac{4^3-1}{4^3}\ ....$$

Para 97 radicales su exponente será

$$\frac{4^{97}-1}{4^{97}}$$

Problema 24

Si se cumple que $\quad 2^{22}+1024=1024a$

Calcular $\quad 2^{2^{2^{2}}} - \left((2^2)^4\right)^{0.5} . \ a$

Resolución:

De la condición

$$2^{22}+2^{10}=2^{10}.\,a \Rightarrow 2^{12}+1=a$$

Luego

$$2^{2^{2^{2}}} - 2^{2\,.\,4\,.\,0{,}5}\left(2^{12}+1\right) = 2^{16}-2^{4}(2^{12}+1)$$
$$= 2^{16}-2^{16}-2^{4} = -16$$

Problema 25

Si se cumple que

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\,.....}}}\,,$$

además $A=\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$, según ello calcular un valor de "x".

Resolución:

Simplificando en A

$$A=\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

NOTA: $3\sqrt{3}=\sqrt{3}^{\,3}$

$$\Rightarrow A=\left(\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow A=\sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\,.....}}} = y$$

Del problema 18

$$A^{A^{A^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = y \Rightarrow A^{y}=y \Rightarrow A = y^{\frac{1}{y}} = \sqrt{3}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Por comparación: $y=\sqrt{3}$

asimismo

$$\sqrt[x]{x\underbrace{\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\,.....}}}_{y}} = y \Rightarrow y=\sqrt[x]{xy}$$

Despejando y de $xy=y^{x}$ se tiene

$$\Rightarrow y = \sqrt[x-1]{x} = \sqrt{3}$$

buscando un valor $\sqrt[x-1]{x}=\sqrt[3-1]{3}$

de donde $\quad x=3$

Problema 26

Calcular un valor de n de la igualdad.

$$n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 72+\sqrt{n}^{\,72+\sqrt{n}^{\,72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Resolución:

Igualando a una segunda incógnita:

$$n^{\overbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}^{y}} = 72+\sqrt{n}^{\,\overbrace{72+\sqrt{n}^{\,72+\sqrt{n}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}^{y}} = y$$

de donde $\quad n^{\overbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}^{y}} = y \quad \Rightarrow \quad n=\sqrt[y]{y} \quad ..... \ (\alpha)$

asimismo $\quad 72+\sqrt{n}^{\,y}=y \ .... \quad ... \ (\beta)$

(α) en (β): $\quad 72+\sqrt{\sqrt[y]{y}}^{\,y}=y$

entonces $\quad y-\sqrt{y}-72=0$

de donde $\quad y=81$

Luego en α $\quad n=\sqrt[81]{81}$

Problema 27

De la igualdad

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{yx^{-1}}}\right)^{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \ ; \ x\,,\,y\in\mathbb{N}$$

hallar el valor de $\dfrac{3x}{y}$

Resolución:
De la igualdad a exponentes fraccionarios

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}}.y^{-\frac{1}{x}}}{y^{\frac{1}{y}}.x^{-\frac{1}{y}}}\right)^{x^2}} = \sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{y^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}}\right)^{x^2}}$$

$$\sqrt[x+y]{\left(\frac{x^{\frac{x+y}{xy}}}{y^{\frac{x+y}{xy}}}\right)^{x^2}} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{xy}}\right)^{x^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Por dato

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Por comparación

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \qquad \therefore \quad \frac{3x}{y} = 1$$

Problema 28

Calcular el valor de

$$F = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ .....\ \sqrt{2\sqrt{2^{2-x}}}}}}}_{\text{n radicales}}$$

si además $x = 2^{n+1}$

Resolución:
Será equivalente a

$$F = \sqrt{\underbrace{2\sqrt{2\sqrt{2\ ...\ \sqrt{2}}}}_{\text{(n-1) rad.}}}\ .\ \sqrt[2.2.....2]{2^{2-x}}$$

Del problema 23:

$$F = \sqrt[2^{n\ 1}]{2^{2^{n\ 1}-1}}.\sqrt[2^n]{2^{2-x}} = 2^{\frac{2^{n\ 1}-1}{2^{n\ 1}}}.2^{\frac{2-2^{n+1}}{2^n}}$$

$$F = 2^{\frac{2^n-2}{2^n}+\frac{2-2^{n+1}}{2^n}} = 2^{\frac{2^n-2+2-2^n.2}{2^n}} = 2^{1-2}$$

$$\therefore \quad F = 2^{1} = \frac{1}{2}$$

Problema 29

El valor aproximado de

$$A = \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8\sqrt{16.....}}}} \quad \text{es:}$$

Resolución:

$$A = \sqrt{2}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[8]{8}.\sqrt[16]{16}\ ...$$

$$A = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{2}{4}}.2^{\frac{3}{8}}.2^{\frac{4}{16}}+.....$$

$$A = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+.....}$$

Sea **e** el exponente de **2**

$$e = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+.....(1)$$

$$2e = 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+.....(2)$$

(2)-(1):

$$e = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore \ A = 2^2 = 4$$

NOTA: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... = \dfrac{a}{1-r}$

Si: $-1 < r < 1$

Problema 30

Si el reducido de

$$\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7.....\sqrt{x^{2n-1}}}}}} \text{ es } x^{a-\left(\frac{bn+a}{2^n}\right)}$$

hallar el valor de $\dfrac{a+1}{b+1}-\dfrac{a-1}{b-1}$

Resolución:
Deduciendo

Para 1 radical $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

Para 2 radicales $\sqrt{x\sqrt{x^3}}=x^{\frac{5}{4}}$

Como el exponente de x es de la forma

$$\frac{a\,.\,2^n-bn-a}{2^n}$$

Por definición de identidad

Si $n=1 \Rightarrow 2a-b-a=1$

$\Rightarrow a-b=1$ .... (α)

Si $n=2 \Rightarrow 4a-2b-a=5$

$\Rightarrow 3a-2b=5$ .... (β)

De (α) y (β): $a=3$; $b=2$

Luego lo pedido

$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a-1}{b-1}$ es $\frac{3+1}{2+1}-\frac{3-1}{2-1}=\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}$

Problema 31

Hallar el exponente de "x" en

$$A=\sqrt[n]{x^{n-1}\sqrt[n-1]{x^{n-2}\sqrt[n-2]{x^{n-3}\,\ldots\ldots\,\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}}}$$

Resolución:

Buscamos una ley de formación deductivamente:

Para 1 radical $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

Para 2 radicales $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}=x^{\frac{5}{6}}$

Para 3 radicales $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}=x^{\frac{23}{24}}$

$\vdots$

Se formà del siguiente modo:

$$\frac{\lfloor\underline{2}-1}{\lfloor\underline{2}}\ ;\ \frac{\lfloor\underline{3}-1}{\lfloor\underline{3}}\ ;\ \frac{\lfloor\underline{4}-1}{\lfloor\underline{4}}$$

Observamos que tiene (n-1) radicales, luego para (n-1) radicales se tendrá

$$A=x^{\frac{\lfloor\underline{n}-1}{\lfloor\underline{n}}}$$

$\therefore$ El exponente de x es $\frac{\lfloor\underline{n}-1}{\lfloor\underline{n}}$

Problema 32

Simplificar

$$\left\{\left[\frac{\left(a^{\frac{a+1}{a}}+a^{\frac{a-1}{a}}\right)^a}{a^{a-1}\,.\left(a^{\frac{2}{a}}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}^a,\ a\in\mathbb{R}^+$$

Resolución:

Veamos

$$a^{\frac{a+1}{a}}=a^{1+\frac{1}{a}}=a\,.\,\sqrt[a]{a}$$

$$a^{\frac{a-1}{a}}=a^{1-\frac{1}{a}}=\frac{a}{\sqrt[a]{a}}$$

$$\Rightarrow\left(a^{\frac{a+1}{a}}+a^{\frac{a-1}{a}}\right)^a=\left(a\sqrt[a]{a}+\frac{a}{\sqrt[a]{a}}\right)^a$$

$$a^a\left(\frac{\sqrt[a]{a}^{\,2}+1}{\sqrt[a]{a}}\right)^a=a^{a-1}\,.\left(\sqrt[a]{a}^{\,2}+1\right)^a$$

Reemplazando, se tiene

$$\left\{\left[\frac{a^{a-1}\,.\left(\sqrt[a]{a}^{\,2}+1\right)^a}{a^{a-1}\,.\left(\sqrt[a]{a}^{\,2}+1\right)^{\frac{1}{a}}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}^a$$

$$=\left\{\left[\left(\sqrt[a]{a}^{\,2}+1\right)^{\frac{a^2-1}{a}}\right]^{\frac{a}{a^2-1}}-1\right\}^a$$

$$=\left(\sqrt[a]{a}^{\,2}+1-1\right)^a=a^2$$

Problemas Propuestos

1. Si $a^{2a^6} = 3$; $a > 0$

calcular: $\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1
D) 3 E) $\sqrt[3]{3}$

2. Si **n** es un número impar

$$A = \underbrace{\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4 \ldots\ldots \sqrt[3]{4}}}}}_{\text{de "n" radicales}}$$

$$B = \underbrace{\sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \ldots . \div \sqrt[3]{16}}}}}_{\text{de "n" radicales}} ,$$

entonces **A . B** es:

A) 4 B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

3. Luego de efectuar

$$\left[256^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}(1\ \sqrt{8})}}\right]^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{\frac{1}{2}}}}$$ se obtiene:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{8}$
D) 2 E) 4

4. Simplificar

$$\left(\frac{x^{x^{x}} + x^{-x^{x}}}{x^{-x^{x}} + x^{x^{x}}}\right)^{\frac{x^{x}}{1-x^{2x}}}, \quad \text{si: } x > 0$$

A) x^2 B) $\sqrt{x}$ C) x
D) x^3 E) 1

5. Luego de resolver

$$x^{x^{\sqrt[4]{x}+0.25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}^{\,1-2\sqrt{2}}}$$

Indicar el valor de $\sqrt[4x+3]{x^8}$

A) 16^{1} B) 8 C) 8^{1}
D) 4^{1} E) 2^{1}

6. Señalar la suma de los exponentes de x e y luego de reducir

$$\left(\sqrt[\frac{x-y}{2}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{(xy)^x}}}\right)^{-x} \cdot \left\{\sqrt[\frac{y-1}{4}]{\frac{xy}{\sqrt[y]{\sqrt{xy}}}}\right\}^{y} \cdot \sqrt[y]{\sqrt{xy}}^{\,2x}$$

Sabiendo que $x - y = 2k \wedge y - 1 = 4r$
donde $k , r \subset \mathbb{N}$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

7. Señalar el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x^{\frac{1}{3}} \ldots\ldots}}} \quad \text{"k" radicales}$$

A) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$ B) $\frac{1}{9}\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$ C) $\frac{1}{3}\left(\frac{3^k-1}{3^k}\right)$
D) $\frac{3^k+1}{3^k-1}$ E) $\frac{1}{2}\left(\frac{3^k\ 1}{3^{k+1}}\right)$

8. Indicar el exponente final de x en

$$\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^4\sqrt[9]{x^{24}\sqrt[17]{x^{240}\ldots .}}}} \quad \text{"n" radicales}$$

A) $\frac{2^n+1}{2^n \cdot 1}$ B) $\frac{2^n}{2^n-1}$ C) $\frac{2^n}{2^n+1}$
D) $\frac{2^n-1}{2^n+1}$ E) $\frac{2^n+1}{2^n}$

9. De la igualdad $x^{(x-1)^2} = 2x+1$

calcular $x - \frac{1}{x}$

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 10

10. Calcular aproximadamente

$$A = \sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2\sqrt{4 \ldots\ldots}}}}$$

A) 2 B) $2\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) 16 E) $\sqrt[4]{2^5}$

11. Hallar una relación entre x e y en

$$\sqrt[y]{\frac{x^{xy+x}\cdot y^{y^2+y}}{y^y\cdot x^x}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

A) $y=x$ B) $y=3x$ C) $y=2x$
D) $2x=3y$ E) $y=4x$

12. Simplificar

$$\frac{\left[\sqrt[5]{5^{\sqrt{\frac{5}{4}}}}\cdot\sqrt{5^{\left(\frac{5}{3\sqrt{45}}\right)^{1}}}\right]^{\sqrt{5}}}{125}$$

A) 1 B) 5 C) 25
D) 125 E) $\sqrt[5]{5}$

Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones

I. $(-4)^{\frac{2}{4}}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$

II. $\sqrt{a}^{\,n}=\sqrt{a^n}\Leftrightarrow a>0 \quad (a=0\wedge n>0)$

III. $\left(\left(\frac{x-1}{4}\right)^{-1}\right)^{0}=1\quad\forall x\in\mathbb{R}$

A) FVF B) FVV C) FFF
D) VFF E) VVF

Con respecto a la expresión

$$\frac{\left(\sqrt[x]{1\cdot x\cdot x^2\cdot x^3\dots x^x}\right)^2}{\underbrace{x^x+x^x+\dots\dots+x^x}_{x\text{ sumandos}}}$$

Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones

I. Se reduce a 1, si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$
II. Se reduce a x, si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$
III. Se reduce a x^{x+1}, si $x\in\mathbb{N}-\{1\}$

A) VFF B) FVV C) FFV
D) FVF E) FFF

Sabiendo que x e y verifican la igualdad $xy+x+y=1$, halle el valor de

$$\left(\frac{\sqrt[y+1]{4^{x+1}}}{\sqrt[x+1]{4^{y-1}}}\right)^{\frac{(x-y)^{1}}{3-xy}}$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 4 E) 8

16. Luego de resolver la ecuación exponencial:

$$x^{x^{0,5}}=\sqrt{0,5}$$

el valor de x toma la forma 4^n donde "n" es igual a

A) -4 B) -7 C) -10
D) -12 E) -16

17. Sabiendo que $a^b=\left(\frac{1}{b}\right)^a=2$

hallar el valor de

$$\left(\frac{a^{b^{1-a}}+b^{a^{1-b}}}{a^{b^{1+a}}+b^{a^{1+b}}}\right)^{1-a^b b^a}$$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4
D) $\frac{1}{4}$ E) 8

18. Si $x^{\sqrt{x}}=4$, calcular el valor de:

$$\left[x^{\left(\frac{1}{2^{10}}\right)\cdot x^{x^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)}}}\right]^{\sqrt{x}}$$

A) 3 B) 4 C) 2
D) $\sqrt[4]{2}$ E) $4^{\frac{1}{4}}$

19. Calcular el exponente final de x en

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^4\dots}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

20. Dada la siguiente sucesión

$x_1=\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$; $x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; ....

Calcular $\dfrac{x_4^2\cdot x_{11}^2}{x_3\cdot x_{10}}$

A) 2 B) 4 C) 5
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Se tiene la siguiente igualdad

$$\sqrt{x^{\sqrt{x}}}\ .\ \sqrt{x}=\sqrt{a^{\sqrt{a}+1}}$$

anunciar el valor de no verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las expresiones quedan bien definidas, si: $x \in \mathbb{R}$

II. La igualdad se verifica si y sólo si $a \in \mathbb{R}^+$; $x = a$

III. Si x existe entonces a existe

A) FVV B) VFF C) VVF
D) FFV E) FFF

22. Reducir $\dfrac{(x^5)^{x^{-x}}+x^{x^{-x^x}}}{x\left(x^{x+4}+1\right)}$, si: $x^x = 5$

A) 1 B) x C) $x+1$
D) x^2 E) x^5

23. Si $A=\left(2^{2^{-3^5}}\right)^{2^{3^5}}-\left(3^{3^{\ n^3}}\right)^{3^{n^3}}$

$B=\left(\ldots\ldots\left((2^2)^4\right)^6\ldots\ldots\right)^{14}$

Halle el valor de $\dfrac{B^{\frac{1}{n}}}{-2^{2^7}(A)}$

Donde $1.2.3.4.5.6.7 = n$

A) -1 B) 1 C) 2
D) -2 E) $\frac{1}{2}$

24. Determinar el valor de

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{3}{4}\sqrt[5]{\frac{5}{6}}}}\ .\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{4}{5}}}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{5}{4}\sqrt[5]{\frac{2}{3}}}}}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

25. Calcular el valor de

$$a^{\left(\frac{a^{a+1}}{a^{a^{-1}}}\right)}\ ;\ \text{si}\ \ a^{-a}=\frac{1}{3}$$

A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

26. Analizar las proposiciones siguientes:

I. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{16}=4 \wedge \sqrt[3]{8}=-2$

II. $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{3^2}=3 \vee \sqrt{(-7)^2}=-7$

III. En $\mathbb{R}$: $\sqrt{(-1)(-2)}=\sqrt{-1}.\sqrt{-2}$

y determine su valor de verdad

A) FVF B) FFF C) VVV
D) VVF E) FFV

27. Determinar el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\forall\ x \in \mathbb{R}\ ; x^0=1 \Rightarrow (-2)^0=1$

II. Si: $x^m.x^n = x^{m+n} \Rightarrow 3^3.3^3 = 9^9$

III. $\forall x \in \mathbb{R}\ ; (-x)^2=x^2 \vee (-3)^2=-9$

A) VFV B) VVF C) VVV
D) VFF E) FFF

28. Reducir

$$A=\sqrt[n]{\frac{(xy)^n+(yz)^n+(zx)^n}{(x^{-n}+y^{-n}+z^{-n})}}\cdot\frac{x^{-1}.z^{-1}}{y}$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}-\{1\}$; $xyz \neq 0$

A) 1 B) 0 C) x
D) $x^ny^nz^n$ E) xyz

29. Hallar el valor de

$$M=\frac{2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}}{2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}}$$

A) 2 B) 1 C) 16
D) $\frac{1}{5}$ E) 32

30. Luego de reducir

$$\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^2}}}}}$$

dar el exponente de a

A) $\frac{72}{13}$ B) $\frac{19}{72}$ C) $\frac{13}{36}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{13}{72}$

31. Si $x^x=2$; calcular el valor de $x^{x^{1+2x^{1+x}}}$

A) 2^{16} B) 2^{64} C) 2^{32}
D) 2^4 E) 2^{18}

32. Simplificar

$$\frac{4^{2^{1}}-16^{2^{1}}-25^{-2^{1}}}{36^{2^{1}}+25^{-2^{1}}+81^{-2^{1}}}+\left[\frac{2^{2^{(5)^0}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2^{\sqrt{2}^2}}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^0}}\right]^{3^{0^7}}$$

A) $\frac{9}{86}$ B) $\frac{86}{9}$ C) $\frac{43}{11}$
D) $\frac{20}{41}$ E) $\frac{31}{86}$

33. Reducir

$$S=\left(x^{\frac{n}{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{\frac{y^{n+1}}{\sqrt[n]{xy^{n-1}}}}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

A) x B) x^n C) xy
D) 1 E) $\frac{x}{y}$

Simplificar $\forall\ x\in\mathbb{N}-\{1\}$

$$E=\frac{\sqrt[x]{2^x+3^{-x}}+\sqrt[x]{2^{-x}+3^x}}{\sqrt[x]{6^x+1}}$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) 2
D) 3 E) 5

Efectuar

$$\frac{\left(a^{3^2}b^{3^3}\right)^{3^2}+\left(a^{-1}b^{-1/2}\right)^2-\left(a^{\frac{3}{2}}.b^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a^{-1}.b}$$

A) 1 B) $\frac{a^2}{b}$ C) $\frac{a}{b}$
D) $\frac{1}{ab^2}$ E) $\frac{b}{a}$

36. Si $x=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\ldots}}}$; además: $y=2^{x/3}$

entonces: $M=\sqrt[x-1]{y+2}$ es:

A) $\sqrt[3]{3}$ B) 4 C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 16

37. Reducir $P=\dfrac{3^{\frac{n+2}{n}}.(48)^{\frac{2}{n}}.9}{12^{4/n}}$

A) 3 B) 9 C) 27
D) 1 E) 12

38. Si $A=\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots\ldots}}}$,

además $T=\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\sqrt[4]{A+11+\ldots\ldots}}}$

Calcular $\sqrt[4]{T^4-T}$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

39. Calcular el exponente final de x en

$S(x)=\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\ \ldots\ldots}}}$ "n" radicales

A) $3^n-1/2^n$ B) $3^n-1/3^n$ C) $3^n-1/2$
D) $3^n/2^n$ E) $\frac{3^n-1}{2.3^n}$

40. Si el exponente final de x es 15 en

$$E=\left\{\frac{\sqrt[a]{x^{a+1}\sqrt[a]{x^{a^2+2}\sqrt[a]{x^{a^3+3}}}}}{\sqrt[a]{x\sqrt[a]{x^2\sqrt[a]{x^3}}}}\right\}^a$$

El valor de "a" es

A) 8 B) 5 C) 3
D) 3a E) 1

1 A	11 B	21 B	31 A
2 A	12 C	22 A	32 E
3 E	13 A	23 B	33 C
4 C	14 A	24 A	34 A
5 A	15 B	25 B	35 D
6 D	16 A	26 A	36 D
7 E	17 E	27 A	37 C
8 D	18 E	28 A	38 B
9 A	19 A	29 E	39 E
10 B	20 B	30 E	40 B

Claves

CAPÍTULO

III

Polinomios

Brook Taylor (1685 - 1731)

Las cuestiones relativas a las series infinitas, lo que es justificado por el hecho de que el cálculo con los infinitamente pequeños lleva la cálculo de las series. Demostró que una función de una sola variable puede ponerse en forma de serie (desarrollando en serie de una función) conjuntamente con Abraham de Moivre (1567-1759), francés exiliado en Inglaterra. Colin Maclaurin (1698-1745), Jean y Jacques Bernoulli (1667-1748 y 1654-1705), desarrollaron el cálculo exponencial.
La fórmula de Taylor: Si $f(x)$ admite unas derivadas continuas de orden $1,2,3,\ldots n$ en $[a, b]$ y usa derivada de orden $n+1$ en $\langle a, b\rangle$ se puede escribir:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+Rn(x)$$

(R_n es el resto de la fórmula de Taylor).

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3n!}f'''(x)+\ldots+R(x)$$

ÁLGEBRA

L
E
C
T
U
R
A

La noción clásica del polinomio

*Un ejemplo sencillo: Situémonos en el conjunto **R**, que es el del álgebra elemental, y denominemos "x" un número real cualquiera (lo cual, como recordamos, se escribe $x \in R$). He aquí un ejemplo de cálculo suceptible de ser efectuado sobre los números como x.*

Supongamos que x designa una longitud indeterminada (medida en metros); entonces x^2 designará la superficie de un cuadrado de lado x y x^3 el volumen de un cubo de arista x.

Imaginemos que una persona compra:

Una cuerda cuya longitud equivale tres veces a la longitud de x, es decir 3x metros y cuyo precio es de 2 soles el metro; esta cuerda cuesta pues:

$$3x \cdot 2 = 6x \text{ soles}$$

Un tablero de contrachapado de superficie $2x^2$ (en metros cuadrados), al precio de 12 soles el metro cuadrado; por lo tanto, este tablero cuesta $2x^2 \cdot 12 = 24x^2$ soles.

Un tonel de vino de capacidad igual a x^3 (en metros cúbicos), al precio de 2 soles el litro (de 2000 soles el metro cúbico, puesto que en un metro cúbico hay 1000 litros); cueste $2000\,x^3$ soles.

Después de estas compras, le quedan 50 soles se pide expresar la suma que esta persona tenía inicialmente. Es perfectamente evidente que esta suma depende de x y que no se puede conocer, puesto que x es indeterminado; sin embargo puede expresarse en soles bajo la forma

$$50 + 6x + 24x^2 + 2000x^3 \qquad (1)$$

Una expresión como (1) se denomina polinomio de una indeterminada (la indeterminada es x); se representa con frecuencia por P(x), que se lee "P de x" (P es la inicial de la palabra "polinomio").

Las compras de una segunda persona llevarían a establecer, por ejemplo, el polinomio:

$$P_1(x) = 30 + 2x - 15x^2 + 50x^3$$

El signo "–" delante de $15\,x^2$ significa una deuda equivalente a la suma de $15\,x^2$ soles. Para otra persona podría tenerse: $P_2(x) = 15 - 2x + 2x^2$, etcétera.

Lo que distingue de los polinomios P, P_1, P_2, ..., no es la presencia de la indeterminada x a la potencia 1, a la potencia 2, etc., sino el conjunto de coeficientes:

(50, 6, 24, 2 000)	*para el primer polinomio;*
(30 , 2 , – 15, 50)	*para el segundo polinomio;*
(15, -2, 3)	*para el tercer polinomio.*

Para terminar, es posible realizar, por supuesto, operaciones con los polinomios como $P+P_1$ o $P \cdot P_1$.

Estas observaciones no llevarán a una definición algo más general de los polinomios. En lo que sigue, x definirá siempre la magnitud indeterminada sobre la que se calcula, y los coefici entes se indicarán mediante letras minúsculas como a, b, c, ... o -para no agotar demasiado aprisa el alfabeto - mediante minúsculas afectadas por un índice, es decir, por un número entero (0, 1, 2, ...) Escrito en caracteres pequeños en la parte inferior y a la derecha de una letra:

a_1 se lee "a uno" o "a índice 1".

La notación por medio de índices, que ya nos es familiar, atemoriza a veces a los no matemáticos. Sin embargo, no tiene nada de misterioso: simplemente es un medio cómodo de ordenar las letras del alfabeto.

Fuente: Enciclopedia Temática - Argos Vergara.

Polinomios

OBJETIVOS

- Definir y estudiar los polinomios bajo un carácter funcional, aunque con ciertas limitaciones por ser capítulo inicial.
- Entender claramente la definición de grado de un polinomio, para ver con facilidad las operaciones del mismo.
- Estudiar el valor numérico para así garantizar la definición de una cierta expresión matemática.

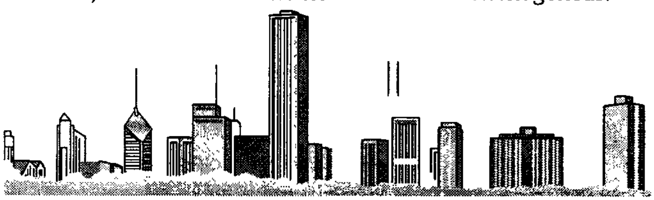
INTRODUCCIÓN

Citemos un ejemplo sencillo que nos permitirá comprender la utilidad de los polinomios en nuestra vida cotidiana y cómo podrán ser utilizados para proyectos más grandes:

Para la construcción de una casa pequeña de apenas una habitación de "y" metros de largo, "z" metros de ancho y con una altura de "x" metros, demandará los siguientes gastos: "**a**" soles en la compra del terreno, "**b**" soles en estudio de la calidad del suelo, "**c**" soles en la construcción y "**d**" soles en el acabado.

Las letras x, y, z, a, b, c, d, son llamados variables con la cual se tendrá un presupuesto total de la obra que lo llamaremos "**H**" (habitación), que dependerá de dichas variables y lo denotaremos de la siguiente forma: **H** (x, y, z, a, b, c, d).

Estos mismos datos le podrán servir a un ingeniero civil para elaborar un proyecto de construcción de un conjunto habitacional, de dimensiones no necesariamente homogéneas.



Es así como se elaboran los grandes proyectos, que finalmente obedecen a ciertos modelos matemáticos llamados "polinomios".

Forma de un polinomio: $P_{(x,y,z)} = a_0xy^4z - a_1xy^nz^{n+3}$

Donde:
- x, y, z son las variables.
- a_0, a_1 son coeficientes (constantes).

CONCEPTOS PREVIOS

EXPRESIÓN MATEMÁTICA

Es una representación matemática de números y letras ligados por los diferentes operadores matemáticos.

Así: $45\sqrt{\pi}$ → expresión numérica $2\sqrt{x-y}+3x$ → expresiones literales

Ejemplos:

- $3x^4 + 32\text{sen}x + e^{y+1}$
- $45\text{sen}(\pi x + 1) + \text{Log}(\sqrt{x} - 3)$
- $-16(x+3y)^4 + \binom{x}{a}xy^3$
- $(\sqrt{5} - \sqrt{2} + 1)xyz^{x+y+z}$
- $(32 - 12x)^2 - 4ac$

NOTACIÓN MATEMÁTICA

Es una representación simbólica de una expresión matemática que nos permite diferenciar las ***variables*** y las ***constantes***.

Variables

Son aquellas expresiones que para cada problema cambian de valor. Se les representa mediante las últimas letras: ***x***, ***y***, ***z***, ...

Constantes

Son aquellas expresiones que tienen un valor fijo para todo problema.

Ejemplo:

1. $$\underbrace{S_{(x,y,z)}}_{\text{Variables}} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}}_{\text{Constantes}} x^5y^{12} - \underbrace{2}_{\text{Constantes}}\sqrt[7]{2x-y} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{Constantes}}$$

Ejercicio para el lector

Indicar las variables y constantes en:

I. $R(x,y) = 98x^{\sqrt{2}}y + \pi\text{sen}(x-y)$

II. $M(a,b,c) = 3333a^{23} + 222b^{15} + 111c^{\sqrt{3}} + \text{Log}_{\sqrt{2}}(abc)$

> **NOTA:**
> Dentro de las constantes, algunas son:
> I. Constantes absolutas: π ; 4,3
> II. Constantes relativas: g (aceleración de la gravedad; depende del radio terrestre)

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es una expresión matemática en la cual para la variable o variables sólo se definen las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a exponente natural, extracción de una raíz aritmética) en un número limitado de combinaciones de estos.

Ejemplos:

- $R(x) = 6x-5$
- $S(x,y) = 29x^3 - \sqrt[7]{xy}$
- $M(x,y) = \dfrac{x+2y}{\sqrt{2x-y+5}} + x^{-3}$

TÉRMINO ALGEBRAICO

Es una expresión algebraica previamente reducida donde no se define las operaciones de adición ni sustracción entre las variables.

Ejemplos:

1. $S(x,y) = \dfrac{4}{a+b} x^5 \sqrt{y}$

2. $f(x,y,z) = -\dfrac{25}{\sqrt{2}+1} \sqrt{xy}\, xy^3$

3. $R(x) = 2x + 1$ no es término algebraico

Partes de un término algebraico

Tiene 3 partes, veamos:

$$Q(x,y,z) = \underbrace{\boxed{-\frac{20}{\sqrt{\pi}}}}_{\substack{\text{parte constante}\\ \text{(coeficiente)}}} \underbrace{x^{33}\, y^{41}\, z^{4/3}}_{\text{parte variable}}$$

exponentes: 33, 41, $4/3$

Son tres las partes:

1. Coeficiente (incluyendo al signo)
2. Partes variables
3. Los exponentes de las variables

Ejercicio para el lector

Señale las partes en los siguientes términos:

$k(x,y) = -16\sqrt[5]{xy}\, x^3 y^{-3}$

$S(x,y,z) = \dfrac{\pi c}{a+b} \sqrt{18xy^{-1}}$

Clasificación de las expresiones algebraicas

Se clasifican tomando en cuenta los exponentes de las variables (clasificación por su naturaleza) Así:

1. Expresión algebraica racional (E.A.R.)

Siendo los exponentes de las variables números enteros, pudiendo contener a su vez términos independientes.

Ejemplos:

- $S(x,y) = 2x^5 + 3(x-y)^3$
- $R(x) = \sqrt{5}x^4 - 35\sqrt[3]{xy} + \underbrace{42y}_{\text{término independiente}}$
- $A(x,y,z) = a_0x^{17} + a_1xy + a_3xyz^{196}$

Estas expresiones a su vez pueden ser:

a) E. A. R. Entera

Es una expresión racional, donde para la variable o variables no está permitida la operación de división.

Ejemplos:

- $Q(x,y,z) = ax^5 - 2x^4 + 3xy + z^3$
- $R(x,y) = \pi x + (\sqrt{2}-1)y + 7$
- $M(a,b,c) = (\sqrt{x}-1)a^5 - y^{\sqrt{2}}ab + \dfrac{c}{\pi}$

b) E. A. R. Fraccionaria

Es una expresión algebraica racional donde se define una división que tenga en el divisor por lo menos a una variable.

Ejemplos:

- $F(x,y) = \dfrac{-16}{(x-y)^5} + xy \;\; ; \;\; x \neq y$
- $G(x,y,z) = -32x + \dfrac{9}{xyz}$
- $H(a,b,c) = \dfrac{45x}{a+b} + \dfrac{c}{a-b}$

2. Expresión algebraica irracional

Son aquellas expresiones algebraicas, en donde se define por lo menos una radicación que involucre a las variables.

Ejemplos:

- $M(x,y) = \sqrt[4]{x-y} + 22$
- $S(x,y,z) = \dfrac{45}{xy}\sqrt{z} - xy\sqrt[3]{z}$

En resumen:

Expresión algebraica	Sub-división	Exponentes de las variables	Ejemplo
E. A. racional	entera	entero (+) o término independiente	$31x^5-17xz$
	fraccionaria	entero (-)	$39xy^3+z$
E. A. irracional		fraccionario	$16\sqrt{x-y}+4x^{-3/2}$

NOTA:

Existen otras expresiones que no son algebraicas a las cuales se les llama **trascendentes**, las más importantes son:

a. ***Expresiones exponenciales***
Son aquéllas de exponentes no racionales
Ejemplos:
- $x^{\sqrt{5}}$; x^x ; 6^x
- $10x+2^x-15$

b. ***Expresiones trigonométricas***
Son aquéllas que involucran a operadores trigonométricos.
Ejemplos:
- $\text{Sen}(x)$; $\text{Cos}(t^2-\pi)$; $\text{Tg}(x+y)$
- $\text{Sen}^2(x-y)+\text{Cos}\,\dfrac{x}{2}$
- $\text{Ctg}(2x+y)+\text{Tg}2x$

c. ***Expresiones logarítmicas***
Definidas por logaritmos.
Ejemplos:
- $\text{Log}_{\sqrt{\pi}}(x^2-1)$; $\text{Log}\left(\dfrac{\sqrt{x-y}}{2}\right)$; $\text{Ln}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$
- $427\,\text{Log}_x\,abc-\text{Log}_{abc}\,x$

d. ***Expresiones de infinitos términos***
Ejemplos:
- $P(x)=1+x^2+x^4+\ldots..$
- $F(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots..$
- $H(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+\ldots..$

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (C.V.A.)

Es el conjunto donde la expresión matemática se halla definida así:

a. $f(x)=\dfrac{17}{x-5}$ Se define para todo valor de x excepto en 5

b. $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ en $\mathbb{R}$; $9-x^2\geq 0 \leftrightarrow x^2-9\leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)\leq 0 \leftrightarrow x\in[-3,3]$

$\Rightarrow$ $g(x)$ está definido $\leftrightarrow x\in[-3,3]$

c. $h(x)=x^5+2x-16$ se define para todo valor que se asigne a x que puede ser real o complejo

Con estos elementos estamos ya en posibilidad de definir lo que es un polinomio.

POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Se define así, a toda expresión algebraica racional entera, que a su vez está definida sobre un campo numérico y en cualquier conjunto numérico para las variables.

Ejemplos:

$P(x) = 3x+15$; $Q(x,y) = \sqrt{5}x+y^5$

¿Son polinomios los siguientes:

I. $P(x)=17x^9-2x+1$

II. $Q(x,y)=5x-xy^2+2$

III. $R(x)=\frac{521}{2}x^{-1}+5x-1$?

Respuestas:

I. Sí, definido en todo C.V.A ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

II. Sí, definido en todo C.V.A. ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

III. No, puesto que no está definido en $x=0$

POLINOMIO EN UNA VARIABLE

Es aquella expresión algebraica de la siguiente forma general:

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n \quad ; \quad a_0 \neq 0}$$

Donde:

$a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_n \rightarrow$ coeficientes

$x \rightarrow$ variable

$n \rightarrow$ grado del polinomio

$a_0 \rightarrow$ coeficiente principal

$a_n \rightarrow$ término independiente

Ejemplos:

$P(x) = 3x + 17x^5 - x^4$

$Q(x) = 5 + 2x - 12x^2 + x^3$

$M(x) = -10x^4 - 2x^3 + x - 14$

$R(x) = 8 + 3x^3 - 2x^4 + 16x^5$

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN MATEMÁTICA

Es el resultado que se obtiene al reemplazar las variables por alguna constante.

Ejemplo 1

Sea $P(x)=4x+7$

Hallar el valor numérico de **P** en $x=3$

Resolución:

Reemplazamos x por **3**:

$$P(3) = 4(3) + 7 = 19 \Rightarrow P(3) = 19$$

Ejemplo 2

Sea $F(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-2}} + 2x$

Hallar el valor numérico de **F** en $x=5$

Resolución:

Reemplazamos x por **5**:

$$F(5) = \sqrt[3]{\frac{5+5}{5-2}} + 2(5) = \sqrt[3]{\frac{10}{3}} + 10$$

El valor numérico no siempre está definido, dependerá del campo de estudio o de algunas definiciones matemáticas.

Ejemplo 3

Sea $H(x) = \frac{25}{x-7} + 2x-1$

Hallar el valor numérico de **H** en $x = 7$

Resolución:

Reemplazando x por **7**

$H(7) = \frac{25}{7-7} + 2(7) - 1$ pero $\frac{25}{0}$ no está definido

$\therefore$ H(7) no existe o no está definido.

NOTA: Recordemos que el operador división está definido sólo si el denominador es diferente de cero

Ejemplo 4

Sea $G(x) = \sqrt{\dfrac{5+x}{7-x}} + 2x$ en $\mathbb{R}$

Hallar el valor numérico de **G** en $x = 11$

Resolución:

Reemplazando x por **11**

$$g(x) = \sqrt{\frac{5+11}{7-11}} + 2(11) = \sqrt{-4} + 22$$

Pero $\sqrt{-4}$ en $\mathbb{R}$ no está definido

Por lo tanto G(11) no existe o no está definido

Sin embargo G(11) está definido en el campo de los complejos que más adelante estudiaremos.

Ejemplo 5

Sea $P(x) = 2x^3+5x-7$

Hallar su valor numérico en $x=3$

Resolución:

Reemplazando x por **3**

$$P(3) = \underbrace{2\,.\,3^3}_{54} + 5(3) - 7 = 54 + 15 - 7 = 62$$

Ejemplo 6

Si $f(x) = e^x + \pi^x$ / $f(3) = 1$

Hallar el valor numérico de $\sqrt[3]{\dfrac{f(1)}{f(4)-f(7)}}$

Resolución:

Del dato

$f(3) = e^3+\pi^3 = 1 \Rightarrow e^3+\pi^3 = 1$ .. .. (α)

Se pide

$$\sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4+\pi^4-e^7-\pi^7}} = \sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4(1-e^3)+\pi^4(1-\pi^3)}}$$

Pero $1-e^3 = \pi^3$ y $1-\pi^3 = e^3$

Luego

$$\sqrt[3]{\frac{e+\pi}{e^4\pi^3+\pi^4e^3}} = \sqrt[3]{\frac{(e+\pi)}{e^3\pi^3(e+\pi)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{e^3\pi^3}} = \frac{1}{e\pi}$$

> **NOTA**
> En la expresión:
> $P(x+1, y-3) = 2x-y$
> Las variables son $x+1 \wedge y-3$

Ejemplo 7

Si $G(2x-1) = 4^x + 8x - 5$

Hallar el valor numérico de **G** en **2**

Resolución:

Sea $2x-1=2 \Rightarrow x=3/2$

Luego

$$G\left[2\left(\frac{3}{2}\right)-1\right] = 4^{\frac{3}{2}} + 8\left(\frac{3}{2}\right) - 5$$

$$\Rightarrow G(3-1) = \sqrt{4^3} + 4.3 - 5 = 15$$

$$\therefore G(2) = 15$$

Ejemplo 8

Si $h(x, y-1, z+3) = 4x-3y+yz$

Hallar el valor numérico en (1, 3, 5)

Resolución:

Las variables tomarán los valores:

$x=1$, $y-1=3$ y $z+3=5$

es decir $x=1$, $y=4$ y $z=2$

Reemplazando $h(1,3,5) = 4(1)-3(4)+4(2)$

$$\therefore h(1,3,5) = 4-12+8 = 0$$

TEOREMA

Dado un polinomio $P(x)$:

I. La suma de sus coeficientes se obtiene reemplazando la **variable por 1**

$\boxed{\sum \text{Coef } P(x) = P(1)}$

II. Su término inc... reemplazando su v...

$\boxed{\text{T.ind.}}$

...dependiente se obtiene ...ariable por cero

$\boxed{P(x) = P(0)}$

Ejemplo 1

Sea $P(x)=6x^5+4x-15$

I. ΣCoef: P(1)=6(1...

II. T. ind: P(0)=6(0)...

...)+4(1)-15=-5

...+4(0)-15=-15

Ejemplo 2

Sea $g(x) = (2x-1)^{60}-3x+1$

I. ΣCoef: $g(1)=(2(1)-1)^{60}-3(1)+1 = -1$

II. T. ind: $g(0) = (2(0)-1)^{60}-3(0)+1 = 2$

Ejemplo 3

Sea $h(5x-3) = 4x+5$

I. ΣCoef: $5x-3=1 \Rightarrow x=\dfrac{4}{5}$ reemplazando

$$h(1) = 4\left(\frac{4}{5}\right)+5 = \frac{16}{5}+5 = \frac{41}{5}$$

$\therefore$ ΣCoef: $\dfrac{41}{5}$

II. T. ind: $5x-3=0 \Rightarrow x=3/5$ reemplazando

$$h(0)= 4\left(\frac{3}{5}\right)+5 = \frac{12}{5}+5 = \frac{37}{5}$$

$\therefore$ T. ind $= \dfrac{37}{5}$

> **Corolario:**
> En un polinomio de más de una variable:
> I. La suma de coeficientes se halla reemplazando cada una de las variables por el **número 1**
> II. Su término independiente de las variables se halla reemplazando cada una de las variables por el **número cero.**

Ejemplo 1

Sea $S(x,y) = (2x-y)^5 + (x+y)^4$

I. ΣCoef. $= S(1,1) = (2(1)-1)^5+(1+1)^4=1+2^4$

$\therefore$ ΣCoef. $= 17$

II. T. ind. $= S(0,0) = (2(0)-0)^5 + (0+0)^4 = 0$

$\therefore$ t. ind. $= 0$

Ejemplo 2 *(Para el lector)*

De $S(x-1;\ 2y+3) = 4xy + (x-y)^2$
halle su término independiente y la suma de coeficientes.

CAMBIO DE VARIABLE

Propiamente debe llamarse composición de funciones dentro de un conjunto de valores admisibles. Consiste en reemplazar una o más variables por otras.

Ejemplo 1

Sea $f(x)=4x+3$; hallar $f(3x-5)$

Resolución:

Reemplazar x por $3x-5$

$f(3x-5) = 4(3x-5)+3=12x-20+3$

$\therefore$ $f(3x-5) = 12x-17$

Ejemplo 2

Sea $f(x-1) = 19x+1$; hallar $f(x)$

Resolución:

MÉTODOS :

I. Cambio de variable

$x-1 = y \Rightarrow x = y+1$ reemplazando

$f(y) = 19(y+1)+1 = 19y+19+1$

Luego $f(y) = 19y+20$

Cambiando y por x se obtiene:

$f(x) = 19x+20$

II. Formar la variable en el segundo miembro

$f(x-1) = 19x + 1 = \underline{19x-19} + 20$

$f(x-1) = 19\,(x-1) + 20$

$f(y) = 19\ y + 20$

Cambiando y por x se obtiene:

$f(x) = 19x+20$

Ejemplo 3

Sea $f(x-5) = 4x+9$, hallar $f(2x+1)$

Resolución:

$f(x-5) = 4x + 9 = \underline{4x-20} + 29$

$= 4(x-5) + 29$

Reemplazando $x-5$ por $2x+1$

$f(2x+1) = 4(2x+1)+29 = 8x+33$

$\therefore$ $f(2x+1) = 8x + 33$

Ejemplo 4
Sea $h(x^2-x) = x+5$, hallar $h(x+1)$
Resolución:

Será en 2 pasos: $h(x^2-x) \xrightarrow{\text{1ro.}} h(y) \xrightarrow{\text{2do.}} h(x+1)$

Haciendo $x^2-x = y \Rightarrow x^2-x-y = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

1ro. $h(y) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} + 5 = \dfrac{11 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$

$$\therefore\ h(y) = \frac{11 \pm \sqrt{1+4y}}{2}$$

2do. Reemplazar y por $x+1$

$$h(x+1) = \frac{11 \pm \sqrt{1+4(x+1)}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{4x+5}}{2}$$

$$\therefore\ h(x+1) = \frac{11 \pm \sqrt{4x+5}}{2}$$

Ejemplo 5
Si $f(x^2-4x)=3x+1$
Hallar el mayor y el menor valor de f(5)
Resolución:
Sea $x^2-4x = 5 \Rightarrow x^2-4x-5 = 0$
Es decir $(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x=5$ ó $x=-1$

I. Si $x=5 \Rightarrow f(5) = 3(5)+1=16$
II. Si $x=-1 \Rightarrow f(5) = 3(-1)+1=-2$

$\therefore$ $f(5) = 16$; $f(5) = -2$
mayor menor

GRADO DE UN POLINOMIO

Se define como una característica exclusivamente para los polinomios, relacionado con los exponentes de sus variables.

Los grados se clasifican en:

1. **Grado relativo (G.R.)**
Es representado por el valor del mayor exponente de la variable en referencia
Ejemplo
$P(x,y) = 45x^4y^5 - \sqrt{2}xy^7 + \pi x^{10}y$
Luego $G.R_x = 10$ y $G.R_y = 7$

2. **Grado absoluto (G.A.)**
Se define como el grado de un polinomio:
I. Para un monomio.- Se obtiene sumando los grados relativos.
II. Para un polinomio de más de un término se obtiene como el mayor grado absoluto de los monomios que lo conforman.

Definición: El grado del término independiente es cero.

Ejemplo 1
Sea $f(x,y,z) = -63x^9y^5z$
Luego $G.R_x = 9$, $G.R_y = 5$ y $G.R_z = 1$
$\therefore\ G.A(f) = 9+5+1 = 15$

Ejemplo 2
Sea $h(x,y) = 5y^5+4x^9y-\sqrt{2}x^7y^5$
Los grados absolutos de los monomios son: 5, 10 y 12 respectivamente
Luego $G.A(h) = 12$

Ejemplo 3
Hallar el grado relativo a "x" en el polinomio

$$P(x,y) = y^2x^{n-3} - 14x^{\frac{3}{n-5}}y^5 + \sqrt{2}xy^{7-n}$$

Resolución:
Como $P(x,y)$ es un polinomio, los exponentes de las variables deben ser enteros y positivos.

Pero $\left(\dfrac{3}{n-5}\right) \in \mathbb{N}$, si $n=6$ ó $n=8$

- Si $n=6 \Rightarrow (7-n) \in \mathbb{N}$
- Si $n=8 \Rightarrow (7-n) \notin \mathbb{N}$

$\therefore$ $n=6$ (único valor)

Luego $P(x,y) = y^2x^3 - 14x^3y^5 + \sqrt{2}xy$
De donde $G.R_x = 3$

Ejemplo 4

Sea

$$P(x,y) = x^{a^{a^{a^n}}} + \sqrt{2}\, y^{\left(a^{a^a}\right)^{a^{n-a}}} + 16\sqrt{p}$$

donde $G.R_x = G.R_y = 16$

Hallar el valor de "a"

Resolución:

Por dato

$$a^{a^{a^n}} = \left(a^{a^a}\right)^{a^{n-a}} = a^{a^{a+n-a}} \Rightarrow a^{a^{a^n}} = a^{a^n}$$

$$\Rightarrow a^n = n \Rightarrow G.R_x = n = 16 \Rightarrow a = \sqrt[16]{16} = \sqrt[4]{2}$$

NOTA

1. El grado se define como el exponente de la variable de coeficiente no nulo.
   Ejemplo:
   $$P(x) = 3x^5y \leftrightarrow GR_x = 5 \leftrightarrow y \neq 0$$
2. Si no se especifica el tipo de grado se sobrentenderá que se refiere al grado absoluto.

POLINOMIOS ESPECIALES

Son aquellos polinomios que obedecen a ciertas características y de acuerdo a ello son:

1. Polinomio ordenado

Se dice ordenado respecto a alguna de sus variables cuando sus exponentes sólo aumentan o disminuyen (ordenado creciente o decreciente).

Ejemplos:

- $P(x,y) = 2x + x^3y + 6x^6$;

  es creciente respecto a x

  $Q(x,y) = \sqrt{2}x^7 + \pi x^3y^4 + 5xy^{17}$;

  es creciente respecto a y,

  decreciente respecto a x

  $M(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^{15}$ no es ordenado

2. Polinomio completo

Llamaremos completo respecto a alguna variable si existen términos de todos los grados incluyendo el término independiente, hasta un grado determinado.

Ejemplos:

I. $P(x) = 2x^3 - 5 + 2x + 7x^2$

es completo de grado 3

II. $Q(x,y) = 4x - 2y^2 + 5x^2y + x^3y^4 - 9x^4y^3$

es completo respecto a x y respecto a y es de grado relativo 4.

TEOREMA

Dado un polinomio completo en una variable, el número de términos es igual a su grado aumentado en 1.

Ejemplo:

$P(x) = \sqrt{2} + x^5 + 2x - \sqrt{\pi}x^4 + 4x^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2$

Vemos que es de grado 5 y tiene 6 términos

TEOREMA

Si un polinomio es completo y ordenado respecto a una variable, se tiene que los grados relativos a esa variable de dos términos consecutivos difieren en la unidad.

Ejemplos:

1. $P_{(x)} = 4x^{3} - 5x^{2} + \sqrt{5}x^{1} + 16$
2. $Q_{(x)} = 12 + 3x^{1} - \pi x^{2} + 17x^{3} - 15x^{4}$
3. Halle el valor de "a" si el polinomio es completo y ordenado

   $P(x) = (a^2 + 3) + (a - 1)x^{a^2 - 5a + 7} + 3x^{a^2 - 2}$

   Rpta: a = 2

3. Polinomio homogéneo

Un polinomio de dos o más términos y dos o más variables es homogéneo si cada término tiene el mismo grado absoluto.

Ejemplo 1

$$P(x,y)=\underbrace{45x^4y^3}_{G.A.=7}-\underbrace{22xy^6}_{G.A.=7}+\underbrace{2x^5y^2}_{G.A.=7}$$

Diremos que es homogéneo de grado 7 o grado de homogeneidad 7.

Ejemplo 2

Si $K(x,y)=ax^5y^b+bx^{a-1}y$ es homogéneo, hallar $a-b$

Resolución:

I. Por ser polinomio

$b\geq 1$ y $a-1\geq 1$

II. Por ser homogéneo

$5+b=a-1+1 \Rightarrow a-b=5$

Términos semejantes:

Dos o más términos no nulos son semejantes si sólo difieren en los coeficientes.

Ejemplo 1

$$t_1(x,y)=42x^4y^7$$
$$t_2(x,y)=\sqrt{3}x^4y^7$$
$$t_3(x,y)=\left(\sqrt{2}+1\right)x^4y^7$$

Diremos que t_1, t_2, t_3 son semejantes

Ejemplo 2

Si $M(x,y)=ax^{a-1}y^9$ y $N(x,y)=bx^5y^{b+3}$ son semejantes. Hallar $a+b$

Resolución:

Se debe cumplir

$$a-1=5 \quad y \quad b+3=9$$
$$a=6 \quad y \quad b=6$$
$$\therefore\ a+b=12$$

> **Nota:** En este problema se halla que M y N son semejantes e iguales.

4. Polinomios idénticos

Dos o más polinomios en las mismas variables son idénticos, cuando tienen los mismos valores numéricos para cualquier valor que se asigne a sus variables.

Ejemplos:

- $P(x,y)=(x+y)^2-4xy$
- $Q(x,y)=(x-y)^2$

Reemplazando "x" por **a** e "y" por **b** tendremos:

$$P(a,b)=(a+b)^2-4ab=a^2+b^2+2ab-4ab$$
$$=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$$
$$Q(a,b)=(a-b)^2$$

Vemos que P y Q tienen el mismo valor numérico para un determinado valor de x e y, y se denota por:

$$\boxed{P(x,y)\equiv Q(x,y)}$$

P y Q se llaman idénticos.

> **TEOREMA**
>
> Dos polinomios en una variable y del mismo grado de la forma:
>
> $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_n$
>
> $Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_n$
>
> Son idénticos o iguales si y sólo si:
>
> $a_0=b_0$, $a_1=b_1$ .... ; $a_n=b_n$

Ejemplo 1

Si los polinomios:

$P(x)=3x^2+(a-1)x+c$

$Q(x)=(b+1)x^2+7x-4$

Son iguales o idénticos. Hallar $(a+b-c)$

Resolución:

Como son idénticos tenemos:

$$3=b+1\ ,\ 7=a-1\ \ y\ \ c=-4$$

Es decir $b=2$, $a=8$ y $c=-4$

$$\therefore\ a+b+c=6$$

Ejemplo 2

Sea $P(x)$ un polinomio de tal manera que:

$P(P(x)) = 4x+5$

Halle la suma de coeficientes de $P(x)$

Resolución:

Como $P(P(x))$ es de primer grado $\Rightarrow$ $P(x)$ es también de primer grado

Sea $P(x) = ax+b$

Luego $P(P(x)) = aP(x)+b = a(ax+b)+b$
$= a^2x+ab+b$

Por igualdad con $P(P(x)) = 4x+5$, tenemos:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ ó } a = -2$$

Además $b(a+1) = 5 \Rightarrow b = \dfrac{5}{3}$ ó $b = -5$

$$\therefore a+b = 2+5/3 = \frac{11}{3} \quad \text{ó} \quad a+b = -2-5 = -7$$

Ejemplo 3

Si los polinomios:

$$P(x,y) = (a-5)x^4+(a+b)x^{b+8}y+cy^{c-1}$$
$$Q(x,y) = 4x^4+3x^ny+cy^{2c-3}$$

son idénticos

Halle el valor de $[(a-b)+(c-n)] + P(1;2)$

Resolución:

Por ser idénticos:

$$(a-5)x^4 \equiv 4x^4 \Rightarrow a = 9$$
$$(a+b)x^{b+8}y \equiv 3x^ny \Rightarrow a+b = 3$$

Reemplazando el valor de "a"

$$9+b = 3 \rightarrow b = -6 \quad y \quad n = b+8$$
$$\therefore \ b = -6 \quad y \quad n = 2$$

Además $\quad cy^{c-1} \equiv cy^{2c-3}$

Entonces $\quad c-1 = 2c-3$

$$\therefore \ c = 2$$

De donde

$$(a-b)+(c-n) = 9-(-6)+(2-2) = 15$$

Luego $\quad P(x,y) = 4x^4+3x^2y+2y$;
si $x=1$ y $y=2$

Evaluando $\quad P(1,2) = 1+3(1)(2)+2(2)$

Luego $\quad P(1;2) = 11$

$$\therefore \ \underbrace{(a-b) + (c-n)}_{15} + \underbrace{P(1,2)}_{11} = 26$$

5. Polinomio idénticamente nulo

Un polinomio es idénticamente nulo, si sus valores numéricos para cualquier valor o valores asignados a las variables resulta ser siempre cero.

Se denota por $P(x,y) \equiv 0$

($P(x,y)$ es idénticamente nulo)

Ejemplo:

$P(x) = (x+2)^2-(x-2)^2-8x$

Vemos que si x toma el valor de **a**, tenemos

$$P(a) = \underbrace{(a+2)^2 - (a-2)^2}_{(8a)} - 8a$$

$$P(a) = 8a-8a \Rightarrow P(a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\therefore \ P(x) \equiv 0$

TEOREMA

Un polinomio de la forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

es idénticamente nulo, si todos sus coeficientes son cero, es decir:

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$$

Ejemplo:

Si $P(x) = k(x-1)^2 + r(x-2)^2 + c + x$ es idénticamente nulo, halle $\dfrac{k+c}{r}$

Desarrollando y ordenando

$P(x) = k(x^2-2x+1) + r(x^2-4x+4) + c + x$
$= (k+r)x^2 - (2k+4r-1)x + k + 4r + c$

Será idénticamente nulo si

$k+r = 0 \Rightarrow k = -r$ .... (1)

$2k+4r-1 = 0 \Rightarrow -2r+4r=1$ .... (2)

De las ecuaciones (1) y (2)

$$r = \frac{1}{2} \quad , \quad k = -\frac{1}{2}$$

Además

$$k+4r+c = 0 \Rightarrow c = -\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

Luego $\quad c = \dfrac{1}{2} - 2 \Rightarrow c = -\dfrac{3}{2}$

Por lo tanto

$$\frac{k+c}{r} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{4}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{k+c}{r} = -4$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar la suma de valores de "**n**" para los cuales la expresión

$$P(x,y) = 4x^{\frac{10-2^n}{2}} - 3y^{\frac{128}{2^n}} \quad \text{es un polinomio}$$

Resolución:

Por ser polinomio

$$\frac{10-2^n}{2} \in \mathbb{N} \quad y \quad \frac{128}{2^n} \in \mathbb{N}$$

Sólo se cumple si $n=1, 2, 3$

$$\therefore \quad \Sigma n: \ 1+2+3 = 6$$

Problema 2

Hallar el mayor valor natural de **n** de modo que la expresión:

$$P(x) = \frac{\sqrt[3]{x^{n-20}} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x^{n-8}} \cdot \sqrt[12]{x^{2-n}}}$$

Sea equivalente a una expresión racional fraccionaria.

Resolución:

Nos interesa el exponente de "x"

$$\frac{1}{3}(n-20)+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}(n-8)-\frac{1}{12}(2-n) = E$$

$$\frac{4(n-20)+2-3(n-8)-(2-n)}{12} = E$$

Simplificando $\quad E = \dfrac{2n-56}{12}$

y como $P(x)$ es racional fraccionario

Entonces $\left(\dfrac{2n-56}{12}\right) \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow \dfrac{n-28}{6} \in \mathbb{Z}^-$

$$28 - n = \overset{\circ}{6} \qquad \therefore n = 22 \ \text{mayor}$$

Problema 3

El término independiente y el coeficiente principal de

$$P(x) = (x^2+5-3x)(x+n+6x^n) \cdot (x^2+2x^4+n+1)(1-5x^n+10x^{n-1})$$

son iguales. Hallar el grado de $P(x)$.

Resolución:

Si $P(x)$ es polinomio; $(n-1) \in \mathbb{N}$, se tiene:

I. Su término independiente $P(0)$

$P(0) = 5.n.(n+1)(-1) = -5n(n+1)$

II. Coef. Principal: $1.6.2.(-5) = -60$

De (I) y (II) (por dato)

$-5n(n+1) = -60 \Rightarrow n(n+1) = 12 \Rightarrow n=3$

Luego, el grado de $P(x)$ es

$$2+n+4+n \equiv 2n+6$$

Como $n=3$

$\therefore$ Grado de $P(x) = 2(3)+6 = 12$

Problema 4

De $F(x^2-4x) = x-2$, hallar $F(x)$

Resolución:

Sea $\quad x^2-4x = y \Rightarrow x^2-4x+4 = y+4$

$\Rightarrow (x-2)^2 = y+4 \Rightarrow x = 2\pm\sqrt{y+4}$

$\Rightarrow F(y) = 2\pm\sqrt{y+4}-2 = \pm\sqrt{y+9}$

Reemplazando x por y ; $F(x) = \pm\sqrt{x+4}$

Problema 5

Si $P(P(P(x))) = 8x+7$, halle $P(x)$

Resolución:

Como $P(P(P(x)))$ es lineal

$\Rightarrow P(x)$ es lineal; sea $P(x) = ax+b$

$\Rightarrow P(P(x)) = aP(x)+b = a(ax+b)+b$

$$\begin{aligned} P(P(P(x))) &= a(P(P(x))) + b \\ &= a(a^2x + ab + b) + b \\ &= a^3x + \underbrace{a^2b + ab + b}_{b(a^2+a+1)} \end{aligned}$$

De donde $\quad a^3 = 8 \quad y \quad b(a^2+a+1) = 7$

Entonces $\quad a = 2 \quad y \quad b = 1$

$$\therefore \quad P(x) = 2x+1$$

Problema 6

Siendo $F(x^n+1) = x-1 \,/\, f(3) = -7/8$, hallar "n"

Resolución:

Sea $x^n+1 = y \Rightarrow x = \sqrt[n]{y-1}$

$\Rightarrow F(y) = \sqrt[n]{y-1} - 1$

De donde

$$F(3) = \sqrt[n]{2-1} - 1 = -\frac{7}{8} \text{ (Por dato)}$$

$$\sqrt[n]{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{\frac{1}{n}} = 2^{-3} \Rightarrow \frac{1}{n} = -3$$

$$\therefore \ n = -1/3$$

Problema 7

Si $P\left(\dfrac{1}{F(x)}\right) = a^2x+3a+a \ \wedge \ F(x)=ax+1$

hallar $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Resolución:

Se quiere que $\dfrac{1}{F(x)} = -\dfrac{1}{2}$ es decir

$$\frac{1}{ax+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow ax+1 = -2 \Rightarrow ax = -3$$

Luego $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \underbrace{a(ax)}_{-3} + 3a + 1$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -3a+3a+1$$

$$\therefore \ P(-1/2) = 1$$

Problema 8

Si $f(x)$ es un polinomio definido por: $f(2x-1) = f(2x)+f(1)$ además $f(0) = 2$, calcular $f(3)$

Resolución:

Si $x = 1$

$$\Rightarrow f(1) = f(2)+f(1) \Rightarrow f(2) = 0$$

Si $x = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow f\left(2\left(\frac{3}{2}\right)-1\right) = f\left(2\left(\frac{3}{2}\right)\right) + f(1)$$

$$\Rightarrow f(2) = f(3) + f(1)$$

$$f(3) = -f(1)$$

Si $x = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(0) = f(1)+f(1) \Rightarrow 2 = 2f(1) \Rightarrow f(1)=1$$

$$\therefore \ f(3) = -1$$

Problema 9

En el polinomio

$$P(x+1) = (3x+2)^{2n}(5x+7)^2(4x+7)$$

Se observa que

3ΣCoef. $= 343$ veces el término independiente

Calcular el valor de **n**

Resolución:

I. $\Sigma\text{Coef} = P(1)$

Si $x=0$

$$\Rightarrow P(1) = 2^{2n} \cdot 7^2 \cdot 7 = 2^n \cdot 343$$

II. T. Ind. $= P=(0)$

Si $x = -1$

$$\Rightarrow P(0) = (-1)^{2n} \cdot (-5+7)^2 \cdot (-4+7) = 2^2 \cdot 3$$

Por dato $\quad 3(2^{2n} \cdot 343) = 343 \cdot 2^2 \cdot 3$

$$\therefore \ n = 1$$

Problema 10

¿Cuánto hay que agregar a

$$P(x,y) = 3x^4+5x^3-2x^2y^2$$

para que sea un polinomio homogéneo y completo con respecto a x, y la suma de coeficientes sea 21?

Además $P_1(2;1)=114$ / $P_1(x,y)$ es el polinomio resultante.

Resolución:

El polinomio a sumar es ax^3y+by^4

Luego $P_1(x,y) = 3x^4+ax^3y-2x^2y^2+5xy+by^4$

I. $3+a-2+5+b = 21$

$$\Rightarrow a+b=15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

II. $P_1(2,1) = 3.2^4 + a \cdot 2^3(1) - 2(2^2)1^2 + 5(2) \cdot 1^3 + b \cdot 1^4 = 114$

$$\Rightarrow 8a+b = 64 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1) y (2) $\quad a = 7 \ ; \ b = 8$

$\therefore$ Se agregará: $7x^3y + 8y^4$

Problema 11

Si $g(x) = \dfrac{x(1+x^2)}{x-1} - x^2 - x - 1$

Resolver

$$\underbrace{g(g \ldots g\,(g\,(x)) \ldots)}_{(2n+1)} = \frac{ax+b+1}{ax-b+1} \ ; n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

Efectuando

$$g(x)=\frac{x\left(1+x^2\right)}{x-1}-\left(x^2+x+1\right)$$

$$g(x)=\frac{x+x^3-x^3+1}{x-1}\Rightarrow g(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

Luego

$$g(g(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

y como $(2n+1)$ es impar

$$g(g\ ....\ (g(x)))=g(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x+1}{x-1}=\frac{ax+b+1}{ax-b+1}$$

Aplicando proporciones

$$\frac{2x}{2}=\frac{2ax+2}{2b}\ \Rightarrow\ bx=ax+2\ \Rightarrow\ x(a-b)=2$$

$$\therefore\ x=\frac{2}{a-b}$$

Problema 12

Dado el polinomio homogéneo

$$P(x,y)=m^2x^{m^{m-n}}+nx^2y^6+mx^6y^{m^{m\ n}}$$

Hallar la suma de sus coeficientes.

Resolución:

Si es homogéneo

$$m^{m-n}=2+6=6+m^{m+n}$$

(I) (II)

De (I) $\quad m^{m\ n}=8\ ....\ (1)$

De (II) $\quad m^{m+n}=2\ ....\ (2)$

De (1) y (2) $\quad m^{2m}=4^2\ \Rightarrow\ m=2$

En (2) $\quad 2^{2+n}=2^1\ \Rightarrow\ n=-1$

$\therefore\ \Sigma$Coef: $m^2+n+m=2^2-1+2=5$

Problema 13

Hallar el valor de "n" para que el equivalente de

$$M(x)=x\ .\ \sqrt[3]{\frac{x^n\ .\ \sqrt{x^n}}{x\ .\ \sqrt[4]{x^{n-2}}}}\ ;\ x\neq 0$$

sea de quinto grado.

Resolución:

Buscando el exponente de x en $M(x)$

$$1+\frac{1}{3}\left\{n-1+\frac{n}{2}-\frac{n-2}{4}\right\}=5\qquad\text{(Dato)}$$

Efectuando $\quad n-1+\frac{n}{2}-\frac{n-2}{4}=12$

Por 4 $\quad 4n-4+2n-n+2=48\ \Rightarrow\ 5n=50$

$$\therefore\ n=10$$

Problema 14

Si al polinomio

$$P(x,y)=nx^my^p+mx^{m\ 1}y^{p\ 3}+x^{n\ 8}$$

le restamos $12x^3y^4$ su grado absoluto disminuye.
Hallar $m+n+p$

Resolución:

Si el grado disminuye es porque
nx^my^p es igual a $12x^3y^4$

Entonces

$n=12\quad,\quad m=3\quad y\quad p=4$

$\therefore\ m+n+p=19$

Problema 15

Calcular $\sqrt[b]{ab\ \sqrt[a]{b}}$ si el polinomio

$$P(x)=5+x^{a^{2a}-15}+3x^{(a+1)^a-1}+5x^{2a\ 1}+\ ...\ nx^{b^2-1}$$

Donde $\quad n\neq 0\quad$ y $\quad b>0$

es completo y ordenado, además tiene $4a^a$ términos

Resolución:

Como el primer término es constante el polinomio será ordenado ascendentemente

$$a^{2a}-15=1\ \Rightarrow\ a=2$$

$P(x)$ tendrá: $4(2^2)=16$; 16 términos

Por propiedad $\ b^2-1=16-1\ \Rightarrow\ b=4$ *(ver pág. 81)*

Luego lo pedido $\quad \sqrt[4]{2\ \ 4\ \ \sqrt[2]{4}}=\sqrt[4]{2^3\ \ 2}=2$

Problema 16

Luego de reducir la expresión

$$E(x) = \left(\sqrt[n^2+1]{x^{n^{n+1}}x \cdot x^{n^{n-1}-1}}\right)^{1-n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

$$x > 0 \quad y \quad x \neq 1$$

resulta una expresión algebraica que a su vez se clasifica como

Resolución:

Utilizando las leyes de los exponentes

$$\left(\sqrt[n^2+1]{\underbrace{x^{n^{n+1}+1+n^{n-1}-1}}}\right)^{1-n}$$

$$x^{\underline{n^n} \cdot n + \underline{n^n} \cdot n^{-1}} = x^{n^n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = x^{n^n\left(\frac{n^2+1}{n}\right)}$$

Luego

$$E(x) = \left(\sqrt[n^2+1]{x^{n^n\left(\frac{n^2+1}{n}\right)}}\right)^{1-n} = x^{n^{n-1}\cdot(1-n)}$$

pero $n^{n-1}(1-n)$ será siempre entero negativo, si $n \geq 2$ y $n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ $E(x)$ es una expresión algebraica **racional fraccionaria**

Problema 17

Sea $P(x)$ un polinomio de tercer grado que cumple la siguiente condición

$$P(x-1) - P(x) \equiv -2x(3x+2)$$

luego el coeficiente de su término cuadrático es

Resolución:

Sea $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

De $P(x) - P(x-1) \equiv 2x(3x+2)$

I. Si $x=0 \Rightarrow P(0) - P(-1) = 0$
   Es decir $D-(-A+B-C+D) = 0$
   Luego $A+C = B$ .... (α)

II. Si $x=1 \Rightarrow P(1) - P(0) = 2(3+2) = 10$
   Es decir $(A+B+C+D) - (D) = 10$
   Luego $A + B + C = 10$ .... (β)

(α) en (β) $B + \underbrace{(A + C)}_{B} = 10 \Rightarrow 2B = 10$

$$\Rightarrow B = 5$$

$\therefore$ El coeficiente del término cuadrático es 5.

Problema 18

Sea $f(x+1) = x^2+1$, calcular la suma de coeficientes de $\phi(x)$ si se cumple que

$\phi(x-1) = f(x+3) + f(3-x)$

Resolución:

Σcoef. $\phi = \phi(1)$

en $\phi(x-1) = f(x+3) + f(3-x)$

$x=2 \Rightarrow \phi(1) = f(5) + f(1)$ .... (α)

en $f(x+1) = x^2 + 1$

Si $x = 4 \Rightarrow f(5) = 4^2 + 1 = 17$ .... (β)

Si $x = 0 \Rightarrow f(1) = 0 + 1 = 1$ .... (γ)

De (β) y (γ) en (α)

$$\phi(1) = \underbrace{f(5)}_{17} + \underbrace{f(1)}_{1} \quad \therefore \quad \phi(1) = 18$$

Problema 19

Si $F(x) = 3x - 2$

Hallar $\underbrace{F(F(F\ .....\ (F(x\quad))\ .....\ ))}_{\text{10 paréntesis}}$

Resolución:

1 Paréntesis $\quad F(x) = 3x - 2$

2 Paréntesis $\quad F(F(x)) = 3F(x)-2 = 3(3x-2)-2$

$\Rightarrow F(F(x)) = 3^2x - 6 - 2 = 3^2x - (3^2-1)$

3 Paréntesis $\quad F(FF(x)) = 3(F(F(x)) = 2$

$= 3[3^2x - (3^2-1)] - 2$

$= 3^3x - (3^3-3+2)$

$= 3^3x-(3^3-1)$

Por inducción

$$\underbrace{F(F(F(\ ...\ F(F(x))\ ....\ )))}_{\text{10 paréntesis}} = 3^{10}x - (3^{10} - 1)$$

Problema 20

Sea el polinomio

$$P(2x-1) = (5x-1)^m + (2x+1)^m - 2x+1$$

¿Qué valor toma "m" si se cumple en el polinomio que la suma de coeficientes y su término independiente suman

$$24 + \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m \ ?$$

Resolución:

Dato

$$\underbrace{\Sigma_{coef.}}_{P(1)} + \underbrace{T_{ind.}}_{P(0)} = 24 + \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m \ .... \ (\alpha)$$

Problema 25

De la expresión $P\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x^{1999}-2x^{1998}+4$

hallar el valor de $(P(3))^{P(-1)}$

Resolución:

I. $\dfrac{x+1}{x-1}=-1 \Rightarrow x=0$

Si $x=0 \Rightarrow P(-1)=0-2(0)+4$

$\Rightarrow P(-1)=4$

II. $\dfrac{x+1}{x-1}=3 \Rightarrow x=2$

Si $x=2 \Rightarrow P(3)=2^{1999}-2.2^{1998}+4$

$\Rightarrow P(3)=4$

Luego lo pedido es $(P(3))^{P(-1)}=4^4=256$

Problema 26

Sea f(x) un polinomio que cumple con

$f(x+1)=3f(x)-2f(x-1)$

Además $f(4)=1$ y $f(6)=4$

Calcular $f(5)$

Resolución:

Evaluando en $x=5$ se tiene

$f(5+1)=3f(5)-2f(5-1)$

$\Rightarrow \underbrace{f(6)}_{4}=3f(5)-\underbrace{2f(4)}_{1}$

$\Rightarrow 3f(5)=6 \Rightarrow f(5)=2$

Problema 27

Calcular el grado del polinomio

$P(x,y)=4x^{n-2}+xy^{\frac{8}{5-n}}+y^{4-n}$

Resolución:

Por ser polinomio

$n-2>0$ y $4-n>0$

Es decir $\underbrace{n>2 \text{ y } n<4}_{n=3}$

Luego $P(x,y)=4x+xy^{\frac{8}{2}}+y$

$=4x+xy^4+y$

$\therefore$ El grado del polinomio es 5

Problema 28

Sean los polinomios idénticos

$A(x)=(a+b)x^2+(b+c)x+a+c$

$B(x)=2\sqrt{abc}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{c}}+\dfrac{x}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$

Calcular $S=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Resolución:

Por ser idénticos

$a+b=2\sqrt{abc}.\dfrac{1}{\sqrt{c}}$

$a+b=2\sqrt{ab}$

Luego $a=b$

Análogamente

$b+c=2\sqrt{abc}\dfrac{1}{a} \Rightarrow b=c$

$a+c=2\sqrt{abc}\dfrac{1}{b} \Rightarrow a=c$

de donde $a=b=c$

Luego en S, se tiene $\dfrac{3a^2}{(3a)^2}=\dfrac{1}{3}$

Problema 29

Sea el polinomio $P(x)=x^2+px+q$ de coeficientes naturales y de suma mínima, que verifica las siguientes condiciones:

I. P(3) es divisible por 6

II. P(4) es divisible por 7

III. P(5) es divisible por 10

Hallar el polinomio $P(x)$

Resolución:

Condición $p+q$ es mínimo ; $p, q \in \mathbb{N}$

I. $P(3)=9+3p+q=\overset{\circ}{6} \Rightarrow q=\overset{\circ}{3}$ .... (I)

II. $P(4)=16+4p+q=\overset{\circ}{7}$ ..... (II)

III. $P(5)=25+5p+q=\overset{\circ}{10}$

$\Rightarrow q=\overset{\circ}{5}$ ..... (III)

De I y III $q=\overset{\circ}{15} \Rightarrow q_{min}=15$

Reemplazando en (II)

$16+4p+15=\overset{\circ}{7} \Rightarrow 4p+31=\overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow (4p)_{min}=32 \Rightarrow p_{min}=8$

$\therefore P(x)=x^2+8x+15$

I. Si $x=1$

$\Rightarrow P(1) = 4^m+3^m-2+1 = 4^m+3^m-1$

II. Si $x = 1/2$

Entonces

$$P(0) = \left(5\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)^m + \left[2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right]^m - 2\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^m + 2^m$$

En (α)

$$4^m+3^m-1+\left(\frac{3}{2}\right)+2^m = 24+\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m$$

$\Rightarrow 3^m+4^m = 25 = 5^2$

$\therefore\ m = 2$

Problema 21

Determinar el término central del polinomio

$$P(x) = nx-(n-1)x^2+(n-2)x^3+.....x^n$$

sabiendo que la suma de sus coeficientes es 153

Resolución:

Recordemos que ΣCoef. = P(1)

$$\Rightarrow \underbrace{n + (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1}_{\frac{n(n+1)}{2} = 153} = 153$$

$\Rightarrow n(n+1) = 17 \times 18$

como tiene 17 términos, el central será el término del lugar 9, pero cada término es de la forma

ax^b ; $a+b = 17+1$

$\therefore\ t_9 = 9x^9$

Problema 22

Sea el polinomio $P(x+1) = x^2+1$

si el polinomio $H(x)$ se define así

$$H(x) = \begin{cases} P(x-1)+P(x+1) & \text{si } x \geq 1 \\ P(x)+P(-x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Determinar $H(0)+H(1)$

Resolución:

I. $H(0)$ como $x<1$

$\Rightarrow H(0) = P(0) + P(-0) = 2P(0)$

$= 2(0^2+1) = 2$

II. $H(1)$ como $x \geq 1$

$H(1) = P(0)+P(2) = (0^2+1)+(2^2+1) = 6$

$\therefore\ H(0) + H(1) = 8$

Problema 23

Si $f(t_{x+y}) = f(t_x).f(t_y)$

$f(t_a) = f(t_b).e^{a-b}$

donde $\{x,y,a,b\} \subset \mathbb{Z}_0^+ \wedge 2 < e < 3$

Calcular $f(t_0)+f(t_1)+.....f(t_n)$

Resolución:

De $f(t_a) = f(t_b).e^{a-b}$

$$\Rightarrow \frac{f(t_a)}{f(t_b)} = \frac{e^a}{e^b} \Rightarrow \begin{matrix} f(t_a) = \lambda e^a \\ f(t_b) = \lambda e^b \ ; \ \lambda \neq 0 \end{matrix}$$

de la condición

$f(t_{a+b}) = f(t_a).F(t_b)$ obtenemos

$\lambda e^{a+b} = \lambda e^a.\lambda e^b \Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow f(t_a) = e^a \wedge f(t_b) = e^b$

luego $f(t_0) + f(t_1) + ... + f(t_n)$

$$= e^0+e^1+e^2+.....+e^n = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$$

$$\therefore f(t_0)+f(t_1)+.....f(t_n) = \frac{e^{n+1}-1}{e-1}$$

Problema 24

Del polinomio de grado 11

$$P(x,y) = 3^5x^{n+3}y^{m+2}+x^{n+2}y^{m-3}$$

se tiene $GR_x - GR_y = 5$

Luego $2m+n$ es:

Resolución:

$$\text{En } P(x,y) = \underbrace{3^5x^{n+3}y^{m-2}}_{G.A.=m+n+1} + \underbrace{x^{n+2}y^{m-3}}_{G.A.=m+n-1}$$

Dato $m+n+1 = 11 \Rightarrow m+n = 10$ .... (α)

Además $G.R_x = n+3$; $GR_y = m-2$

Dato $(n+3)-(m-2) = 5 \Rightarrow m=n$

En (α) $2m = 10 \Rightarrow m=n=5$

$\therefore\ 2m+n = 15$

Problemas Propuestos

1. Si $H(H(x))=4x-3$; $H(x)=ax+b$ y $a>0$
Señalar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. La suma de coeficientes de $H(2x-1)$ es 1
II. $H(5) = 17$
III. El término independiente de $H(3x+1)$ es -3

A) VVV B) FFF C) VFF
D) FVF E) FVV

2. Sean los polinomios
$P(x) = 2x^2-15$ y $Q(x,y) = 2x+3y-2$
Hallar el término independiente del polinomio $H(t)$; $H(t) = Q(P(3), 3t-1)$

A) -5 B) -15 C) -2
D) 1 E) 7

3. En el polinomio
$P(x-2) = (x+2)^3 - 3(x-1) + mx+5$
se cumple que la sumatoria de coeficientes y el término independiente suman 200; según ello establecer el valor de verdad de cada uno de las proposiciones:
I. El término independiente del polinomio es 129
II. La suma de sus coeficientes es 71
III. $P(2) = 6^3 + 4$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) VFF E) FFV

4. Sea $f(k(x)) = x(x-2)^{-1}$; $f(x) = (x+2)x^{-1}$
Determinar el valor de $k\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

A) 2 B) 4 C) 5
D) 8 E) 15

5. Sea $P(x) = (a^3-7)x^5 + ax^2 + a^2 + 1$ un polinomio mónico ; $(a \in \mathbb{R})$
Hallar el término que no depende de la variable.

A) 2 B) 5 C) 10
D) 17 E) 26

6. En el polinomio
$P(x) = (1+2x)^n + (1+3x)^n$
La suma de coeficientes excede en 23 al término independiente.
Según ello establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. El polinomio $P(x)$ es de grado 2
II. La suma de sus coeficientes es 25
III. El término cuadrático de $P(x)$ es $12x^2$

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVV E) FFV

7. Si la expresión

$$S(x) = \frac{\left[\left(x^{n-2}\right)^3 . x^{2n-3}\right]^2 . x^4}{\left(\left(x^n\right)^2 . x^4\right)^2}$$

se reduce a un monomio de segundo grado, hallar el valor de **n**.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

8. Si el polinomio
$P(x,y) = (a^2+1)x^{a^2+2}y^a + (a+1)x^{2a-1}y^{a^2-1}$
es homogéneo, hallar la suma de sus coeficientes.

A) 16 B) 13 C) 11
D) 4 E) 22

9. En base a los polinomios idénticos
$P(x) = (m-5)x^{2n-1} + (n-3)x^{n-2}$
$Q(x) = \frac{p}{4}x^{n-2} + (3-m)x^7$
Establecer el valor de verdad de las proposiciones:
I. La suma de sus coeficientes es 0
II. Son de grado 7
III. El valor de $\frac{m}{n^2+p^2}$ es 0,125

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

10. Dado el polinomio
$P(x) = x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ donde se verifica $P(x) \equiv P(1-x)$, calcular $2a + b$.

A) 3 B) 5 C) -4
D) 1 E) 0

11. Si la siguiente expresión matemática es un polinomio

$P(x,y,z) = (a-b)\sqrt[a]{x^{b}} + (b-c)\sqrt[b]{y^{c}} + (c-a)\sqrt[c]{z^{a}}$,

establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. **P** presenta 3 términos
II. **P** es un polinomio homogéneo
III. **P** es idénticamente nulo
IV. **P** es de grado cero

A) VVVV B) VFVV C) VVFV
D) FFVF E) FFFF

12. Calcular el valor de $\sqrt[b]{ab\sqrt[a]{b}}$ si el polinomio

$P(x) = 7 + x^{a^{2a}-15} + 3x^{(a-1)a} + 5x^{2a-1} + \ldots\ldots nx^{b^2-1}$

tal que $n \neq 0$ y $b > 0$, es completo y ordenado de $4a^a$ términos.

A) 7 B) 6 C) 4
D) 3 E) 2

13. Si al polinomio

$P(x,y) = nx^m y^p + mx^{m\ 1}y^{p\ 1} + x^{n\ 8}$

le restamos $10x^3y^4$ su grado absoluto disminuye. ¿Cuánto vale el menor de los grados relativos?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

14. Hallar el valor de $a^{33} + \dfrac{2}{a^{99}}$, si el polinomio

$P(x) = (a^3+b-c-10)x^{a^6} + (c-b+9)x^{a^9}$

es idénticamente nulo.

A) 2 B) 1 C) 0
D) 4 E) 3

15. Dada la siguiente identidad:
$(2x+5)^7 - (x-1)^7 \equiv (x^2+9x+18)A(x) + ax + b$
donde $A(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + \ldots + a_5 \wedge a_0 \neq 0$,
determinar $a + \dfrac{b}{6}$.

A) $\dfrac{2}{3}(4^7+1)$ B) $\dfrac{3}{2}(4^7+1)$ C) $\dfrac{2}{3}(4^7-1)$

D) $\dfrac{3}{2}(4^7-1)$ E) 4325

16. Si el polinomio
$M(x,y) = (a+b-c-d^2)x^2 + (b-de)xy + 9(b+c-a-e^2)y$
es idénticamente nulo, calcular

$S = \dfrac{d^2}{b} + \dfrac{9b}{e^2} + \dfrac{6a}{c}$

A) 15 B) 16 C) 18
D) 13 E) 9

17. Calcular el valor de $m+n$ con la condición de que el polinomio

$P(x,y) = x^{2m+n\ 4}y^{m+n+2} + x^{2m+n\ 3}y^{m+n+1} + x^{2m+n\ 2}y^{m+n}$

sea de grado absoluto 28 y la diferencia de grados relativos a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sea igual a 6.

A) 17 B) 15 C) 13
D) 10 E) 9

18. Calcular el grado de
$A(x,y,z, \ldots) = 3xy^5z^{13}w^{25} \ldots$ de 10 variables

A) 528 B) 670 C) 720
D) 840 E) 936

19. En el polinomio homogéneo

$P(x,y,z) = (xy)^{3a^{b\ a}} + y^{b^{a\ b}} + 2z^{c}$,

calcular $a + b + c$

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 15

20. Si $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$, hallar $f(2x)$ en términos de $f(x)$.

A) $\dfrac{6f(x)}{f(x)-2}$ B) $\dfrac{3f(x)}{f(x)+3}$ C) $\dfrac{6f(x)}{f(x)+3}$
D) $\dfrac{6f(x)}{f(x)+3}$ E) $\dfrac{1}{f(x)}$

21. Sabiendo que $P(x)$ es un polinomio de grado "n" completo y ordenado en forma descendente, donde además se cumple que la suma en cada término del coeficiente con su exponente respectivo es $n+1$, hallar el polinomio evaluado en A si

$$A=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

A) n B) $(n+2)(n+1)$
C) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$
D) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ E) $\dfrac{n-3}{2}$

22. Si al reducir

$$P(x)=(x+1)(x-1)-\frac{x^{n^n}+x^n}{x}\quad ;\quad x\neq 0$$

resulta un polinomio completo, ¿qué se puede afirmar de

$$J(x)=(2x^n)^n+3x^{n^n}-4x^{6.n}+y^n\ ?$$

A) Es homogéneo B) Es completo
C) Es ordenado
D) Es un monomio E) Es un trinomio

23. Sea la expresión matemática

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ;\ x\notin\{-1;0;1\}$$

Determinar m $(m\in\mathbb{R}^+)$, si se cumple que $f(\Delta)=2$ cuando

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{m^2}}}$$

A) -2 B) 49 C) 2
D) 4 E) $\sqrt{7}$

24. Dado el polinomio que posee grado absoluto igual a 33

$$P(x,y)=2x^ay^{a+1}+5x^{2a}y^{a+3}-ax^{a\ 6}y^{a+7}+7x^{2a}y^{a+2},$$

calcular el $G.R_x$ y $G.R_y$ respectivamente.

A) 10 ; 23 B) 20 ; 12 C) 20 ; 17
D) 10 ; 11 E) 14 ; 10

25. En el polinomio

$$P(x)=6ax^{5a}+5ax^{4a}+4ax^{3a}+3ax^{2a}+20ax^a+a,$$

calcular el valor de **a**, si se cumple que la suma de coeficientes es igual a su término independiente incrementado en 76.

A) 1 B) 4 C) 2
D) 3 E) 5

26. Calcular la suma de coeficientes del polinomio completo y ordenado

$$P(x)=ax^a+bx^b+cx^c+dx^d+abcd\ ;$$
$$a\neq b\neq c\neq d$$

A) 24 B) 44 C) 10
D) 34 E) 14

27. Si el polinomio se anula para más de 2 valores asignados a su variable

$$P(x)=(ab+ac-3)x^2+(ac+bc-6)x+(ab+bc-9),$$

hallar $abc(a+b)(a+c)(b+c)$

A) 160 B) 163 C) 161
D) 162 E) 164

28. Si el polinomio

$$(n^n-1)x^3y^3+(m^n-2)y\equiv-\frac{3}{4}x^3y^3+62y,$$

calcular $64m-n$

A) -3 B) -2 C) 30
D) 20 E) 10

29. Calcular los valores de **m** y **n** para que el polinomio sea completo y $n>p$

$$P(x)=(2+n)x^{m+3}+5x^2+x^{p\ m}+2x^n$$

A) 0; 4 B) 2; 3 C) 0; 2
D) 1; 2 E) 3; 4

30. Si el polinomio completo es de (4+a) términos

$P(x) = 2ax^{2a}+(2a-1)x^{2a\ 1}+(2a-2)x^{2a\ 2}+....$

hallar el valor de "a".

A) 0 B) 3 C) 1
D) 2 E) 4

31. Calcular H(3) a partir de

$H(x) = F(x+1) + G(x-1)$

donde $F(x-1) = x^2+x+1$ y

$G(x+1) = x^2-2x+2$

A) 4 B) 16 C) 32
D) 8 E) 35

32. Del polinomio

$P(x,y) = 3^5x^{n+3}y^{m\ 2}z^{6\ n} + x^{n+2}y^{m\ 3}$

$GA(P) = 11$; $G.R_x - G.R_y = 5$

Luego 2m+n es

A) 5 B) 15 C) 10
D) 25 E) 12

33. Sabiendo que $F(x)= -x^2+x+m$ y

$G(x)= x+3$,

hallar **m** de tal manera que

$F(G(F(2))) = -1$

Indicar el mayor valor.

A) 2 B) 0 C) 1
D) -1 E) -2

34. Si $P(x) = x$

$P[M(x)+G(x)] = 4x+6$

$P[M(x)-2G(x)] = x+12$,

hallar $M(G(2))$

A) 0 B) 1 C) 6
D) 3 E) 8

35. ¿Cuántos factores han de tomarse en la expresión: $P(x) = (x^2+1)(x^6+2)(x^{12}+3)$ ... tal que $P(x)$ sea de grado 330 ?

A) 10 B) 12 C) 13
D) 9 E) 8

36. Dado el polinomio

$P(2x-3) = (2x+3)^{4m} + 2(12x-6)^{2m} + (2x+1)^{2m}$,

calcular "m", si su término independiente es igual a 1 600

A) 1 B) 7 C) 0
D) 3 E) 2

37. Sean los polinomios:

$P(x) = 2x^3+5x^2+4x+1$

$Q(x) = (ax+b)^c\,(cx+d)^a+k$

$K \neq 1$; donde $P(x)-Q(x) \equiv 0$

Calcular

$$\left(\frac{b^c d^a}{1-k}\right)(a^c . c^a)$$

A) -1 B) 2 C) 1
D) -2 E) 4

38. Si al sumar $M(x)$ y $P(x,y)$ se obtiene un polinomio homogéneo donde

$M(x) = ax^{(a+1)^b . b^a}$

$P(y,z) = y^{(a-1)^a . b^{2b}} + 6z^{b^a\ 2b}$

Calcular $\sqrt[a]{b(a+1)}$; $ab \neq 0$

A) 2 B) -3 C) 3
D) -2 E) 1

39. Clasifique la expresión algebraica

$$P_{(x,y,z)} = \frac{5x^4y^3}{2z^{-3}} - \frac{\sqrt{2}x^{1/3}y^2}{\sqrt[3]{x^{\ 2}}} - \frac{\pi}{3}y^8z^{\ 6}$$

A) Racional entera
B) Irracional
C) Racional fraccionaria
D) No admite clasificación
E) Trascendente

40. Determinar el grado del polinomio $P(x)$ sabiendo que el grado de $[P(x)]^2\,[Q(x)]^3$ es igual a 21 ; además el grado de $[P(x)]^4\,[Q(x)]^2$ es igual a 22.

A) 2 B) 5 C) 3
D) 7 E) 1

1	B	11	D	21	C	31	C
2	D	12	E	22	E	32	E
3	E	13	C	23	C	33	C
4	C	14	E	24	C	34	E
5	B	15	C	25	C	35	D
6	C	16	B	26	D	36	A
7	D	17	D	27	D	37	B
8	E	18	B	28	E	38	A
9	A	19	C	29	A	39	C
10	E	20	C	30	B	40	C

Claves

CAPÍTULO

IV

Multiplicación algebraica

Lagrange, Joseph Lois (1736-1813)

Matemático, astrónomo, nacido en Italia y de sangre francesa. A los 16 años fue nombrado profesor de Matemática en la Real Escuela de Artillería de Turín.

Fue uno de los más grandes analistas del siglo XVIII, la mayor contribución al Álgebra está en la memoria que escribió en Berlín hacia 1767. "Sobre la Resolución de las Ecuaciones Numéricas", se hizo célebre por su teoría sobre las libraciones de la Luna y por su matematización y racionalización de la mecánica en su obra *Mecanique Analytique*. Descubrió también las llamadas series de Lagrange y la fórmula de interpolación que lleva su nombre.

Respetado por la revolución fue amigo de Bonaparte quien lo nombró Senador por sus cualidades de científico y genio.

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2 \equiv (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

ÁLGEBRA

LECTURA

La medición del infinito

Para mucha gente el infinito implica algo inmenso e imposible de llegar a conocer. En el lenguaje popular se utiliza a menudo esta palabra para indicar de forma vaga "extremadamente grande" o "sin posibilidad de ser contado". Frecuentemente se cita el número de estrellas en el cielo o de granos de arena en la playa. Estos ejemplos no son, desde luego, realmente infinitos, sólo podemos observar a simple vista dos o tres mil estrellas en un instante dado. De hecho, en la vida diaria nunca tenemos ocasión de encontrarnos con el infinito.

En la ciencia, sin embargo, se encuentra muchas veces el infinito, en ocasiones de forma descorazonadora. Hace mucho tiempo que los matemáticos empezaron a intentar obtener una medida de infinito y a descubrir reglas que permitieran que el infinito engrosara las filas de otros objetos matemáticos como un concepto lógico bien conocido y disciplinado. Iban a tener muchas sorpresas. Los griegos clásicos sólo consiguieron limitados progresos, y no fue sino hasta el siglo XIX cuando se lograron progresos decisivos con el trabajo de grandes matemáticos como George Cantor y Karl Weierstrass.

Incluso en la ciencia el infinito es, para muchos efectos, solamente la idealización de una cantidad, que en realidad es tan grande que considerándola como estrictamente infinita se comete un error despreciable. Pero, de vez en cuando, la aparición del infinito en una teoría física indica algo mucho más espectacular: el fin de la misma teoría o bien de lo que ésta describe. Éste es el caso de las singularidades del espacio-tiempo. Gracias a ellas nos encontraremos cara a cara con el infinito, y parece que nos están revelando algo muy profundo: que hemos llegado al fin del universo.

Fuente: Principios de Matemática Moderna - William E. Hartemus.

Multiplicación algebraica

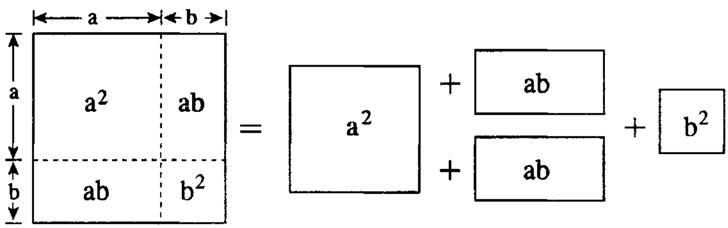
OBJETIVOS
- Saber aplicar la propiedad distributiva para multiplicar polinomios.
- Conocer el manejo de los **productos notables** por ser de suma importancia en la simplificación y factorización.
- Buscar la habilidad operativa en algunos casos para la resolución de ecuaciones.

INTRODUCCIÓN

Sabemos que la parte teórica de la matemática tiene su origen en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia antigua. Una vez descubiertos los números irracionales, en la aún no fortalecida matemática griega, hubo la necesidad de crear para la investigación científica una teoría matemática general adecuada, tanto para los números racionales como para los irracionales.

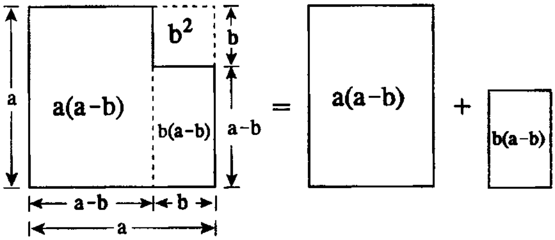
En cuanto se descubrieron los números irracionales resultó que la colección de magnitudes geométricas por ejemplo, los segmentos era más completa que el conjunto de los número racionales, entonces resultó oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo fue creado y recibió el nombre de **Álgebra Geométrica** pues desde este momento los productos notables -conocidos en la actualidad- tienen su interpretación geométrica.
Algunos de estos ejemplos se muestran a continuación:

1. Trinomio cuadrado perfecto



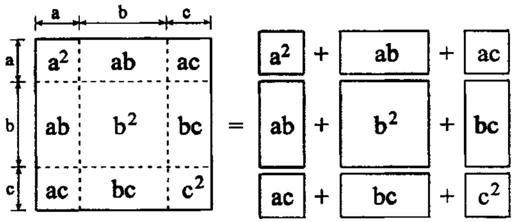
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

2. Diferencia de cuadrados



$$a(a-b)+b(a-b)=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

3. Desarrollo de un trinomio al cuadrado



$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es aquella operación matemática que consiste en hallar una tercera expresión llamada producto ($P(x)$), a partir de otras dos llamadas multiplicando $[M(x)]$ y multiplicador $[N(x)]$ respectivamente, tal que

$$P(x)=M(x)\,.\,N(x)$$

Por ejemplo

Al multiplicar $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ con $(x+x^2)$, se obtendrá como producto x^3+x^2-x-1

LEYES DE LA MULTIPLICACIÓN

Para dos expresiones a, b, cualesquiera, se cumple las leyes siguientes:

1. Ley conmutativa

$$a\,.\,b=b\,.\,a$$

Esto justifica que en una multiplicación el orden de sus factores no altera el producto.

Ejemplos:

$5.3=15=3.5$

$(x^2-1)(x^3+2)=(x^3+2)(x^2-1)$

2. Ley asociativa

$$(ab)c=a(bc)$$

Ejemplos:

$5(2 . 3) = 5 . 6 = 30 = (5 . 2)3 = 10 . 3$

$(3x-1)[(x+1)y] = [(3x-1)(x+1)]y$

3. Ley de la identidad multiplicativa

$$\boxed{a . 1 = a}$$

El elemento 1 recibe el nombre de neutro multiplicativo.

Ejemplo:

El elemento neutro multiplicativo de 17 es 1 ya que $17.1 = 17$

4. Ley del inverso multiplicativo

Para todo a ($a \neq 0$) existe un único elemento llamado inverso de **a**, denotado por a^{-1}, de tal modo que $\mathbf{a.a^{-1} = 1}$

Ejemplo:

El inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$ puesto que $5 . \frac{1}{5} = 1$

El inverso multiplicativo de $-\frac{1}{3}$ es -3 puesto que $\left(-\frac{1}{3}\right)(-3) = 1$

TEOREMA

Para $a \neq 0$, el producto de "ab" es "a" si y sólo si $b = 1$

Asimismo el producto ab es cero, si y sólo si

$a = 0 \quad \vee \quad b = 0$

Ejemplo:

$(4x+y)(3y-x) = 0$ solamente cuando $4x+y = 0$ ó $3y-x = 0$

5. Ley distributiva

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$$

Ejemplo:

1. $x^5(y+z^2) = x^5y+x^5z^2$

2. $a^4(a^2+b^3) = a^6+a^4b^3$

MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES DE UN TÉRMINO

Se aplican las leyes de los exponentes.

Ejemplo:

$$(-2xy^2)\left[\frac{3x^2}{y}\right] = -6x^3y$$

Recordar:

$$\boxed{x^m . x^n = x^{m+n}} \qquad \boxed{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$$

Multiplicación de una expresión con otra de dos o más términos. Para obtener el producto se emplea la propiedad distributiva.

$$\boxed{a(b+c) = a . b + a . c}$$

Ejemplos:

1. $-\frac{1}{2}x^3y\{x^2 - 4x + \frac{7}{y}\} = \underbrace{-\frac{1}{2}x^5y + 2x^4y - \frac{7}{2}x^3}_{\text{producto}}$

2. $\frac{3}{4}x^3y^5(x^4+y^7+x^2y^3) = \frac{3}{4}x^7y^5 + \frac{3}{4}x^3y^{12} + \frac{3}{4}x^5y^8$

3. $(x+2y^2)(3x^2 - y^3) =$

$= x . 3x^2 - x.y^3 + 2y^2 . 3x^2 \quad 2y^2 . y^3$

$= 3x^3 - xy^3 + 6x^2y^2 - 2y^5$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Es un caso particular de la multiplicación algebraica, con la particularidad que sus elementos son polinomios. En este caso se establece una identidad entre tales polinomios.
De modo que:

$$\underbrace{A_{(x)}\,.\,B_{(x)}}_{\text{Mult. Indicada o por realizarla}} \equiv \underbrace{C_{(x)}}_{\text{Producto}}$$

Identidad fundamental

$$\boxed{\underbrace{A(x)}_{\text{multiplicando}}.\underbrace{B(x)}_{\text{multiplicador}} \equiv \underbrace{C(x)}_{\text{producto}}}$$

Ejemplos:

1. $(x-1)[x^2+x+1] \equiv x^3-1$
3. $(x+y)^2\,(x-y)^2 \equiv (x^2-y^2)^2$
2. $(x+3)(x-3) \equiv x^2-9$
4. $(x+7)(x+2) \equiv x^2+9x+14$

GRADO DEL POLINOMIO PRODUCTO

Sean los polinomios

$$P(x) = a_0x^m + a_m$$
$$Q(x) = b_0x^n + b_n\,;\ \{m,n\} \subset \mathbb{Z}^+$$

entonces

$$C(x) = P(x).Q(x) = C_0x^{m+n} + C_1x^m + C_2x^n + C_3$$

de donde

$$\boxed{\text{grado } [(P.Q)_{(x)}] = \text{grado } P(x) + \text{grado } Q(x)}$$

> **NOTA**
> En el caso de que
> $P(x) = (a_0x^m + b)^n$
> $\quad = A_0x^{mn} + \dots + B$
> El grado de $P(x)$ será m.n, su término independiente $(+b)^n$ igual a B

Ejemplos:

1. Sea $P(x) = x^5+3x^3+9x+1$
   $Q(x) = 3x^9+x+7$
   como el grado de $P(x)$ es 5 y el grado de $Q(x)$ es 9
   $\Rightarrow$ grado de $P(x).Q(x)$ es $5+9 = 14$

2. Sea $P(x) = (3x^7+2x-16)^3$
   $S(x) = (2x+x^2-x^6)^2$
   como el grado de $P(x)$ es 7(3) y el grado de $S(x)$ es 6(2)
   $\therefore$ grado de $P(x).S(x)$ es $21+12=33$

PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, considerando implícita la propiedad distributiva de la multiplicación, por la forma que presentan:

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

1. Trinomio cuadrado perfecto

$$\boxed{(a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Tenga en cuenta que $(a-b)^2 = (b-a)^2$

Ejemplos:

1. $(2x^2+3x^3)^2 = (2x^2)^2+2(2x^2)(3x^3)+(3x^3)^2$
   $= 4x^4+12x^5+9x^6$
2. $(5x^4-y^6)^2 = (5x^4)^2-2(5x^4)(y^6)+(y^6)^2$
   $= 25x^8-10x^4y^6+y^{12}$

> **Corolario "Identidades de Legendre"**
> $(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$ .... (1)
> $(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$ .... (2)
> $(a+b)^4-(a-b)^4 \equiv 8ab(a^2+b^2)$ .... (3)

Ejemplos:

1. $(2x+3y)^2 + (2x-3y)^2 = 2((2x)^2+(3y)^2)$
   $= 2(4x^2+9y^2)$
2. $(3x^2y+xy^2)^2 - (3x^2y-xy^2)^2 = 4.3x^2y.xy^2$
   $= 12x^3y^3$
3. $(m+2n)^4-(m-2n)^4=8.m.2n(m^2+4n^2)$
   $= 16mn(m^2+4n^2)$

> **TEOREMA**
>
> Todo trinomio de la forma ax^2+bx+c es cuadrado perfecto si, y sólo si $b^2 = 4ac$

Ejemplo:

$4x^2+12x+9$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que $12^2 = 4(4)(9)$, más aún es equivalente a $(2x+3)^2$

2. Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

Ejemplos:

1. $(3x+2y)(3x-2y) \equiv (3x)^2-(2y)^2 \equiv 9x^2-4y^2$
2. $(4x^3+3z^4)(4x^3-3z^4) \equiv (4x^3)^2-(3z^4)^2$
   $\equiv 16x^6 - 9z^8$
3. $(m+n+2p)(m+n-2p) \equiv (m+n)^2-(2p)^2$
   $\equiv (m+n)^2-4p^2$

3. Desarrollo de un trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$$(a+b-c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab-bc-ac)$$

$$(a-b-c)^2 \equiv (-(b+c-a))^2 \equiv (b+c-a)^2$$

Ejemplos:

1. $(2x+3y+z^2)^2 \equiv (2x)^2+(3y)^2+(z^2)^2$
   $+ 2(2x)(3y) + 2(2x)z^2 + 2(3y)z^2$
   $\equiv 4x^2 + 9y^2+z^4 + 12xy + 4xz^2+6yz^2$
2. Si $m+n+p = 1$, $m^2+n^2+p^2 = 2$
   hallar $mn + np + mp$
   Resolución
   De la identidad
   $(m+n+p)^2 = m^2+n^2+p^2$
   $+ 2(mn+mp+np)$
   Reemplazando los datos
   $1^2 = 2 + 2(mn+mp+np)$
   $\therefore mn + mp + np = -\dfrac{1}{2}$

4. Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$\equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

> **NOTA:**
> $(a+b)^3+(a-b)^3 \equiv 2a(a^2+3b^2)$
> $(a+b)^3-(a-b)^3 \equiv 2b(3a^2+b^2)$

Ejemplos:

1. $(2x+3y)^3 \equiv (2x)^3 + 3(2x)^2(3y)$
   $+ 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \equiv 8x^3 + 36x^2y$
   $+ 54xy^2+27y^3$
2. $(ax-by)^3 = (ax)^3 - 3(ax)^2by$
   $+ 3ax(by)^2 - (by)^3 = a^3x^3 - 3a^2bx^2y$
   $+ 3ab^2xy^2 - b^3y^3$
3. Si $x+y = 3$ / $xy = 4$, hallar: x^3+y^3
   Resolución:
   Reemplazando los datos en
   $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3+3xy(x+y)$
   $3^3 \equiv x^3+y^3+3(4)(3) \Rightarrow x^3+y^3 = -9$

5. Suma y diferencia de cubos

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3}$$

$$\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3}$$

Ejemplos:

1. $(x+2)(x^2-2x+4) \equiv x^3+2^3 \equiv x^3+8$
2. $(y^2+5zy+25z^2)(y-5z) \equiv y^3-(5z)^3 \equiv y^3-125z^3$
3. $(4x^2+6xy^2+9z^4)(2x-3z^2) \equiv (2x)^3-(3z^2)^3$
   $\equiv 8x^3-27z^6$

6. Desarrollo de un trinomio al cubo

$$\boxed{(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}$$

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc}$$

Ejemplos:

1. $(x^2+x+1)^3 = (x^2)^3+(x)^3+1+3(x^2+x)(x^2+1)(x+1) = x^6+x^3+1+3(x^2+x)(x^2+1)(x+1)$

2. Si $a^3+b^3+c^3=0$, hallar el valor de $\dfrac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc}$

Resolución:

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$$

Por dato $\quad a^3+b^3+c^3 = 0$

Luego $\quad (a+b+c)^3 = (a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

$$\therefore \quad \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc} = 1$$

3. Si $a+b+c=0$, hallar el equivalente de $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$

Resolución:

Sabemos que $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$ .... (α)

Como: $a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ a+c=-b \\ b+c=-a \end{cases}$

Luego en (α) se tiene $\quad 0 = a^3+b^3+c^3+3(-c)(-b)(-a)$

De donde

$$a^3+b^3+c^3 = 3abc \quad \rightarrow \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{4abc} = \frac{3}{4}$$

7. Producto de multiplicar binomios con un término común

$$\boxed{(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab}$$

También:

* $\boxed{(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$
* $\boxed{(x-a)(x-b)(x-c) \equiv x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc}$

Ejemplos:

1. $(x+5)(x+7) \equiv x^2+(5+7)x+5.7 \equiv x^2+12x+35$
2. $(x-6)(x+9) \equiv x^2+(9-6)x-6.9 \equiv x^2+3x-54$
3. $(x-10)(x-12) \equiv x^2-(10+12)x+10.12 \equiv x^2-22x+120$
4. $(x+2)(x+5)(x+3) \equiv x^3+(2+5+3)x^2 + (2.5+2.3+5.3)x+2.5.3 \equiv x^3 + 10x^2 + 31x+30$
5. $(x-4)(x+6)(x-3) \equiv x^3 + (6-4-3)x^2 + (-4.6+4.3-6.3)x + 4.6.3 \equiv x^3-x^2-30x+72$

8. Identidad trinómica (Identidad de Argan 'd)

$$\boxed{\begin{array}{l}(x^2+x+1)(x^2-x+1) \equiv x^4+x^2+1 \\ (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \equiv x^4+x^2y^2+y^4\end{array}}$$

En general:

$$\boxed{(x^{2m}+x^my^n+y^{2n})(x^{2m}-x^my^n+y^{2n}) \equiv x^{4m}+x^{2m}y^{2n}+y^{4n}}$$

1. $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \equiv x^8 + x^4 + 1$
2. $(x^6 + x^3y + y^2)(x^6 - x^3y + y^2) \equiv (x^3)^4 + (x^3y)^2 + y^4 \equiv x^{12} + x^6y^2 + y^4$
3. $(4x^2+6xy + 9y^2)(4x^2-6xy+9y^2) \equiv (2x)^4 + [(2x)(3y)]^2 + (3y)^4 \equiv 16x^4 + 36x^2y^2 + 81y^4$

9. Identidades adicionales (Identidad de Gauss)

$$\boxed{a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}$$

$$\boxed{(a+b)(b+c)(c+a)+abc \equiv (a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Ejemplos:

1. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 3(ab + ac + cb)$, hallar el equivalente de

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)(ab+ac+bc)}$$

Resolución:

En la identidad de Gauss

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b+c)(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{3(ab+ac+bc)}-ab-ac-bc)$

entonces

$a^3+b^3+c^3-3abc = 2(a+b+c)(ab+ac+bc)$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)(ab+ac+bc)} = 2$$

2. Reducir

$$\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{9(x-y)(y-z)(z-x)}$$

Resolución:

Haciendo

$x - y = m \quad ; \quad y - z = n \quad ; \quad z - x = p$

Se observa que $m + n + p = 0$

luego tendremos $\dfrac{m^3+n^3+p^3}{9mnp}$

pero si

$m+m+p = 0 \rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$

de donde

$$\frac{m^3+n^3+p^3}{9mnp} = \frac{3mnp}{9mnp} = \frac{1}{3}$$

10. Igualdades condicionales

1. Si $\underline{a+b+c=0}$

se verifican

- $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$
- $(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

IMPORTANTE: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Además

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}$$

2. Si

$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

$\wedge\ a;b;c\in\mathbb{R} \Rightarrow a=b=c$

También, si

$a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}=a^nb^n+a^nc^n+b^nc^n$

$\wedge\ a;b;c\in\mathbb{R}$

$n\in\mathbb{N} \Rightarrow a=b=c$

Ejemplos:

1. Hallar $\dfrac{m^5+n^5+p^5}{mnp(mn+np+mp)}$

si $m+n+p=0$

Resolución:

De la identidad condicional

$$\frac{m^5+n^5+p^5}{5}=\frac{m^2+n^2+p^2}{2}\cdot\frac{m^3+n^3+p^3}{3}$$

$$=\frac{-2(mn+mp+np)}{2}\cdot\frac{3mnp}{3}$$

$$\therefore\ \frac{m^5+n^5+p^5}{mnp(mn+np+mp)}=-5$$

2. Hallar el equivalente de

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^3c^2}$$

si a, b, c son reales no nulos, tales que $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Resolución:

Si $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$; $a,b,c\in\mathbb{R}$

De la identidad se tiene $a=b=c$

Luego lo buscado es equivalente a

$$\frac{a^5+a^5+a^5}{5}\cdot\frac{a^2+a^2+a^2}{a^2a^3.a^2}=\frac{3a^5.3a^2}{5a^7}=\frac{9}{5}$$

3. Hallar el valor numérico de la expresión $2x+3y^2+4z^3$

si x, y, z son reales que cumplen la siguiente

$$x^2+y^2+2y-4x+5+9z^2=0$$

Resolución:

El dato es equivalente a

$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)+9z^2=0$

$\equiv (x-2)^2+(y+1)^2+9z^2=0$

$\Rightarrow x-2=0\ \wedge\ y+1=0\ \wedge z=0$

de donde $x=2$, $y=-1$, $z=0$

Reemplazando lo buscado es

$2(2)+3(-1)^2+4(0)=7$

4. Sabiendo que

$x+y=-z$ .... (1)

$xy+xz+yz=1$ .... (2)

reducir $\dfrac{x^4}{yz}+\dfrac{y^4}{xz}+\dfrac{z^4}{xy}$

Resolución:

Lo pedido es equivalente a

$\dfrac{x^5+y^5+z^5}{xyz}$; pero de (1) $x+y+z=0$

sabemos también que

$x^5+y^5+z^5=-5xyz(xy+xz+yz)$

$\dfrac{x^5+y^5+z^5}{xyz}=-5(xy+xz+yz)$

$$\therefore\ \frac{x^5+y^5+z^5}{xyz}=-5$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Si se cumple que $\dfrac{x}{2y}+\dfrac{2y}{x}=2$

calcular $\left(\dfrac{x}{y}\right)^8$

Resolución:

De la condición $\dfrac{x}{2y}+\dfrac{2y}{x}=2$

Multiplicando por $2xy$ se tiene

$$x^2+(2y)^2=2x(2y)$$

entonces $\quad x^2-4xy+4y^2=0$

luego $\quad (x-2y)^2=0$

$$x-2y=0 \Rightarrow x=2y$$

$\therefore \left(\dfrac{x}{y}\right)^8$ equivale a $\left(\dfrac{2y}{y}\right)^8=2^8=256$

Problema 2

Sabiendo que $\quad b^3=1\ ;\ b\neq 1$

simplificar $\quad \left(\dfrac{1}{\dfrac{b^4}{1+b^5}}\right)^3$

Resolución:

Lo pedido es equivalente a $\left(\dfrac{b^5+1}{b^4}\right)^3$

del dato $\quad b^3=1$

se deduce $\quad b^5=b^3.b^2=1.b^2=b^2$

$\qquad\qquad b^4=b^3.b=1.b=b$

además $\quad b^3-1=0 \Leftrightarrow (b-1)(b^2+b+1)=0$

como $\quad b\neq 1 \Rightarrow b^2+b+1=0 \Rightarrow b^2+1=-b$

de donde $\left(\dfrac{b^5+1}{b^4}\right)^3=\left(\dfrac{b^2+1}{b}\right)^3=\left(\dfrac{-b}{b}\right)^3=-1$

Problema 3

Teniendo en cuenta $\qquad n^2=n+1\ ;\ n\in \mathbb{R}^+$

reducir

$$K=\sqrt[8]{\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)+\frac{1}{n^8}}$$

Resolución:

La idea inmediata es buscar diferencia de cuadrados.

De la condición $\ n^2=n+1$, se tiene

$$n=1+\frac{1}{n} \Rightarrow n-\frac{1}{n}=1$$

Luego 1 es reemplazado por $\ n-\dfrac{1}{n}$, veamos

$$K=\sqrt[8]{\underbrace{1}_{\left(n-\frac{1}{n}\right)}.\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)+\frac{1}{n^8}}$$

$$\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left(n^4-\frac{1}{n^4}\right)\left(n^4+\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\left(n^8-\cancel{\frac{1}{n^8}}\right)+\cancel{\frac{1}{n^8}}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt[8]{n^8} \qquad \therefore\ K=n$$

Problema 4

Si $a^2+b^2+c^2=3 \wedge ab+ac+bc=2$, hallar el valor de $Q=(a+2b+3c)^2+(2a+3b+c)^2+(3a+b+2c)^2$

Resolución:

Efectuando y reduciendo términos semejantes se tiene $\quad Q=14(a^2+b^2+c^2)+22(ab+ac+bc)$

Reemplazando datos $\quad Q=14(3)+22(2)$

$$\therefore\ Q=86$$

Problema 5

Sea $\ P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

halle el valor numérico de $P(x)$ para

$$x=\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

Resolución:

En el polinomio

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

multiplicando como se indica

$$P(x)=(x^3+1)(x^3-1)$$

$$P(x)=x^6-1$$

De la condición

$$x^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad x^2=4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15}-2\sqrt{\underbrace{(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})}_{16-15}}$$

$$\therefore\quad x^2=8-2(1)\Rightarrow x^2=6$$

Reemplazando dato V.N. $P(x)=6^3-1=215$

Problema 6

Si $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=2x$,

calcular $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\,;\,x\neq 0$

Resolución:

Sea $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=H$

Multiplicando H con la condición

$$\underbrace{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}_{\text{diferencia de cuadrados}}=2xH$$

$(a+x)-(a-x)=2xH \quad\Rightarrow\quad 2x=2xH$

$\therefore\ H=1$

Problema 7

Si el grado del polinomio

$P(x)=(9x^8-1)^n(2x^2+3x^3-1)^{n-2}(3+x^3)^3$ es 47,

determinar $\sqrt[10]{\text{coef. principal de } P(x)}$

Resolución:

Grado de $P(x)=8n+3(n-2)+3.3$

Entonces $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{condición}}}{11n+3=47} \quad\Rightarrow\quad n=4$

Ahora reemplazando en

$P(x)=(9x^8-1)^4(3x^3+2x^2-1)^2(x^3+2)^3$

Finalmente

$$\sqrt[10]{9^4.3^2}=\sqrt[10]{3^8.3^2}=\sqrt[10]{3^{10}}=3$$

Problema 8

Determinar el grado del producto de multiplicar a los polinomios

$$\underbrace{(x^{1^2}+1)^2(x^{2^2}+2)^3(x^{3^2}+3)^4(x^{4^2}+4)^5\ldots\ldots}_{\text{"10" multiplicaciones indicadas}}$$

Resolución:

Si asumimos que el polinomio producto es $P(x)$, tendremos

$\text{grado}[P(x)]=1^2.2+2^2.3+3^2.4+4^2.5+\ldots.+10^2.11$

$=2+12+36+80+\ldots..+1100$

Desdoblando

$=(1^2+1^3)+(2^2+2^3)+(3^2+3^3)+\ldots.+(10^2+10^3)$

Agrupando

$$=\underbrace{(1^2+2^2+3^2+\ldots 10^2)}_{\frac{10.11.21}{6}}+\underbrace{(1^3+2^3+\ldots+10^3)}_{\left(\frac{10.11}{2}\right)^2}$$

$=5.11.7+55^2=55(7+55)$

$=55.62=3410$

Problema 9

Con $a+2b+3c=1{,}5x$

Simplificar

$$\frac{(x-a)^2+(x-2b)^2+(x-3c)^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$$

Resolución:

Desarrollando los binomios al cuadrado en el numerador

$$\frac{(x^2-2ax+a^2)+(x^2-4bx+4b^2)+(x^2-6cx+9c^2)}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$$

Agrupar términos semejantes

$$\frac{3x^2-2x(a+2b+3c)+a^2+4b^2+9c^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}$$

Reemplazando $a+2b+3c=1{,}5x$

se obtiene

$$\frac{\cancel{3x^2}-\cancel{3x^2}+a^2+4b^2+9c^2}{2(a^2+4b^2+9c^2)}=\frac{1}{2}$$

Problema 10

Si $\left(\frac{a}{b}\right)^n + \left(\frac{b}{a}\right)^n = 11$

un valor de $\frac{a^n - b^n}{\sqrt{(ab)^n}}$ con a>b será

Resolución:

Al tener una sola condición y existir tres incógnitas, no queda otra alternativa más que buscar una relación entre el numerador y denominador de lo buscado a partir del dato. Esta característica nacerá de un trinomio cuadrado perfecto.

Efectuando

$\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{a^n} = 11$ .... multiplicando por (a^nb^n)

$(a^n)^2+(b^n)^2=11a^n.b^n$.... sumemos $(-2a^nb^n)$

$$\underbrace{(a^n)^2 - 2a^nb^n + (b^n)^2}_{\text{es un trinomio cuadrado perfecto}} = 9a^nb^n$$

Extrayendo raíz cuadrada

$$(a^n - b^n)^2 = 9a^nb^n$$

$$a^n - b^n = \pm 3\sqrt{a^n b^n}$$

Ahora reemplazando en

$$\frac{a^n - b^n}{\sqrt{a^nb^n}} = \frac{\pm 3\sqrt{a^n b^n}}{\sqrt{a^n b^n}} = \pm 3$$

Problema 11

Si: x, y, z son tres números reales que verifican la igualdad

$$x^2+y^2+z^2+14 = 2(x+2y+3z)$$

proporcionar el valor de $\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

Resolución:

Como la condicional establece que x, y, z son reales, su análisis podrá darse buscando la formación de cuadrados perfectos. En nuestro ejemplo, si agrupamos términos buscando la formación de Trinomio Cuadrado Perfecto tendremos:

$$(x^2-2x+1) + (y^2-4y+4)+(z^2-6z+9) = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$$

Llegando a esta forma será fácil interpretar que la única razón de que esta igualdad se justifique (en $\mathbb{R}$) será cuando

$$x-1 = 0 \ \wedge\ y-2 = 0 \ \wedge\ z-3 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \ \wedge\ \boxed{y = 2} \ \wedge\ \boxed{z = 3}$$

Finalmente reemplazando en

$$\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} = \frac{1}{6}$$

Problema 12

Para $a.b \neq 0$

Simplificar $\frac{[(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 - 4(a^2 - b^2)^2}{(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2}$

Resolución:

Operemos y ordenemos convenientemente, buscando tener la identidad conocida. Así por ejemplo en

$$\underbrace{(a+b)^2 + (a-b)^2}_{\text{1ra. Legendre}} \equiv 2(a^2+b^2)$$

Pero en

$$\underbrace{(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2}_{\substack{\text{se tiene la 2da. identidad}\\ \text{de Legendre con signo negativo}}} \equiv -4a^3b^3$$

Luego al reemplazar en

$$\frac{[2(a^2+b^2)]^2 - 4(a^2-b^2)^2}{-4a^3b^3} = \frac{4\overbrace{\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}}^{\text{2do. Legendre}}}{-4a^3b^3}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{-a^3b^3} = -\frac{4}{ab}$$

Problema 13

Al reducir la expresión

$$[(a+2b)^2-(a-2b)^2+a^2+16b^2]-(4b-a)^2$$

se obtiene

Resolución:

Como

$$\underbrace{(a+2b)^2 - (a-2b)^2}_{\text{2da. Legendre}} \equiv 4a(2b) = 8ab$$

entonces reemplazamos en la expresión inicial

$$\underbrace{\left[8ab+a^2+16b^2\right]}_{\text{es un T.C.P}}-(4b-a)^2=\underbrace{(a+4b)^2-(4b-a)^2}_{\text{2da. Legendre}}$$

$$=4(4b)a=16ab$$

Problema 14

Con: $(x+z+y+z)^2+(x-z+y-z)^2=8z(z+y)$

reducir $\left(\frac{x-y}{z-y}\right)^3+\left(\frac{y-z}{x-z}\right)^3+\left(\frac{2z}{x+y}\right)^3$

Resolución:

Como la condición es única, pero existen tres variables, entonces reduzcamos a fin de visualizar alguna relación

$$\underbrace{(x+y+2z)^2+(x+y-2z)^2}_{\text{1ra. Legendre}}=\underbrace{4(2z)(x+y)}_{\substack{\text{proviene de:}\\(x+y+2z)^2-(x+y-2z)^2}}$$

luego

$$(x+y-2z)^2=0 \Rightarrow x+y-2z=0$$

obteniéndose

$$x-y=2(z-y)$$
$$y-z=z-x$$
$$x+y=2z$$

Al reemplazar las equivalencias se tiene

$$\left[\frac{2(z-y)}{z-y}\right]^3+\left[\frac{z-x}{x-z}\right]^3+\left[\frac{2z}{2z}\right]^3=(2)^3+(-1)^3+(1)^3=8$$

Problema 15

Con $x^2+y^3=1 \wedge x^4+y^6=2$,

el valor de $(x^2-y^3)^2-x^4-2x^2y^3-y^6$, es:

Resolución:

Se quiere conocer

$$\underbrace{(x^2-y^3)^2-\underbrace{(x^4+2x^2y^3+y^6)}_{\text{T.C.P.}}}_{\text{2da. Legendre}}=-4x^2y^3$$

Por otra parte, elevando al cuadrado la primera condición

$$\underbrace{x^4+y^6}_{2}+2x^2y^3=1 \Rightarrow 2x^2y^3=-1$$

Finalmente $-4x^2y^3=-2(2x^2y^3)=2$

$\therefore$ Lo pedido resulta ser 2

Problema 16

Para: $x\neq 0$, simplificar

$$\frac{x^2+3y^4}{(x+y^2)^3+(x-y^2)^3}$$

Resolución:

En el denominador, desarrollemos los binomios:

$$(x+y^2)^3=x^3+3x^2y^2+3xy^4+y^6$$
$$(x-y^2)^3=x^3-3x^2y^2+3xy^4-y^6$$

Sumemos

$$(x+y^2)^3+(x-y^2)^3=2x^3+6xy^4$$
$$=2x(x^2+3y^4)$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2+3y^4}{(x+y^2)^3+(x-y^2)^3}=\frac{x^2+3y^4}{2x(x^2+3y^4)}=\frac{1}{2x}$$

Problema 17

Cumpliéndose que

$$ab(a+b)=1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$a^3b^3(a^3+b^3)=\frac{5}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

el valor de: $a^2b^2(a^2+b^2)$, será:

Resolución:

Como $a^2b+ab^2=1$ .... de la condición (1)

elevemos al cubo

$$\underbrace{a^6b^3+a^3b^6}_{\frac{5}{2}}+3a^3b^3\underbrace{\left(a^2b+ab^2\right)}_{1}=a$$

De aquí $a^3b^3=-\frac{1}{2}$

De (1) Elevemos al cuadrado

$$\underbrace{a^4b^2+a^2b^4}+\underbrace{2a^3b^3}_{\downarrow}=1$$

$$a^2b^2(a^2+b^2)+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \Rightarrow a^2b^2(a^2+b^2)=2$$

Problema 18

Si

$$x=\sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

obtener el valor de x^3+bx+a

Resolución:

En la condición elevemos al cubo, haciendo que

$$\Delta=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3$$

entonces

$$x=\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\Delta}}}_{m}+\underbrace{\sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\Delta}}}_{n}$$

Aquí elevemos al cubo y desarrollemos en su segundo miembro

$$x^3=\left(-\frac{a}{2}+\sqrt{\Delta}\right)+\left(-\frac{a}{2}-\sqrt{\Delta}\right)+3mn\underbrace{(m+n)}_{x}$$

pero

$$mn=\sqrt[3]{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\Delta}=\sqrt[3]{\left(-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

luego $x^3=-a+3\left(-\frac{b}{3}\right)x$

$$\therefore\quad x^3+bx+a=0$$

Problema 19

Simplifique la expresión

$$\sqrt[3]{(m^2-n^2)[m^4+m^2n^2+n^4]-3m^2n^2(m+n)(m-n)}$$

Resolución:

Operemos en el radicando

$$\underbrace{(m^2-n^2)[m^4+n^2n^2+n^4]}_{\text{generará una diferencia de cubos}}-3m^2n^2(m^2-n^2)=$$

$$\underbrace{(m^2)^3-(n^2)^3-3m^2n^2(m^2-n^2)}_{\text{es el desarrollo de un binomio al cubo}}=(m^2-n^2)^3$$

luego al reemplazar se obtiene

$$\sqrt[3]{(m^2-n^2)^3}=m^2-n^2$$

Problema 20

Si: $a^3=b^3$; $a\neq b$

halle el valor de $\dfrac{ab}{(a-b)^2}$

Resolución:

De la condición $a^3-b^3=0$

$$(a-b)[a^2+ab+b^2]=0$$

Esta igualdad se verificaría si:

$a-b=0\Rightarrow a=b$ $\vee$ $a^2+ab+b^2=0$

Por dato esta solución queda denegada

adicionando: $-3ab$

$$a^2-2ab+b^2=-3ab$$

$$(a-b)^2=-3ab$$

Como $a\neq b\Rightarrow (a-b)^2=-3ab$

Al reemplazar en $\dfrac{ab}{(a-b)^2}=\dfrac{ab}{-3ab}=-\dfrac{1}{3}$

Problema 21

Con $x^3+y^3+z^3=3$

reducir

$$N=\frac{(x+y+z)^3-2}{9+(x^3+y^3+z^3)^3(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Resolución:

Recordemos que

$$(x+y+z)^3\equiv\underbrace{x^3+y^3+z^3}_{3}+3(x+y)(y+z)(z+x)$$

Llamando a $(x+y)(x+z)(z+y)=A$

se tiene $(x+y+z)^3=3+3A$

que al sustituir en lo requerido

$$\frac{3+3A-2}{9+3^3.A}=\frac{1+3A}{9(1+3A)}=\frac{1}{9}$$

$$\therefore\quad N=\frac{1}{9}$$

Problema 22

Con $abc=0$ $\wedge$ $a+b+c=1$

halle el valor de

$$K=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Resolución:

Como $a+b+c=1$ elevemos al cuadrado

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$$

llamemos "α" a: $ab+bc+ca$,

luego se tiene $a^2+b^2+c^2=1-2\alpha$

Así mismo elevando al cubo $a + b + c = 1$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3\underbrace{(a+b+c)}_{1}\underbrace{[ab+bc+ca]}_{\alpha}-3abc=1$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1-3\alpha$$

Reemplazando en **K** se tiene

$$\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)-\left(\frac{1-3\alpha}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ K=\frac{1}{6}$$

Problema 23

Con $a^3 + b^3 + c^3 = 0$

reducir $\dfrac{3abc}{a(b-a)+b(c-b)+c(a-c)}$

Resolución:

Planteando la identidad Gaussiana

$$\underbrace{a^3+b^3+c^3}_{0} - 3abc \equiv (a+b+c)x$$

$$x = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

De aquí $3abc = (a+b+c)(-x)$

Reemplazando en la expresión, se tiene

$$\frac{(a+b+c)(-x)}{\underbrace{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}_{-x}}=a+b+c$$

$\therefore$ Lo pedido es $a+b+c$

Problema 24

Sabiendo que

$a+b+c = x$ .... (1)

$ab+bc+ca = x^2$ .... (2)

Expresar a

$T = (x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3-3abc$ en términos de x

Resolución:

Al desarrollar la expresión

$$T = 3x^3 + 3(a+b+c)x^2 + 3(a^2+b^2+c^2)x + (a^3+b^3+c^3)-3abc$$

De (1) al cuadrado:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\underbrace{(ab+bc+ca)}_{x^2} = x^2$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -x^2$$

De modo que la expresión queda reducida a

$T = 3x^3 + 3(x)x^2 + 3(-x^2)x + a^3+b^3+c^3 - 3abc$

$T = 3x^3 + \cancel{3x^3} - \cancel{3x^3} + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Pero

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv \underbrace{(a+b+c)}_{x}(\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{-x^2} - \underbrace{(ab+ac+bc)}_{x^2})$$

$$= -2x^3$$

Entonces $T = 3x^3 + (-2x^3)$

$$\therefore\ T = x^3$$

Problema 25

Cumpliéndose que

$x + b + c = 3a$ .... (1)

$y + c + a = 3b$ .... (2)

$z + a + b = 3c$; $abc\neq0$ .... (3)

Determinar el valor de

$$S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)}$$

con $abc \neq 0$

Resolución:

Sumando las condiciones (1), (2) y (3)

$x + y + z + 2(a+b+c) = 3(a+b+c)$

$x + y + z = a + b + c$

Usando la identidad de Gauss en

$$S=\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

$$S=\frac{\cancel{(x+y+z)}\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right]}{\cancel{(a+b+c)}\left[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right]}$$

$$=\frac{2\{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\}}{2\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\}}$$

$$=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

De (1) - (2) $x-y=4(a-b)$
(2) - (3): $y-z=4(b-c)$
(3) - (2): $z-x=4(c-a)$

Reemplazando en S

$$\frac{[4(a-b)]^2+[4(b-c)]^2+[4(c-a)]^2}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}=16$$

Problema 26

Sabiendo que el polinomio

$P_{(x,y,z)}=(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2$

Se anula en $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$

Reducir $\dfrac{2a^3-b^3-c^3}{ab+bc+ca}$

Resolución:

Como $P_{(x,y,z)}=2(xy+yz+zx)$

Por condición

$$P_{\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)}=2\left\{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right\}=0$$

de donde $a+b+c=0$

Por identidad condicional $a^3+b^3+c^3=3abc$

Ahora acondicionemos la expresión pedida

$$\frac{3a^3-(a^3+b^3+c^3)}{ab+bc+ca}=\frac{3a^3-3abc}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{3a(a^2-bc)}{\underbrace{a(b+c)}_{-a^2}+bc}=-3a$$

Problema 27

Al cumplirse que

$$\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[9]{\frac{a}{c}}+\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}=0$$

Determinar el valor de

$$\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}\right)^9$$

Resolución:

Usando la identidad condicional se tiene

$$\left(\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}\right)^3+\left(\sqrt[9]{\frac{a}{c}}\right)^3+\left(\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}\right)^3=3.\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}.\frac{a}{c}.\frac{b^2}{c^2}}$$

Operando $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2=3.\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$

De donde $\underbrace{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^2-2\sqrt[3]{\frac{a}{c}}+\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2}_{\text{T.C.P.}}=0$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right)^2=0\rightarrow\frac{a}{b}-\frac{b}{c}$$

Entonces $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{c}}\right)^2=\left(\frac{ac}{b^2}\right)^2=1$

Problema 28

Si $a^{12}+b^{12}+c^{12}=8$ .... (1)

además

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{abc}=\frac{6}{a+b+c}\ \text{..........}\ (2)$$

Calcular $a^6+b^6+c^6$

Resolución:

De la condición (2) se tiene

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{abc}=\frac{6}{a+b+c}$$

$$\underbrace{(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]}_{a^3+b^3+c^3-3abc\ \text{(por la identidad de Gauss)}}=-3abc$$

de donde $a^3+b^3+c^3=0$

Haciendo que $a^3 = x$; $b^3 = y$; $c^3 = z$
Reestructurando en función a estas letras

$$x^4 + y^4 + z^4 = 8 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$
$$x + y + z = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = ??$$

Recordemos que según la condicional

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 4(x^4 + y^4 + z^4)^2$$
$$\therefore\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Problema 29

Si el polinomio:
$P(x) = (x^2+m^2+n^2)^2 + \lambda(x^4+m^4+n^4)$
se anula para $x = -m-n$, hallar el valor de λ

Resolución:

De $x=-m-n \Rightarrow x+m+n = 0$
Recordando el producto notable condicional
Si $x+m+n = 0$

$$\Rightarrow (x^2+m^2+n^2)^2 = 2(x^4+m^4+n^4)$$

$$V.N = 2(x^4+m^4+n^4) + \lambda(x^4+m^4+n^4) \equiv 0$$
$$= \underbrace{(\lambda+2)}_{0}(x^4 + m^4 + n^4) \equiv 0$$

$\therefore\ \lambda = -2$

Problema 30

Sabiendo que $ab - 1 = \sqrt[3]{10}\left(\sqrt[3]{10} - 1\right)$

$$\left(a^2+b^2-1\right)^3 = 10,$$

halle el valor de $K = \sqrt[4]{-7+(a+b)^4-(a-b)^4}$

Resolución:

Veamos $K = \sqrt[4]{-7+8ab\left(a^2+b^2\right)}$

De las condiciones $ab = 1 - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}$

Asimismo $a^2+b^2 = 1 + \sqrt[3]{10}$

$$\Rightarrow ab(a^2+b^2) = \underbrace{(1+\sqrt[3]{10})(1-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100})}_{\text{suma de cubos}}$$
$$= 1+10 = 11$$

$$\Rightarrow K = \sqrt[4]{-7+88} = \sqrt[4]{81}$$

$$\therefore\ K = 3$$

Problema 31

Si $x + y + z = 1$
$x^3 + y^3 + z^3 = 4,$

calcular $E = \dfrac{1}{x+yz} + \dfrac{1}{y+xz} + \dfrac{1}{z+xy}$

Resolución:

Analizando por partes

$$x+yz = x.1 + yz = x(x+y+z) + yz$$
$$= x^2 + (y+z)x + yz = (x+y)(x+z)$$

Análogamente

$$y + xz = (y+x)(y+z)$$
$$z + xy = (z+x)(z+y)$$

Luego tenemos

$$E = \frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{(y+x)(y+z)} + \frac{1}{(z+x)(z+y)}$$
$$= \frac{(y+z)+(x+z)+(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$
$$E = \frac{2(x+y-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2.1}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad ..(*)$$

Cálculo de $(x+y)(y+z)(z+x)$

$$x+y+z = 1 \Rightarrow \underbrace{x^3+y^3+z^3}+3(x+y)(x+z)(y+z) = 1$$

$$\Rightarrow 4 + 3(x+y)(x+z)(y+z) = 1$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = -1 \quad \dots \quad ..(**)$$

Reemplazando (**) en (*)

$$E = \frac{2}{-1} = -2$$

Problema 32

Partiendo de

$$x^{1} - y^{1} = 4(x-y-1)^{1}$$
$$y^{1} - z^{1} = 4(y-z-1)^{1}$$
$$z^{1} - x^{1} = 4(z-x-1)^{1},$$

calcular

$$R = \frac{\sqrt[3]{(x+y)^9 + (y+z)^9 + (z+x)^9}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Resolución:
Analizando por partes

$x^{-1}-y^{-1} = 4(x-y-1)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{4}{x-y-1}$

$\Rightarrow \underline{(y-x)}\,\underline{(x-y}-1) = 4xy$

$\Rightarrow -(y-x)^2-(y-x) = 4xy$

$\Rightarrow x-y = (y-x)^2+4xy$

$\Rightarrow x-y = x^2-2xy+y^2+4xy = x^2+2xy+y^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 = (x-y)$

$\Rightarrow (x+y)^3 = (x-y)(x+y) = x^2-y^2$

$\Rightarrow (x+y)^3 = x^2-y^2$ .... (I)

Análogamente, de las otras dos condiciones tenemos

$(y+z)^3 = y^2-z^2$ .... (II)

$(z+x)^3 = z^2-x^2$ .... (III)

Sumando (I) + (II) + (III)

$(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3 = 0$

$\Rightarrow (x+y)^9+(y+z)^9+(z+x)^9 = 3(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3$

Reemplazando

$$R = \frac{\sqrt[3]{3(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3}}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \sqrt[3]{3}$$

Problema 33

Hallar el valor numérico de:

$$E = (x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}}$$

cuando

$$x = 1{,}5a + 0{,}5\,\frac{b^2}{a}$$

$$y = 1{,}5b + 0{,}5\,\frac{a^2}{b}$$

$$ab = 32$$

Resolución:

$$x = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a}$$

$$y = \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{1}{2}\left(\frac{3ab(a+b)+a^3+b^3}{ab}\right)$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{(a+b)^3}{2ab}$$

Análogamente

$$x-y = \frac{(b-a)^3}{2ab}$$

Reemplazando

$$E = \left[\frac{(a+b)^3}{2ab}\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\frac{(b-a)^3}{2ab}\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{(a+b)^2}{(\sqrt[3]{2ab})^2} - \frac{(b-a)^2}{(\sqrt[3]{2ab})^2}$$

Reemplazando el valor de ab = 32

$$E = \frac{(a+b)^2}{16} - \frac{(b-a)^2}{16} = \frac{\cancel{4}ab}{\cancel{16}} = \frac{32}{4}$$

$\therefore$ E = 8

Problema 34

Si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, calcular $\frac{a^3}{b^2c}$ si se cumple que $a^2+2b^2 = 2a(b+c)-2c^2$

Resolución:
Del dato por 2

$2a^2+4b^2-4ab-4ac+4c^2 = 0$

Agrupando convenientemente se tiene

$\underbrace{(a^2+4b^2-4ab)}_{0} + \underbrace{(a^2-4ac+4c^2)}_{0} = 0$

$(a-2b)^2+(a-2c)^2 = 0 \Rightarrow a = 2b,\ a = 2c$

Luego lo pedido es

$$\frac{a^3}{b^2c} = \frac{a^2.a}{b^2.c} = \frac{(2b)^2.(2c)}{b^2.c} = 8$$

Problemas Propuestos

1. Hallar el equivalente reducido de:

- $(a^3-2)^2+(2+a^3)^2 \equiv$ ....
- $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2-\left(n-\dfrac{1}{n}\right)^2 \equiv$ ....
- $(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2 \equiv$ ....
- $(a^3+b^2)^2+(b^3-a^2)^2 \equiv$ ....   .
- $\left(\dfrac{x+yz}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x-yz}{2}\right)^2 \equiv$ ....

2. Si $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{x+y}$, determinar el valor de:

$$\sqrt{\frac{x}{y^3}}-\frac{2}{x+y}$$

A) 0 B) 1 C) 1

D) 2 E) $\dfrac{1}{y}$

3. Dos números reales cumplen con:
$x^2+2y^2+2=2x-2xy$

Entonces el valor de $\dfrac{3xy}{x^2+y^3}$ será:

A) -2 B) -1 C) 1

D) 2 E) $\dfrac{1}{4}$

4. Si se verifica que

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}-\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{b+c-a}{a+c-b}-\frac{a-b+c}{b+c-a}$$

Determinar el valor de $\dfrac{a^2}{a^2+b^2-c^2}$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) 2 E) -2

5. El equivalente simplificado de la expresión

$$\sqrt[9]{(m^6-m^3n^3+n^6)(m^6-n^6)[m^6+m^3n^3+n^6]+n^{18}}$$

será:

A) 0 B) m^2 C) m^3

D) m^6 E) n^9

6. Si $n+\dfrac{1}{n}=1$, calcular el valor de $(n^3 - n^3)^3$

A) -1 B) 3 C) 0

D) -2 E) 2

7. Si $xy+xz+xw+yz+yw+zw=0$,

reducir $\dfrac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)-(y^2+w^2)(z^2+w^2)}{(x+y+z+w)^2}$

A) 1 B) x^2w^2 C) x^2-w^2

D) y^2+z^2 E) y^2-z^2

8. Sabiendo que tres números reales y positivos a, b y c cumplen con

$$\frac{1}{a}(b+c)+\frac{1}{b}(c+a)+\frac{1}{c}(a+b)=6,$$

simplificar $\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+abc}$

A) 1 B) 3 C) 9

D) $+\dfrac{1}{9}$ E) $-\dfrac{1}{9}$

9. Si $r^4-r^2+1=0$; el valor de: $r^7-\dfrac{1}{r^7}$ es:

A) i B) -2i C) 0

D) 7 E) -7

10. A partir de

$$x+y+z=1$$
$$x^2+y^2+z^2=9$$
$$x^3+y^3+z^3=1$$

determinar el valor de $\dfrac{4}{x^4+y^4+z^4}$

A) $\dfrac{1}{33}$ B) $\dfrac{2}{33}$ C) $\dfrac{4}{33}$

D) $\dfrac{16}{33}$ E) $\dfrac{64}{33}$

11. Si tres números reales a, b y c verifican las igualdades

$$a^4 + b^4 + c^4 = 98$$
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 49$$
$$ab + bc + ca = -7 \quad ,$$

determinar el valor de

$$\frac{(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3}{abc}$$

A) -24 B) -12 C) -6
D) 8 E) 9

12. Estableciéndose que $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 0$

reducir: $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{a^3 + b^3 + c^3 + abc}$

A) $a+b+c$ B) $ab+bc+ca$ C) abc
D) $a^2+b^2+c^2$ E) 1

13. Siendo a, b y c tres números reales que cumplen la igualdad

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ y además $a+b+c \neq 0$,

el valor de $\dfrac{(ab^2c^3)^2}{a^{12} + b^{12} + c^{12}}$ es:

A) a B) b^2 C) c^3
D) abc E) $\dfrac{1}{3}$

14. Simplificar

$$\frac{[(y-x)+(z-x)+(p-x)+q]\,[(y+2x)+(z+2x)+(p+2x)+(q+x)]}{y^2 + z^2 + p^2 + q^2}$$

Si $(x+y+z+p+q+x)^2 = 5^2(x^2+y^2+z^2+p^2+q^2)$

A) 0 B) 5 C) 25
D) x^2 E) -25

15. En base a las condiciones

$$\left[\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3 + \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2 + \left[\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3 - \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^3\right]^2 = 10(x^3+y^3) \ldots (1)$$

$$x^6 - y^6 = 6x^4y^4\sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Calcular $\dfrac{3}{x^{-3} - y^{-3}}$

A) 1 B) -1 C) 3
D) $\dfrac{3}{2}xy$ E) $\dfrac{3}{2xy}$

16. Cumpliéndose que $a+b+c = 0$ el valor reducido de

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^4 - 3(a^4+b^4+c^4)^2}}{a^4 + b^4 + c^4} \quad ; \text{ será:}$$

A) -11 B) -7 C) 1
D) 7 E) 11

17. En base a las condiciones

$$m^2 + n^2 + p^2 = 16$$
$$mn + np + pm = -6$$
$$mnp = 4 \ ,$$

cuantificar el valor de

$m^4n + n^4p + p^4m + m^4p + n^4m + p^4n$

Además $(m+n+p)^{-1} < 0$

A) 64 B) -56 C) 192
D) 128 E) 256

18. Si $\{a, b, c, x, y, z\} \subset \mathbb{R}$, que verifica

$(a+b+c)^2 = 3[ab+bc+ca-x^2-y^2-z^2]$

El valor de

$$(x^3+y^3+z^3+3^3)\left[\frac{a^7 + b^7 + c^7}{(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)}\right] \text{ es:}$$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 9 E) 27abc

19. Con

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5,\widehat{6}$$
$$x^3+y^3+z^3 = 7$$
$$xyz = -2 \ ,$$

determinar uno de los valores de

$$\frac{x^3 + y^3 + (z-2)^3}{xy} - 3z$$

A) 0 B) -6 C) -2
D) 4 E) 2

20. Con $a+b+c=1$, hallar el valor de

$$\frac{1-6abc}{2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2+b^2+c^2)}$$

A) -1 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{1}{6}$

21. Si $x^3+1=0 \ \wedge \ x\neq -1$, calcular

$$A=\frac{(x-1)^3}{x^2}-\frac{(x-1)^3}{x}$$

A) 2 B) 0 C) 1
D) -1 E) -2

22. Si $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{b+c}{a} \ \wedge \ c+a>1$, determinar el valor de

$$\left(\frac{a-2b-c}{b}\right)^2+\left(\frac{a-b-2c}{c}\right)^2+\left(\frac{b+c-2a}{a}\right)^2$$

A) 3 B) 1 C) 1/3
D) 2 E) 0

23. Simplificar

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$$

A) 1 B) $a+b+c$ C) 0
D) abc E) 3

24. Hallar el valor de

$$\left(\frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x^2-(y+z)x+yz)(z-y)}\right)^2, \quad \text{si } x\neq y\neq z$$

A) 9 B) 4 C) 25
D) 2 E) 27

25. Si $a^2+bc+bd+cd=0$, calcular

$$\frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{(c+b)(b+d)(c+d)}$$

A) 1 B) -2 C) 1
D) 2 E) 0

26. A partir de $\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{4^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$,

determinar el valor de
$4ab+3(a^2+b^2)-2(a^3+b^3)+(a-b)^2$

A) 0 B) 2 C) -1
D) 1 E) 4

27. Si $a+\sqrt{ac}=b+\sqrt{bc}$
además $a\neq b \ \wedge \ abc\neq 0$
Calcular el valor de

$$\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}$$

A) 0 B) 1 C) -3
D) 3 E) $\frac{3}{2}$

28. Sabiendo que se cumple

$$\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{12}=abc$$

$$\frac{b^2c+c^2a+a^2b}{18}=abc$$

calcular $\dfrac{(a+b)^2}{ab}+\dfrac{(b+c)^2}{bc}+\dfrac{(c+a)^2}{ca}$

A) $\frac{3}{2}$ B) 24 C) $\frac{2}{3}$
D) 36 E) 32

29. Si $\dfrac{x-z}{z-y}+\dfrac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$,

hallar $\left(\dfrac{z-x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2+\left(\dfrac{z-y}{x}\right)^2$

A) 0 B) 3 C) 1
D) -1 E) 12

30. Si $a+b=\sqrt[3]{3}$ y $a-b=\sqrt[3]{2}$
determinar el valor de

$4ab(a^2+3b^2)(b^2+3a^2)$

A) 4 B) 15 C) 5
D) 10 E) 16

31. Si $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 1$,

calcular $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^4+b^4+c^4-4abc}$

A) 0 B) 2 C) -1
D) 1 E) -2

32. Si $\dfrac{x+1}{x-1} = -\dfrac{1}{y}$, calcular

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{(x+y)^2} + \frac{(x+y)^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

A) 2 B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{3}{2}$

D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{2}{3}$

33. Siendo $a+b+c = 0$, hallar el equivalente de

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(2a^3-b^3-c^3)}{a^4+b^4+c^4}$$

A) a B) -2a C) 2a
D) -a E) 3a

34. Hallar el valor numérico de

$$E(x) = x^6-6x^4+9x^2$$

para $x = \sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

A) 28 B) 14 C) 12
D) 18 E) 16

35. Reducir la expresión

$$\sqrt{4(a^2+b^2+c^2)-(a+b-c)^2-(a-b+c)^2-(b+c-a)^2}$$

siendo: $a + b + c = 2p$

A) p B) 2p C) 4p
D) 2(p-a) E) 2(p-b)

36. Si $x^3+\dfrac{1}{y^3} = y^3+\dfrac{1}{z^3} = 1$, hallar el valor de $(xyz)^{102}-1$

A) 2 B) -1 C) 0
D) 1 E) -2

37. Reducir

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2(x^4+x^2+1)+(x^2-x+1)^2}{(x^2+\sqrt{3})^2+2(x^4-3)+(x^2-\sqrt{3})^2}$$

A) x B) 1 C) x^2
D) x^{2} E) x^{1}

38. Dadas las condiciones
$a^2+b^2+c^2 = 2$
$(a+b+c)(1+ab+ac+bc) = 32$
calcular $a+b+c$

A) 4 B) 16 C) 64

D) $\sqrt[3]{32}$ E) 2

39. Siendo $ab = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$

$a+b-1 = \sqrt[3]{10}$

hallar $3ab(a+b)$

A) 4 B) 16 C) 33

D) $\sqrt[3]{32}$ E) 2

40. Conociendo $a+4b+9c = 0$
Según ello reducir

$$\frac{(a-2b)^2}{ab} + \frac{(2b-3c)^2}{bc} + \frac{(3c-a)^2}{ac}$$

A) abc B) -36 C) 14
D) -14 E) a+b+c

Claves

1	*	11	A	21	D	31	D
2	A	12	A	22	A	32	D
3	A	13	E	23	E	33	E
4	B	14	C	24	A	34	A
5	B	15	B	25	C	35	B
6	C	16	C	26	B	36	C
7	C	17	D	27	D	37	D
8	C	18	D	28	D	38	A
9	A	19	B	29	B	39	C
10	C	20	A	30	C	40	B

* Sub preguntas

CAPÍTULO

V

División entera de polinomios

René Descartes (1596-1650)

Famoso filósofo, matemático, biólogo, físico y eminente astrónomo francés; es autor del método llamado cartesiano.
En su obra *La Geometría* puso los cimientos de la geometría analítica, también llamada "Geometría Cartesiana" en honor a su memoria. Es el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas.
La obra filosófica máxima de Descartes es *El discurso del Método* en esta obra busca el fundamento de la certeza en el hecho indubitable de la conciencia del propio pensamiento.
En el campo del álgebra propuso un teorema importante que permite hallar el residuo de una división de polinomios por simple evaluación.

$$\frac{P(x)}{x-a} \rightarrow R = P(a)$$

Resto de la división

LECTURA

División no algebraica de polinomios

Esta división exige condiciones especiales:

a) *Aplicamos el método de Horner con el ordenamiento de los polinomios ascendentemente.*
b) *El cociente obtenido posee infinitos términos.*
c) *El resto se hace tender a cero*
d) *Dicha división es válida para ciertos intervalos de la variable.*

Ejemplos:

- *Dividir 1 entre* $1-x$

Resolución: Por Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots \quad ; \quad |x| < 1$$

- *Dividir 1 entre* $1-4x+4x^2$

Resolución: Por Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ \hline 4 & & 4 & -4 & & & \\ -4 & & & 16 & -16 & & \\ & & & & 48 & -48 & \\ \hline & 1 & 4 & 12 & 32 & & \ldots\ldots \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-4x+4x^2} = 1+4x+12x^2+32x^3+\ldots\ldots \quad ; \quad |x| < \frac{1}{2}$$

- *Dividir* $2x^2-3x+3$ *entre* $4x^3-x+1$

Resolución: Por Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 3 & -3 & 2 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ \hline 1 & & 3 & 0 & -12 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & \\ -4 & & & & 2 & 0 & 4 \\ \hline & 3 & 0 & 2 & -10 & & \ldots\ldots \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-3x+3}{4x^3-x+1} = 3+2x^2-10x^3+\ldots\ldots$$

Fuente: Álgebra Superior - Hall Knight.

División entera de polinomios

OBJETIVOS
- Saber aplicar la división de polinomios en la resolución de ecuaciones por aproximación.
- Conocer la aplicación de la regla de Ruffini y de Horner.
- Hallar residuos de manera inmediata, relacionando con la división aritmética.
- Hallar la expansión aproximada de una expresión mediante su equivalente a polinomios.

INTRODUCCIÓN

La división de polinomios se origina con la división entera de números naturales; como se verá hay una relación entre las propiedades de ambas divisiones.

Asimismo, se debe tener presente que los matemáticos Guillermo Horner y Paolo Ruffini fueron quienes desarrollaron y esquematizaron los métodos para efectuar dicha operación con los polinomios.

La división de polinomios tiene múltiples aplicaciones, entre ellas:

I. En la obtención de los factores de un polinomio, mediante los divisores binómicos.

II. En la resolución de ecuaciones polinomiales mediante la aproximación (aplicación de la regla de Ruffini).

III. En el desarrollo de las series de potencias, como: $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots a_n$ que mediante divisionés sucesivas por la regla de Ruffini es posible escribirlo mediante la forma:

$$P(x) = b_0(x-\alpha)^n + b_1(x-\alpha)^{n-1} + b_2(x-\alpha)^{n-2} + \ldots + b_m$$

que en aritmética se conoce como el cambio de base.

Las operaciones algebraicas de polinomios son análogas a las operaciones de los números naturales, de este modo, vemos que la adición y multiplicación de números naturales generan números naturales, en cambio la sustracción y la división de los números naturales no siempre genera números naturales. Del mismo modo, en la división de polinomios las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios, han generado siempre otros polinomios llamado suma, diferencia o producto respectivamente, es decir, dentro de los polinomios son siempre posibles estas tres operaciones enteras.

En cambio dados dos polinomios $P(x)$, $h(x)$ no siempre será posible hallar otro polinomio $q(x)$ que multiplicado por $h(x)$ genere $P(x)$.

Es decir, dados los polinomios $P(x)$ y $h(x)$ no siempre existe $q(x)$ de tal modo que se cumple

$$\boxed{P(x) = h(x)\,q(x)}$$

Como es fácil darse cuenta, para un polinomio P(x) no siempre existe otro polinomio $P^{-1}_{(x)}$ tal que P(x) . $P^{-1}_{(x)} \equiv 1$ salvo que P(x) sea una constante no nula.

Para resolver el problema de la división de polinomios se ha procedido de manera análoga a la división entera de números naturales, agregando la definición de residuo.

Así 425 entre 72

$$\begin{array}{r|l} 425 & 72 \\ \hline 65 & 5 \end{array} \quad \text{cociente en los naturales}$$

De tal modo $\boxed{425 = 72 . 5 + 65}$

Esta división en los naturales no está definida, pero definiendo como división entera y un cierto residuo fue posible.

Veamos otro ejemplo: 57 entre 429 no es posible efectuar en los naturales ni siquiera con residuo, puesto que 57 es menor que 429, del mismo modo $2x^3+3x-1$ entre x^7-2x+3 no será posible, puesto que el grado del primer polinomio (3) es menor que el segundo (7) imposibilitando esta operación.

Por lo tanto, el presente capítulo tiene como objetivo resolver operaciones de división de polinomios que puedan definirse, por lo que debe tenerse en cuenta la siguiente definición:

Dados dos polinomios D(x) y d(x) de grados "m" y "n" respectivamente (m≥n) llamados dividendo y divisor; dividir D(x) entre d(x) consiste en hallar otros dos polinomios q(x) y R(x) llamados cociente y residuo donde el grado de R(x) es menor que "n" o bien R(x)≡0 ; de tal manera que estos polinomios cumplan la identidad fundamental de la división entera.

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DE DIVISIÓN ENTERA

Dados los polinomios dividendo (D(x)), divisor (d(x)), cociente (q(x)) y residuo (R(x)) condicionados por la definición, se cumple:

$$D(x) \equiv d(x) . q(x) + R(x)$$

Ejemplos:

I. Dividir $(x^2-6x+10)$ entre $(x-4)$

Veamos

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x+10 & x-4 \\ \hline 2 & x-2 \end{array}$$

2: residuo; $x-2$: cociente

$\Rightarrow \; x^2 - 6x\ 10 \equiv (x-4)(x-2) + 2$

II. Dividir (x^3+8) entre x^2-2x+4

Veamos

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x^2-2x+4 \\ \hline 0 & x+2 \end{array}$$

0: residuo; $x+2$: cociente

$\Rightarrow \; x^3+8 \equiv (x^2-2x+4)(x+2)$

NOTA: Su residuo es idénticamente nulo

TEOREMA

Dado el dividendo $D(x)$ y el divisor $d(x)$, los polinomios cociente $q(x)$ y residuo $R(x)$ son únicos.

Demostración

De la identidad fundamental

$D(x) \equiv d(x) \, . \, q(x) + R(x)$ .... (α)

Supongamos que existen otros $q'(x)$ y $R'(x)$ distintos a $q(x)$ y $R(x)$

Se tendrá $D(x) \equiv d(x)\, q'(x) + R'(x)$ ...... (β)

De (α) - (β)

$$0 \equiv d(x)\{q(x) - q'(x)\} + R(x) - R'(x)$$

$$\Rightarrow d(x)\{q(x) - q'(x)\} \equiv R'(x) - R(x)$$

como $q(x) \neq q'(x) \Rightarrow q(x) - q'(x)$ es al menos de grado cero, lo cual implicará que $d(x)$ puede ser a lo más del mismo grado a $R'(x) - R(x)$ lo cual es absurdo de acuerdo a su definición.

De donde se concluye que

$$q(x) - q'(x) = 0 \Rightarrow q(x) = q'(x)$$

así mismo $R'(x) - R(x) = 0 \Rightarrow R(x) = R'(x)$

$$\therefore \; q(x) \text{ y } R(x) \text{ son únicos.}$$

Ejemplo:

Si $D(x) = x^2 - 5x - 8$

$d(x) = x - 6$

$\Rightarrow q(x) = x + 1 \; ; \; R(x) = 2$

y a su vez son únicos.

CLASES DE DIVISIÓN

De acuerdo a su resto o residuo podemos clasificar en:

1. División Exacta ($R(x) \equiv 0$).

Llamaremos así cuando el resto o residuo sea un polinomio idénticamente nulo.

Luego $\boxed{D(x) \equiv d(x) \, . \, q(x)}$

Ejemplo:

Al dividir $(x^2 - 5x - 14)$ entre $(x - 7)$

Vemos que $x^2 - 5x - 14 \equiv (x-7)(x+2)$

$\Rightarrow q(x) = x + 2 \; ; \; R(x) \equiv 0$

2. División Inexacta ($R(x) \neq 0$).

Llamada también **División no exacta**, toma este nombre cuando el residuo no es idénticamente nulo, por lo que definimos

$$D(x) \equiv d(x)\, q(x) + R(x)$$

Como $d(x) \neq 0$, se tendrá la equivalencia siguiente

$$\boxed{\frac{D(x)}{d(x)} \equiv q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}}$$

Ejemplo:

Al dividir $x^3 - 3x + 4$ entre $x^2 + x - 1$ tendremos

$$\underbrace{x^3 - 3x + 4}_{D(x)} \equiv \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{d(x)} \underbrace{(x - 1)}_{q(x)} + \underbrace{3 - x}_{r(x)}$$

De manera equivalente

$$\frac{x^3 - 3x + 4}{x^2 + x - 1} \equiv x - 1 + \frac{3 - x}{x^2 + x - 1}$$

Propiedades de Grados

1. El grado del cociente es equivalente a la diferencia del grado del dividendo y el grado del divisor.

$$\boxed{\text{Grad}(q) = \text{Grad}(D) - \text{Grad}(d)}$$

Vemos $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Ejemplo:

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

Entonces

$$\begin{array}{ccccc} \text{Grad (q)} & = & \text{Grad (D)} & - & \text{Grad (d)} \\ 2 & = & 5 & - & 3 \end{array}$$

2. El grado máximo que puede tomar el residuo será uno menos al del divisor.

$$\boxed{\text{Grad. Max. R} = \text{Grad}(d) - 1}$$

Si el divisor es de grado "n", el residuo a lo más podrá ser de grado (n-1)

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

1. División de Monomios.
Recordando la propiedad (1) grado del cociente se tiene:

$$\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}\;;\;b_0\neq 0$$

NOTA La división de monomios es siempre exacta.

Ejemplos:
Dividir

a. $\dfrac{28x^{15}}{7x^8}=\dfrac{28}{7}x^{15-8}=4x^7$

b. $\dfrac{16x^{23}}{32x^9}=\dfrac{16}{32}x^{23-9}=\dfrac{1}{2}x^{14}$

2. División de un Polinomio entre un Monomio. Se utilizará la siguiente propiedad.

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$$

(Propiedad Distributiva)

Ejemplos:

a. $\dfrac{3x^3-x^2+5x}{x}=\dfrac{3x^3}{x}-\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{5x}{x}$

$$=3x^2-x+5$$

b. $\dfrac{16x^{15}+6x^{10}-3x+9}{4x^3}$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\frac{16x^5}{4x^3}+\frac{6x^{10}}{4x^3}+\frac{-3x+9}{4x^3}$$

$$\underbrace{4x^{12}+\frac{3}{2}x^7}_{q(x)}+\frac{\overbrace{-3x+9}^{R(x)}}{\underbrace{4x^3}_{d(x)}}$$

De donde podemos concluir

$q(x)=4x^{12}+\dfrac{3}{2}x^7$ → cociente

$R(x)=-3x+9$ → residuo

NOTA

$\dfrac{-3x+9}{4x^3}$ expresamos como $\dfrac{-3x}{4x^3}+\dfrac{9}{4x^3}$ porque no dejan como resultado polinomios que puedan sumarse en el cociente.

3. División de Polinomios de más de un Término. La división de polinomios de esta forma sólo estará definida para una variable tomada como referencia, al cual se llama variable ordenatriz.

TEOREMA

De la identidad fundamental de división entera:
$P(x)\equiv d(x)\,q(x)+R(x)$

I. Si $x=1$ ⇒ $\boxed{P(1)=d(1)q(1)+R(1)}$

Se obtiene la suma de coeficientes

II. Si $x=0$ ⇒ $\boxed{P(0)=d(0)q(0)+R(0)}$

Se obtiene el término independiente

Ejemplos:

1. En $x^3 - 3x + 4 \equiv (x^2+x-1)(x-1)+3-x$

   Donde $D(x) = x^3-3x+4 \Rightarrow D(1) = 2$

   $d(x) = x^2+x-1 \Rightarrow d(1) = 1$

   $q(x) = x-1 \Rightarrow q(1) = 0$

   $R(x) = 3-x \Rightarrow R(1) = 2$

   Veamos que $D(1) = d(1)\,q(1) + R(1)$

   reemplazando sus valores : $2 = (1)(0) + 2$

   efectivamente $2 = 2$

2. En la división $ax^4 + 2x^3 + bx^2-10x+c$ entre $2x+3$, hallar el valor de $(a+b+c)$ si la suma de coeficientes del cociente es -5 y el resto es 15.

   Resolución:

   De la identidad

   $ax^4+2x^3+bx^2-10x+c \equiv (2x+3)\,q(x)+15$

   Para $x = 1$

   $\Rightarrow a+2+b-10+c = (2+3)\,\underbrace{q(1)}_{-5} + 15$

   $\Rightarrow a + b + c - 8 = -25 + 15$

   $\Rightarrow a + b + c = -2$

CRITERIOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

Dados los polinomios en una sola variable estos deben ser completos y ordenados en forma descendente. Si faltase algún término, en su lugar se reemplazará un término con coeficiente cero.

Ejemplo:

$$\frac{45x - 22x^3 - 2x^4 + 7}{3x^3 - 1}$$

previamente se ordenará y agregará los ceros correspondientes:

$$\frac{-2x^4 + 22x^3 + 0x^2 + 45x + 7}{3x^3 + 0x^2 + 0x - 1}$$

MÉTODOS PARA DIVIDIR ALGEBRAICAMENTE POLINOMIOS

Los procedimientos a seguir derivan de la división entera de números enteros

Por ejemplo 47 497 entre 295

$$\begin{array}{r|l}
47497 & 295 \\ \cline{2-2}
-295\downarrow & 161 \\ \cline{1-1}
1799 & \\
-1750\downarrow & \\ \cline{1-1}
00497 & \\
295 & \\ \cline{1-1}
202 &
\end{array}
\Rightarrow 47497 = 295 \times 161 + 202$$

NOTA: Para los polinomios, cada cifra de los números naturales es comparable con un término del polinomio.

1. Método clásico o división normal.

Seguiremos los mismos pasos de la división de enteros.

Ejemplo 1

Dividir (x^3+2x-2) entre $x-1$

Resolución:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} + x^2 + 2x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} + x^2 & x^2+x+3 \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{x^2} + 2x - 2 & \\
\quad -\cancel{x^2} + x & \\ \cline{1-1}
\qquad 3\cancel{x} - 2 & \\
\qquad -\cancel{3x} + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 1 &
\end{array}$$

De donde $q(x) = x^2+x+3$

$R(x) = 1$

Ejemplo 2

Dividir $4x^4+2x^3-6x^2-10x$ entre $2x+3$

Resolución:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{4x^4} + 2x^3 - 6x^2 - 10x + 0 & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-\cancel{4x^4} - 6x^3 & 2x^3 - 2x^2 - 5 \\ \cline{1-1}
\quad -\cancel{4x^3} - \cancel{6x^2} & \\
\quad \cancel{4x^3} + \cancel{6x^2} & \\ \cline{1-1}
\qquad -\cancel{10x} + 0 & \\
\qquad \cancel{10x} + 15 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 15 &
\end{array}
$$

De donde $q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5$

$R(x) = 15$

Ejemplo 3

Dividir $x^7+x^6+x^4+2x^3+2x^2+2$

entre x^3+x^2+1

Resolución:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^7} + \cancel{x^6} + \cancel{x^4} + 2x^3 + 2x^2 + 2 & x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^7} - \cancel{x^6} - \cancel{x^4} & x^4 + 2 \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2} & \\
\qquad -\cancel{2x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{2} & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

$\Rightarrow q(x) = x^4+2 \wedge R(x) \equiv 0$

Ejemplo 4

Mediante este método es suficiente ordenar, aunque no completar. Así al dividir $6x^{56} + 4x^{41} + 15x^{16} - 3x^{15} + 17x^2 + x - 15$ entre $3x^{15}+2$

Resolución:

Usaremos la división normal

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{6x^{56}} + \cancel{4x^{41}} + 15x^{16} - 3x^{15} + 17x^2 + x - 15 & 3x^{15} + 2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{6x^{56}} - \cancel{4x^{41}} & 2x^{41} + 5x - 1 \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{15x^{16}} - 3x^{15} & \\
\quad -\cancel{15x^{16}} - 10x & \\ \cline{1-1}
\qquad -\cancel{3x^{15}} - 10x + 17x^2 + x - 15 & \\
\qquad \cancel{3x^{15}} \qquad\qquad\qquad + 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 17x^2 - 9x - 13 &
\end{array}
$$

De donde $q(x) = 2x^{41} + 5x - 1$

$R(x) = 17x^2 - 9x - 13$

2. Por coeficientes separados.

Es un caso similar a la división normal con la diferencia que en este caso sólo se trabajan con los coeficientes. En este caso sí se exige que los polinomios, tanto dividendo y divisor, sean completos y ordenados en forma descendente.

Usaremos el mismo ejemplo utilizado en el caso anterior para que el lector forme su propio criterio.

Ejemplo 1

Dividir $(4x^4+2x^3-6x^3-6x^2-10x)$ entre $(2x+3)$

Resolución:

Veamos

Usando únicamente los coeficientes.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
\cancel{4} & 2 & -6 & -10 & 0 & 2 & 3 & \\ \cline{6-8}
-\cancel{4} & -6 & & & & 2 & -2 & -5 \\ \cline{1-2}
0 & -\cancel{4} & -\cancel{6} & & & & & \\
 & \cancel{4} & \cancel{6} & & & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & -\cancel{10} & & & & \\
 & & & \cancel{10} & 15 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 15 & & &
\end{array}
$$

Ya que el cociente y el residuo son también polinomios completos y ordenados en forma descendente.

$q(x) = 2x^2 - 2x - 5 \wedge R(x) = 15$

Ejemplo 2

Dividir $x+2x^3+x^5+2x^2+x^4+2$ entre x^4+2

Resolución:

Ordenando $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x^4+2}$

Usando sólo los coeficientes

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrrr}
\cancel{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \cline{7-11}
-\cancel{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & & 1 & 1 & & & \\ \cline{1-5}
 & \cancel{1} & 2 & 2 & -1 & 2 & & & & & \\
 & -\cancel{1} & 0 & 0 & 0 & -2 & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 2 & 2 & -1 & 0 & & & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow q(x) = x+1$

$R(x) = 2x^3+2x^2-x$

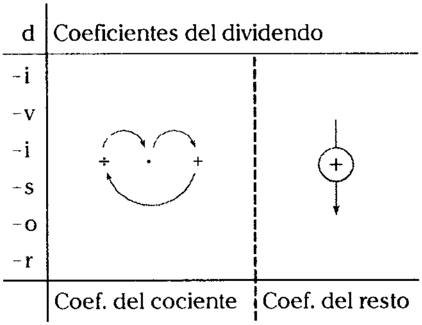
3. Método de Guillermo Horner.

Diremos que este es un caso sintetizado de coeficientes separados y exigen las mismas condiciones.

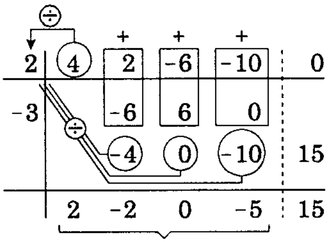
Veamos el mismo ejemplo del caso anterior:

Dividir $(4x^4+2x^3-6x^2-10x)$ entre $(2x+3)$ en un método esquematizado.

Así:



Para dividir seguiremos el mismo procedimiento de coeficientes separados



Coeficientes del cociente

$\Rightarrow q(x) = 2x^3 - 2x^2 - 5$

$R(x) = 15$

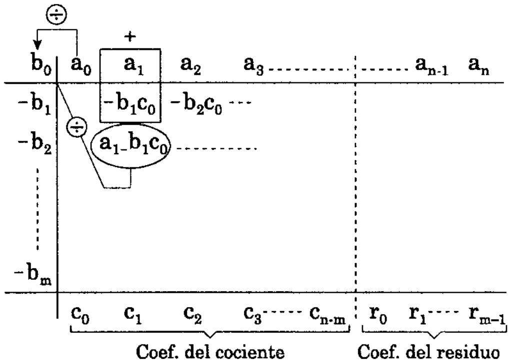
En forma general:

Dividir $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... a_n$

entre $b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... b_m$

donde $n \geq m \wedge a_0b_0 \neq 0$

se tiene en el esquema de Horner



PROCEDIMIENTO PARA DIVIDIR

(Hallar los coeficientes del cociente y del residuo)

I. $C_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$

(primer coeficiente del cociente)

II. Multiplicamos C_0 por cada uno de los coeficientes $-b_1, -b_2, ..., -b_m$ y colocar los resultados en una fila, de una columna hacia atrás.

III. $C_1 = \dfrac{a_1 - b_1C_0}{b_0}$

IV. Multiplicamos C_1 por cada uno de los coeficientes $-b_1, -b_2, ..., -b_m$ (como II)

V. $C_2 = \dfrac{a_2 - C_0b_2 - b_1C_1}{b_0}$

$\vdots$

$$\boxed{C_k = \dfrac{a_k - C_0b_k - C_1b_{k-1} - C_2b_{k-2} ..... - C_{k-1}b_1}{b_0}}$$

VI. Se sigue este procedimiento hasta que la última multiplicación toque la última columna.

VII. Para el residuo solamente sumaremos los elementos de cada columna respectivamente.

Veamos el siguiente ejemplo:

Dividir $12x^5-x^4+3x^2+5$ entre $3x^3+2x^2-1$

Resolución:

Completando el dividendo y el divisor; en el esquema se tiene:

3	12	-1	0	3	0	5
-2		-8	0	4		
0		-9	6	0	-3	
1			6	-4	0	2
	4	-3	2	3	-3	7

Coef. del cociente Coef. del residuo

$\Rightarrow$ $q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

$R(x) = 3x^2 - 3x + 7$

4. Regla de Paolo Ruffini.

Se considera como un caso particular del método de Horner, se utilizará cuando el divisor es de primer grado o transformable a esta forma.

Veamos un ejemplo inicialmente efectuado por Horner para ver una comparación con la regla de Ruffini.

Dividir $3x^4 - 5x + 2$ entre $x+2$

Por Horner

1	3	0	0	-5	2
-2		-6	12	-24	58
		-6	12	29	
	3	-6	12	-29	60

$\Rightarrow q(x) = 3x^3-6x^2+12x-29 \wedge R(x) = 60$

En general

Al dividir
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$ entre: $ax+b$; $ab\neq0$
se presentarán 2 casos.

CASO I

Cuando $a=1$; se tendrá:

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{x+b}$$

cuyo esquema será:

	a_0	a_1	a_2	...		a_n
		$-a_0b$				
$x=-b$						$-bc_{n-1}$
	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-1}	$a_n-bc_{n-1}=R$

$c_0 = a_0$

$c_1 = a_1 - a_0b$

$\vdots$

$\boxed{c_k = a_k - c_{k-1}b}$

Por lo tanto

$q(x) = c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+ ... +c_{n-1}$
$R(x) = a_n - bc_{n-1}$

Ejemplo 1

Dividir

$$\frac{3x^5-10x^2+12x-x^3+15}{x-3}$$

Resolución:

I. $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

II. Usando el esquema (previamente ordenado)

	3	0	-1	-10	12	15
$x=3$	↓	9	27	78	204	648
	3	9	26	68	216	663

$\Rightarrow$ $q(x) = 3x^4+9x^3+26x^2+68x+216$

$R(x) = 663$

Ejemplo 2
Dividir

$$\frac{2x^{28}-14x^{7}+2x^{21}-5}{x^{7}-3}$$

Resolución:
Haciendo un cambio de variable $x^7 = y$

Se tiene $\dfrac{2y^4-14y+2y^3-5}{y-3}$

utilizando el esquema

$$\begin{array}{r|rrrr:r}
 & 2 & 2 & 0 & -14 & -5 \\
 & & 6 & 24 & 72 & 174 \\
y=3 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hline
 & 2 & 8 & 24 & 58 & 169
\end{array}$$

$\Rightarrow q(y) = 2y^3 + 8y^2 + 24y + 58$
como $y = x^7$ reemplazando se tiene
$q(x) = 2x^{21} + 8x^{14} + 24x^7 + 58$
$R(x) = 169$

CASO II
Cuando $a \neq 1$; se tendrá:

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n}{ax+b}$$

De la identidad fundamental

$$D(x) \equiv (ax+b)q(x)+R(x) \equiv \left(x+\frac{b}{a}\right)(aq(x))+R(x)$$

Se observa que el cociente queda multiplicado por "a"

$$\begin{array}{r|cccc:c}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
 & & -\frac{b}{a}a_0 & -\frac{b}{a}c_1 & & -\frac{b}{a}c_{n-1} \\
x=-\frac{b}{a} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\hline
 & a_0 & c_1 & c_2 & \cdots\ c_{n-1} & R \ \text{resto} \\
\div a & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\hline
 & \frac{a_0}{a} & \frac{c_1}{a} & \frac{c_2}{a} & \frac{c_{n-1}}{a} &
\end{array}$$

$\underbrace{\frac{a_0}{a}\quad\frac{c_1}{a}\quad\frac{c_2}{a}\quad\frac{c_{n-1}}{a}}_{\text{Coef. del cociente}}$

Luego

$$q(x)=\frac{a_0}{a}x^{n-1}+\frac{c_1}{a}x^{n-2}+\frac{c_2}{a}x^{n-2}\frac{c_2}{a}x^{n-2}+\ldots+\frac{c_{n-1}}{a}$$

$$R(x)=a_n-\frac{b}{a}\cdot c_{n-1}$$

Ejemplo
Dividir

$$\frac{27x^4-6x^2+x+15}{3x-1}$$

Resolución:
Esquematizando

$$\begin{array}{r|rrrr:r}
 & 27 & 0 & -6 & 1 & 15 \\
 & & 9 & 3 & -1 & 0 \\
x=\frac{1}{3} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hline
 & 27 & 9 & -3 & 0 & 15 \\
\div 3 & \downarrow & & & & \\
\hline
 & 9 & 3 & -1 & 0 &
\end{array}$$

De donde $q(x) = 9x^3 + 3x^2 - x$
$R(x) = 15$

TEOREMA DE RENATUS DESCARTES (TEOREMA DEL RESTO)

Finalidad. Se utiliza para hallar el resto en una división de polinomios sin la necesidad de efectuar dicha operación, es decir, de una manera directa

TEOREMA

En toda división de la forma $P(x)$ entre $(ax+b)$, el resto se halla mediante el valor numérico del polinomio $P(x)$ cuando x toma el valor de $\left(-\frac{b}{a}\right)$

Demostración:

Utilizando la identidad fundamental de la división será posible expresar así

$P(x) \equiv (ax+b)q(x) + R$

$\downarrow$ cociente $\Rightarrow$ resto o residuo constante

evaluando la identidad en $x = -b/a$

$$P_{\left(-\frac{b}{a}\right)} = \underbrace{\left[a\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right]}_{0} q_{\left(-\frac{b}{a}\right)} + R$$

$\therefore\ P_{\left(-\frac{b}{a}\right)} = R$

Ejemplo 1

Hallar el resto en

$$\frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 1}{x+2}$$

Resolución:

Usando el teorema del resto.

I. $x+2=0 \Rightarrow x = -2$ (forma práctica)

II. Reemplazar $x=-2$ en el dividendo con lo cual se halla el resto.

$\Rightarrow R=4(-2)^3 - 5(-2)^2 + 3(-2)-1$

$= -32 - 20 - 6 - 1$

$\therefore\ R = -59$

Ejemplo 2

Hallar el resto en $\dfrac{27x^4-6x^2+x+15}{3x-1}$

Resolución:

I. $3x-1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$

II. En el dividendo

$$R = 27.\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 15$$

$$= 27.\frac{1}{81} - 6.\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 15$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 15$$

$\therefore\ R = 15$

Ejemplo 3

Hallar el resto en $\dfrac{x^3(x+1)^3 - 5x + 3}{x(x+1) - 4}$

Resolución:

Haremos una ampliación del teorema del resto

I. $x(x+1) - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x = 4$

II. En el dividendo

$D(x) = [x(x+1])]^3 - 5x + 3;$

Reemplazando

$\Rightarrow R(x) = (4)^3-5x+3=-5x+67$

$\therefore\ R_{(x)} = -5x+67$

Ejemplo 4

Hallar el resto en

$$\frac{(2x+1)(2x+3)(2x+2)^2+x-5}{2(2x^2+4x)-1}$$

Resolución:

I. $2(2x^2+4x) - 1 = 0$

$\Rightarrow\ 4x^2 + 8x = 1$

II. En el dividendo

$$D(x) = (2x+1)(2x+3)(2x+2)^2 + x - 5$$

$$= (\underbrace{4x^2+8x}_{1}+3)(\underbrace{4x^2+8x}_{1}+4)+x-5$$

$\Rightarrow R(x) = (1+3)(1+4)+x-5$

$\therefore\ R(x) = x+15$

Problemas Resueltos

Problema 1

Sean los polinomios

$q(x) = ax^2+bx+c \wedge$
$R(x) = mx+n$

el cociente y residuo respectivamente de la división

$$\frac{2x^4+3x^3-8x^2+1-4x}{x^2-(x+1)}$$

Calcular $(a-b-c)^2$

Resolución:

Por el método de Horner

		+	+		
1	2	$\boxed{3}$	$\boxed{-8}$	-4	1
1	÷	2	2		
1		5	5	5	
			-1	-1	-1
	2	5	-1	0	0

Entonces $q(x) = 2x^2 + 5x - 1$

que será idéntico a $q(x) = ax^2 + bx + c$

de donde $a=2, b=5, c=-1$

luego

$(a-b-c)^2 = [2-5-(-1)]^2 = (2-5+1)^2 = (-2)^2 = 4$

Problema 2

Si en la siguiente división $\dfrac{5x^3+6x^4-1}{x+3x^2-2}$

$mx + n - 3$

m·n

		+	+		
3	6	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	0	-1
-1	÷	-2	4		
2		3	-1	2	
			3	-1	2
	2	1	1	1	1

$R(x) = mx+n-3$

$m=1 \wedge n-3=1 \Rightarrow m=1 \wedge n=4$

$m-n = 1-4 = -3$

Problema 3

Dada la división $\dfrac{4x^6+8x^5-5x^2+2x^4+7x^3-1}{-1+2x+4x^3}$

Enunciar el valor de verdad o falsedad de cada uno de las proposiciones.

I. Su cociente es x^3+2x^2+1
II. Su resto es $-3x^2-2x$
III. La suma de coeficientes del cociente es 5.

Resolución:

Efectuando la división por el método de Horner

		+	+	+			
4	4	$\boxed{8}$	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	-5	0	-1
0	÷	0	-2	1			
-2		8	0	-4	2		
1			0	0	0	0	
				4	0	-2	1
	1	2	0	1	-3	-2	0

De donde $q(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \quad \wedge$
$R(x) = -3x^2 - 2x$

Concluyendo que
I. Verdadero
II. Verdadero
III. Falso

Problema 4

Hallar la suma de los cocientes que resulten de efectuar las siguientes divisiones

I) $\dfrac{2x^3+4x^2+1}{x+1}$ II) $\dfrac{2x^3+3x^2+7}{2x-1}$

Resolución:

Dividiendo por la regla de Ruffini

I)

	+	+		+
	2	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
		-2	-2	2
$x=-1$	↓	↓	↓	↓
	2	2	-2	3

$\Rightarrow q_1(x) = 2x^2+2x-2$

Problemas Resueltos

Problema 1

Sean los polinomios

$$q(x) = ax^2+bx+c \ \wedge$$
$$R(x) = mx+n$$

el cociente y residuo respectivamente de la división

$$\frac{2x^4+3x^3-8x^2+1-4x}{x^2-(x+1)}$$

Calcular $(a-b-c)^2$

Resolución:

Por el método de Horner

1	2	3	-8	-4	1
1		2	2		
1		5	5	5	
			-1	-1	-1
	2	5	-1	0	0

Entonces $q(x) = 2x^2 + 5x - 1$

que será idéntico a $q(x) = ax^2 + bx + c$

de donde $a=2, b=5, c=-1$

luego

$(a-b-c)^2 = [2-5-(-1)]^2 = (2-5+1)^2 = (-2)^2 = 4$

Problema 2

Si en la siguiente división $\dfrac{5x^3+6x^4-1}{x+3x^2-2}$

se obtiene un resto de la forma $mx + n - 3$

calcular $m \cdot n$

Resolución:

Realizando la división por Horner

3	6	5	0	0	-1
-1		-2	4		
2		3	-1	2	
			3	-1	2
	2	1	1	1	1

Su resto $R(x) = x+1$ que será idéntico a

$R(x) = mx+n-3$

De donde $m=1 \wedge n-3=1 \Rightarrow m=1 \wedge n=4$

Por lo tanto $m \cdot n = 1 \cdot 4 = -3$

Problema 3

Dada la división $\dfrac{4x^6+8x^5-5x^2+2x^4+7x^3-1}{-1+2x+4x^3}$

Enunciar el valor de verdad o falsedad de cada uno de las proposiciones.

I. Su cociente es x^3+2x^2+1

II. Su resto es $-3x^2-2x$

III. La suma de coeficientes del cociente es 5.

Resolución:

Efectuando la división por el método de Horner

4	4	8	2	7	-5	0	-1
0		0	-2	1			
-2		8	0	-4	2		
1			0	0	0	0	
				4	0	-2	1
	1	2	0	1	-3	-2	0

De donde $q(x) = x^3 + 2x^2 + 1 \ \wedge$

$R(x) = -3x^2 - 2x$

Concluyendo que
I. Verdadero
II. Verdadero
III. Falso

Problema 4

Hallar la suma de los cocientes que resulten de efectuar las siguientes divisiones

I) $\dfrac{2x^3+4x^2+1}{x+1}$ II) $\dfrac{2x^3+3x^2+7}{2x-1}$

Resolución:

Dividiendo por la regla de Ruffini

I)

	2	4	0	1
		-2	-2	2
$x=-1$				
	2	2	-2	3

$\Rightarrow q_1(x) = 2x^2+2x-2$

II)

$$
\begin{array}{r|ccc:c}
 & + & + & & + \\
 & 2 & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{7} \\
\hline
 & \downarrow & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} \\
x=\tfrac{1}{2} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hline
 & 2 & 4 & 2 & 8 \\
\div 2 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow q_2(x) = x^2+2x+1$

De donde

$$q_1(x)+q_2(x) = (2x^2+2x-2)+(x^2+2x+1)$$
$$= 3x^2+4x-1$$

Problema 5

En el esquema de Horner mostrado

1	3	a	1	b	c
m		9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	-2	p	4	-3

Determinar el valor de

$$\frac{3+a+b+c}{n+p-2}+m$$

Resolución:

1er. Método: Utilizando el esquema y el procedimiento de Horner, se obtiene:

I. $n=3$

II. $n.m = 9 \Rightarrow m=3$

III. $2n = d \Rightarrow d=6$

IV. $a+9 = -2 \Rightarrow a=-11$

V. $e = -2m \Rightarrow e=-6$

VI. $f = -2.2 \Rightarrow f=-4$

VII. $p = 1+d+e \Rightarrow p=1$

VIII. $g = pm \Rightarrow g=3$

IX. $h = 2p \Rightarrow h=2$

X. $b+f+g = 4 \Rightarrow b=5$

XI. $c+h = -3 \Rightarrow c=-5$

Reemplazando

$$\frac{3-11+5-5}{3+1\ \ 2}+3 = \frac{-8}{2}+3 = -1$$

2do. Método: Del esquema, se tiene:

$D(x) = 3x^4 + ax^3 + x^2 + bx + c$

$d(x) = x^2 - mx - 2$

$q(x) = nx^2 - 2x + p$

$R(x) = 4x - 3$

Pero sabemos $D(1) = d(1)\,q(1) + R(1)$

$\Rightarrow 3+a+1+b+c=(1-m-2)(n-2+p)+4-3$

$\Rightarrow 4+a+b+c = (-1-m)(n+p-2)+1$

$\Rightarrow 3 + a + b + c = (-1-m)(n+p-2)$

$\Rightarrow \dfrac{3+a+b+c}{n+p-2} + m = -1$

$\therefore \dfrac{3+a+b+c}{n+p-2} + m = -1$

Problema 6

Calcular el valor de "n" si la división

$\dfrac{x^4 - x^3 - x + n}{x-2}$, deja un residuo igual a 10.

Resolución:

Por teorema del resto

I. $x-2 = 0 \rightarrow x = 2$

II. $R = 2^4-2^3-2+n = 16-8-2+n = n+6$

Por dato $n+6 = 10$

$\therefore n = 4$

Problema 7

Hallar el resto en $\dfrac{27x^{425} + 81x^{424} - 5x - 19}{x+3}$

Resolución:

Usando el teorema del resto

I. $x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$

II. $R = 27(-3)^{425}+81(-3)^{424}-5(-3)-19$

$= -3^3 . 3^{425} + 3^4 . 3^{424} + 15 - 19$

$= \cancel{-3^{428}} + \cancel{3^{428}} - 4$

$\therefore R = -4$

Problema 8

En la siguiente división $\dfrac{(2x^{40}+n)x+5}{x-1}$.

determinar el resto para que la suma de coeficientes del cociente sea 93.

Resolución:

De la división $\dfrac{2x^{41}+nx+5}{x-1}$

Por Ruffini:

	2	0	0 ········· 0		n	5
$x=1$	↓	2	2 ········· 2		2	n+2
	2	2	2	2	n+2	n+7

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{41 términos}}$

Por dato:

$$q(1)=\underbrace{2+2+2+\ldots\ldots+2}_{\text{40 sumandos}}+n+2=93$$

$$2\,.\,40+n+2=93 \Rightarrow n=11$$

como el residuo es $n+7$

entonces reemplazando $n=11$

tenemos $R=18$

Problema 9

Hallar el valor de $\dfrac{a-b}{c-1}$ si la división

$$\frac{-ax^5+bx^4+(c-1)x^3-x^2+4}{-4x^3+2x^2-3x+2}$$ es exacta.

Resolución:

Cuando se trata de una división exacta los polinomios pueden ordenarse en forma ascendente en tal sentido el esquema será

	÷	+	+			
2	4	$\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	c-1	b	-a
3		6	-4	8		
-2		6	9	-6	12	
4			4	6	-4	8
	2	3	2	0	0	0

Del resto

$$c-1+8-6+6=0 \Rightarrow c=-7$$

$$b+12-4=0 \Rightarrow b=-8$$

$$-a+8=0 \Rightarrow a=8$$

Luego

$$\frac{a-b}{c-1} \text{ es } \frac{8-(-8)}{-7-1}=\frac{16}{-8}=-2$$

Problema 10

Al efectuar la división del polinomio $P(x)=x^3(3ax-4d)-2(cx^2-x-1)$ entre $(3x^2+2x-a)$, se obtiene un cociente $q(x)$ cuya suma de coeficientes es 30 y un resto idéntico a $5ax+a+2$; $a\neq 0$

Calcular $\dfrac{a}{q(1)-a}$

Resolución:

Ordenado $\dfrac{3ax^4-4dx^3-2cx^2+2x+2}{3x^2+2x-a}$

Por Horner

	+	+	+		
3	3a	$\boxed{-4d}$	$\boxed{-2c}$	2	2
-2		-2a	a^2		
a			-2M	aM	
				-2N	aN
	a	M	N	5a	a+2

Del resto

$$2+aN=a+2 \quad\Rightarrow\quad N=1$$

$$2+aM-2N=5a \Rightarrow M=5$$

Del dato $a+M+N=30 \Rightarrow a=24$

de donde $\dfrac{a}{q(1)-a}=\dfrac{24}{30-24}=4$

Problema 11

Obtener el residuo de efectuar la división indicada

$$\frac{(3x^2)^2+2(2x)^2+mx+3^m}{2-3x}$$

Si el cociente evaluado en cero resulta ser -3.

Resolución:

Ordenado en el esquema para usar Horner.

	÷	+	+	+	
-3	9	$\boxed{0}$	$\boxed{8}$	$\boxed{m}$	3^m
-2		6	4	8	6
	-3	-2	-4	$\dfrac{m+8}{-3}$	3^m+6

Por dato $\dfrac{m+8}{-3} = -3 \Rightarrow m = 1$

luego el resto es $3^m + 6$

$\therefore R = 3 + 6 = 9$

Aplicación de la regla de Ruffini:

Sea

$f(x) = P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + ... + P_{n-1}x + P_n$

hagamos $x = y + h$

y supongamos que $f(x)$ se convierte en

$q_0y^n + q_1y^{n-1} + q_2y^{n-2} + ... + q_{n-1}y + q_n$

luego reemplazando $y=x-h$ se tendrá

$p_0x^n + p_1x^{n-1} + ... + p_n$

$= q_0(x-h)^n + q_1(x-h)^{n-1} + ... + q_n$

de donde podemos observar que q_n es el resto de dividir $f(x)$ entre $x-h$ y el cociente que se obtiene en la división es

$q_0(x-h)^{n-1} + q_1(x-h)^{n-2} + ... + q_{n-1}$

y así sucesivamente. Luego $q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, ...$ pueden hallarse por divisiones sucesivas.

El último cociente es q_0 y es evidente que es igual a p_0

Ejemplo

Sea $f(x) = x^3 + 2x + 5$. Hallar $f(x-2)$

Resolución:

	1	0	2	5
-2	↓	-2	4	-12
	1	-2	6	-7
-2	↓	-2	8	
	1	-4	14	
-2	↓	-2		
	1	-6		

En este caso dividiremos sucesivamente por $x+2$ y se obtendrá $f(x-2) = x^3 - 6x^2 + 14x - 7$

El cual puede verificarse reemplazando directamente en $f(x)$, x por $x-2$

Vemos $f(x) = x^3 + 2x + 5$

$\Rightarrow f(x-2) = (x-2)^3 + 2(x-2) + 5$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 2x - 4 + 5$

$\Rightarrow f(x-2) = x^3 - 6x^2 + 14x - 7$

Problema 12

Hallar el resultado de sustituir x por $x+3$ en la expresión $f(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

Resolución:

Haremos divisiones sucesivas por Ruffini de $f(x)$ entre $x - 3$

	2	-1	-2	5	-1
3	↓	6	15	39	132
	2	5	13	44	131
3	↓	6	33	138	
	2	11	46	182	
3	↓	6	51		
	2	17	97		
3	↓	6			
	2	23			

$\Rightarrow f(x+3) = 2x^4 + 23x^3 + 97x^2 + 182x + 131$

Problema 13

Sea el polinomio

$f(x) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})x^4 - (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})x^3 + 2\sqrt{6} - (4-2\sqrt{6})x^2,$

hallar su valor numérico en $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Resolución:

Recordando que $P(\alpha)$ es el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-\alpha)$

$\Rightarrow$ $P(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ será el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x - \sqrt{3} + \sqrt{2})$

Luego por Ruffini

	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$-(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$	$-(4-2\sqrt{6})$	0	$2\sqrt{6}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	↓	1	$5-2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$5-2\sqrt{6}$
	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	5

NOTA:

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$

$(\sqrt{3} \quad \sqrt{2})^2 = 3 + 2 - 2\sqrt{3.2}$

$= 5 - 2\sqrt{6}$

De donde $P(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 5$

Problema 14

Hallar $a+b$ en la división de

$$55x^3+(166+p)x-8-bx^2 \text{ entre } ax^2-39x+2$$

Si deja como residuo a $R(x) = px$

Resolución:

De $D(x) \equiv d(x)\,q(x)+R(x)$ división inexacta equivalentemente a $D(x)-R(x) \equiv d(x)q(x)$ división exacta.

Luego, ordenando ascendentemente para aplicar el método de Horner (prob. 9) (sólo en divisiones exactas).

$$\frac{-8+166x+55x^3-bx^2}{2-39x+ax^2}$$

		+		
2	-8	166	-b	55
39		-156	4a	
-a		10	195	-5a
	-4	5	$\underbrace{195+4a-b}_{\text{CERO}}$	$\underbrace{55-5a}_{\text{CERO}}$

Por ser exacto:

$$55-5a=0 \Rightarrow a=11$$

$$195+4a-b=0 \Rightarrow b=195+4a$$

Reemplazando el valor de **"a"** se tiene

$$b=239$$

$$\therefore \quad a+b=250$$

Problema 15

Determinar la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir

$$(4x^{80}-2x^{79}+x+b) \text{ entre } (x-1)$$

Resolución:

Por Ruffini

	4	-2	0	0 ········· 0	1		b
$x=1$	↓	4	2	2 ········· 2	2		6
	4	2	2	2 ········· 2	3		

$\underbrace{4 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \cdots 2 \quad 3}_{\text{80 términos}}$

$$\Sigma\text{Coef. } q = 4+3+78(2) = 163$$

Problema 16

El residuo de la división $(x+1)^n+1$ entre (x^2+2x) tiene la siguiente forma $R(x)=\left(\frac{1-a}{2}\right)x+b$, según ello señalar el valor de **"a"**

Resolución:

Sea $q(x)$ el cociente, entonces

$$(x+1)^n+1 \equiv (x^2+2x)\,q(x)+\left(\frac{1-a}{2}\right)x+b$$

Por ser identidad

I. Si $x=0$

$$\Rightarrow 1^n+1 = 0\,q(0)+0+b \Rightarrow b=2$$

II. Si $x=-2$

$$\Rightarrow (-2+1)^n+1 = 0.q(-2)+\left(\frac{1-a}{2}\right)(-2)+2$$

Luego $(-1)^n+1=-1+a+2$

$$\therefore a=(-1)^n$$

Problema 17

Señalar el residuo en la siguiente división

$$\frac{(x+1)(x^2-x)^2(x^2-5x+6)}{x^2-2x-4}$$

Resolución:

Por el teorema del resto

$$x^2-2x-4=0 \Rightarrow x^2-2x=4$$

En el dividendo

$$(x+1)(x-1)^2\,x^2\,(x-3)(x-2)$$

Efectuando como se indica

$$(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)(x)(x^2-2x)$$

como

$$x^2-2x=4 \Rightarrow R(x)=(4-3)(4+1)x.4$$

$$\therefore R(x)=20x$$

Problema 18

En la división $\dfrac{x^{n-1}-(n+2)x+n+1}{x-1}$

el término independiente del cociente es -10, ¿de qué grado es el dividendo?

Resolución:
Por Ruffini

	1	0	0	0	.....	0	-n-2	n+1
1	↓	1	1			1	1	-n-1
	1	1	1			1	-n-1	0

Del dato $-n-1=-10 \Rightarrow n=9$

$\therefore$ grado del dividendo es 8.

Problema 19

Hallar el resto de $\dfrac{(x^3+1)^{41}+x^{66}+13}{x^6+x^3+1}$

Resolución:

$$x^6+x^3+1=0 \;\ldots\ldots (*)$$
$$\Rightarrow x^3+1=-x^6$$

Multiplicando por (x^3-1) a $(*)$, se tiene

$$(x^3-1)(x^6+x^3+1)=0$$
$$\Rightarrow x^9-1=0 \Rightarrow x^9=1$$

Luego en el dividendo se tiene

$$(-x^6)^{41}+x^{66}+13=-x^{246}+x^{66}+13$$
$$=-\underbrace{(x^9)^{81}}_{1}x^3+\underbrace{(x^9)^{7}}_{1}x^3+13$$

$\Rightarrow R(x)=-x^3+x^3+13$

$\therefore R(x)=13$

Problema 20

Hallar el valor numérico del polinomio

$$P(x)=\sqrt{2}x^5+\left(1-\sqrt{10}\right)x^4+2\sqrt{5}x^3-3\sqrt{5}x+3\sqrt{10}$$

cuando $x=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Resolución:
(Del problema 13)
Por Ruffini

	$\sqrt{2}$	$1-\sqrt{10}$	$2\sqrt{5}$	0	$-3\sqrt{5}$	$3\sqrt{10}$
$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	↓	$\sqrt{10}-2$	$-\sqrt{5}+\sqrt{2}$	3	$3\sqrt{5}-3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{10}+6$
	$\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	3	$-3\sqrt{2}$	6

$$\therefore \quad P\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)=6$$

Problema 21

Siendo $D(x)=2x^4-5x^3+2$ y $d(x)=2x^2-3x$; dividendo y divisor respectivamente. Hallar el polinomio cociente y el polinomio residuo.

Resolución:

De la propiedad de grado, se determina que cociente será de 2do. grado y el residuo de 1er. grado.

Por lo tanto $\quad q(x)=C_0x^2+C_1x+C_2$
$\qquad\qquad\quad R(x)=r_0x+r_1$

En la identidad

$2x^4-5x^3+2\equiv(2x^2-3x)(C_0x^2+C_1x+C_2)+r_0x+r_1$

haciendo uso de la identidad

$$2C_0=2 \Rightarrow C_0=1$$
$$2C_1-3C_0=-5 \Rightarrow C_1=-1$$
$$2C_2-3C_1=0 \Rightarrow C_2=-3/2$$
$$r_0-3C_2=0 \Rightarrow r_0=\frac{9}{2}$$

Así mismo: $\quad r_1=2$

De donde se tendrá $\qquad q(x)=x^2-x-\dfrac{3}{2}$

$$r(x)=-\frac{9}{2}x+2$$

Problema 22

Si la siguiente división

$$\frac{2bx^4+3ax^3-[\![\sqrt{5}]\!]x^2+8x+[\![\sqrt{6}]\!]}{-2x^3+[\![\sqrt{2}]\!]x^2-3}$$

tiene como resto $[\![5]\!]x-4$;
según ello calcular 6ab

Observación: $[\![\Delta]\!]=n \leftrightarrow n\leq\Delta<n+1$; $n\in\mathbb{N}$, $\Delta\in\mathbb{R}$

Resolución:

De acuerdo a la definición de $[\![\Delta]\!]$

$$2\leq\sqrt{5}<3 \Rightarrow [\![\sqrt{5}]\!]=2$$
$$2\leq\sqrt{6}<3 \Rightarrow [\![\sqrt{6}]\!]=2$$
$$1\leq\sqrt{2}<2 \Rightarrow [\![\sqrt{2}]\!]=1$$
$$5\leq5<6 \Rightarrow [\![5]\!]=5$$

Luego la división es

$$\frac{2bx^4+3ax^3-2x^2+8x+2}{-2x^3+x^2-3} \quad \wedge \quad R(x)=5x-4$$

De la identidad

$$D(x) = d(x)\,q(x) + R(x)$$

$$\Rightarrow \quad D(x) - R(x) = d(x)\,q(x) \qquad \text{(Div. Exacta)}$$

$$\frac{2bx^4+3ax^3-2x^2+3x+6}{-2x^3+x^2-3}$$

Por ser exacta puede aplicarse el método de Horner invertidamente

		+			
-3	6	3	-2	3a	2b
0		0	2	-4	
-1			0	1	-2
2					
	-2	-1	0	0	0

Del resto $\quad 3a-4+1=0 \Rightarrow a=1$

$\quad 2b-2=0 \Rightarrow b=1$

$\therefore\ 6ab = 6$

Problema 23

Determinar el valor de **m** y **n** para que el polinomio

$P(x) = nx^{20} - mx^{19} + mx - 1$ sea divisible por $(x-1)^2$.

Dé como respuesta $\quad 9mn$

Resolución:

Puesto que es divisible por $(x-1)^2$ es también divisible por $x-1$

Por teorema del resto

$P(1)=0 \Rightarrow P(1) = n-m+m-1 = 0 \ \therefore\ n=1$

Para la división es posible aplicar un solo Horner de divisor $(x-1)^2$ o aplicar doble Ruffini de divisores $x-1$

Por la regla de Ruffini :

	1	-m	0	0	0	m	-1
$x=1$	↓	1	1-m			1-m	1
	1	1-m	1-m	....	1-m	1	0
$x=1$	↓	1	2-m				19-18m
	1	2-m	3-2m	......	19-18m		20-18m

Por ser exacta $\quad 20-18m = 0$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{10}{9}$$

$$\therefore\ 9mn = 9\left(\frac{10}{9}\right)(1) = 10$$

Otro Método:

Si es divisible por $(x-1)^2$

$$\Rightarrow P(1) = 0 \wedge P'(1) = 0$$

I. $\quad P(1) = n-m+m-1 = 0 \Rightarrow n = 1$

II. $\quad P'(x) = 20x^{19} - 19mx^{18} + m$

Como $P'(1) = 0$

$$\Rightarrow 20-19m+m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{10}{9}$$

$$\therefore\ 9mn = 9\left(\frac{10}{9}\right)(1) = 10$$

> **Nota** $P'(x)$ es la primera derivada de $P(x)$

Problema 24

Sea el polinomio $\varphi(x) = x^2 + px + q$ de coeficientes naturales y de suma mínima, que verifican las siguientes condiciones adicionales

I. $\varphi(3)$ es divisible por 6

II. $\varphi(4)$ es divisible por 7

III. $\varphi(5)$ es divisible por 10

Hallar $\varphi(1)$

Resolución:

De las condiciones

$$\varphi(3) = 3^2+3p+q = \overset{\circ}{6} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\varphi(4) = 4^2+4p+q = \overset{\circ}{7} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

$$\varphi(5) = 5^2+5p+q = \overset{\circ}{10} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De (a) } q = \overset{\circ}{3} \\ \text{De (b) } q = \overset{\circ}{5} \end{array}\right\} q = \overset{\circ}{15} \Rightarrow q_{min} = 15$$

En (α) como $q = 15 \Rightarrow$ **p** es par

De $(\beta) \Rightarrow 16+4p+15 = \overset{\circ}{7}$

$$P = \frac{\overset{\circ}{7} - 31}{4} = \frac{7K-31}{4}$$

Como K es entero y P es par, se obtendrá K=9 y el valor de P será 8.

Conocido p y q $\Rightarrow \varphi(x) = x^2+8x+15$

$$\therefore\ \varphi(1) = 1+8+15 = 24$$

Problema 25

Al dividir

$$\frac{(x-1)^2+(x^2-1)^3+(x^3-1)^4+(x^4-1)^5+....+(x^{2n-1}-1)^{2n}}{x^2-1}$$

Indicar el término independiente del residuo

Resolución:

En la identidad fundamental

$$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$$

Como el divisor es de segundo grado, entonces el residuo podrá ser de primer grado es decir de la forma $R(x) = ax+b$

Luego $D(x) \equiv (x^2-1)q(x)+ax+b$

donde $D(x)= (x-1)^2+ (x^2-1)^3+ (x^3-1)^4+...$

$... (x^{2n-1}-1)^{2n}$

Por lo tanto

Si $x=1 \Rightarrow D(1) = (1^2-1)q(1)+a+b$

Entonces $D(1) = 0+0+ ... +0 = 0$

$\therefore\ a+b = 0$ .... (α)

Si $x=-1 \Rightarrow D(-1) = ((-1)^2-1)q(-1)-a+b$

Entonces $D(-1) = 2^2+0+2^4+ ... + 2^{2n}$

$= 4(1+4+4^2+ ... 4^{n-1})$

$= 4\left(\dfrac{4^n-1}{4-1}\right)$

Luego $D(-1) = \dfrac{4}{3}(4^n-1)$

$\therefore\ -a+b = \dfrac{4}{3}(4^n-1)$ .... (β)

De $(\alpha)+(\beta)$ $2b = \dfrac{4}{3}(4^n-1) \Rightarrow b = \dfrac{2}{3}(4^n-1)$

Por lo tanto el término independiente del residuo es $\dfrac{2}{3}(4^n-1)$

Problema 26

En la siguiente división indicada

$$\frac{nx^{n+3}+(n+1)x^{n+2}+3nx^2-(5n-2)x+\frac{-n-3}{3}}{3x-3}$$

la suma de coeficientes del cociente con el resto es 6470. Hallar **n.**

Resolución:

Por el método de Horner

$$\begin{array}{c|cccccccc|c}
3 & n & n+1 & 0 & 0 \cdots 0 & 3n & -(5n-2) & & & -\frac{n+3}{3} \\ \hline
3 & & n & 2n+1 & & 2n+1 & 5n+1 & & & 3 \\ \hline
 & \frac{n}{3} & \underbrace{\frac{2n+1}{3} & \frac{2n+1}{3} \cdots & \frac{2n+1}{3}}_{\text{"n" terminos}} & \frac{5n+1}{3} & 1 & & & -\frac{n+3}{3}+3
\end{array}$$

Por dato

$$\frac{n}{3}+\underbrace{\left(\frac{2n+1}{3}+\frac{2n+1}{3}+...+\frac{2n+1}{3}\right)}_{\text{n veces}}+\frac{5n+1}{3}+1$$

$$-\frac{n+3}{3}+3=6470$$

$$\Rightarrow \frac{n}{3}+\frac{n(2n+1)}{3}+\frac{5n+1}{3}+1-\frac{n+3}{3}+3=6470$$

$$\Rightarrow \frac{n+2n^2+n+5n+1+3-n-3+9}{3}=6470$$

Entonces

$$\frac{2n^2+6n+10}{3}=6470 \Leftrightarrow \frac{n^2+3n+5}{3}=3235$$

$\Rightarrow n^2+3n+5 = 9705 \Rightarrow n(n+3) = 9700$

$\Rightarrow n(n+3)=97(100) \quad \therefore \quad n = 97$

Problema 27

Al dividir $P(x) = x^4+Ax^3+Bx^2+2x-1$ entre un polinomio de 2do. grado se obtiene como cociente x^2-1 y como residuo $2x+1$. Indicar el valor de B.

Resolución:

De la identidad fundamental

$D(x) \equiv d(x)\,q(x)+R(x)$; tenemos

$x^4+Ax^3+Bx^2+2x-1 \equiv (x^2-1)q(x)+2x+1$

Evaluando en la identidad

I. **Si $x=1$**

$\Rightarrow 1+A+B+2-1 = 0+2+1$

$A+B = 1$ .... (α)

II. **Si $x=-1$**

$\Rightarrow 1-A+B-2-1 = 0-2+1$

$B-A = 1$ .... (β)

De (α) y (β) sumando obtenemos $2B = 2$ entonces $B=1$

Problema 28

Si el polinomio $F(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x+\theta$ es divisible por

$$E(x) = x^2+\frac{2\alpha}{3}x+\frac{\beta}{3} \quad \text{con} \quad \alpha\beta\theta \neq 0$$

Hallar el equivalente de

$$\left[F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}\right]^{3/5}$$

Resolución:

Como $F(x)$ es divisible por $E(x)$, su división es exacta.

Luego

$$\begin{array}{r|rr:rr}
1 & 1 & \alpha & \beta & \theta \\
\hline
-\frac{2\alpha}{3} & \downarrow & -\frac{2\alpha}{3} & -\frac{\beta}{3} & \\
-\frac{\beta}{3} & & & -\frac{2\alpha^2}{9} & -\frac{\alpha\beta}{9} \\
\hline
 & 1 & \frac{\alpha}{3} & 0 & 0
\end{array}$$

Del resto

$$\beta-\frac{\beta}{3}-\frac{2\alpha^2}{9}=0 \Rightarrow \beta=\frac{\alpha^2}{3}$$

$$\theta-\frac{\alpha\beta}{9}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\alpha^3}{27}$$

Reemplazando

$$F\left(\frac{2\alpha}{3}\right)=\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^3+\alpha\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2+\beta\left(\frac{2\alpha}{3}\right)+\theta$$

$$=\frac{8\alpha^3}{27}+\frac{\alpha^3}{9}+\left(\frac{\alpha^2}{3}\right)\left(\frac{2\alpha}{3}\right)+\frac{\alpha^3}{27}$$

$$=\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{2\alpha}{3}\right)=\alpha^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Asimismo

$$E\left(\frac{2\alpha}{3}\right)=\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2+\frac{2\alpha}{3}.\frac{2\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}$$

$$=\frac{4\alpha^2}{9}+\frac{4\alpha^2}{9}+\frac{\alpha^2}{3}.\frac{1}{3}=\alpha^2$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{2\alpha}{3}\right)=\alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Luego

$$\left[F_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}\cdot E_{\left(\frac{2\alpha}{3}\right)}\right]^{3/5}=\left(\alpha^3.\alpha^2\right)^{3/5}=\alpha^3$$

Problema 29

Se sabe que el polinomio

$$P(x) = x^{n+2}+Ax^{n+1}+ABx^n$$

es divisible por

$$Q(x) = x^2-(A+B)x+AB$$

con $AB \neq 0$

Calcular el valor que asume $\frac{A}{B}$

Resolución:

Como es divisible por $x^2-(A+B)x+AB$ que es equivalente a $(x-A)(x-B)$ entonces, el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-A$ y $x-B$

Por teorema del resto $x-A=0 \Rightarrow x=A$

Luego

$$P(A)=0 \Rightarrow A^{n+2}+AA^{n+1}+ABA^n=0$$

$$\Rightarrow A\left(A^{n+1}\right)+A\left(A^{n+1}\right)+B\left(A^{n+1}\right)=0 \ ; \ A^{n+1}\neq 0$$

$$\Rightarrow 2A+B=0 \quad \therefore \quad \frac{A}{B}=-1/2$$

Problema 30

Determinar el valor de a_0, sabiendo que al dividir el polinomio $P(x) = a_0x^4+a_1x^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1 se obtiene dos residuos que suman 8.

Resolución:

Por Teorema del resto

I. $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

$$\Rightarrow R_1(x)=a_0(-1)^2+a_1(-1)x+-1+1$$

$$R_1(x)=-a_1x+a_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

II. $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

$$\Rightarrow R_2(x)=a_0+a_1x+1+1$$

$$R_2(x)=a_1x+a_0+2 \quad \ldots\ldots \quad \ldots (\beta)$$

De $(\alpha)+(\beta)$

$$\left(-a_1x+a_0\right)+\left(a_1x+a_0+2\right)=8$$

$$\Rightarrow 2a_0+2=8 \ \therefore \ a_0=3$$

Problemas Propuestos

1. Si al dividir $5x^3 + 6x^4 - 1$ entre $x+3x^2-2$ se obtiene un resto de la forma $mx+n$. Calcular $m-n$

A) -4 B) -1 C) 0
D) 5 E) 4

2. Sea $Q(x)=ax^2+bx+c$ el cociente de la división de $2x^4+3x^3-8x^2+1-4x$ entre $x^2-(x+1)$. Calcular $(a-b+c)^2$

A) -3 B) 4 C) 1
D) 2 E) 3

3. En el esquema de Horner mostrado, determinar el valor de $(m+n+p)-(a+b+c)$

1	3	a	1	b	c
m		9	d		
2			e	f	
				g	h
	n	-2	p	4	-3

A) 20 B) 18 C) 15
D) 5 E) -3

4. Hallar $m+n$, sabiendo que la división

$$\frac{3x^5 + mx^3 + nx^2 - x + 2}{x^2 + 3}$$

da un residuo $5x-10$

A) 11 B) 5 C) 1
D) 7 E) 4

5. Hallar el resto al dividir

$$\frac{2x^{119} + 1}{x^2 - x + 1}$$

A) $x-3$ B) $4-2x$ C) $3-2x$
D) $2x-3$ E) $3-x$

6. Al efectuar la división

$$\frac{8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2}{4x^2 + x + 3}$$

se obtiene su residuo

$$(5m+4n)x+(m+2n)$$

Encontrar el valor de $m^{\frac{m}{n}}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4

D) $-\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

7. Hallar el residuo en

$$\frac{3 + (x-3)^{3^{n+3}}}{x^3 - 26 + 27x - 9x^2}\ ;\text{ es:}$$

A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

8. Hallar el resto en

$$\frac{x + x^{199} + 1}{\dfrac{x^5 - 1}{x - 1}}$$

A) $x^2(x-1)$ B) $x^3(x-1)$ C) $x(x-1)$
D) $-x^2(x+1)$ E) $x^4(x+1)$

9. Hallar el valor de $a+b+c$ si el resto de la división indicada siguiente

$$\frac{ax^5 + bx^4 + cx^3 - 5x - 3}{2x^3 + x^2 - x - 2} \quad \text{es } 7x^2 + 8x - 3$$

A) 21 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

10. Calcular "n" si el residuo de la división

$$\frac{(x+3)^n(x+1)^n + nx(x-1)(x+5) + 1}{(x+2)^2}$$

es $2(1-18x)$; **n** es par

A) 5   B) 4   C) 3
D) 2   E) 1

11. En la división siguiente

$$\frac{2x^5 + 3x^4 + bx^3 + 6bx^2 + x + a}{x^2 - x + b}$$

Se sabe que el resto es: $2x+3$; además la suma de coeficientes del cociente es mayor que 15. Calcular a . b

A) 4   B) 9   C) 7
D) 2   E) 8

12. Hallar el valor de "a" si al dividir
$x^{a+17} + x^{a+16} + x^{a+15} + ... + x^3 + x^2 + x + 1$
entre $x-1$, se observa que la suma de los coeficientes del cociente es igual a 90 veces su resto.

A) 13   B) 155   C) 160
D) 163   E) 165

13. Del esquema de Paolo Ruffini

	A	B	C	D	E	F
-1	↓	1	3	5	7	9
	a	d	c	b	a	n

Determinar la sumatoria de coeficientes del polinomio dividendo.

A) 100   B) -50   C) 50
D) -25   E) 0

14. Si $P(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 1$ se divide entre x^2-x+1 se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R(x)=10x-1$, hallar a + c

A) 77   B) 78   C) 79
D) 80   E) 57

15. Al dividir $F(x)$ entre $(4x^2-9)(x+3)$ se obtuvo como residuo $2(x-3)^2$. Hallar el residuo de dividir $F(x)$ entre $2x^2+9x+9$

A) $-21x+9$ B) $12x+3$ C) $-20x+11$
D) $2x+1$ E) $-3x+10$

16. Si se sabe que en la división de
$F(x)=ax^n+(3a-b)x^{n-1}+(5a-3b)x^{n-2}$
$+ (7a-5b)x^{n-3}+ ...$ (n+1)
términos entre $ax-b$ el residuo es 11a, $(a \neq b)$. Hallar el valor de **n**.

A) 5   B) 6   C) 4
D) 3   E) 7

17. Qué valor toma p.q en

$$\frac{x^4 + px^2 + q}{x^2 + x + 1}$$

de modo que su resto sea idéntico a $3x+4$

A) 4   B) -4   C) -1
D) -6   E) 6

18. Calcular b-a si la división

$$\frac{ax^5+2(3+a)x^4+(121-a)x^3-(6-b)x^2+b(2x-1)}{x^2+2x-1}$$

da un cociente que evaluado en $x=2$ es 39; además $\{a;b\} \subset \mathbb{Z}^+$

A) 6   B) 4   C) 5
D) 1   E) -6

19. Calcular el residuo de la división siguiente

$$\frac{(x-1)^7 - (x-2)^7 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

A) $x-1$ B) $x-2$ C) 1
D) 0   E) -1

20. Al efectuar la división

$$\frac{(x^2+1)^5 + (x-1)^3 + 3x}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Se obtuvo un resto $R(x)$

Según ello, hallar el valor de $\dfrac{R(-1)}{R(1)}$

A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{7}{5}$ C) $\frac{8}{7}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{7}$

21. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre el producto de $(x+1)(x+3)(x-2)$, el resto obtenido es x^2-5x+1
Encontrar el resto que se obtiene al dividir $P(x)$ entre x^2-x-2

A) $x+5$ B) $-2x+3$ C) $-4x+3$
D) $2x-1$ E) $-4x$

22. En la siguiente división

$$\frac{3x^{12}-5x^{10}+3x^3+3x^2-5x-5}{ax^2-b}$$

Determinar el valor entero y positivo de **a** y **b** para que dicha división sea exacta, siendo $a<4$.

A) $a=1$; $b=5$ B) $a=3$; $b=5$
C) $a=3$; $b=3$
D) $a=3$; $b=6$ E) $a=2$; $b=6$

23. Al efectuar la división

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+x+3}{3x^2-x+1}$$

se obtuvo como residuo $2x+1$.
Según ello, determinar la relación correcta, si el producto de los coeficientes del cociente es 8.

A) $c\ \ a=9$ B) $|b|=2$
C) $|a|-|b|=13$
D) $|b-c|>9$ E) $ab>0$

24. Hallar el resto de la división

$$\frac{(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^{17}+3}{x^2+2x+2}$$

A) $2x$ B) $2x-12$ C) $2x+5$
D) $2x+12$ E) $2x+7$

25. Sabiendo que al dividir el polinomio $P(x)$ entre $x^2-(1+b)x+b$ y $x^2-(b+2)x+2b$ se obtuvo por restos $7x-4$ y $5x-8$ respectivamente. Calcular la suma de coeficientes del resto de dividir $P(x)$ entre $x^3-(b+3)x^2+(3b+2)x-2b$.

A) 3 B) 1 C) 4
D) 2 E) 0

26. Si al dividir

$$\frac{abx^5+b^2x^4+bcx^3-abx+acx^2+c^2}{ax^2+bx+c}$$

se obtiene un resto acx. Calcular $\dfrac{b(a+c)}{ac}$

A) 0 B) 1 C) -2
D) -3 E) 1

27. Hallar el resto en la división

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$$

A) $7x+5$ B) $76x+2$ C) $7x+6$
D) $6x\ \ 1$ E) $3x-1$

28. El cociente de dividir un polinomio de tercer grado entre $(2x-1)$ es (x^2+2x-3) y el residuo al dividir dicho polinomio entre $2x+1$ es 1. Hallar el resto obtenido al dividir el mismo polinomio entre $2x-1$.

A) $-6{,}5$ B) $-1{,}5$ C) $4{,}5$
D) 4 E) 5

29. Dada la división

$$\frac{abcx^3-(a^2c+b^2a-c^2b)x^2+(a^2b+b^2c-c^2a)x-abc}{\left(x-\dfrac{a}{b}\right)\left(x-\dfrac{c}{a}\right)}$$

exacta. Si $abc \neq 0$, determinar el valor de x, que anule al cociente de la misma.

A) $\frac{c}{b}$ B) $\frac{a}{b}$ C) 1
D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{b}{c}$

30. Dar la suma de coeficientes del cociente de la división indicada

$$\frac{x^6-14x^4+29x^2-36}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

A) 13 B) 12 C) 18
D) 24 E) 6

31. Hallar el resto en la división

$$\frac{(\sqrt{2}+1)x^4-(2\sqrt{2}+2)x^3-(\sqrt{2}+4)x+2}{x-\sqrt{2}-1}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. Si la división

$$\frac{ax^4+bx^3+16x-25}{2x^2-x+4}$$

deja como residuo $3x-5$
Según esa información, hallar el valor de a+b.

A) 2 B) 11 C) 33
D) 36 E) 7

33. Determinar la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir

$$\frac{4x^{80}-2x^{79}+x+b}{x-1}$$

A) 165 B) 162 C) 163
D) 164 E) 161

34. Hallar el valor numérico del polinomio

$$P(x)=x^4+3\sqrt[3]{5}.\sqrt{3}x^2-(5+\sqrt[3]{5}-2\sqrt{3})x+\sqrt[3]{25}+4$$

cuando x toma el valor de $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$

A) $-1+\sqrt[3]{5}$ B) 0 C) $2\sqrt[3]{25}$
D) 7 E) $2\sqrt[3]{25}+7$

35. Hallar el resto en

$$\frac{1+x+x^2+x^3+.....+x^{4n-1}}{(1+x)(1+x^2)}$$

A) $(10-n)x+4$ B) $(4n-1)x+n$
C) 0
D) $2x+4^n$ E) x^2-x+1

36. Al efectuar la división siguiente

$$\frac{x^{19}+x^{16}+2x^{12}-7x^5+9x-1}{x^2+1}$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Su resto es un polinomio constante
II. Su resto es $x+2$
III. La división es exacta
IV. Su resto es $x-2$

A) VVFF B) FVFF C) VFFF
D) FVVV E) FFFF

37. Si el polinomio $2x^5+x^4+ax^2+bx+c$ es divisible por x^4-1, hallar $\frac{a+b}{a-b}$

A) $\frac{3}{2}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $-\frac{2}{3}$ E) -1

38. Al efectuar la división siguiente

$$\frac{2x^5+7x^4-3x^3+5x+1}{x^3+3x^2-4x+k}$$

se obtiene un residuo de primer grado. Hallar el residuo.

A) $14x+1$ B) $14x+3$ C) $3x+14$
D) $14x-2$ E) $14x+2$

39. Averiguar el coeficiente de aquel único término central que ofrece en su desarrollo la división de

$$\frac{ab(a^n+b^n)x^{n+2}-ab(a^nb^{-1}+b^na^{-1})x^{n+1}-abx^2+1}{(ax-1)(bx-1)}$$

tal que $ab\neq 0$

A) $a^{n/2}+b^{n/2}$ B) $a^{n-1}+b^{n-1}$
C) $a+b$
D) $a^{\frac{n-1}{2}}+b^{\frac{n-1}{2}}$ E) $a^{\frac{n+1}{2}}+b^{\frac{n+1}{2}}$

40. Al dividir $P(x)$ entre (x^2+x+1) se obtuvo por residuo $(x+1)$ y al dividir $P(x)$ entre (x^2-x+1) el resto es $(x-1)$. Calcular el resto de dividir $P(x)\div(x^4+x^2+1)$

A) $x+1$ B) x^3 C) x^3-x
D) x^3+x E) x^3-1

1	C	11	E	21	C	31	C
2	B	12	D	22	B	32	E
3	B	13	B	23	D	33	C
4	A	14	E	24	D	34	D
5	C	15	A	25	A	35	C
6	E	16	A	26	B	36	B
7	B	17	B	27	C	37	E
8	D	18	A	28	A	38	B
9	B	19	D	29	E	39	A
10	B	20	A	30	D	40	D

Claves

CAPÍTULO

VI

Divisibilidad

Pierre Fermat (1601-1665)

Famoso matemático que nació en Beaumont de Lomagne, Francia, y murió en Castres. La mayor parte de su vida transcurrió en Toulose, donde fue consejero del parlamento local. Fue el matemático más original de su tiempo y el primer geómetra. Estudió preferentemente la teoría de los números. Publicó pocas obras; la mayoría de sus trabajos consisten en anotaciones marginales en obras matemáticas que había leído. Entre sus trabajos merecen destacarse el conocido principio de Fermat, sobre óptica geométrica, y dos teorema que llevan su nombre, uno de los cuales ha sido un enigma para los matemáticos de todos los tiempos. El teorema para el cual no era posible hallar una solución general es el siguiente:

"No existen tres números enteros que satisfagan la siguiente ecuación: $x^n+y^n=z^n$ si $n>2$"

Este problema sólo fue resuelto por Euler (para n=3) y por el propio Fermat (para n=4)

Se supone que Fermat poseía la demostración. Los grandes matemáticos no han podido resolverlo, hasta después de 350 años; el matemático inglés Andrew Pilles, luego de 10 años de investigación, logró demostrar el teorema de Fermat en la Universidad de Princeton en 1997.

Fermat también hizo trabajos sobre el cálculo de probabilidades.

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$$

ÁLGEBRA

L E C T U R A

Los cuatro 4 mágicos

Este problema, expuesto por primera vez en el siglo pasado, cuenta con la simpatía de los aficionados a los problemas matemáticos.

Se trata de obtener, para toda la serie de números naturales, expresiones en las que aparezca cuatro veces el número 4, junto con símbolos matemáticos simples. Para expresar los diez primeros números, sólo son necesarios los signos de las cuatro operaciones fundamentales: sumar, restar, multiplicar y dividir.

Aquí está la prueba:

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4}$$

$$4 = 4 + \frac{4-4}{4}$$

$$5 = \frac{(4 \cdot 4)+4}{4}$$

$$6 = 4 + \frac{4+4}{4}$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

$$10 = \frac{44-4}{4}$$

Fuente: Nueva Matemática - Ed. Salvat.

Divisibilidad de polinomios
Cocientes notables

OBJETIVOS

- Conocer el manejo de las divisiones exactas.
- Obtener cocientes de ciertas divisiones notables.
- Entender definiciones previas para captar la idea cabal de la factorización (Teorema del factor).
- Aplicar el algoritmo de la división en función a los grados de los polinomios.

INTRODUCCIÓN

La teoría de divisibilidad de polinomios estudia las propiedades que tiene una división exacta entre polinomios. Ya en la división numérica de los enteros, la divisibilidad nos da a conocer diversos criterios para reconocer divisiones exactas, con lo cual la parte operativa se reduce notablemente y sobresale la parte analítica.

En los polinomios, la división (de elementos: dividendo, divisor, cociente y residuo) también tiene propiedades de divisibilidad, que son herramientas para reconocer divisiones exactas, pues esto permite encontrar las raíces en un polinomio, lo cual es fundamental en la teoría de ecuaciones.

También los criterios que se tengan de divisibilidad de polinomios sirven para factorizar polinomios.

Entonces, en general, la divisibilidad de polinomios es una teoría básica que debe conocerse para afrontar, con éxito, situaciones diversas en los capítulos en las cuales se tenga como elementos a los polinomios; una aplicación de este capítulo podría ser el siguiente ejemplo:

Un auto tiene un movimiento rectilíneo cuya velocidad varía con el tiempo según la expresión $V(t)=t^3-5t^2+3t-15$, se desea saber si para "5" segundos el auto se detiene y además queremos saber si para otro tiempo diferente de "5" también se detiene.

La solución sería averiguar si para t=5 la velocidad es cero, para ello reemplazamos en la expresión $V(5)=5^3-5(5)^2+3(5)-15=0$

Se observa que la velocidad es cero para t=5, entonces, el auto se detiene. Ahora veamos, si para otro tiempo diferente de "5" también se detiene, para ello vamos a transformar nuestra expresión en una multiplicación indicada.

Como $V(5)=0$ entonces la división $\dfrac{V(t)}{t-5}$ es exacta, en este caso diremos que $V(t)$ es divisible por $(t-5)$.

Luego hallando el cociente por Ruffini, tenemos

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -5 & 3 & -15 \\ \hline 5 & & 5 & 0 & 15 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Entonces el cociente será $q(t)=t^2+3$, luego : $V(t) \equiv (t^2+3)(t-5)$

Como el tiempo es siempre positivo, para otro tiempo diferente de "5" la velocidad no es cero.

$\therefore$ Para un tiempo diferente de "5" el auto no se detiene.

DIVISIBILIDAD

Sean f(x) y g(x) dos polinomios de grados no nulos con coeficientes reales o complejos, si el resto de la división de f(x) entre g(x) es idénticamente nulo, entonces g(x) se llama divisor de f(x).

DEFINICIÓN

Dados dos polinomios f(x) y g(x) de grados no nulos se dirá que f(x) es divisible por g(x) si existe un único polinomio h(x), tal que se verifique la identidad de división exacta.

$$\text{f}(x) \text{ es divisible por } \text{g}(x) \iff \exists!\, \text{h}(x) \;;\; \text{f}(x) \equiv \text{g}(x).\text{h}(x)$$

En efecto, si g(x) es divisor de f(x), el cociente de la división f(x) entre g(x) es h(x).
Si f(x) es divisible por g(x), entonces g(x) es un factor de f(x).

Ejemplo:
Sean f(x) = $(x^2 - 4)(x+5)$ y g(x) = $x^2 + 3x - 10$, diremos que f(x) es divisible por g(x) ya que f(x) entre g(x) es una división exacta. Entonces existirá un único polinomio h(x) de tal modo que f(x) ≡ g(x).h(x); siendo h(x) el cociente de dividir f(x) entre g(x).
En efecto

$\text{f}(x) = (x^2-4)(x+5) \Rightarrow \text{f}(x) = x^3+5x^2-4x-20$

$\text{g}(x) = x^2+3x-10$

Luego aplicando Horner

$$\begin{array}{r|rr:rr} 1 & 1 & \boxed{5} & -4 & -20 \\ \hline -3 & & \boxed{-3} & 10 & \\ & & 2 & -6 & 20 \\ 10 & & & & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

De donde h(x) = $x + 2$, luego f(x) ≡ h(x) . g(x)

> **TEOREMA DEL FACTOR**
> Un polinomio P(x) de grado no nulo se anula para $x=\alpha \leftrightarrow$ P(x) es divisible por $(x-\alpha)$; luego $(x-\alpha)$ es un factor de P(x)

Si el polinomio P(x) se anula para $x=\alpha$, es decir, P(α) = 0 ⇒ el resto de dividir P(x) entre $(x-\alpha)$ es cero; luego P(x) es el producto de $(x-\alpha)$ por otro polinomio de grado (n-1), siendo "n" el grado del polinomio P(x), es decir, P(x) es divisible por $(x-\alpha)$.

Recíprocamente si P(x), es equivalente a $(x-\alpha)$.g(x), entonces P(x) se anula para $x=\alpha$.

La condición necesaria y suficiente para que el polinomio P(x) sea divisible por $(x-\alpha)$ es que P(x) se anule para $x=\alpha$.

Ejemplo:
P(x) = $2x^3+5x^2-7x-12$, evaluando en $x=-3$

⇒ P(-3) = 0 ⇒ $(x+3)$ es un factor de P(x)

⇒ P(x) ≡ $(x+3)$ g(x) ; g(x) es de 2do. grado

Para conocer g(x) se tendrá que dividir P(x) entre $x+3$ por la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr:r} & 2 & \boxed{5} & \boxed{-7} & -12 \\ \hline & & \boxed{-6} & \boxed{3} & 12 \\ x=-3 & & & & \\ \hline & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

De donde g(x) = $2x^2 - x - 4$

TEOREMAS DE DIVISIBILIDAD

TEOREMA 1

Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$ y $g(x)$ es divisible por $h(x)$, entonces $f(x)$ es divisible por $h(x)$

Demostración

Por condición

$$f(x) \equiv m(x) \cdot g(x) \ldots\ldots\ldots. (1)$$
$$g(x) \equiv n(x) \cdot h(x) \ldots\ldots\ldots. (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$f(x) = m(x) \cdot [n(x) \cdot h(x)] \equiv h(x)\,[m(x) \cdot n(x)]$,

de donde vemos que $f(x)$ es divisible por $h(x)$

TEOREMA 2

Si $f(x)$ y $g(x)$ son divisibles por $h(x)$, la suma y la diferencia de $f(x)$ y $g(x)$ es divisible por $h(x)$

Demostración:

De la condición

$$f(x) \equiv m(x)\,h(x) \ldots\ldots\ldots. (1)$$
$$g(x) \equiv n(x)\,h(x) \ldots\ldots\ldots. (2)$$

(1)+(2)

$f(x)+g(x) \equiv [m(x)+n(x)]\,h(x)$; $m(x)+n(x) \neq 0$

(1)-(2)

$f(x)-g(x) = [m(x)-n(x)]\,h(x)$; $m(x)-n(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x)+g(x) \wedge f(x)-g(x)$ son divisibles por $h(x)$

TEOREMA 3

Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$, el producto de $f(x)$ por cualquier otro polinomio no nulo $h(x)$ es también divisible por $g(x)$

Demostración

De la condición $f(x) \equiv m(x).g(x)$

Multiplicando por $h(x) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) \cdot h(x) \equiv m(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

Se observa que $f(x).h(x)$ es divisible por $g(x)$

De los teoremas 2 y 3 se deduce:

I. Si cada uno de los polinomios: $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots, f_k(x)$ son divisibles por $g(x)$; el polinomio $f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \ldots\ldots$ $\ldots f_k(x)\,g_k(x)$ donde $g_1(x), g_2(x) \ldots\ldots g_k(x)$ son unos polinomios arbitrarios, también es divisible por $g(x)$.

II. Todo polinomio $f(x)$ es divisible por cualquier polinomio de grado cero.
En efecto:
Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ y $g(x) = c$, donde c es constante no nula, un polinomio arbitrario de grado cero.
Entonces:
$$f(x) \equiv c\left(\frac{a_0}{c}x^n + \frac{a_1}{c}x^{n-1} + \ldots\ldots \frac{a_n}{c}\right)$$

III. Si el polinomio $f(x)$ es divisible por $g(x)$, $f(x)$ es también divisible por $c.g(x)$, donde c es una constante no nula.
En efecto, de la igualdad $f(x) \equiv h(x)\,g(x)$ resulta la igualdad $f(x) \equiv (c^{-1}h(x)).(c.g(x))$

IV. Los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son divisibles entre sí cuando y sólo cuando $f(x) = c.g(x)$, siendo c constante no nula.

TEOREMA 4

Si el polinomio $P(x)$ es divisible separadamente por los binomios $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$ / $a \neq b \neq c$, entonces $P(x)$ es divisible por el producto: $(x-a)(x-b)(x-c)$

Demostración:

I Como $P(x)$ es divisible por $(x-a)$
$\Rightarrow P(x) \equiv (x-a)\,q_1(x)$

II. Como $P(x)$ es divisible por $(x-b)$ / $a \neq b$
$\Rightarrow q_1(x) = (x-b)\,q_2(x)$

III. Como $P(x)$ es divisible por $(x-c)$ / $a \neq b \neq c$
$\Rightarrow q_2(x) \equiv (x-c)\,q_3(x)$

De donde $P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q_3(x)$; luego se concluye que $P(x)$ es divisible por $(x-a)(x-b)(x-c)$

NOTA: Recíprocamente, si $P(x)$ es divisible por $(x-a)(x-b)(x-c)$; $a\neq b\neq c$, será divisible separadamente por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$

Ejemplo:

Si $P(x) = 3x^4+2x^3+ax^2+bx+c$

es divisible por $(x-2)(x+3)(x+2)$

Calcular el valor de $4a-2b+c$

Resolución:

Como $P(x)$ es divisible por $(x-2)(x+3)(x+2)$, entonces será divisible en forma separado por $(x-2)$,$(x+3)$ y $(x+2)$, luego $P(x)\div(x+2)$ es exacta.

Por el teorema del resto $P(-2) = 0$

$\Rightarrow P(-2) = 3(-2)^4+2(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c= 0$

$\Rightarrow 48-16+4a-2b+c = 0$

$\therefore\ 4a-2b+c = -32$

TEOREMA 5

Si al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-a)$; $(x-b)$ y $(x-c)$ / $a\neq b\neq c$ en forma separada deja el mismo resto en cada caso, entonces al dividir dicho polinomio entre $(x-a)(x-b)(x-c)$ dejará el mismo resto común.

Así $P(x) \div (x-a) \Rightarrow R_1(x) = R$

$P(x) \div (x-b) \Rightarrow R_2(x) = R$

$P(x) \div (x-c) \Rightarrow R_3(x) = R$

$\Rightarrow P(x) \div (x-a)(x-b)(x-c) \Rightarrow R(x) = R$

Demostración

I. $P(x)-R$ es divisible entre $(x-a)$

$\Rightarrow P(x)-R \equiv (x-a)\,q_1(x)$

II. $P(x)-R$ es divisible por $(x-b)$

$\Rightarrow P(x)-R \equiv (x-b)\,q_2(x)$

III. $P(x)-R$ es divisible por $(x-c)$

$\Rightarrow P(x)-R \equiv (x-c)\,q_3(x)$

De (I), (II) y (III) por el teorema anterior

$P(x)$ - R es divisible por $(x-a)(x-b)(x-c)$

$\Rightarrow P(x) - R \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q(x)$

$\Rightarrow P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q(x)+R$

TEOREMA 6

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor, se les multiplica por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera; pero el residuo queda multiplicado por dicho polinomio.

Demostración:

I. $D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$

II. Multiplicando por $S(x)$; $S(x) \neq 0$

$D(x)\,.\,S(x)\equiv[d(x)\,.\,S(x)]q(x)+[R(x)\,.\,S(x)]$

De donde se observa que el residuo queda multiplicando por $S(x)$ y el cociente es el mismo.

Ejemplo

Hallar el resto en: $\dfrac{2x^{34}-7x+4}{x^2-x+1}$

Resolución:

Multiplicando el dividendo y divisor por $x+1$

$$\frac{(2x^{34}-7x+4)(x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} \Rightarrow \frac{(2x^{34}-7x+4)(x+1)}{x^3+1}$$

Por teorema del resto $x^3+1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

Luego el resto es $[2(x^3)^{11}.\ x-7x+4](x+1)$

$R'(x) = [2(-1)^{11}.\ x-7x+4](x+1)$

$R'(x) = (-9x + 4)(x+1)$

Como el resto quedó multiplicado por $x+1$, se tendrá que $R(x) = -9x + 4$

TEOREMA 7

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les divide por un polinomio de grado no nulo, el cociente no se altera; pero el residuo queda dividido por dicho polinomio.

Demostración:

I. $D(x) \equiv d(x)\,q(x) + R(x)$

II. Dividiendo por $S(x) \neq 0$

$$\frac{D(x)}{S(x)} \equiv \frac{d(x)}{S(x)}.q(x) + \frac{R(x)}{S(x)}$$

De donde se observa que el residuo queda dividido entre $S(x)$ y el cociente es el mismo.

Ejemplo

Hallar el residuo en $\dfrac{(2x+1)(x-2)^3(x+1)(x+2)}{(x-2)^4(x+1)}$

Resolución:

Dividiendo al dividendo y divisor por $(x-2)^3(x+1)$ se tiene

$$\frac{(2x+1)(x+2)}{x-2}$$

Por teorema del resto $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$\therefore\ R'(x)=(2(2)+1)(2+2)=20$

Pero como el resto quedó dividido por $(x-2)^3(x+1) \Rightarrow R(x)=20(x-2)^3(x+1)$

Ejercicios para el lector: Halle el resto en cada una de las divisiones.

I. $\dfrac{5(x+1)^{28}-x-9}{x^2+3x+3}$

II. $\dfrac{(x^2-2x+1)^{31}+x}{(x-1)^2-x}$

III. $\dfrac{x^{37}+x-15}{x^3+x^2+x+1}$

IV. $\dfrac{(2x-5)^7(3x+1)(x-2)^5}{(3x+1)(x-2)^6}$

V. $\dfrac{x^{332}+4x^{15}-10x+12}{x^3-1-x(x-1)}$

VI. $\dfrac{x^7+2x^2-1}{x^3+x^2-x-1}$

COCIENTES NOTABLES

CONCEPTO

Llamaremos cocientes notables (C.N.) a los cocientes que se obtienen en forma directa, es decir, sin la necesidad de efectuar la operación de división.

Las divisiones indicadas que dan origen a estos cocientes notables son de la forma

$$\boxed{\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}\ ;\ n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 2}$$

Mediante la combinación de los signos se presentarán 4 casos.

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}\ ;\ \frac{x^n-y^n}{x+y}\ ;\ \frac{x^n+y^n}{x+y}\ ;\ \frac{x^n+y^n}{x-y}$$

Caso I

$$\boxed{\frac{x^n-y^n}{x-y}\ ;\ n \in \mathbf{N}}$$

a. **Veamos su resto**

Por el teorema del resto $x-y=0 \Rightarrow x=y$; entonces se tendrá $R=y^n-y^n=0$

Nos indica que para cualquier valor natural de **n** la división será exacta.

b. **Su cociente:** Efectuando la división por la regla de Ruffini $\left(\dfrac{x^n-y^n}{x-y}\right)$ se tendrá

	1	0	0	....		0	$-y^n$
$x=y$		y	y^2	y^3			y^n
	1	y	y^2	y^3	....	y^{n-1}	0

Siendo el cociente de la forma

$$x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\dots\dots+y^{n-1}$$

En general el cociente se obtendrá de la siguiente forma

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1

$$\frac{x^3 - y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x-y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x-y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

Asimismo

$\dfrac{x^{-7} - y^{-7}}{x-y}$ no genera cociente notable

porque $-7 \notin \mathbb{N}$

$\dfrac{x^{3/2} - y^{3/2}}{x-y}$ no genera cociente notable

porque $\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

TEOREMA

Dado el cociente notable:

$\dfrac{x^n - y^n}{x-y}$, un término cualesquiera t_k es igual

$$t_k = x^{n-k}y^{k-1} \; ; \; k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Demostración:

$$\frac{x^n - x^n}{x-y} = \underbrace{x^{n-1}}_{t_1} + \underbrace{x^{n-2}y}_{t_2} + \underbrace{x^{n-3}y^2}_{t_3} + \underbrace{x^{n-4}y^3}_{t_4} + \dots + \underbrace{y^{n-1}}_{t_n}$$

Vemos:

$t_1 = x^{n-1}$ → término de lugar 1

$t_2 = x^{n-2}y$ → término de lugar 2

$t_3 = x^{n-3}y^2$ → término de lugar 3

$\vdots \qquad \vdots$

$t_k = \boxed{??}$ → término de lugar k

Por inducción:

$t_1 = x^{n-1}y^{1-1}$

$t_2 = x^{n-2}y^{2-1}$

$t_3 = x^{n-3}y^{3-1}$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\boxed{t_k = x^{n-k}y^{k-1} \; ; \; k = 1, 2, 3, \dots\dots, n}$$

Ejemplo 2

Hallar el cociente notable generado por:

$$\frac{(3x)^5 - 1}{(3x) - 1}$$

Resolución:

Su cociente notable es

$$(3x)^4 + (3x)^3 + (3x)^2 + (3x) + 1$$

que es equivalente a

$$81x^4 + 27x^3 + 9x^2 + 3x + 1$$

TEOREMA DEL TÉRMINO GENERAL

Finalidad

El Teorema tiene por finalidad calcular un término cualquiera (t_k) del cociente sin necesidad de efectuar el desarrollo de dicha división.

Ejemplo 1

En el Cociente Notable de: $\dfrac{x^{60} - y^{60}}{x-y}$, hallar el término de lugar 15

Resolución:

Recordando en $\dfrac{x^n - y^n}{x-y} \Rightarrow t_k = x^{n-k}y^{k-1}$,

en el problema $n=60 \wedge k=15$

$$\Rightarrow t_{15} = x^{60-15} \cdot y^{15-1}$$

$$\therefore t_{15} = x^{45}y^{14}$$

Ejemplo 2 *(Para el lector)*

De : $\dfrac{a^{40} - b^{80}}{a - b^2}$, hallar el término de lugar 21

NOTA:

I. El cociente notable de $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ es un polinomio homogéneo de grado de homogeneidad **(n-1)**; es un polinomio de **n** términos completo y ordenado con respecto a ambas variables.

II. Si contamos los términos a partir del último, para hallar el término de lugar **k** sólo intercambiamos los exponentes; así

$$\boxed{\overleftarrow{t_k} = x^{k-1} y^{n-k}}$$

Ejemplo 1

¿ x^5y^{10} es un término del Cociente notable de $\dfrac{x^{16} - y^{16}}{x - y}$?

Respuesta:

Como el término es de grado 15 y 15 es el grado de homogeneidad del cociente notable generado por $\dfrac{x^{16} - y^{16}}{x - y} \Rightarrow x^5y^{10}$ si es un término de su cociente notable.

Ejemplo 2

¿ x^5y^{11} es un término del cociente notable de $\dfrac{x^{19} - y^{19}}{x - y}$?

Respuesta:

No, puesto que el grado de homogeneidad del Cociente Notable será 18 y este término es de grado 16.

Ejemplo 3 (*Para el lector*)

Del ejemplo anterior calcular $\left(\dfrac{t_{17} \cdot t_{18}}{t_{16} \cdot y^{18}}\right)$

Caso II

$$\boxed{\frac{x^n - y^n}{x + y} \; ; n \in N}$$

a. **Veamos su resto:**

Por el teorema del resto $x + y = 0$

$\Rightarrow x = -y \Rightarrow R = (-y)^n - y^n$

$\Rightarrow$ Si $\begin{cases} \textbf{n} \text{ es par} \Rightarrow R = 0 \\ \textbf{n} \text{ es impar} \Rightarrow R = -2y^n \end{cases}$

b. **Su cociente:**

Por la regla de Ruffini

I. Si **n** es par:

	1	0	0	0	....	0	$-y^n$
$x=-y$	↓	$-y$	y^2	$-y^3$	....	$-y^{n-1}$	y^n
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	....	$-y^{n-1}$	0

Entonces

$$\boxed{\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots\ldots - y^{n-1}}$$

II. Si **n** es impar

	1	0	0	0	....	0	$-y^n$
$x=-y$	↓	$-y$	y^2	$-y^3$	....	y^{n-1}	$-y^n$
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	....	y^{n-1}	$-2y^n$

Entonces

$$\boxed{\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + y^{n-1} + \frac{-2y^n}{x+y}}$$

Su cociente sigue siendo notable pero la división no es exacta.

De este modo se puede resumir en el siguiente cuadro

Div. Indicada	Cociente notable	Resto o residuo
$\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1}$	nulo $\forall$ **n** $\in$ **N**
$\dfrac{x^n - y^n}{x + y}$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - .... - y^{n-1}$ $x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y - .... + y^{n-1}$	nulo si **n** par $-2y^n$ si **n** impar
$\dfrac{x^n + y^n}{x + y}$	$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - .... + y^{n-1}$ $x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... -y^{n-1}$	nulo si **n** impar $2y^n$ si **n** par
$\dfrac{x^n + y^n}{x - y}$	$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1}$	$2y^n$, $\forall$ **n** $\in$ **N**

Se tendrá también que algunas divisiones de la forma $\dfrac{x^n \pm y^m}{x^a \pm y^b}$ generan cocientes notables, siendo la condición necesaria y suficiente

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = r \; ; \; r \in \mathbf{N}$$

Donde r representará el número de términos del Cociente Notable.

Ejemplo 1

¿ $\dfrac{x^{40} - y^{30}}{x^4 - y^3}$ genera cociente notable ?

Veamos $\dfrac{40}{4} = \dfrac{30}{3} = 10 \Rightarrow$ si genera cociente notable y tendrá 10 términos.

Ejemplo 2

¿ $\dfrac{x^{30} - y^{30}}{x^4 + y^4}$ genera cociente notable ?

Veamos $\dfrac{30}{4} = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2}$ no es entero, entonces no genera cociente notable.

Ejemplo 3

¿Qué lugar ocupa el término de grado 34 en el cociente notable generado por $\dfrac{x^{40} - y^{20}}{x^2 - y}$?

Resolución:

Sea el término del lugar **k** en

$$\frac{(x^2)^{20} - y^{20}}{x^2 - y} \; ; \; t_k = (x^2)^{20-k} y^{k-1}$$

Por dato, el grado del término será

$$2(20-k)+k-1 = 34 \Rightarrow k = 5$$

Luego el término en mención ocupa el quinto lugar.

Ejemplo 4

Calcular **m** si la división

$\dfrac{x^{13m+1} - y^{8m+2}}{x^{m+1} - y^m}$ genera cociente notable.

Resolución:

Si genera cociente notable

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\mathbf{13m + 1}}{\mathbf{m + 1}} = \frac{\mathbf{8m + 2}}{\mathbf{m}}}_{(*)} = \mathbf{r} \; ; \; n \in \mathbf{N}$$

De (*)

$$\frac{13m + 1}{m + 1} = \frac{8m + 2}{m}$$

$\Rightarrow 13m^2 + m = 8m^2 + 10m + 2$

$\Rightarrow 5m^2 - 9m - 2 = 0 \Leftrightarrow (5m+1)(m-2) = 0;$

$m \in \mathbb{Z}^+ \quad \Rightarrow \quad m = 2$

así mismo para $m = 2$, se obtiene $r = 9$

$\therefore$ Para $m=2$ se obtendrá un cociente notable de 9 términos.

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar el polinomio P(x) de grado 3 si es divisible entre (x-2) y (x+3) y cuya suma de coeficientes es -4 y tiene por término independiente a 6.

Resolución:

Como el polinomio P(x) es divisible por (x-2) y (x-3) será divisible por el producto.

$$\Rightarrow P(x) \equiv \underbrace{(x-2)(x+3)}_{\text{2do. grado}}\ \underbrace{q(x)}_{\text{1er. grado}}$$

Sea $q(x) = ax + b$

$$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x+3)(ax+b)$$

1. $\Sigma_{coef} = P(1) = (1-2)(1+3)(a+b) = -4$
2. Término independiente
   $P(0) = (0-2)(0+3)(a(0)+b) = 6$
   $\Rightarrow (-2)(3)b = 6 \Rightarrow b = -1$

En (1) $a = 2$

$$\therefore P(x) = (x-2)(x+3)(2x-1)$$

Problema 2

Al dividir un polinomio P(x) entre (x+1) y (x-1) se obtienen como restos 2 y 4 respectivamente. Hallar el resto de dividir dicho polinomio entre x^2-1.

Resolución:

De los datos

$$P(x) \div (x+1) \Rightarrow R = P(-1) = 2$$
$$P(x) \div (x-1) \Rightarrow R = P(1) = 4$$

Además

$$P(x) \div (x^2 - 1) \Rightarrow R(x) = ax+b = ???$$

De donde

$$P(x) \equiv (x^2-1)q(x) + ax+b$$

Evaluando en

$x = 1 : P(1) = a+b = 4$ .... (I)

$x = -1 : P(-1) = -a+b = 2$ .... (II)

Sumando (I) $\wedge$ (II)

$$2b = 6 \Rightarrow b=3$$

De (I): $a = 1$

$$\therefore R(x) = x+3$$

Problema 3

Un polinomio P(x) de tercer grado se divide separadamente entre (x-1); (x-2) y (x+3); dando como resto común 5. Además al dividirlo entre x+1 da un resto igual a 29. Calcular el término independiente de P(x).

Resolución:

I. Se sabe que al dividir P(x) entre (x-1); (x-2) y (x+3) separadamente, deja el mismo residuo que es 5

   Entonces al dividir el polinomio P(x) entre (x-1)(x-2)(x-3) dejará al mismo resto 5.

$$P(x) \equiv \underbrace{(x-1)(x-2)(x+3)}_{\text{3er. grado}}\ \underbrace{q(x)}_{\text{grado cero}} + 5$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x-2)(x+3)q+5$$

II. $P(x) \div (x+1) \Rightarrow R = P(-1) = 29,$

   evaluando en $x = -1$

   $(-1-1)(-1-2)(-1+3)q+5 = 29$

   $\Rightarrow q = 2$

De (I) y (II)

$P(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)+5$

luego su término independiente es:

$P(0) = 2(-1)(-2)(3) + 5 = 17$

Problema 4

Al dividir P(x) entre (x+1) se obtuvo como resto 2. ¿Qué resto se obtendrá al dividir $(P(x))^{10}$ entre (x+1)?

Resolución:

Por el teorema del resto

I. $P(x) \div (x+1) \Rightarrow R_1 = P(-1) = 2$ .... (I)

II. $P^{10}(x) \div (x+1) \Rightarrow R_2 = P^{10}(-1)$ .... (II)

Por lo tanto de (I) y (II)

$$R_2 = 2^{10} = 1024$$

Problema 5

Hallar el resto al dividir $x^{166}-1$
entre x^3+x^2+x+1

Resolución:

Multiplicando al dividendo y al divisor por $x-1$, se tiene:

$$\frac{(x^{166}-1)(x-1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}=\frac{(x^{166}-1)(x-1)}{x^4-1}$$

Por el teorema del resto: $x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1$;
en el dividendo: $((x^4)^{41}x^2-1)(x-1)$

$$\Rightarrow R_1(x)=(1^{41}x^2-1)(x-1)$$
$$R_1(x)=(x^2-1)(x-1),$$

luego como el residuo quedó multiplicado por $x-1 \Rightarrow R(x)=x^2-1$

Problema 6

Si el polinomio
$f(x)=ax^5+3x^4+\alpha x^3+3x^2-2x-(a+5)$ es divisible por $g(x)=x^4-bx^3+2x^2+bx-\beta$, además $g(x)$ es divisible por $h(x)=(x^2-1)(x^2+\lambda)$.
Calcular $(\alpha+\beta)$

Resolución:

Si $f(x)$ es divisible por $g(x)$ y $g(x)$ es divisible por $h(x)$ y $h(x)$ es divisible por $x-1$.

$\Rightarrow$ tanto $f(x)$ y $g(x)$ son divisibles por $x-1$

De donde

$$f(1)=0 \Rightarrow a+3+\alpha+3-2-a-5=0 \Rightarrow \alpha=1$$
$$g(1)=0 \Rightarrow 1-b+2+b-\beta=0 \Rightarrow \beta=3$$
$$\therefore\ \alpha+\beta=4$$

Problema 7

Si los polinomios

$$f(x)=x^2+ax+6 \quad \text{y}$$
$$g(x)=x^2+bx+3$$

son divisibles por $h(x)=2x+c$, hallar ac-bc

Resolución:

Como **f** y **g** son divisibles por **h**, entonces (f-g) es divisible por **h**

De donde

$$(x^2+ax+6)-(x^2+bx+3)\equiv(2x+c)\,m(x)$$
$$\Rightarrow (a-b)x+3\equiv(2x+c)\,m(x)$$

Por identidad $m(x)=$ **m constante** $(m\neq 0)$

$$(a-b)x+3\equiv 2mx+cm$$

$$\Rightarrow\ a-b=2m \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$3=cm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(1) ÷ (2)

$$\frac{a-b}{3}=\frac{2m}{cm} \Rightarrow ac-bc=6$$

$$\therefore\ ac-bc=6$$

Problema 8

Si el polinomio $P(x)=x^{11}+\lambda x^9+x^7$ es divisible por $f(x)=x^2-x+1$, el valor de λ es:

Resolución:

Como $P(x)=x^7(x^4+\lambda x^2+1)$ es divisible por x^2-x+1

$\Rightarrow x^4+\lambda x^2+1$ es divisible por x^2-x+1

Luego por Horner

1	1	0	λ	0	1
1		1	-1		
			1	-1	
-1				λ	$-\lambda$
	1	1	λ	$\lambda-1$	$1-\lambda$

como $\lambda-1=0 \rightarrow \lambda=1$

Problema 9

Señalar el resto en la siguiente división

$$\frac{(x-1)(x^{4^n-1}+\ldots.+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Resolución:

Efectuando se obtiene $\dfrac{x^{4^n}-1}{x^4-1}$

Por el teorema del resto $x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1$
Luego en el dividendo reemplazamos $x^4=1$
Obteniendo $R(x)\equiv 0$

Problema 10

Determinar un polinomio de 5to. grado que sea divisible entre $2x^4-3$ y que al dividirlo separadamente por $x+1$ y $x-2$ los restos obtenidos sean respectivamente 7 y 232.

Resolución:

Por identidad fundamental

$$P(x) \equiv (2x^4-3)\,q(x)$$

Sea $q(x) = ax + b \Rightarrow P(x) = (2x^4-3)(ax+b)$

I. De dividir

$P(x) \div (x+1) \Rightarrow R_1 = P(-1)$

$\Rightarrow [2(-1)^4-3][a(-1)+b] = 7$

$\therefore\ a-b=7$ .... (α)

II. De dividir

$P(x) \div (x-2) \Rightarrow R_2 = P(2)$

$\Rightarrow [2(2)^4-3](2a+b)=232$

$\therefore\ 2a+b = 8$ ..... (β)

De (α) y (β)

$$a = 5 \wedge b = -2$$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^4-3)(5x-2)$$

Problema 11

Determinar (m+n+p) sabiendo que el término central del cociente notable generado por $\dfrac{x^{m^3-114}+y^{n^3-40}}{x^m+y^n}$ es el noveno término y tiene por valor $x^p y^{40}$

Resolución:

Como el central es el término noveno, entonces existen 17 términos.

$$\underbrace{\frac{m^3-114}{m} = \frac{n^3-40}{n}}_{(1)} = 17$$

(1): $\dfrac{m^3-114}{m} = 17$; (2): $\dfrac{n^3-40}{n} = 17$

De (1) $\dfrac{m^3-114}{m} = 17 \Rightarrow m^3 = 17m+114$

$$\therefore\ m = 6$$

De (2) $\dfrac{n^3-40}{n} = 17 \Rightarrow n^3 = 17n+40$

$$\therefore\ n = 5$$

Luego la división indicada es

$$\frac{(x^6)^{17}+(y^5)^{17}}{x^6+y^5}$$

> **NOTA** En: $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$; $t_k = a^{n-k}b^{k-1}$

$\Rightarrow t_9 = (x^6)^{17-9}(y^5)^{9-1} = x^{48}y^{40} \equiv x^p y^{40}$

$\Rightarrow p = 48$

$$\therefore\ m+n+p = 59$$

Problema 12

Hallar el valor numérico del término central en el desarrollo de

$$\frac{(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}}{abp}$$

siendo $a=2\sqrt{7}$ y $b=3\sqrt{3}$, además $p=a^2+b^2$

Resolución:

Dando forma

$$\frac{8[(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}]}{[(a^2+b^2)ab]8} = 8\left\{\frac{(a+b)^{4p}-(a-b)^{4p}}{(a+b)^4-(a-b)^4}\right\}$$

existen **p** términos en su expansión, entonces:

$p=a^2+b^2 = (2\sqrt{7})^2+(3\sqrt{3})^2 = 55$ términos

Luego $t_c = t_{28} = 8\{[(a+b)^4]^{27}[(a-b)^4]^{28-1}\}$

$= t_{28} = 8[a^2-b^2]^{108}$

Además $a^2-b^2 = 1$

$$\therefore\ t_c = 8$$

Problema 13

En el cociente notable generado por la división

$$\frac{x^{20m+35}+y^{20m-57}}{x^{m+1}+y^{m-3}}$$

Determinar el valor de "m" e indicar el número de términos.

Resolución:
Como genera cociente notable, entonces se cumple

$$\frac{20m+35}{m+1}=\frac{20m-57}{m-3}=\alpha$$

donde α es el número de términos.

De donde

$$\frac{20m+35}{m+1}=\alpha \Rightarrow 20m+35=m\alpha+\alpha \text{ .... (1)}$$

$$\frac{20m-57}{m-3}=\alpha \Rightarrow 20m-57=m\alpha-3\alpha \text{ ... (2)}$$

(1) - (2): $92=4\alpha \Rightarrow \alpha=23$
Su desarrollo tendrá 23 términos.
Así mismo $20m+35=23m+23$

$$\Rightarrow 3m=12$$

$$\therefore\ m=4$$

Problema 14

En el cociente generado por

$$\frac{x^a-y^b}{x^3-y^7}$$

existe un término central que es igual a $x^c\,y^{231}$.
Hallar $a+b+c$

Resolución:
Si genera cociente notable se tendrá

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=n \Rightarrow \frac{(x^3)^n-(y^7)^n}{x^3-y^7}$$

Si hay un término central, "n" es impar

$$t_k=t_{\frac{n+1}{2}}=(x^3)^{n-\frac{n+1}{2}}(y^7)^{\frac{n+1}{2}-1}=x^c y^{231}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}(n-1)=231 \Rightarrow n=67$$

Luego $c=\frac{3}{2}(67-1) \Rightarrow c=99$

Así mismo, de:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=67 \Rightarrow a=201,\ b=469$$

$$\therefore\ a+b+c=769$$

Problema 15

Hallar el número de términos del siguiente cociente notable

$$\ldots. + x^{195}a^{140}-x^{190}a^{147}+\ldots.$$

Resolución:
Sea la división

$$\frac{(x^5)^n-(a^7)^n}{x^5+a^7}$$

que genera a dicho cociente notable del cual se conocen dos de sus términos consecutivos.
Sea

$$t_k=(-1)^{k+1}(x^5)^{n-k}(a^7)^{k-1}=x^{195}a^{140}$$

Por ser idénticos

$$5(n-k)=195 \Rightarrow n-k=39 \ \wedge\ 7(k-1)=140$$

$$\Rightarrow k=21 \ \wedge\ n=60$$

$\therefore$ El cociente notable tiene 60 términos

Problema 16

Reducir

$$\frac{x^{78}-x^{76}+x^{74}-x^{72}+\ldots.x^2-1}{x^{38}-x^{36}+x^{34}-x^{32}+\ldots.+\dfrac{2}{x^2+1}}$$

Resolución:
Vemos que tanto el numerador y el denominador son cocientes notables.

a. El numerador es exacto $\dfrac{x^{80}-1}{x^2+1}$

b. El denominador

$$x^{38}-x^{36}+x^{34}-x^{32}+\ldots.+\frac{2}{x^2+1}=\frac{x^{40}+1}{x^2+1}$$

Luego

$$\frac{\dfrac{x^{80}-1}{\cancel{x^2+1}}}{\dfrac{x^{40}+1}{\cancel{x^2+1}}}=\frac{\cancel{(x^{40}+1)}(x^{40}-1)}{\cancel{(x^{40}+1)}}=x^{40}-1$$

Problema 17

La siguiente división

$$\frac{16\sqrt[3]{4}-8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}$$

genera un cociente notable cuyo término racional es :

Resolución:

Dando forma a la división

$$\frac{\sqrt[3]{4}^{6}\cdot\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}^{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}^{7}-\sqrt{2}^{7}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}$$

Donde un término cualquiera del cociente es:

$$t_k=\sqrt[3]{4}^{7-k}\cdot\sqrt{2}^{k-1}=2^{\frac{2(7-k)}{3}}\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}=2^{\frac{2(7-k)}{3}+\frac{k-1}{2}}$$

Como se quiere tener término racional

$\frac{2(7-k)}{3}+\frac{k-1}{2}$ debe ser entero.

$$\Rightarrow\ k-1=\overset{\circ}{2}\ \wedge\ 7-k=\overset{\circ}{3}\ \Rightarrow\ k=1\ \vee\ k=7$$

$$\Rightarrow\ t_1=2^{\frac{2(6)}{3}+0}=16\ \vee\ t_7=2^{0+3}=8$$

Problema 18

En el cociente notable generado por la división:

$$\frac{\sqrt{x}^{35}-\sqrt[3]{x}^{35}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

¿Cuántos términos son racionales enteros?

Resolución:

Tomando un término cualquiera

$$t_k=\sqrt{x}^{35-k}\cdot\sqrt[3]{x}^{k-1}=x^{\frac{35-k}{2}+\frac{k-1}{3}}$$

La naturaleza de los términos dependerá únicamente del exponente de la variable

$$\frac{35-k}{2}+\frac{k-1}{3}=17+\frac{1-k}{2}+\frac{k-1}{3}$$

$$\Rightarrow\left(17-\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}\right)\text{, es el exponente.}$$

Recordando que un término es racional entero si sus exponentes de sus variables son enteros y positivos $k-1=\overset{\circ}{2}\ \wedge\ k-1=\overset{\circ}{3}\Rightarrow k=\overset{\circ}{6}+1$

Luego $k=1, 7, 13, 19, 25, 31$ y para cualquiera de estos casos.

$17-\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{3}$ resulta entero positivo.

Como **k** toma 6 valores, 6 términos serán racionales enteros.

Problema 19

Si la división:

$$\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{x}$$

origina un cociente notable en el cual un término tiene la forma $A(25x^2-1)^B$.

Calcular A+B

Resolución:

Dando forma a la división, multiplico y divido por 10

$$\Rightarrow\ 10\left\{\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{10x}\right\}$$

NOTA: $10x=(5x-1)+(5x+1)$

$$\Rightarrow\ 10\left\{\frac{(5x-1)^{99}+(5x+1)^{99}}{(5x-1)+(5x+1)}\right\}$$

Un término cualquiera

$$t_k=(\text{signo})(10)(5x-1)^{99-k}(5x+1)^{k-1}$$

equivalente a

$A(5x-1)^B(5x+1)^B\ \Rightarrow\ 99-k=k-1\ \therefore\ k=50$

Por ser del lugar par, será de signo (-):

$$\Rightarrow\ t_{50}=-10(5x-1)^{49}(5x+1)^{49}$$

$$\Rightarrow\ A=-10\quad y\quad B=49$$

$$\therefore\ A+B=39$$

Problema 20

Si la división

$$\frac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{8xy(x^2+y^2)}$$ genera un cociente notable,

calcular el valor numérico del término central

Para $x=3$ e $y=2\sqrt{2}$

Resolución:

> **NOTA** $8xy(x^2+y^2)=(x+y)^4-(x-y)^4$

Luego se tendrá

$$\frac{(x+y)^{100}-(x-y)^{100}}{(x+y)^4-(x-y)^4}$$

Haciendo $(x+y)^4=m,\ (x-y)^4=n$

tendremos $\frac{m^{25}-n^{25}}{m-n}$

cuyo término central ocupará el lugar 13.

$$\Rightarrow t_{13}=m^{25-13}n^{13-1}=m^{12}n^{12}=(mn)^{12}$$

Reponiendo en términos de x e y

$$t_{13}=((x^2-y^2)^4)^{12}=(x^2-y^2)^{48}$$

evaluando en $x=3, y=2\sqrt{2}$

$$t_{13}(3;2\sqrt{2})=[3^2-(2\sqrt{2})^2]^{48}=1$$

Problema 21

Sabiendo que al dividir $$\frac{x^{2^{5n}}-y^{2^{5n}}}{x^{3^n-1}+y^{3^n-1}}$$

se obtiene como segundo término $-x^{16}y^8$

¿De cuántos términos está compuesto su cociente notable?.

Resolución:

Si genera cociente notable se tendrá

$$\frac{2^{5n}}{3^n-1}=\alpha$$

donde α es el número de términos.

Dando forma a la división

$$\frac{\left(x^{3^n-1}\right)^{\alpha}-\left(y^{3^n-1}\right)^{\alpha}}{\left(x^{3^n-1}\right)+\left(y^{3^n-1}\right)}$$

$$t_2=-\left(x^{3^n-1}\right)^{\alpha-2}\left(y^{3^n-1}\right)^1\equiv -x^{16}y^8$$

Como son idénticos

$x:(3^n-1)(\alpha-2)=16$ .... (I)

$y:(3^n-1)1=8 \Rightarrow 3^n-1=8$ .... (II)

De (I) ÷ (II) $8(\alpha-2)=16 \Rightarrow \alpha=4$

$\therefore$ Tendrá 4 términos

Problema 22

¿ Qué lugar ocupa el término de la forma

$$R[ab(a+b)^2]^n$$

del cociente notable generado por

$$\frac{(a+b)^{22}-(ab)^{11}}{a^2+3ab+b^2}\ ?$$

Resolución:

Dando forma a la división

$$a^2+3ab+b^2\equiv(a+b)^2+ab$$

$$\Rightarrow \frac{[(a+b)^2]^{11}-(ab)^{11}}{(a+b)^2+(ab)}$$

Sea **k** el lugar del término buscado

$$t_k=(-1)^{k+1}((a+b)^2)^{11-k}(ab)^{k-1}$$

Por dato: $11-k=k-1 \Rightarrow k=6$

$\therefore$ El término buscado ocupa el lugar 6.

Problema 23

Un polinomio $P(x)$ de 5to. grado es tal que

$$P(1)=P(-1)=P(2)=P(-2)$$

y son iguales a 7, y al ser dividido por x^2-3 se obtiene como residuo $-6x+17$.

Hallar el coeficiente del término de segundo grado de dicho polinomio.

Resolución:

De los datos podemos concluir

I. $P(x) \div (x-1) \Rightarrow R_1 = 7$

II. $P(x) \div (x+1) \Rightarrow R_2 = 7$

III. $P(x) \div (x-2) \Rightarrow R_3 = 7$

IV. $P(x) \div (x+2) \Rightarrow R_4 = 7$

Por teorema

$$P(x) \div (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \Rightarrow R_5 = 7$$

$$P(x) \equiv (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)q(x)+7$$

Como $P(x)$ es de 5to. grado $\Rightarrow q(x)=ax+b$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(ax+b)+7$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2-1)(x^2-4)(ax+b)+7$$

Al dividir $P(x) \div (x^2-3)$

Por el teorema del resto

$$x^2-3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$\Rightarrow R(x) = (3-1)(3-4)(ax+b)+7$$

$$= -2(ax+b)+7$$

Por dato

$$-2(ax+b)+7 = -6x+17 \quad \Rightarrow \quad ax+b = 3x-5$$

Luego

$$P(x) = (x^2-1)(x^2-4)(3x-5)+7$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^4-5x^2+4)(3x-5)+7$$

De donde el coeficiente del término cuadrático es $(-5)(-5) = 25$

Problema 24

Si al dividir $\dfrac{3^{11}x^{11}+1}{9x^2+6x+4}$

da un residuo $(ax+b)$

Calcular el valor de $S = \dfrac{b-a}{41}$

Resolución:

Haciendo $3x = z$

$$\frac{z^{11}+1}{z^2+2z+4}$$

Recordando que, si multiplicamos al dividendo y al divisor por $z-2$, el cociente no se altera; pero el residuo queda multiplicado por $z-2$

$$\Rightarrow \frac{(z^{11}+1)(z-2)}{(z^2+2z+4)(z-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{z^{12}-2z^{11}+z-2}{z^3-8}$$

$$\Rightarrow R_1 = R(z-2)$$

Por el teorema del resto $z^3 = 8$

$$\Rightarrow R_1 = \underbrace{8^4 - 2(8^3)z^2}_{-8^3\;2(z^2-4)} + z - 2$$

Luego $R_1 = -8^3 \,.\, 2(z-2)(z+2)+z-2$

Entonces $R(z-2) = (z-2)(-8^3.2(z+2)+1)$

Por lo tanto $R = -2 \,.\, 8^3(z+2)+1$

Reemplazando z

$$R(x) = -2 \,.\, 8^3(3x+2)+1$$

$$R(x) = -6 \,.\, 8^3x - 4 \,.\, 8^3+1$$

que es idéntico a $ax+b$

$$\Rightarrow a = -6 \,.\, 8^3 \;,\; b = -4 \,.\, 8^3+1$$

De donde $S = \dfrac{(-4 \,.\, 8^3+1)-(-6.8^3)}{41}$

$$S = \frac{2 \,.\, 8^3+1}{41} = 25$$

Problema 25

En el cociente notable que se obtiene de

$$\frac{x^{am}-x^{bn}}{x^2-x^{-3}}$$

el décimo término contado a partir del final, es independiente de x. ¿Cuántos términos racionales enteros contiene dicho cociente notable?

Resolución:

I. Si genera cociente notable se tiene

$$\frac{am}{2} = \frac{bn}{-3} = \alpha$$

II. Dando forma a la división indicada

$$\frac{(x^2)^\alpha - (x^{-3})^\alpha}{x^2 - x^{-3}}$$

Tomando su término décimo partiendo del final

$t_{10} = (x^{\ 3})^{\alpha\ 10}(x^2)^9 = x^{3(\alpha\ 10)+18}$

y como es independiente de x:

$\Rightarrow -3(\alpha-10)+18 = 0 \Rightarrow \alpha = 16$

Luego la división es $\dfrac{(x^2)^{16} - (x^{-3})^{16}}{x^2 - x^{-3}}$

donde cada término de su cociente notable tiene la forma

$$t_k = (x^2)^{16\ k}\ (x^{\ 3})^{k\ 1}$$

$$\Rightarrow t_k = x^{35-5k}\ ;\ k = 1, 2, \ \dots\ 16$$

Como se quiere términos enteros

$35-5k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 7$

$\therefore$ Existen 7 términos racionales enteros.

Problema 26

Hallar el resto en la división indicada

$$\frac{2x^{16} + x + 2 + 4x^{15} + 2x^{32} + x^{33}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

Resolución:

Factorizando el dividendo y el divisor se obtiene

$$\frac{(x+2)(x^{32} + 2x^{15} + 1)}{(x+2)(x^2 + x + 1)}$$

Si cancelamos $x+2$ el resto buscando sería $R = R_1 \cdot (x+1)$, siendo R_1 el resto en:

$$\frac{x^{32} + 2x^{15} + 1}{x^2 + x + 1}$$

Calculando R_1

por el teorema del resto:

$$x^2 + x + 1 = 0 \ \text{ de donde } \begin{cases} x^3 = 1 \\ x^2 = -x-1 \end{cases},$$

pero el dividendo es: $(x^3)^{10} \cdot x^2 + 2(x^3)^5 + 1$

$\Rightarrow R_1 = 1^{10} \cdot (-x-1) + 2(1)^5 + 1 = 2 - x$

Luego $R = (2-x)(2+x)$

$\therefore R = 4 - x^2$

Problema 27

Un polinomio $P(x)$ mónico y de segundo grado al ser dividido entre $x+3$ da como resultado un cierto cociente $Q(x)$ y un resto 12. Si se divide $P(x)$ entre el mismo cociente aumentado en 4, la división resulta ser exacta. Hallar el resto de dividir $P(x)$ entre $x-5$

Resolución:

I. De los datos tenemos

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x+3)\underbrace{Q(x)}_{(x+a)} + 12$$

II. $P(x) \equiv (x+a+4)q(x)$

Pero

$$(x+3)(x+a)+12 \equiv (x+a+4)(x+b)$$

$$\Rightarrow x^2+(a+3)x+3a+12 \equiv x^2+(a+4+b)\,x+b(a+4)$$

De donde

$\cancel{a}+3=\cancel{a}+4+b \wedge 3a+12=b(a+4)$

$b=-1 \wedge 3a+12=-a-4$

$4a=-16 \rightarrow a=-4$

En (I) $P(x)=(x+3)(x-4)+12$

Nos piden P(5) $P(5)=(8)(1)+12=20$

Problema 28

Al dividir el polinomio $P(x)$ por (x^2-1) se obtiene como residuo $2x$ y al dividirlo por $(x-2)^3$ da como residuo $3x$.

Hallar el residuo de dividir $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$

Resolución:

De los datos

I. $P(x)\div(x^2-1) \wedge R(x)=2x$

$\Rightarrow P(x)\equiv(x^2-1)q(x)+2x$

II. $P(x)\div(x-2)^3 \wedge R(x)=3x$

$\Rightarrow P(x)\equiv(x-2)^3q_1(x)+3x$

III. $P(x)\div(x-1)(x-2) \wedge R_2(x)=ax+b$

$\Rightarrow P(x)\equiv(x-1)(x-2)q_2(x)+ax+b$

En (III)

Si $x=1 \Rightarrow P(1)=a+b$ .... (α)

Si $x=2 \Rightarrow P(2)=2a+b$ .... (β)

De (I), si $x=1 \Rightarrow P(1)=2$

De (II), si $x=2 \Rightarrow P(2)=3(2)=6$

Luego en (α) y (β):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} a=4 \wedge b=-2$$

$\therefore$ El residuo buscado es:

$$R_2(x)=4x-2$$

Problema 29

Dados los polinomios

$P(x)=3x^6-x^5-9x^4-14x^3-11x^2-3x-1$

$Q(x)=3x^5+8x^4+9x^3+15x^2+10x+9;$

divisibles por (x^2+x+1)

Hallar el resto de dividir $[f(x)\ p(x)+g(x)\ Q(x)]$ entre (x^2+x+1), sabiendo que $f(x)$; $g(x)$ son polinomios no constantes.

Resolución:

$P(x)$ y $Q(x)$ son divisibles por (x^2+x+1); entonces

$P(x)=(x^2+x+1)\,q_1(x)$ .... (1)

$Q(x)=(x^2+x+1)\,q_2(x)$ .... (2)

$\Rightarrow f(x).P(x)=(x^2+x+1)\,f(x).q_1(x)$

$g(x).Q(x)=(x^2+x+1)\,g(x).q_2(x)$

$\Rightarrow f(x)\,P(x)+g(x).Q(x)=(x^2+x+1).$
$[f(x).q_1(x)+g(x).q_2(x)]$

Se observa que

$f(x)\,P(x)+g(x).Q(x)$ es divisible por (x^2+x+1)

$\therefore R(x)=0$

Problema 30

Si un polinomio $P(x)$ es divisible por (x^2+x+1).

Calcular la suma de los restos de dividir $A(x)$ y $B(x)$ entre $(x-1)$ sabiendo que $P(x)=xA(x^3)+B(x^3)$

Resolución:

Del dato $P(x)\equiv(x^2+x+1)\,Q(x)$

por el teorema del resto

$x^2+x+1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x^3=1$; reemplazando en $P(x)=xA(x^3)+B(x^3)$

Tenemos

$R=xA_{(1)}+B_{(1)}\equiv 0 \Rightarrow A(1)=0 \wedge B(1)=0$

luego el resto de $\dfrac{A(x)}{x-1}$ es $A(1)$ y el resto de $\dfrac{B(x)}{x-1}$ es $B(1)$

$\therefore A(1)+B(1)=0$

Problemas Propuestos

1. Hallar el residuo de dividir p(x) entre x^2+x+1, si al dividir p(x) entre x^3-1 se obtiene como residuo x^2+3x+2

A) $x+1$ B) $x-1$ C) $x+2$
D) $2x+1$ E) $2x-1$

2. Calcular **a**, si los polinomios
$P(x) = x^3 + ax^2 - 5x - 6$
$Q(x) = x^3 + (a-3)x^2 - 17x - 15$
Son divisibles por un polinomio lineal común de coeficientes enteros.

A) 2 B) 7 C) 5
D) 3 E) 8

3. Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:
I. Si el polinomio c(x) divide separadamente a los polinomios f(x), g(x), h(x), entonces c(x) divide también al residuo de f(x) . g(x) entre h(x)
II. x^3+2x^2-x+6 es divisible por x^2-x+2
III. Si dividimos $mx^4+nx^3+x^2+1$ entre x^2+1 y x^2-1 se obtienen restos que suman 4, entonces **m** es 1.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) FFV

4. De un polinomio de octavo grado P(x) se conoce dos de sus raíces que son 2 y 3 además es divisible por (x^4+1) y $(x+1)$. Determinar el resto de dividir P(x) entre $(x+2)$ si la suma de sus coeficientes es 32 y su término independiente es 66.

A) -8 500 B) 6 500 C) 8 500
D) 6 000 E) 7 000

5. Hallar un polinomio P(x) de segundo grado divisible por $(2x+1)$; sabiendo además que su primer coeficiente es 4 y que al ser dividido por $(x-2)$ el resto es 5, reconocer el menor coeficiente de P(x).

A) -4 B) -3 C) -5
D) 4 E) 2

6. Si el residuo de la división del polinomio P(x) entre $(x+4)$ es 7 y la suma de los coeficientes del cociente es 6, hallar el residuo de dividir P(x) entre $(x-1)$

A) 0 B) 30 C) 7
D) 37 E) 51

7. Al dividir P(x) entre x^2+x+1 se obtuvo como residuo $x+1$, y al dividir P(x) entre x^2-x+1 el resto es $x-1$. Calcular el resto de dividir P(x) entre x^4+x^2+1

A) x^3 B) x C) x^3-x
D) x^3+x E) $x+1$

8. Luego de efectuar la división

$$\frac{x^{72}+x^4+1}{x^{64}-x^{60}+x^{56}-\ldots\ldots+1}$$, calcular su resto.

A) 1 B) 2 C) x^4-1
D) $2x^4+1$ E) $2x^2+1$

9. Un polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3, es divisible entre x^2+1 y además la suma de sus coeficientes es nula. Si al dividir P(x) entre $(x-2)$ se obtuvo como residuo 50.
Hallar el resto de dividir P(x) entre (x^2-1)

A) 2 B) 1 C) -2
D) $6x$ E) $6x-10$

10. En el cociente notable generado por

$$\frac{x^{2n}-x^{-3n}}{x^2-x^{-3}}$$, calcular la suma de valores para

$n \leq 33$, tal que existen 13 términos enteros en su desarrollo.

A) 90 B) 94 C) 96
D) 86 E) 64

11. Hallar el número de términos que tendrá el cociente notable generado por

$$\frac{x^{5m+10}-y^{5m-50}}{x^{2n+9}-y^{2n+5}} \; ; \{m,n\} \subset \mathbb{N} \; ; m<32$$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

12. Sabiendo que al dividir $\dfrac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{3^m-1}-y^{3^m-1}}$, se obtiene como segundo término en su cociente a $x^{16}y^8$. ¿De cuántos términos está compuesto su cociente notable?

A) 4 B) 3 C) 5
D) 7 E) 6

13. Hallar el lugar que ocupa el término de grado 101 en el desarrollo de

$$M(x,z)=\frac{x^{180}-z^{80}}{x^9-z^4}$$

A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19

14. La suma de todos los exponentes de las variables del desarrollo de

$$\frac{x^{100}-y^{100}}{x^4-y^4} \text{ es:}$$

A) 2 400 B) 2 500 C) 2 600
D) 2 700 E) 2 800

15. Hallar el término independiente respecto a x en el cociente notable generado por

$$\frac{\left(\sqrt{x}+y\right)^n-y^n}{\sqrt{x}}, \text{ si } t_{10\ n}=y^{9\ n}$$

A) y^4 B) y^8 C) $3y^4$
D) $5y^4$ E) $-3y^4$

16. Un polinomio mónico de noveno grado tiene raíz cúbica exacta, además es divisible separadamente por $(x-1)$ y $(x-2)$. Hallar el residuo de dividir el polinomio entre $(x-4)$ si el término independiente de dicho polinomio es -216.

A) 36 B) 72 C) -72
D) 216 E) -48

17. Determinar un polinomio mónico de cuarto grado que sea divisible separadamente por x^2-3x+2; x^2-4; x^2+x-2 y al ser dividido entre $x-3$ deja un resto igual a 100, luego indique el residuo de dividir dicho polinomio entre $x+1$

A) 18 B) 34 C) 36
D) 72 E) 48

18. Si un término del cociente notable generado por $\dfrac{x^n-y^{n+p}}{x^3y^{n-3}-y^{n+2}}$ es x^{18}, hallar el valor de $(n-p)$

A) 16 B) 9 C) 10
D) 11 E) 17

19. Si **A** es el penúltimo término del C.N. generado por $\dfrac{x^{40}+y^{10}}{x^4+y}$, hallar el término **A**

A) x^9y^8 B) $-x^4y^8$ C) x^4y^8
D) x^8y^9 E) $-x^8y^9$

20. Si x^py^{28} ; $x^{16}y^{2(p-6)}$ son términos equidistantes de los extremos en el cociente notable de $\dfrac{x^m-y^n}{x^4-y^7}$, calcular $(m+n+p)$

A) 225 B) 235 C) 245
D) 257 E) 322

21. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x+1)^4$ se obtuvo como residuo x^3+2-3x.
Calcular el residuo de dividir $P(x)$ entre x^2+2x+1

A) $x+1$ B) $3x+1$ C) $3x-1$
D) 4 E) -3

22. Un polinomio $P(x)$ se ha dividido separadamente por $x+1$, $x-1$, $2x-1$ obteniéndose como restos 7, -1 y 1 respectivamente. Hallar el término independiente del residuo de dividir
$P(x)$ entre $(x+1)(x-1)(2x-1)$

A) 2 B) 3 C) 4
D) -2 E) -3

23. Un polinomio $F(x)$ al ser dividido por $(x+1)^n$ deja residuo $x+1$ y un cociente $Q(x)$. Si la suma de coeficientes de $F(x)$ es 98 y de $Q(x)$ es 3. ¿Cuál es el valor de **n**?

A) 3 B) 4 C) 6
D) 5 E) 2

24. Dado $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$
es divisible por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$
Calcular el residuo de dividir
$p(x)\div[x+(a^{-1}b^{-1}+a^{-1}c^{-1}+b^{-1}c^{-1})]$
Donde a; b; c son diferentes entre sí.

A) -24 B) 24 C) 0
D) 12 E) -12

25. Dados tres números reales a; b; c ($a\neq b\neq c$) que verifican

$$a^3+pa+q=0$$
$$b^3+pb+q=0$$
$$c^3+pc+q=0$$

Calcular: $\left(\dfrac{abc}{ab+ac+bc}\right)\dfrac{p}{q}$

A) 1 B) -2 C) -1
D) 2 E) $\dfrac{p+q}{pq}$

26. Un polinomio de 4to. grado es divisible separadamente por $(x+3)$, $(x+2)$; y $(x+5)$; además al ser dividido por $(x+1)$ se obtiene como resto 32. Si el término independiente de $P(x)$ es -240, hallar su coeficiente principal.

A) 40 B) -80 C) 30
D) -12 E) -40

27. Un polinomio de grado **n** y de variable x es divisible entre $(x^{n-1}+x^{n-2}+1)$ y tiene por término independiente 2. Sabiendo que disminuido en 9 y 388 es divisible entre $(x-1)$ y $(x-2)$ respectivamente, calcular el valor de **n**.

A) 10 B) 6 C) 12
D) 7 E) 5

28. ¿Qué relación cumplen **p** y **q**, tal que $x^3-pqx+q$ sea divisible por x^2+mx-1; ($m\in\mathbb{R}^+$) ?

A) $p+q=0$ B) $q^2-1=pq$
C) $pq=1+q^2$
D) $p-q=1$ E) $p^2-1=pq$

29. Al dividir el polinomio $P(x)$ por $(x-1)^2$ se obtiene como residuo $2x$ y al dividirlo por $(x-2)^3$ da como residuo $3x$. Hallar el residuo de la división de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$

A) $8x+4$ B) $4x-2$ C) $7x+3$
D) $-x+1$ E) $-x-1$

30. Hallar "m" si al dividir $mx^4+nx^3+x^2+1$ entre (x^2+1) y (x^2-1) respectivamente se obtienen 2 restos que sumados dan 4.

A) 1 B) 6 C) 2
D) 3 E) 7

31. Al dividir un polinomio $p(x)$ entre $(x+6)^4$; se obtuvo como residuo $x^3-a^2x+2a^3$. Calcular el resto de dividir $P(x)$ entre $(x+6)^2$

A) $x+a$ B) $4a^3$
C) $(108-a^2)x+2a^3+432$
D) x^2a+4a^3 E) $x+4a$

32. Indicar el término independiente de un polinomio de tercer grado tal que al dividirlo por $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$, da el mismo resto 20 y además que sea divisible por $(x+1)$

A) 4 B) 36 C) 18
D) 10 E) 14

33. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-n)$ se obtuvo como resto "m" y al dividirlo entre $(x-m)$ da como resto "n". Hallar el resto de dividir $P(x)$ entre $x^2-(m+n)x+mn$.

A) $x-m+n$ B) $x-n-m$ C) $x+m+n$
D) $x-n+m$ E) $-x+m+n$

34. Un polinomio $P(x)$ de 4to. grado es divisible separadamente por $(x+3)$; $(x+2)$; $(x+5)$ y además al ser dividido por $(x+1)$ arroja como resto 32. Si el término independiente de $P(x)$ es -240, calcular el resto de dividir $P(x)\div(x+4)$

A) 80 B) -11 C) 70
D) 10 E) -42

35. En el cociente notable que se obtiene de:

$$\frac{x^{4m}-x^{4b}}{x^2-x^{-3}},$$

el décimo término contado a partir del final es independiente de "x". ¿Cuántos términos racionales enteros contiene dicho cociente notable?

A) 6 B) 9 C) 7
D) 8 E) 10

36. Simplificar

$$\frac{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\ldots x^{(2n-1)p}}{1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\ldots x^{(n-1)p}}.(1-x^{np}+x^{2np})$$

A) $x^{3np}-1$ B) $x^{3np}+1$ C) $x^{2p}-1$
D) 1 E) x^p-1

37. Los términos $x^{26}a^{15}$; $x^{22}a^{25}$ pertenecen a un cociente notable; el segundo está a dos lugares del primero. ¿Cuál es el término central en dicho cociente notable, sabiendo que es entero?

A) $x^{16}a^{40}$ B) $x^{30}a^{10}$ C) $x^{28}a^{20}$
D) $x^{20}a^{50}$ E) $x^{24}a^{20}$

38. Hallar el grado absoluto del décimo primer término en el cociente notable que se obtiene al dividir:

$$\frac{x^{3n+2}-y^{5n-1}}{x^2-y^{n-5}}$$

A) 25 B) 32 C) 28
D) 30 E) 34

39. Si el polinomio
$P(x) = x^n - bx^{n-1}+bx-1$ es divisible por
$Q(x) = x^m + ax^{m-2} + cx^{m-3} + d$ y $Q(x)$ es divisible por $(x-1)^2$. Calcular: $\dfrac{b}{n-nb}$;

$n, m \in \mathbb{Z}^+$

A) 1 B) -2 C) -1
D) 2 E) $-½$

40. Si se divide el residuo de la división:

$$\frac{mx^{4m}+nx^{4n+1}+px^{4p+2}+qx^{4q+3}}{(x+1)(x^2+1)};$$

$$\forall\, mnpq \neq 0$$

por $(x+1)$, ¿cuál es el resto que se obtiene?

A) 0 B) 1 C) m^2+n^2
D) $m-n+p-q$ E) mnpq

1	D	11	D	21	D	31	C
2	A	12	A	22	B	32	A
3	A	13	C	23	D	33	E
4	A	14	A	24	A	34	A
5	A	15	A	25	C	35	C
6	D	16	D	26	D	36	B
7	D	17	C	27	D	37	A
8	A	18	A	28	C	38	E
9	E	19	C	29	B	39	E
10	C	20	B	30	A	40	D

Claves

CAPÍTULO

VII

Factorización

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Matemático noruego, nació en u familia muy numerosa, hijo de pastor protestante en condiciones extrema pobreza. A los 16 años, maestro le aconsejó leer los granc libros de los matemáticos m eminentes. A los 19 años, demos que las ecuaciones algebraicas de grado superior a cuatro no ten solución algebraica general, crear con él una importante teoría llama "teoría de grupos" y descub importantes propiedades relativas las funciones elípticas y a una clase ecuaciones llamadas ecuacior abelianas.
Murió de tuberculosis a sus escas 27 años.

$$P(x,y)A_{(x,y)}^{a}\cdot B_{(x,y)}^{b}\cdot C_{(x,y)}^{g} \qquad a, b, gÎ\ \mathbb{N}$$

LECTURA

Factorización

Al expresar 24=3.8 se ha factorizado 24 en producto de enteros; siendo 3 y 8 factores enteros de 24. A su vez $24=3.2^3$; 3 y 2 son también factores de 24 y se llaman factores primos.

Al expresar un polinomio como la multiplicación de otros polinomios pertenecientes a un conjunto dado, se ha efectuado una factorización de polinomios.

No todos los polinomios se pueden factorizar. De acuerdo a las características que presentan los polinomios se puede aplicar tal o cual criterio, por ejemplo:

$ax^2y^2 + bxy^3z + cx^3my^4$ → *Factor común*

$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$ → *Aspa simple*

$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$ → *Aspa doble*

$Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$ → *Aspa doble especial*

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ → *Divisores binómicos*

Entre otros casos particulares.

Comience factorizando cada uno de los polinomios:

- $x^2y^2 + xy^3 + x^2y$
- $24x^2y^2 + 16xy^3z + 32x^3my^4 - 64zx^3y^5$
- $9ab + 12bd - 45ac - 60cd$
- $121m^2 - 169n^2$
- $256p^8 - q^8$
- $4x^2 - 20xy + 9y^2$
- $6a^2 - 7ab - 5b^2$
- $3x^2 - 10xy + 3y^2$
- $x^4 - 22x^2 - 75$

para saber cómo estamos comenzando en este maravilloso tema que es la factorización.

De los autores.

Factorización

OBJETIVOS

- Expresar un polinomio como la multiplicación indicada en otros polinomios de menor grado.
- Explicar la factorización en la teoría de ecuaciones, especialmente en las ecuaciones polinomiales, fraccionarias, irracionales, etc.
- Explicar la factorización en la teoría de inecuaciones.

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos muy remotos, en los albores de todo pensamiento matemático, surge la teoría de los números la cual esta apoyada en la parte algebraica.

En cuestiones de simplificación de expresiones, esta ayuda nos la brinda la teoría de la factorización, que en la vida cotidiana nos simplifica cálculos engorrosos y permite la resolución de ecuaciones e inecuaciones, el estudio de las funciones, etc. Para ello, desarrollaremos el tema con algunos conceptos primarios: factor algebraico, polinomios irreductibles, factor primo, etc.; así como los diversos criterios para poder factorizar polinomios, sobre determinados conjuntos numéricos.

Por ejemplo:

- $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n \equiv (x - x_1)(x-x_2)(x-x_3) ... (x-x_n)$ este polinomio de grado "n" ha sido expresado en una multiplicación de factores lineales.

  Para resolver una ecuación cuadrática aplicaremos "diferencia de cuadrados" o "aspa simple".
- El aspa doble podemos aplicar en la geometría para graficar ciertas regiones.
- Aspa doble especial, para resolver principalmente algunas ecuaciones cuárticas.
- El criterio de los divisores binómicos, para resolver ciertas ecuaciones, de preferencia, con grado impar.

  Al resolver una inecuación polinomial debemos factorizar.

  En la simplificación de fracciones, a veces, debemos factorizar numerador y denominador para luego simplificar y operar.

  Con ayuda de la factorización encontrar nuevas formas de operar, para aplicarlas en otros capítulos del curso.

  Éstas son algunas de las aplicaciones del presente capítulo.

CAMPO NUMÉRICO

Sea $K \neq \phi$ un conjunto numérico con dos operaciones binarias: adición (+) y multiplicación (.) definidos sobre K. Decimos que k es un campo numérico si se cumplen los siguientes axiomas:

AXIOMAS DE LA ADICIÓN

A1. **Axioma de la cerradura:** Para cada par de elementos a y b de un conjunto K, existe un único elemento "c" que también pertenece a dicho conjunto / $c=a+b$

A2. **Axioma de la conmutatividad:** Para cada par de elementos a, b del conjunto K, se tendrá: $a+b=b+a$

A3. **Axioma de la asociatividad:** Para todo elemento a, b, c del conjunto K, la suma de estos es independiente de la manera como se ordene.
Así: $(a+b)+c=a+(b+c)$

A4. **Axioma del elemento neutro:** Conocido como neutro aditivo. Para cada elemento del conjunto K, existe un único elemento denotado por "0"; $0\in K$; $a+0=0+a=a$

A5. **Axioma del elemento llamado opuesto de "a" o simétrico:** Para cada elemento **a** del conjunto K, existe un único elemento denotado por **-a**, $(-a)\in K$; $a+(-a)=(-a)+a=0$

AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

M1. **Axioma de la cerradura:** Para cada elemento **a**, **b** del conjunto K, existirá un único elemento **c** llamado producto ($c=a.b$) que también pertenece al conjunto K.

M2. **Axioma de la conmutatividad:** Para cada elemento a, b del conjunto K, se cumple: $ab=ba$
"El orden de los factores no altera el producto".

M3. **Axioma de la asociatividad:** Para todo **a, b, c** elementos del conjunto K, se tendrá:
$a(bc)=(ab)c$
"El producto es independiente de la manera como se asocia a los elementos a, b, c; es decir, el resultado no se altera con el orden"

M4. **Axioma del elemento neutro multiplicativo:** Para todo elemento "**a**" del conjunto K, existe un único elemento denotado por $1\in K$; $a.1=1.a=a$

M5. **Axioma del elemento simétrico llamado inverso multiplicativo:** Para cada elemento no nulo **a** del conjunto K, existe un único elemento denotado por a^{-1} de K ; $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$

AXIOMA DE LA DISTRIBUTIVIDAD DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN:

Para los elementos a, b, c de K, se tiene:

1. $a(b+c)=ab+ac$
2. $(a+b)c=ac+bc$

De donde se puede concluir que los conjuntos numéricos considerados como campos son los racionales ($\mathbb{Q}$); los reales ($\mathbb{R}$), los complejos ($\mathbb{C}$).

1. ¿El conjunto de los números naturales forma un campo?
Respuesta: No, puesto que no cumple con los axiomas A4, A5, M5
Así $a+0=a$ pero $0\notin\mathbb{N}$
Si $a\in\mathbb{N}$, $-a\notin\mathbb{N}$
Si $a\in\mathbb{N}$, $a^{-1}\notin\mathbb{N}$

2. ¿El conjunto de los enteros forma un campo?
Respuesta: No, porque si $a\in\mathbb{Z}$, $a^{-1}\notin\mathbb{Z}$, es decir no cumple M5
Por lo tanto: $\mathbb{Z}$ no forma un campo.

3. ¿Los irracionales (Q') forman un campo?
Veamos $(5+\sqrt{2})\in Q' \wedge (5-\sqrt{2})\in Q'$
Pero $(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})=10\notin Q'$
Vemos que no siempre cumple el axioma de la cerradura (A1)
Así mismo $(5+\sqrt{2})\in Q' \wedge (5-\sqrt{2})\in Q'$
pero $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})=23\notin Q'$;
no cumple (M1)

Por lo tanto, los irracionales no forman campo.

POLINOMIO SOBRE UN CAMPO

Lo llamaremos así cuando sus coeficientes pertenecen a ese campo.
Así :

1. $P(x) = 3x^2 + 5x^3 - \frac{4}{3}x - 7$

   Es un polinomio sobre los racionales, puesto que sus coeficientes son racionales.

2. $R(x;y) = 4x + \sqrt{5}y$

   Vemos que $\sqrt{5}$ no es racional pero sí un real; entonces $R(x,y)$ está sobre los reales.

3. $S(x,y) = 5x^7 - \sqrt{2}xy + (1-i)y^3$; $i = \sqrt{-1}$

   Vemos que $(1-i)$ no es racional ni real, es complejo.
   Entonces $S(x,y)$ está sobre los complejos.

NOTA

I. Todo polinomio que está sobre los racionales estará también sobre los reales y los complejos; pero que esté en los reales o complejos, no implica necesariamente que esté en los racionales.
II. Todo polinomio que está sobre los reales, está también sobre los complejos.

FACTOR DE UN POLINOMIO

Un polinomio $f(x)$ de grado no nulo, es considerado factor de otro polinomio $P(x)$ si existe un único polinomio $q(x)$ tal que:

$$\boxed{P(x) \equiv f(x) \cdot q(x)}$$

es decir, la división de $P(x)$ entre $f(x)$ es exacta.

Ejemplo:
De $P(x) = x(x^2-1)(x+2)$, sus factores son
x ; $x+1$; $x-1$; $x+2$; x^2+2x ; ....; $x(x+1)(x-1)(x+2)$

Ejemplo:
De $P(x,y) = c(x^3-y^3)(x+y)$, sus factores son: $x-y$, $x+y$, x^2+xy+y^2, ... ; $c(x^3-y^3)(x+y)$

NOTA c no es considerado factor en este caso por ser de grado nulo.

POLINOMIO IRREDUCTIBLE

Un polinomio es irreductible sobre un determinado campo numérico si no admite ser expresado como la multiplicación de dos o más factores sobre el mismo campo.

Ejemplo:
$$P(x) = 4x^4 - 1$$

I. $P(x)=4x^4-1$ no es irreductible en $\mathbb{Q}$ porque se puede expresar como
   $P(x) = (2x^2+1)(2x^2-1)$
II. $F(x) = 2x^2-1$ es irreductible en $\mathbb{Q}$, pero no en $\mathbb{R}$, puesto que $F(x) = (\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$
III. $M(x) = 2x^2 + 1$ es irreductible en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$, puesto que
   $M(x) = (\sqrt{2}x+i)(\sqrt{2}x-i)$

NOTA es la unidad imaginaria denotado por $i=\sqrt{-1}$, a estudiarse más adelante.

TEOREMA
Todo polinomio de primer grado es irreductible en cualquier campo numérico.

FACTOR PRIMO: Es un factor irreductible de un polinomio sobre un determinado campo.

Ejemplo: $P(x) = 5(x-2)^3(x^2+3x+1)$
sus factores primos en $\mathbb{Q}$ son $x-2$, x^2+3x+1 en cambio $(x-2)^2$ no es primo, puesto que es divisible por $x-2$, es decir $(x-2)^2 \equiv (x-2)(x-2)$

NOTA Al factor de un polinomio también se le llama divisor, que no necesariamente es primo.

TEOREMA

Dado un polinomio mónico $P(x)$ expresado por

$$P(x) \equiv p_1^a(x) \cdot p_2^b(x) \cdot p_3^c(x) \ldots\ldots p_n^m(x)$$

donde $p_1(x), p_2(x) \ldots\ldots p_n(x)$ polinomios mónicos primos y primos entre sí.
Se tendrá:

I. $\boxed{\text{N° de factores primos} = n}$

II. $\boxed{\text{N° de factores o divisores algebraicos} = (a+1)(b+1)\ldots(m+1)-1}$

Ejemplo 1
En $P(x,y,z) = x^2yz^2$
I. Factores primos son tres: x, y, z
II. Número de factores totales es
$(2+1)(1+1)(2+1)-1 = 17$
$\therefore$ Tiene 17 factores en total.

Ejemplo 2
En $R(x,y) = (x+y)^2(x^2+xy-y^2)^3xy^2$
I. Factores primos: $x+y$, x^2+xy-y^2, x, y
son 4 factores primos.
II. Número total de factores:
$(2+1)(3+1)(1+1)(2+1) - 1 = 71$
$\therefore$ Tiene 71 factores en total.

FACTORIZACIÓN

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.
Ejemplo:

$$x^2+9x-22 \underset{\text{producto}}{\overset{\text{factorización}}{\rightleftarrows}} (x-2)(x+11)$$

TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN ÚNICA
La representación factorizada de un polinomio es única, salvo el orden de los factores.

CRITERIOS PARA FACTORIZAR

Son técnicas a utilizar, de acuerdo a la forma que presente el polinomio.

I. FACTOR COMÚN-AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Se buscan factores comunes que pueden ser monomios o polinomios de más de un término. En caso de no haber algún factor común, se agrupará convenientemente tratando de que aparezca algún factor común.

Ejemplo 1
Factorizar $P(x) = 4x^4 + 5x^2$

Resolución:
Observamos que x^2 es factor común de $4x^4$ y $5x^2$, luego $P(x) = x^2(4x^2+5)$, donde sus factores primos son: x, $4x^2+5$

Ejemplo 2
Factorizar $P(x,y) = x^3(x+y) + 5xy(x+y)$
Resolución:
Se observa que el factor común es $x(x+y)$
luego $P(x,y) = x(x+y)(x^2+5y)$
cuyos factores primos son x, $x+y$, x^2+5y

Ejemplo 3

Factorizar

$P(x,y) = a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$

Resolución:

Vemos que no existe factor común alguno a simple vista, entonces tendremos que agrupar convenientemente como se indica.

$$\underline{a^2x} - \underline{\underline{ax^2}} + \underline{\underline{2axy}} - \underline{2a^2y} + \underline{x^3 - 2x^2y}$$

$$= a^2(x-2y) - ax(x-2y) + x^2(x-2y)$$

$$= (x-2y)(a^2-ax+x^2) \text{ ; luego}$$

$P(x,y) = (x-2y)(a^2-ax+x^2)$

II. POR IDENTIDADES

En este caso utilizaremos las equivalencias algebraicas en sentido inverso al de los productos notables.

Cabe recordar:

- $x^2 \pm 2xy + y^2 \equiv (x \pm y)^2$
- $x^2 - y^2 \equiv (x + y)(x - y)$
- $x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^3 + y^3 \equiv (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y) \equiv (x \pm y)^3$
- $x^2 + (a + b)x + ab \equiv (x + a)(x + b)$
- $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

entre otros

Ejemplo 1

Factorizar $R(x) = x^3+x^2-x-1$

Resolución:

Agrupando convenientemente como se indica.

$\underline{x^3} + \underline{x^2} - \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{1}}$

$x^2\underline{(x+1)} - \underline{(x+1)} \equiv (x+1)(x^2-1)$

Nota: $x^2-1 \equiv (x+1)(x-1)$

$\Rightarrow R(x) = (x+1)(x+1)(x-1)$

$\therefore R(x) = (x+1)^2(x-1)$

Ejemplo 2

Factorizar

$$P(x,a,b) = x^2 + 2(a+b)x + a^2 + 2ab + b^2$$

Resolución:

Como $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a+b)^2$

luego $P(x,a,b) = \underbrace{x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$

$$\therefore P(x,a,b) = (x+a+b)^2$$

Ejemplo 3

Factorizar $P(x) = x^4 + 2x^2 + 9$

Resolución:

Hacemos que $2x^2=6x^2-4x^2$ por conveniencia para el problema, luego $P(x) = \underline{x^4}+\underline{6x^2}-4x^2+\underline{9}$, agrupando convenientemente

$$= (x^4+6x^2+9)-4x^2 \equiv (x^2+3)^2-(2x)^2$$

(Diferencia de cuadrados)

$$= (x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$$

$\therefore P(x) = (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

Ejemplo 4

Factorizar $P(x,y) = x^3+y^3+6xy-8$

Resolución:

Recordar

$$a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

luego en el problema:

$$x^3+y^3+(-2)^3-3xy(-2) = (x+y-2)\,[x^2+y^2+(-2)^2 - xy-x(-2)-y(-2)]$$

$\therefore P(x,y) = (x+y-2)(x^2+y^2+4-xy+2x+2y)$

III. CRITERIO DE ASPAS

A. ASPA SIMPLE

Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} \quad \text{ó}$$
$$P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C$$

Para factorizar

$$P(x,y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$$

Seguiremos el siguiente procedimiento:

I. Descomponer los extremos convenientemente:

$$A\,x^{2n} + B\,x^n y^m + C\,y^{2m}$$

$$\begin{array}{lcll} a_1\,x^n & \times & c_1\,y^m \longrightarrow & c_1a_2\,x^ny^m \\ a_2\,x^n & & c_2\,y^m \longrightarrow & \underline{c_2a_1\,x^ny^m} \end{array} \Big\} +$$

II. Se comprueba que el término central es igual a la suma de los productos parciales en forma de aspa:

$B = c_1a_2 + c_2a_1$

III. Luego $P(x,y)$ es $(a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n+c_2y^m)$, es decir, $P(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n + c_2y^m)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = 3x^2 + 10x + 8$

Resolución:

Descomponiendo los extremos:

$$3x^2 + 10x + 8$$

$$\begin{array}{lcll} 3x & \times & 4 \longrightarrow & 4x \\ x & & 2 \longrightarrow & \underline{6x} \\ & & & 10x \end{array}$$

La forma factorizada es $(3x+4)(x+2)$, es decir, $P(x)=(3x+4)(x+2)$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x,y) = 15x^4 - 11x^2y + 2y^2$

Resolución:

Descomponiendo adecuadamente los extremos

$$15x^4 - 11x^2y + 2y^2$$

$$\begin{array}{lcll} 5x^2 & \times & -2y \longrightarrow & -6x^2y \\ 3x^2 & & -y \longrightarrow & \underline{-5x^2y} \\ & & & -11x^2y \end{array}$$

$\therefore$ El polinomio factorizado es

$$P(x,y) = (5x^2 - 2y)(3x^2 - y)$$

Ejemplo 3

Factorizar $R(x,y) = 4x^4 + 15x^2y^2 - 54y^4$

Resolución:

Descomponiendo los extremos adecuadamente

$$4x^4 + 15x^2y^2 - 54y^4$$

$$\begin{array}{lcl} x^2 & \times & 6y^2 \\ 4x^2 & & -9y^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x,y) = (x^2 + 6y^2)(4x^2 - 9y^2)$$
$$= (x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$$

$$\therefore\ R(x,y) = (x^2+6y^2)(2x+3y)(2x-3y)$$

> **TEOREMA**
>
> Todo polinomio de la forma
> $P(x) = Ax^2+Bx+C$; $\{A, B, C\} \subset \mathbb{Z} \wedge \forall A \neq 0$
> es factorizable en los racionales, si y sólo si , B^2-4AC es un cuadrado perfecto (C.P.)

Ejemplo 1

¿ $2x^2 - 5x + 2$ es factorizable ?

Resolución:

Veamos $(-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$

como 9 es cuadrado perfecto $\Rightarrow 2x^2 - 5x + 2$, sí es factorizable en los racionales.

Ejemplo 2

¿ $3x^2 + x + 1$ es factorizable en $\mathbb{Q}$?

Resolución:

Veamos: $1^2-4(3)(1) = -11$ y no es cuadrado perfecto, entonces $3x^2+x+1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 3

Demostrar que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$

Resolución:

Veamos

$(k+1)^2-4(1)(k) = k^2+2k+1-4k = (k-1)^2$

Se observa que $(k-1)^2$ es un cuadrado perfecto $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x^2+(k+1)x+k$ es factorizable en $\mathbb{Q}$

> **Corolario:**
> Todo polinomio cuadrático en una variable, si es factorizable, debe admitir el criterio del aspa simple. Si no admite aspa simple, es porque no es factorizable en Q

> **NOTA**
>
> Existen polinomios que no tienen la forma general, sin embargo, pueden ser factorizados por aspa simple.
> Así
>
> $$M(x) = x^6 - \underline{2x^3 + 5x^2} - 10$$
> $$\begin{array}{cc} x^3 & 5 \\ x^2 & -2 \end{array}$$
>
> $\therefore\ M(x) = (x^3 + 5)(x^2 - 2)$

B. ASPA DOBLE

Se utiliza para factorizar a los polinomios de la siguiente forma general:

$$\boxed{P(x;y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F}$$

Procedimiento para factorizar:

I. Se debe ordenar el polinomio de acuerdo a esta forma general.
II. De faltar algún término, se reemplazará en su lugar por cero.
III. Se aplicarán aspas simples a:
   1. Los términos: Ax^{2n}, Bx^ny^m, Cy^{2m}
   2. Los términos: Cy^{2m}, Ey^m, F
   3. Los términos: Ax^{2n}, Dx^n, F
IV. Los factores se tomarán de manera horizontal.

Esquema:

$$P(x;y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$
$$\begin{array}{ccc} a_1x^n & c_1y^m & f_1 \\ a_2x^n & c_2y^m & f_2 \end{array}$$

luego tenemos:

$P(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m + f_1)(a_2x^n + c_2y^m + f_2)$

Ejemplo 1

Factorizar

$$P(x,y) = 6x^2 + 13xy + 6y^2 + 7x + 8y + 2$$

Resolución:

Aplicando las aspas simples:

$$6x^2 + 13xy + 6y^2 + 7x + 8y + 2$$
$$\begin{array}{ccc} 3x & 2y & 2 \\ 2x & 3y & 1 \end{array}$$

entonces la forma factorizada es:

$(3x + 2y + 2)(2x + 3y + 1)$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x,y) = 10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$

Resolución:

$$10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$$
$$\begin{array}{ccc} 5x & -2y & -3 \\ 2x & 3y & 1 \end{array}$$

Descomponiendo en aspas simples:

$\Rightarrow P(x,y) = (5x - 2y - 3)(2x + 3y + 1)$

Ejemplo 3

Factorizar

$M(x,y,z) = 6x^2 - 25y^2 + 20z^2 - 5xy - 23xz - 5yz$

Resolución:

Se ordenará de acuerdo a la forma general considerando a la tercera variable como si fuera una constante, así

$$6x^2 - 5xy - 25y^2 - 23xz - 5yz + 20z^2$$
$$\begin{array}{ccc} 3x & 5y & -4z \\ 2x & -5y & -5z \end{array}$$

luego su forma factorizada es:

$M(x,y,z) = (3x + 5y - 4z)(2x - 5y - 5z)$

C. ASPA DOBLE ESPECIAL

Será posible aplicar a los polinomios que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^{n} + E}$$

De manera particular, si n=1 tendremos el polinomio de 4to. grado

Procedimiento para factorizar

I. Se ordena de acuerdo a la forma general, colocando cero en el lugar del término que falta.

II. Se descompone adecuadamente los extremos buscando mediante un aspa simple, aproximarse al término central. Así :

$$\begin{array}{ccccc} Ax^{4n} + Bx^{3n} + & Cx^{2n} & + Dx^{n} + E \\ a_1x^{2n} & k_1x^{n} & e_1 \\ a_2x^{2n} & k_2x^{n} & e_2 \end{array}$$

lo que falta

se debe tener (SDT) : Cx^{2n} ,

se tiene (ST) : $(a_1e_2 + a_2e_1)x^{2n}$,

falta : $(C - a_1e_2 - a_2e_1)x^{2n} = Kx^{2n}$

III. Lo que falta se descompone en la parte central buscando aspas simples a ambos lados.

IV. Los factores se toman en forma horizontal.
$(a_1x^{2n} + k_1x^{n} + e_1)(a_2x^{2n}+k_2x^{n}+e_2)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1$

Resolución:

Descomponiendo los extremos

$$\begin{array}{ccc} x^4 + 7x^3 + & 14x^2 & + 7x + 1 \\ x^2 & \boxed{3x} & 1 \\ x^2 & \boxed{4x} & 1 \end{array}$$

SDT: $14x^2$

ST: $2x^2$

Falta: $\boxed{12x^2}$

$\therefore\ P(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 4x + 1)$

Ejemplo 2

Factorizar $f(x) = x^3(x+1) + 2x^2 + 5(x-3)$

Resolución:

Efectuando y ordenando de acuerdo a la forma general:

$$\begin{array}{ccc} S(x) = x^4 + x^3 + & 2x^2 & + 5x - 15 \\ x^2 & \boxed{0x} & 5 \\ x^2 & \boxed{x} & -3 \end{array}$$

SDT: $2x^2$

ST: $2x^2$

Falta: $\boxed{0x^2}$

$\Rightarrow S(x) = (x^2 + 0x + 5)(x^2 + x - 3)$

$\therefore\ S(x) = (x^2 + 5)(x^2 + x - 3)$

Ejemplo 3

Factorizar

$$P(x,y) = x^4 - 10x^3y + 35x^2y^2 - 50xy^3 + 24y^4$$

Resolución:

$$\begin{array}{ccc} P_{(x,y)} = x^4 - 10x^3y + & 35x^2y^2 & - 50xy^3 + 24y^4 \\ x^2 & -5xy & 6y^2 \\ x^2 & -5xy & 4y^2 \end{array}$$

SDT: $35x^2y^2$

ST: $10x^2y^2$

Falta: $25x^2y^2$

$$\Rightarrow P_{(x,y)} = (x^2 - 5xy + 6y^2)(x^2 - 5xy + 4y^2)$$

$$\begin{array}{cc} x & -3y \\ x & -2y \end{array} \qquad \begin{array}{cc} x & -4y \\ x & -y \end{array}$$

$\therefore\ P(x,y) = (x-3y)(x-2y)(x-4y)(x-y)$

Ejemplo 4

Factorizar $P(x,y) = 6x^4 + 6y^8 + 4xy^6 + 11x^2y^4 + x^3y^2$

Resolución:

Ordenando para el aspa doble especial

$$\begin{array}{ccc} P_{(x,y)} = 6x^4 + x^3y^2 + & 11x^2y^4 & + 4xy^6 + 6y^8 \\ 2x^2 & -xy^2 & 3y^4 \\ 3x^2 & 2xy^2 & 2y^4 \end{array}$$

SDT: $11x^2y^4$

ST: $13x^2y^4$

Falta: $-2x^2y^4$

$\therefore\ P(x,y) = (2x^2 - xy^2 + 3y^4)(3x^2 + 2xy^2 + 2y^4)$

IV. CRITERIO DE DIVISORES BINÓMICOS

Finalidad: Se utiliza para factorizar los polinomios en una variable y de grado superior, siempre y cuando admita por lo menos un factor lineal.

Raíz de un polinomio:

Dado un polinomio $P(x)$ no constante, **a** es una raíz del polinomio $P(x)$, si y sólo si $P(a) = 0$.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 - 3x - 2$

Observamos que $P(2) = 2^3 - 3(2) - 2 = 0$

Entonces diremos que 2 es una raíz de $P(x)$

Determinación de los posibles ceros o raíces racionales (P.C.R.) de un polinomio $P(x)$

Para conocer los posibles ceros racionales de un polinomio $P(x)$ de coeficientes enteros

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \quad ; \quad a_0 \cdot a_n \neq 0$,

se utilizará el siguiente criterio:

$$\text{P.C.R} = \pm\left\{\frac{\text{Divisores de } |a_n|}{\text{Divisores de } |a_0|}\right\}$$

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^4 + 4x + 2x^2 - 9$$

Los posibles ceros racionales :

$$\text{P.C.R} = \pm\left\{\frac{\text{Divisores de } 9}{\text{Divisores de } 3}\right\} = \pm\left\{\frac{1,\ 3,\ 9}{1,\ 3}\right\} = \pm\left\{1,\ 3,\ 9,\ \frac{1}{3}\right\}$$

El polinomio posiblemente se anule para algunos de estos valores, así

$P(1) = 3+4+2-9 = 0$, entonces $x = 1$ es un cero racional.

> **TEOREMA**
>
> Un polinomio tiene factores de primer grado de coeficientes racionales, si y sólo si, si tiene raíces racionales.

> **NOTA:** Toda raíz racional de un polinomio pertenece, necesariamente al conjunto de los posibles ceros racionales.

Ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 1$, sus posibles ceros racionales son 1 ó -1.

Así mismo $\quad P(1) = -1$

$\qquad\qquad\quad P(-1) = 3$

esto nos indica que no tiene ceros racionales, por lo tanto, no tendrá factores lineales, indicando que $f(x)$ no será factorizable en los racionales.

> **TEOREMA DEL FACTOR**
>
> Dado un polinomio $P(x)$, el número "b" es un cero de este polinomio, si y sólo si $(x-b)$ será un factor de $P(x)$.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 + 5x + 6$

P.C.R. $= \pm\{1,2,3,6\}$

como $P(-1) = (-1)^3 + 5(-1) + 6 = 0$

$\Rightarrow (x - (-1)) \equiv (x+1)$ será un factor de $P(x)$

en tal caso será posible escribir

$$P(x) \equiv (x+1)q(x)$$

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR

Dado el polinomio

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n \ ; \ a_0 \cdot a_n \neq 0$,

de coeficientes racionales, se procede de la siguiente manera:

1. Se halla los posibles ceros racionales que nos permiten encontrar la raíz o el cero racional, luego, mediante el teorema del factor, se podrá conocer el primer factor.
2. Se hace una división por Ruffini entre el polinomio y el primer factor encontrado, siendo el cociente de esta división el otro factor buscado.

Ejemplo 1

Factorizar: $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Resolución:

I. Los posibles ceros racionales son

$\pm\{1, 2, 3, 6\}$

Veamos: $P(1) = 1-7+6 = 0$

$\Rightarrow (x-1)$ es un factor

II. El otro factor por la regla de Ruffini:

$[P(x) \div (x-1)]$

	1	0	-7	6
$x=1$	↓	1	1	-6
	1	1	-6	0
	$q(x)$			

Recordar $P_{(x)} \equiv (x-1)\,q(x)$

$$\Rightarrow P_{(x)} \equiv (x-1)(x^2+x-6)$$

$$\begin{array}{cc} x & 3 \\ x & -2 \end{array}$$

$\therefore\ P(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$

Ejemplo 2

Factorizar $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$

Resolución:

$$\text{P.C.R.} = \pm\left\{\frac{1, 2, 5, 10}{1, 2}\right\} = \pm\left\{1, 2, 5, 10, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

Para $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0$

(la verificación para el lector)

Luego, por la regla de Ruffini:

	2	-5	-23	-10
$x=-2$	↓	-4	18	+10
	2	-9	-5	0
	$q(x)$			

$$\Rightarrow P(x) = (x+2)(2x^2 - 9x - 5)$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & -5 \end{array}$$

$\therefore\ P(x) = (x+2)(2x+1)(x-5)$

Ejemplo 3

Factorizar

$$P(x) = \underline{4}x^5 - 29x^3 - 24x^2 + 7x + \underline{6}$$

Resolución:

Hallando los posibles ceros racionales:

$$\text{P.C.R} = \pm\left\{\frac{1,\ 2,\ 3,\ 6}{1,\ 2,\ 4}\right\} = \pm\left\{1, 2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

Podemos hacer directamente la división por Ruffini, consecutivamente.

	4	0	-29	-24	7	6
$x=-1$	↓	-4	4	+25	-1	-6
$x=-2$	4	-4	-25	12	6	0
	↓	-8	24	2	-6	
$x=3$	4	-12	-1	3	0	
	↓	12	0	-3		
$x=\frac{1}{2}$	4	2	-1	0		
		2	1			
	4	2	0			

Luego

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-½)(4x+2),$$

que es idéntico a

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(2x-1)(2x+1)$$

V. ARTIFICIOS DIVERSOS

Son métodos prácticos que facilitan la resolución de los problemas, tales como:

A. CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en transformar, equivalentemente, mediante un cambio adecuado, un problema operativo en otro más simplificado.

Ejemplo 1

Factorizar

$$P(a, b, c) = (18c+7b+6a)(a+3c+3b)+3b^2$$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$(a+3c+3b)[6(a+3c+3b) - 11b] + 3b^2$

haciendo: $a + 3c + 3b = z$,se tiene

$P(z,b) = z(6z - 11b) + 3b^2$

$$\begin{array}{ccc} 6z^2 & -\underline{11bz} & +\ 3b^2 \\ 3z & & -b \\ 2z & & -3b \end{array}$$

Por aspa simple $P(z,b) = (3z - b)(2z - 3b)$

Luego, reponiendo z tenemos:

$P(a,b,c) = (3a + 9c + 8b)(2a + 6c + 3b)$

Ejemplo 2

Factorizar e indicar la suma de factores primos de

$$R(x) = (x^2 + 7x + 5)^2 + 3(x^2 + 7x + 5) - 10$$

Resolución:

Haciendo $x^2 + 7x + 5 = k$

se tiene $R(k) = k^2+3k-10$

luego, por aspa simple, se obtiene

$R(k) = (k+5)(k-2)$

Reponiendo **k** en términos de x

$$R(x) = (x^2 + 7x + 5 + 5)(x^2 + 7x + 5 - 2)$$

$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 3)$$

$$\begin{array}{cc} x & 5 \\ x & 2 \end{array}$$

$R(x)= (x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$

Por lo tanto, la suma de factores primos es:

$$x + 5 + x + 2 + x^2 + 7x + 3 = x^2 + 9x + 10$$

B. SUMAR Y RESTAR

Consiste en sumar y restar simultáneamente una misma expresión o descomponer algún término del polinomio, de tal modo que, una expresión aparentemente no factorizable se transforme en otro, fácilmente.

B1. PARA POLINOMIOS DE GRADO PAR: Consiste en buscar un trinomio cuadrado perfecto para luego llevarlo a una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 1

Factorizar

$$f(x) = x^4 + 6x^2 + 25$$

Resolución:

Formando el trinomio cuadrado perfecto (sumar y restar $4x^2$)

$$F(x) = \underbrace{(x^2)^2 + 5^2 + \underbrace{6x^2 + 4x^2}_{10x^2}}_{(x^2+5)^2} - \boxed{4x^2}$$

$$(x^2 + 5)^2 - \boxed{(2x)^2}$$

$$F(x) = \overbrace{(x^2 + 5)^2 - (2x)^2}^{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$$= (x^2+5x+2x)(x^2+5x-2x)$$

ordenando

$F(x) = (x^2 + 2x + 5)(x^2-2x+5)$

Ejemplo 2

Factorizar

$$M(x,y) = 16x^4 - 12x^2y^2+y^4$$

Resolución:

Descomponiendo

$-12x^2y^2$ como $-8x^2y^2 - 4x^2y^2$ se tiene

$$M(x,y) = \underbrace{16x^4 - 8x^2y^2 + y^4}_{(4x^2-y^2)^2} - 4x^2y^2$$

(Diferencia de cuadrados)

$M(x,y) = (4x^2-y^2)^2-(2xy)^2$

$= (4x^2 - y^2 + 2xy)(4x^2 - y^2 - 2xy),$

ordenando, se tiene

$M(x,y) = (4x^2 + 2xy - y^2)(4x^2 - 2xy - y^2)$

B2. **PARA POLINOMIOS DE GRADO IMPAR:**

Será necesario recordar las siguientes igualdades:

- $x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- $x^3 - 1 \equiv (x-1)(x^2 + x + 1)$
- $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

Ejemplo 1

Factorizar $P(x) = x^5 + x + 1$

Resolución:

Sumando y restando x^2 se tiene:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x-1)(x^2+x+1) + x^2 + x + 1 \\ &= (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1] \end{aligned}$$

$\therefore\ P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Ejemplo 2

Factorizar

$$Q(x) = x^7 + x^2 + 1$$

sumando y restando x^4:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^7 - x^4 + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4(x^3 - 1) + (x^4 + x^2 + 1) \\ &= x^4(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &\quad + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(x) = (x^2 + x + 1)\,[x^4(x-1) + (x^2-x+1)]$

$\therefore\ Q(x) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$

C. POLINOMIOS RECÍPROCOS

Son aquellos polinomios que tienen por característica: *"si una raíz cualquiera es α la otra necesariamente es α^{-1} / $\alpha \neq 0$"* y tienen la siguiente forma:

$P_1(x) = ax+a$ (caso excepcional)

$P_2(x) = ax^2+bx+a$

$P_3(x) = ax^3+bx^2+bx+a$

$P_4(x) = ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$

$\vdots$

TEOREMA

Todo polinomio recíproco de grado impar se anula para 1 ó -1

NOTA

Sea $P(x)$ un polinomio de grado impar entonces $(x-1)$ ó $(x+1)$ será uno de sus factores.

Procedimiento para factorizar polinomios recíprocos de grado par:

I. Se extrae la parte literal del término central dando lugar a expresiones de la forma $x+\frac{1}{x}, x^2+\frac{1}{x^2}, \ldots.$

II. Se hace el cambio de variable $x+\frac{1}{x}$ con lo cual se logra disminuir el grado del polinomio en la mitad.

Ejemplo 1

$P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$

Resolución:

Se factoriza la parte literal del término central.

$$P(x) = x^2\left[x^2 + 6x + 7 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow P(x) = x^2\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7\right]$$

Hacemos : $x + \frac{1}{x} = z$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$\Rightarrow$ P$(x,z) = x^2(z^2 - 2 + 6z + 7) = x^2(z^2+6z+5)$
$= x^2(z+1)(z+5)$

$\Rightarrow$ P$(x,z) = x^2(z+5)(z+1)$

Reponiendo **z** :

$$\text{P}(x) = x^2\left(x + \frac{1}{x} + 5\right)\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)$$

$\therefore$ P$(x) = (x^2 + 5x + 1)(x^2 + x + 1)$

Ejemplo 2

Señalar el factor primo de mayor suma de coeficientes en

A$(x) = 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3$

Resolución:

Se observa que A$(-1) = 0 \Rightarrow (x+1)$ es un factor de A(x)

El otro factor por Ruffini :

	3	5	3	3	5	3
$x=1$	↓	-3	-2	-1	-2	-3
	3	2	1	2	3	0

$\underbrace{3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3}_{q}$

q$(x) = 3x^4+2x^3+x^2+2x+3$

q(x) por polinomios recíprocos de grado par.

$$\text{q}(x) = x^2\left\{3x^2 + 2x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right\}$$

$$= x^2\left\{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right\}$$

Haciendo

$$x + \frac{1}{x} = z \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

se tiene

$$\text{q}(x,z) = x^2[3(z^2-2)+2z+1]$$
$$= x^2(3z^2+2z-5)$$
$$= x^2(3z+5)(z-1)$$

Reponiendo z :

$$\text{q}(x) = x^2\left\{3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5\right\}\left\{x + \frac{1}{x} - 1\right\}$$

q$(x) = (3x^2 + 5x+3)(x^2-x+1)$,

luego tenemos

A$(x) = (x+1)(3x^2+5x+3)(x^2-x+1)$

De donde el factor de mayor suma de coeficientes es $3x^2 + 5x + 3$

D. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS SIMÉTRICOS Y ALTERNADOS

D1. POLINOMIO SIMÉTRICO

Es el polinomio que no se altera al intercambiar cualquier par de variables en forma simultánea.

Ejemplo 1

Sea G$(x,y,z) = 5(x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz$,

elegimos arbitrariamente dos variables y, z y las intercambiamos

G(x,z,y) $= 5(x^3 + z^3 + y^3) + 2xzy$
$= 5(x^3 + y^3 + z^3) + 2xyz$

Podemos observar que el polinomio no ha sufrido ningún cambio.

$\Rightarrow$ G(x,y,z) es simétrico.

Formas generales de los polinomios simétricos:

	1er. Grado	2do. Grado	3er. Grado
2 var.	$A(x+y)$	$A(x^2+y^2)+Bxy$	$A(x^3+y^3)+B(x^2y+xy^2)$
3 var.	$A(x+y+z)$	$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz)$	$A(x^3+y^3+z^3)+B[x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)]+cxyz$

D2. POLINOMIO ALTERNADO:

Es el polinomio que sólo cambia de signo al intercambiar cualquier par de variables de manera simultánea.

Ejemplo 1

$R(x,y)=x^3-y^3$

Si cambiamos x por y, recíprocamente se obtiene $R(x,y)=y^3-x^3=-(x^3-y^3)$

de donde $R(y,x)\equiv -R(x,y)$

por lo tanto $R(x,y)$ es alternado.

TEOREMAS

1. De la adición, sustracción, multiplicación de polinomios simétricos, resultan polinomios simétricos.
2. De la multiplicación de un polinomio simétrico por otro alternado resulta otro polinomio alternado.
3. Si un polinomio simétrico se anula para alguna de sus variables, se anulará para todas sus variables.
4. Si un polinomio se anula para una variable igual a otra, se anulará para esa misma variable igual a las demás.

Procedimiento para factorizar:

1. Se verifica si es simétrica o alternada.
2. Buscaremos factores binomios haciendo una variable igual a otra o a su negativo.
4. Se establece la identidad de polinomios teniendo presente la simetría.

Ejemplo 2

Factorizar $M(x,y)=(x+y)^5-x^5-y^5$

Resolución:

Observamos para:

$x=0 \Rightarrow M(0,y)=0 \quad \Rightarrow$ x es un factor

$y=0 \Rightarrow M(x,0)=0 \quad \Rightarrow$ y es un factor

$x=-y \Rightarrow M(-y,y)=0 \quad \Rightarrow$ $x+y$ es factor

Por identidad :

$$(x+y)^5-x^5-y^5 \equiv \underbrace{xy(x+y)}_{\text{3er. grado}}\ \underbrace{Q(x\,.\,y)}_{\text{2do. grado}}$$

$\Rightarrow Q(x,y)=M(x^2+y^2)+N(xy)$

$\therefore (x+y)^5-x^5-y^5 \equiv xy(x+y)\{M(x^2+y^2)+Nxy\}$

Haciendo :

I. $x=y=1$

$\Rightarrow 2^5-1-1=2\{2M+N\}$

$\Rightarrow 2M+N=15 \,..........\, (\alpha)$

II. $x=2,\ y=-1$

$\Rightarrow 1-2^5+1=(-2)(1)\{5M-2N\}$

$\Rightarrow 5M-2N=15 \,..........\, (\beta)$

De (α) **y** (β) $M=N=5$

$\Rightarrow M(x,y)=xy(x+y)(5(x^2+y^2)+5xy)$

$\therefore M(x,y)=5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$

Ejemplo 3

Factorizar

$M(a,b,c)=a^3c+c^3b+b^3a-a^3b-b^3c-c^3a$

Resolución:

Si intercambiamos cualquier par de variables, el polinomio sólo alterna el signo.

Así $M(a,b,c)=-M(b,a,c)$. Entonces, el polinomio es alternado, además para a=b se tiene $M(b,b,c)=0 \Rightarrow (a-b)$ es un factor de M. Luego, por polinomios alternados, los otros factores son

(a-b), (b-c) y (c-a)

$$\Rightarrow \underbrace{M(a,b,c)}_{\text{4to. grado}}=\underbrace{(a-b)(b-c)(c-a)}_{\text{3er. grado}}\,.\,\underbrace{[k(a+b+c)]}_{\text{1er. grado}}$$

Análogamente al procedimiento del problema anterior, se comprueba que **k** es igual a **1**, luego:

$$\Rightarrow M(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Al factorizar $P(x,y) = x^9y - x^3y^7$, establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. x^2+xy+y^2 es un factor primo

II. x^2-y^2 no es un factor de $P(x,y)$

III. $P(x,y)$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$

Resolución:

Extrayendo factor común al monomio x^3y, se tiene

$$P(x,y) = x^3y(x^6-y^6) = x^3y[(x^3)^2-(y^3)^2]$$
$$= x^3y(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

Luego por suma y diferencia de cubos ,

$$P(x,y) = x^3y(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2) ;$$

estudiando las proposiciones se concluye:

I. V   II. F   III. F

Problema 2

Factorizar en $\mathbb{R}$

$$P(x,y) = x^3+28y^3+3xy(x+y)$$

e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

Resolución

Observamos $28y^3 = y^3+27y^3$

Luego, reordenando :

$$P(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y) + 27y^3$$
$$= (x+y)^3 + (3y)^3$$

Suma de cubos:

$$= (x+y+3y)[(x+y)^2-(x+y)3y+(3y)^2]$$
$$= (x+4y)[x^2+y^2+2xy-3xy-3y^2+9y^2]$$
$$= (x+4y)(x^2-xy+7y^2)$$

Los factores primos son $x+4y$, $x^2-xy+7y^2$ cuya suma de coeficientes es 5 y 7 respectivamente.

Problema 3

Luego de factorizar

$$P(x,y)=x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2y+xy^2+xz^2+zx^2$$

indicar un factor primo

Resolución:

Como son 9 términos agrupamos de 3 en 3 como se indica

$$x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2y+xy^2+xz^2+zx^2$$

Entonces

$$x^2(\underline{x+y+z})+y^2(\underline{x+y+z})+z^2(\underline{x+y+z}) ,$$

por lo tanto $P(x,y) \equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$,

de donde uno de los factores primos es:

$$x+y+z \quad ó \quad x^2+y^2+z^2$$

Problema 4

Luego de factorizar, indicar un factor primo de

$$P(x,y,z) =2[(x+y+z)^2+(x+y-z)^2]+ 5(x^2+y^2-z^2+2xy)$$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable $x + y = m$

Se tiene

$$\underbrace{2[(m+z)^2 + (m-z)^2]}_{2(m^2+z^2)} + 5(m^2-z^2)$$

$$= 2(2m^2+2z^2)+5m^2-5z^2$$
$$= 4m^2+4z^2+5m^2-5z^2$$
$$= 9m^2-z^2 = (3m+z)(3m-z)$$

Reponiendo **m** :

$$P(x,y,z) = (3(x+y)+z)\,(3(x+y)-z)$$
$$\equiv (3x+3y+z)(3x+3y-z)$$

Luego, un factor primo será $3x+3y+z$ ó $3x+3y-z$

Problema 5

Factorizando en $\mathbb{Q}$

$$P(x) = (x^2+x+1)(x^2-x+1)+7x^2-385$$

indicar la suma de sus factores primos lineales.

Resolución:

Efectuando por productos notables :

$$P(x) = x^4+x^2+1+7x^2-385$$

Reduciendo se obtiene $P(x)=x^4+8x^2-384$

Por aspa simple :

$$P_{(x)} = x^4+8x^2-384$$
$$\begin{array}{cc} x^2 & 24 \\ x^2 & -16 \end{array}$$

Luego, $P(x) = (x^2+24)(x^2-16)$

$$\equiv (x^2+24)(x+4)(x-4)$$

Los factores primos lineales son $(x+4)$ y $(x-4)$, cuya suma es $2x$

Problema 6

Indicar un factor primo de

$P(x) = (a^2+2ab)x^2+b(a-4b)x+(b-a)(a-2b)$

Resolución:

Por ser $P(x)$ polinomio cuadrático factorizamos por aspa simple

$$a(a+2b)x^2 + b(a-4b)x + (b-a)(a-2b)$$

$$\begin{array}{ccc} ax & & a-2b \\ (a+2b)x & & b-a \end{array}$$

$$= (ax+a-2b)\,[(a+2b)x+b-a]$$

Entonces, un factor primo es

$(ax+a-2b)$ ó $[(a+2b)x + b-a]$

Problema 7

Indicar el número de factores primos de

$P(x) = (x^2+7x+5)^2+3(x^2+1)+21x+2$

Resolución:

Efectuando y reordenando

$P(x) = (x^2+7x+5)^2+\underline{3x^2}+3+\underline{21x}+2$

$P(x) = (x^2+7x+5)^2+3(x^2+7x)+5$,

haciendo $x^2+7x+5 = y$ se tiene

$y^2+ 3(y-5) + 5 = y^2+3y-10 = (y+5)(y-2)$

Reponiendo y :

$$(x^2+7x+5+5)(x^2+7x+5-2)$$

$$(x^2+7x+10)(x^2+7x+3)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 5 \\ x & & 2 \end{array}$$

$P(x) = (x+5)(x+2)(x^2+7x+3)$, vemos que tiene 3 factores primos.

Problema 8

Si $A(x) = x^2-4x+m+1$ y

$B(x) = x^2-(m+1)x+4$

admiten un factor común lineal.

Hallar el valor de **m**, si $A(x) \neq B(x)$

Resolución:

Sea $x-\alpha$ el factor común de $A(x)$ y $B(x)$,entonces

$A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha+m+1 = 0$

$B(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2-(m+1)\alpha+4 = 0$,

restando se tiene $(m-3)\alpha+m-3 = 0$

Entonces $(m-3)(\alpha+1) = 0$,

de donde $m-3 = 0$ ó $\alpha+1 = 0$

I. Si $m-3 = 0 \Rightarrow A(x) = B(x)$

Contradicción con los datos

II. Si $\alpha+1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$,

En el polinomio $A(x)$.

$A(-1)=(-1)^2-4(-1)+m+1 = 0$

$\Rightarrow 1+4+m+1 = 0 \Rightarrow m = -6$

$\therefore m= -6$

Problema 9

Señalar el factor primo de menor suma de coeficientes de $F(x) = 6x^6-5x^5-6x^4-13x^2-6$

Resolución:

Factorizando por aspa doble :

$$6x^6-5x^5-6x^4-13x^2-6$$

$$\begin{array}{ccccc} 3x^3 & & 2x^2 & & 3 \\ 2x^3 & & -3x^2 & & -2 \end{array}$$

$\therefore F(x) = (3x^3+2x^2+3)(2x^3-3x^2-2)$

ya que los factores cúbicos, si fueran factorizables deben admitir divisores binomios; sin embargo, no es así. Se concluye entonces que $2x^3-3x^2-2$ es el factor primo de menor suma de coeficientes.

Problema 10

Luego de factorizar

$K(a;b) = a(a^2 + ab - 1) - b(b^2 + ab - 1)$

dar la suma de sus factores primos.

Resolución:

Efectuando y agrupando adecuadamente :

$K(a,b) = a^3 + a^2b - a - b^3 - ab^2 + b$

$= a^3-b^3+ab(a-b)-(a-b)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)-(a-b)$

$= (a-b)\,\{a^2+ab+b^2+ab-1\}$

$= (a-b)\,\{(a+b)^2 - 1\}$,

por diferencia de cuadrados se obtiene

$K(a,b) = (a-b)(a+b+1)(a+b-1)$

cuyos factores primos son

$a-b\,;\,a+b+1\,;\,a+b-1$

$\therefore \Sigma$ fact. primos es $3a+b$

Problema 11

Indicar un factor primo de

$S(a,b,c) = a^2+a+b-b^2-c^2-c+2bc$

Resolución:

Agrupando convenientemente

$S(a,b,c) = a^2-b^2-c^2+2bc + a+b-c$

$= \underbrace{a^2 - (b-c)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} + a + b - c$

$= (a+b-c)(a-b+c)+(a+b-c)$

$= (a+b-c)(a-b+c+1)$

cuyos factores primos son $a+b-c$; $a-b+c+1$

Problema 12

Con respecto al polinomio

$S(a,b,c) = a\,(a^2+bc) + c\,(a^2+b^2) - b^3$

Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $a+c-b$

II. La suma de coeficientes de un factor primo es 2

III. Tiene 3 factores primos lineales.

Resolución:

Efectuando y agrupando adecuadamente :

$S(a,b,c) = a^3 + abc + a^2c + b^2c - b^3$

$= a^3 - b^3 + c(ab+a^2+b^2)$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)+ c(a^2+ab+b^2)$

$= (a^2+ab+b^2)(a-b+c)$

Respondiendo a las proposiciones, tenemos:

I. V II. F III. F

Problema 13

Señalar el factor primo de mayor suma de coeficientes del polinomio

$S(a,b) = (1-ab)^2 - (a^2 + b^2 + 1)$

Resolución:

Efectuando y agrupando de manera adecuada:

$S(a,b) = 1 - 2ab + a^2b^2 - a^2 - b^2-1$

$= a^2b^2 - (a^2 + b^2 + 2ab) \equiv \underbrace{(ab)^2-(a+b)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$

$S(a,b) = (ab+a+b)(ab-a-b)$

Luego el factor primo de mayor suma de coeficiente es $(ab+a+b)$

Problema 14

Señalar la suma de coeficiente de un factor primo del polinomio $S(x) = x^2 - 2b^2x - b^8 - b^4 - 1$

Resolución:

Nota $x^2 - 2b^2x + b^4 \equiv (x - b^2)^2$

Sumando y restando b^4

$S(x) = \underbrace{x^2-2b^2x+b^4}\, - \underbrace{b^8-2b^4-1}$

$= \underbrace{(x - b^2)^2 - (b^4 + 1)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$

$S(x) = (x-b^2+b^4+1)(x-b^2-b^4-1)$

Luego, la suma de coeficientes es

$1 - b^2 + b^4 + 1$ ó $1 - b^2 - b^4 - 1$

es decir $b^4 - b^2 + 2$ ó $-b^4 - b^2$

Problema 15

Dar un factor primo del polinomio

$F(a,b) = a(c^4+1) - 2ac^2 + (a+1)^2(c+1)^2c$

Resolución:

Agrupando convenientemente :

$\equiv a\{c^4 + 1 - 2c^2\} + (a+1)^2\,(c+1)^2c$

$= a(c-1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2c\,(c+1)^2$

$= (c+1)^2\,[a(c-1)^2 + c(a+1)^2]$,

efectuando

$= (c+1)^2\,\{\underline{ac^2} - \cancel{2ac} + \underline{\underline{a}} + \underline{ca^2} + \cancel{2ac} + \underline{\underline{c}}\}$

$= (c+1)^2\,\{ac(\underline{a+c}) + (\underline{a+c})\}$

$= (c+1)^2(a+c)(ac+1)$

Luego, un factor primo es $c+1$ ó $a+c$ ó $ac+1$

Problema 16

Demostrar que para todo **k** entero

$P(x) = x^2 + 6kx + 1$ no es factorizable sobre los racionales.

Resolución:

Analicemos su discriminante

$\Delta = (6k)^2 - 4(1) \equiv 36k^2 - 4 \equiv 4(9k^2 - 1)$

Observamos que $9k^2$ es un cuadrado perfecto, entonces $9k^2-1$ no puede ser cuadrado perfecto, ya que no existen dos números consecutivos diferentes de 0 y 1 donde ambos sean cuadrados perfectos.

En consecuencia, $x^2 + 6kx + 1$ no es factorizable en $\mathbb{Q}$.

Problema 17

Factorizar

$$F(a,b,c) = (a+2b+3c)(a+3b+5c)+2bc$$

Resolución:

A la expresión $a+2b+3c$ llamaremos z, es decir $a+2b+3c = z$; luego tenemos $z(z+b+2c) + 2bc$ que es equivalente a $z^2+(b+2c)z+2bc$.

Factorizando por aspa simple :

$$z^2 + (b+2c)z + 2bc$$

$$\begin{array}{ccc} z & & 2c \\ z & & b \end{array}$$

$F(z,b,c) = (z+2c)(z+b)$

Reponiendo z:

$$F(a,b,c) = (\underline{a+2b+3c}+2c)(\underline{a+2b+3}c+b)$$

$\therefore F(a,b,c) = (a+2b+5c)(a+3b+3c)$

Problema 18

Señalar la suma de los factores primos de

$M(a) = a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b^2-c^2)^2$

Resolución:

Por aspa simple

$$= a^4 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b+c)^2(b-c)^2$$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & & -(b+c)^2 \\ a^2 & & -(b-c)^2 \end{array}$$

Veamos la comprobación

$$-a^2 \underbrace{\{(b+c)^2 + (b-c)^2\}}_{\text{Id. de Legendre}} = -a^2[2(b^2+c^2)]$$

$$= -2a^2(b^2+c^2)$$

luego, su forma factorizada es

$$[a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b - c)^2]$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

de donde la suma de factores primos será

$$a + \cancel{b} + \cancel{c} + a - \cancel{b} - \cancel{c} + a + \cancel{b} - \cancel{c} + a - \cancel{b} + \cancel{c} = 4a$$

Problema 19

¿Cuántos factores algebraicos posee el polinomio

$$P(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^3 - 3(xy+xz+yz)^2(x^2+y^2+z^2) + 2(xy+xz+yz)^3 \text{ ?}$$

Resolución:

Haciendo cambio de variable :

$$x^2 + y^2 + z^2 = m$$

$$xy + xz + yz = n$$

se tendrá

$$m^3 - 3n^2m + 2n^3$$

Separando $-3n^2m$ como $-mn^2 - 2mn^2$

$\Rightarrow m^3 - mn^2 - 2mn^2 + 2n^3$

$= m(m^2-n^2) - 2n^2(m-n)$

$= m(m+n)(m-n)-2n^2(m-n)$

$$(m-n)(m^2 + mn - 2n^2)$$

$$\begin{array}{ccc} m & & 2n \\ m & & -n \end{array}$$

$= (m-n)(m+2n)(m-n) \Rightarrow (m-n)^2(m+2n)$

Reponiendo m y n :

$$= (x^2+y^2+z^2-xy-xz - yz)^2 (x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz))$$

$\Rightarrow P(x,y,z) = (x^2+y^2 + z^2 - xy-xz - yz)^2 (x+y+z)^2$,

de donde el número de factores algebraicos es $(2+1)(2+1) - 1 = 8$

$\therefore$ Tiene 8 factores algebraicos.

Problema 20

Indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes en

$$H(x,y) = 24x^3y^2+60x^2y^2-6xy^4+6xy^3+36xy^2$$

Resolución:

Extrayendo el factor común monomio: $6xy^2$, se tiene $H(x,y) = 6xy^2(4x^2+10x-y^2+y+6)$

Por aspa doble :

$$6xy^2(4x^2 + 0xy - y^2 + 10x + y + 6)$$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & y & & 2 \\ 2x & & -y & & 3 \end{array}$$

$\therefore H(x,y) = 6xy^2(2x+y+2)(2x-y+3)$

Los factores primos son x, y, $2x + y + 2$, $2x-y+3$ y el de mayor suma de coeficientes es $2x+y+2$

Problema 21

Luego de factorizar

$P(x) = x^4 - (b+1)x^2 + (b-2b^2)x + b^3(1-b)$,

halle el valor numérico entero de un factor primo

para $2x = 1 + \sqrt{4b^2+5}$

Resolución:

Factorizando por aspa doble especial :

$$x^4 + 0x^3 - (b+1)x^2 + (b-2b^2)x + b^2(b-b^2)$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{-x} & -b^2 \\ x^2 & \boxed{x} & -(b-b^2) \end{array}$$

SDT: $-(b+1)x^2$

ST: $(-b^2-b+b^2)x^2 = -bx^2$

Falta: $(-b-1+b)x^2 = -x^2$

luego, la forma factorizada es

$$P(x) = (x^2 - x - b^2)(x^2 + x - b + b^2)$$

evaluando en $2x = 1 + \sqrt{4b^2+5}$

$\Rightarrow 2x-1 = \sqrt{4b^2+5}$

$\Rightarrow 4x^2-4x+1 = 4b^2+5$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 4b^2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - b^2 = 1$

$\therefore$ El valor numérico entero de un factor primo es 1

Problema 22

Señalar un factor primo de

$P(x) = x^3(3x+1)^3 - (6x+1)^2 - 15$

Resolución:

$P(x) = [x(3x+1)]^3 - (6x+1)^2 - 15$

$= (3x^2+x)^3 - (36x^2+12x+1) - 15$

$= (3x^2+x)^3 - 12(3x^2+x) - 16$,

haciendo $3x^2+x = z$ se tiene $P(z) = z^3 - 12z - 16$

Por divisores binómicos, se observa $P(-2)=0$, luego $(z+2)$ es un factor.

Por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -12 & -16 \\ z=-2 & \downarrow & -2 & 4 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow P(z) = (z+2)(z^2-2z-8)$$

$$\begin{array}{cc} z & -4 \\ z & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow P(z) = (z+2)^2(z-4)$

Reemplazando el valor de z

$P(x) = (3x^2 + x + 2)^2(3x^2+x-4)$

$P(x) = (3x^2 + x + 2)^2(3x+4)(x-1)$,

de donde un factor primo puede ser

$3x^2 + x + 2$ ó $3x + 4$ ó $x - 1$

Problema 23

Obtener el número de factores algebraicos de

$Q(x) = x^4 + 4x^5 - (x^6 - 1)^2$

Resolución

Veamos por aspa simple

$$x^4 + 4x^5 - (x^3-1)^2(x^3+1)^2$$

$$\begin{array}{cc} x^2 & (x^3+1)^2 \\ x^2 & -(x^3-1)^2 \end{array}$$

Comprobando

$$x^2\underbrace{\{(x^3+1)^2 - (x^3-1)^2\}}_{\text{Id. de Legendre}} = x^2\{4x^3\} = 4x^5$$

$\Rightarrow Q(x) = [x^2 + (x^3+1)^2][x^2-(x^3-1)^2]$

$= (x^6+2x^3+x^2+1)(x+x^3-1)(x-x^3+1)$,

de donde el número de factores algebraicos es

$(1+1)(1+1)(1+1)-1 = 7$

Problema 24

Hallar la suma de coeficientes de un factor primo de $M(x) = (x-3)^5 + 81x$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable $x-3 = z$

$\Rightarrow M(z) = z^5 + 81(z+3) = z^5+81z + 243$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\frac{z^5}{243} + \frac{81z}{243} + \frac{243}{243}\right\}$$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\left(\frac{z}{3}\right)^5 + \left(\frac{z}{3}\right) + 1\right\},$$

haciendo $\frac{z}{3} = t$

$$M(t) = 243(t^5+t+1)$$

Recuerde:

$$t^5+t+1 \equiv (t^2+t+1)(t^3-t^2+1)$$

$$\Rightarrow M(z) = 243\left\{\frac{z^2}{9} + \frac{z}{3} + 1\right\}\left\{\frac{z^3}{27} - \frac{z^2}{9} + 1\right\}$$

$$M(z) = (z^2+3z+9)(z^3-3z^2+27)$$

En x es :

$M(x) = [(x-3)^2+3(x-3)+9]\,[(x-3)^3-3(x-3)^2+27]$

efectuando

$$M(x) = (x^2-3x+9)(x^3-12x^2+33x-27)$$

De donde la suma de coeficientes de un factor primo es 7 ó -5

Problema 25

¿Cuántos factores primos tiene el polinomio

$P(x) = x^7 - 2x^5 - 1$?

Resolución:

Observamos que

$$P(-1) = (-1)^7 - 2(-1)^5 - 1 = 0$$

$\Rightarrow (x+1)$ es un factor de $P(x)$,

el otro factor por Ruffini

	1	0	-2	0	0	0	0	-1
$x=-1$	↓	-1	1	1	-1	1	-1	1
	1	-1	-1	1	-1	1	-1	$\boxed{0}$

$$\Rightarrow P(x)=(x+1)(x^6-x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$$

$$\begin{array}{ccc} x^3 & -x & 1 \\ x^3 & -x^2 & -1 \end{array} \left(\text{Aspa doble}\right)$$

$$\Rightarrow \; P(x) = (x+1)(x^3-x+1)(x^3-x^2-1)$$

$\therefore$ Tiene 3 factores primos

Problema 26

Señale el factor primo de menor suma de coeficientes en

$$J(x,y) = (x^2 - xy + y^2)^2 - 4xy(x+y)^2$$

Resolución:

De $J(x,y) = (x^2+y^2-xy)^2 - 4xy(x^2+y^2+2xy)$,

haciendo $x^2+y^2 - xy = m \wedge xy = n$

$$\Rightarrow J(m,n) = m^2 - 4n(m+3n)$$

$$= m^2 - 4mn - 12n^2$$

$$\begin{array}{cc} m & -6n \\ m & 2n \end{array}$$

$$\Rightarrow J(m,n) = (m-6n)(m+2n)$$

Reponiendo m $\wedge$ n

$$J(x,y) = (x^2+y^2-xy-6xy)(x^2+y^2-xy+2xy)$$

$$\Rightarrow J(x,y) = (x^2+y^2 - 7xy)(x^2+y^2+xy)$$

Luego el factor de menor suma de coeficientes es $x^2 + y^2 - 7xy$.

Problema 27

Indique el valor de verdad con respecto al polinomio

$P(x) = x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$

I. Tiene un solo factor primo mónico

II. Un factor primo es $x^2 + 3x + 1$

III. El término lineal de un factor primo es $-3x$

Resolución:

Por polinomios recíprocos

$$P(x) = x^3\left\{x^3-9x^2+30x-45+\frac{30}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right\}$$

$$=x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+30\left(x+\frac{1}{x}\right)-45\right\},$$

haciendo $x+\frac{1}{x}=z$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2 \quad ; \quad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$$

reemplazando obtenemos

$$P(x;z) = x^3\{z^3-3z-9(z^2-2)+30z-45\}$$

$$= x^3(z-3)^3$$

Reponiendo z

$$P(x) = x^3\left(x+\frac{1}{x}-3\right)^3 = x^3\left(\frac{x^2-3x+1}{x}\right)^3$$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$$

$\therefore$ I) V II) F III) V

Problema 28

Factorizar

$$G(a,b,c)=(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$$

Resolución:

Haciendo

$$\left.\begin{array}{l} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{array}\right\} \;(+)$$

$$\Rightarrow a+b+c = x+y+z$$

$$\Rightarrow G(x,y,z) = (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$$

El polinomio es simétrico, puesto que si

$$x = -y \;\Rightarrow\; G(-y, y, z) = 0$$

$\Rightarrow$ $(x+y)$ es un factor, así mismo $(x+z)$, $(y+z)$ son factores

Comparando los grados

$$\underbrace{(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5}_{\text{5to. grado}} \equiv \underbrace{(x+y)(x+z)(y+z)}_{\text{3er. grado}} \,.\, \underbrace{Q(x,y,z)}_{\text{2do. grado}}$$

como

$$Q(x,y,z) = A(x^2+y^2+z^2) + B(xy + xz + yz)$$

Por ser polinomios idénticos, para conocer A y B asignaremos

$$x=1, y=1, z=0 \;\Rightarrow\; 2A+B = 15$$

$$x=1, y=1, z=1 \;\Rightarrow\; A+B = 10$$

de donde se obtiene $A = 5$, $B = 5$

$$G(x,y,z) = (x+y)(x+z)(y+z)5(x^2+y^2+z^2)+ 5(xy+xz+yz)\}$$

Reponiendo los valores de x, y, z, en términos de a,b,c

$$\therefore\; G(a,b,c) = 80abc(a^2+b^2+c^2)$$

Problema 29

Factorizar

$A(x,y,z) = x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3$

Resolución:

El polinomio es alternado, ya que si

$x=y \Rightarrow A(x,y,z)=0 \Rightarrow (x-y)$ es un factor, del mismo modo son factores $(y-z)$,$(z-x)$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2(y-z)^3 + y^2(z-x)^3 + z^2(x-y)^3}_{\text{5to. grado}}$$

$$\equiv \underbrace{(x-y)(y-z)(z-x)}_{\text{3er. grado}} \;.\; \underbrace{Q(x,y,z)}_{\text{2do. grado}}$$

$$\Rightarrow A(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)[M(x^2+y^2+z^2) + N(xy+xz + yz)]$$

siendo $Q(x,y,z)$ un polinomio simétrico.

Luego, por ser polinomios idénticos:

Para $x=0$, $y=1$, $z=-1 \Rightarrow 2M-N = -1$

Para $x=1$, $y=-1$, $z=2 \Rightarrow 6M-N = -1$

de donde $M = 0 \wedge N = 1$

Entonces

$$A(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+xz+yz)$$

Problema 30

En base al polinomio

$M(x) = x^7-8x^6+21x^5-15x^4-15x^3+21x^2-8x+1$,

establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene 4 factores primos

II. x^3-2x+1 es uno de sus factores

III. x^2-3x+1 es un factor primo

Resolución:

$M(x)$ polinomio recíproco de grado impar

$M(-1) = 0$, luego, por divisores binómicos :

	1	-8	21	-15	-15	21	-8	1
$x=-1$	↓	-1	9	-30	45	-30	9	-1
	1	-9	30	-45	30	-9	1	0

$$M(x) = (x+1)\underbrace{(x^6 -9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1)}_{Q(x)}$$

Como $Q(x)$ es un polinomio recíproco de grado par, factorizado (x^3) se tiene :

$$x^3\left\{x^3 - 9x^2 + 30x - 45 + \frac{30}{x} - \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right\}$$

$$x^3\left\{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) - 9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) + 30\left(x+\frac{1}{x}\right) - 45\right\},$$

haciendo $x + \dfrac{1}{x} = z$

entonces $x^2+\dfrac{1}{x^2} = z^2-2$, $x^3+\dfrac{1}{x^3} = z^3-3z$

Reemplazando tenemos

$$x^3\{z^3-3z-9(z^2\;\;2) + 30z-45\}$$

$$x^3\{z^3-9z^2+27z-27\} = x^3(z-3)^3$$

reponiendo z :

$$M(x) = x^3\left(x+\frac{1}{x}-3\right)^3 = (x^2-3x+1)^3$$

$$\therefore\; M(x)=(x+1)(x^2-3x+1)^3$$

I. F II. F III. V

Problemas Propuestos

1. Indicar el número de factores irreductibles de

$$P(x,y,z) = x^4y^2z^7 + xy^2z^7 + 3x^3y^2z^7 + 3x^2y^2z^7$$

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1

2. Factorizar
$M(a,b) = a^2-4+2ab+b^2$ e indique un factor primo.

A) $a+b+2$ B) $b-2$ C) $a+b-4$
D) $a+2$ E) $b+2$

3. Señalar un factor primo, luego de factorizar
$P(x)=x^2+ (b+c+2d)x+d^2+(b+c)d+bc$

A) $x+b+d$ B) $x+2d$ C) $x+d+b+c$
D) $x+c$ E) $x-2c$

4. Señalar un factor primo de
$H(x)=(2x^2+x-1)^2-(x^2-3x-5)^2$

A) $3x^2+2x-6$ B) $(x-2)^2$ C) $3x^2-2x-6$
D) $(x+2)^2$ E) $(x-2)$

5. ¿Cuántos divisores primos posee
$T(a,b)=(a^2-6ab+b^2)^2-4ab(a+b)^2$?

A) 2 B) 5 C) 4
D) 3 E) 6

6. Factorizar

$$P(a,b,c) = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$$

A) $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$
B) $(ab+ac+bc)(a+b+c)$
C) $(a+b)(b+c)(c+a)$
D) $(a-b)(b-c)(c-a)$
E) $(ab+ac+bc)(a-b+c)$

7. Indicar un factor primo de
$P(x;y;z)=[(x-y+z)(x-y-z)+1]^2-4(x-y)^2$

A) $x+y+z+1$ B) $x-y+z+1$
C) $x-y+z$
D) $x-y+z+2$ E) $z+y-x+2$

8. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es término de un factor primo de
$F(x,y)=1+2x^2-(6x^2y^2+4x^3y+y^4+4xy^3)$?

A) $-x^2$ B) $2xy$ C) y^2
D) $2x^2$ E) $-y^2$

9. Indicar el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes, después de factorizar

$$M(x) = x^4+4x^2+16$$

A) x^2+x-2 B) x^2+2x-4 C) x^2+x-8
D) x^2+8 E) x^2+2x+4

10. Factorizar los polinomios
$P(x,y) = 6x^2+19xy+15y^2-11x-17y+4$
$F(x,y) = x^2+y^2-4+2xy+3x+3y$
y señalar como respuesta el factor primo no común de mayor suma de coeficientes.

A) $3x+5y-4$ B) $2x+3y-1$ C) $x+y+4$
D) $x+y-1$ E) $2x+y+4$

11. Señalar el factor primo cuadrático de mayor suma de coeficientes en

$$P(x) = x^4-4x^3+11x^2-14x+10$$

A) x^2+3x+2 B) x^2-2x+5 C) x^2-4x-2
D) x^2+4x+2 E) x^2-2x+2

12. Hallar la suma de coeficientes de un factor primo de

$$P(x) = (1+x^2)(1-x^2)^2+(x-x^2)^2$$

A) 2 B) 4 C) 3
D) 0 E) 5

13. Factorizar
$M(z)=z^2(z^8+1)+z^6+(z^2-1)(1+z^2+z^4)$
y dar como respuesta el número de factores primos.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

14. Obtener la suma de coeficientes de un factor primo del polinomio
$$H(x)=x^3-x^2-17x+33$$

A) -3 B) -6 C) -7
D) -5 E) -8

15. Hallar un factor primo de
$P(a,b)=ab-(ab-1)(1+a-ab)(b+1)b$

A) 1+ab B) ab C) 1-ab
D) 1 E) a+b

16. Factorizar y dar como respuesta la suma de coeficientes de un factor primo de
$$P(x,y)=6x^{2n}-4y^{2n}+7+5x^ny^n+3y^n-17x^n$$

A) 0 B) 2 C) 12
D) 1 E) 6

17. Factorizar e indicar el factor primo cúbico de
$$P(x)=x^5-x^4+2x^2-2x+1$$

A) x^3+x+1 B) x^3+x^2+1
C) x^3+x+x^2-1
D) x^3-x+1 E) x^3-x^2+1

18. Obtener el número de factores algebraicos de $Q(x)=x^4+4x^5-(x^6-1)^2$

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 5

19. Factorizar
$$F(a,b,c)=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+4c(a+b)-5(a+b+c)+2$$
e indicar el factor primo del mayor término independiente.

A) 2a+2b+2c+1 B) a+b+c-2
C) 2a+2b+c-1
D) a+b+c+2 E) 2a+2b+2c-1

20. Factorizar y obtener la suma de factores primos del polinomio
$$P(x,y)=(x+2y)^2-2xy(3x-4xy+6y)$$

A) x^2+4y^2 B) $2x^2+2xy+8y^2$
C) x^2-4y^2
D) $2x+4y-6xy$ E) $2x^2-2xy+8y^2$

21. Con respecto al polinomio
$$P(a,b,c)=b^3(a-c^2)+c^3(b-a^2)+a^3(c-b^2)+abc(abc-1)$$
Señalar el valor de verdad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes:
I. Un factor primo es a^2-b
II. Un factor primo es a^2+b
III. $a-c^2$ no es un factor primo

A) VVF B) VFV C) VFF
D) VVV E) FFF

22. Mencionar un factor primo del polinomio
$$Q(x)=\alpha^2x^3+(2\alpha\beta+\alpha^3\beta)x^2+(\beta^2+2\alpha^2\beta^2)x+\alpha\beta^3$$

A) $\beta x+\alpha$ B) $x+\alpha\beta$ C) $\alpha x+\beta^2$
D) $\beta x+\alpha^2$ E) $x+\alpha$

23. Del polinomio
$P(a,b)=a^4+5bc^2-a^2b-a^2c^2-2b^2-2c^4$
Decir si es verdadero o falso con respecto a la proposiciones siguientes:
I. Tiene 3 factores primos
II. Tiene 2 factores primos cuadráticos
III La mayor suma de coeficientes de un factor primo es $2-2c^2$; $0<c<1$

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FVV E) VVF

24. Si $x^2 - 5x + 6$ es un factor de $P(x) = x^4 - 9x^2+mx+n$.

Hallar el valor de $\frac{n}{m}$

A) 1 B) -3 C) 10
D) -5 E) 3

25. Luego de factorizar
$P(x) = (2x + 1)^7 + 4x(x+1) + 2$
Indicar un factor primo cuadrático

A) $4x^2 + x + 1$ B) $x^2 - 5x + 1$
C) $4x^2 + x + 3$
D) $2x^2 + x + 2$ E) $4x^2+6x+3$

26. Indicar un factor de
$S(x) = (1 + x + x^2+x^3+x^4+x^5)^2 - x^5$

A) $x^4+x^3+x^2+x+1$ B) $x^9 + 1$
C) $x^5 + 1$
D) x^3+x^2+x+1 E) $x^4 + 1$

27. Indicar aquel polinomio que no es factor de
$Q(x,y) = x^3 + 2x^2y-4xy^2 - 8y^3 - x + 2y$

A) $x - 2y$ B) $x + 2y + 1$
C) $x - 1 + 2y$
D) $x + 2y$ E) $x^2-1+4y(x+y)$

28. Con respecto al polinomio
$P(z) = z^6 - 9z^4 + 16z^3 - 9z^2 + 1$, indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $z^2+4z + 1$
II. Un factor algebraico es $(z-1)^3$
III Tiene sólo 2 factores primos mónicos

A) VVV B) FVF C) VVF
D) VFV E) FFF

29. Siendo $b+1 \wedge a-1$ cuadrados perfectos. Factorizar
$M(x) = x^6 -(a+b+1)x^4 + (ab+2a-1)x^2 - a+b - ab + 1$
y señale aquel que no es factor de $M(x)$

A) $x + \sqrt{b+1}$ B) $x - \sqrt{a-1}$
C) $x - \sqrt{b-1}$
D) $x^2 - 1$ E) $x^2 + 1 -$ a

30. Luego de factorizar
$P(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$
Indique el valor de verdad o falsedad de cada una de las proposiciones:

I. Un factor primo es $x^3 + x + 1$
II. Un factor primo es $x^2 - x + 1$
III La suma de coeficientes de un factor primo mónico es 1

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FFF E) VFF

31. Señale aquel que no es factor
$P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2+ 41x+6$

A) $x+1$ B) $x-2$ C) $2x + 1$
D) $3x^2+7x+2$ E) $3x + 1$

32. Indicar un factor primo de
$P(a,b,c) = (ab)^5+(bc)^5+(ac)^5+ abc[a^5+b^5 +c^5+abc(a^2b^2c^2+1)]$

A) $a^3 + bc$ B) $b^4 + a$ C) $c^4 + ab$
D) $a^2 + bc$ E) $b^2 + ac$

33. Luego de factorizar
$S(x,y,z) = (3x+y-5z)^5+(2z-y-2x)^5+(3z-x)^5$

Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Un factor primo es $2x+y-2z$
II. La suma de 2 factores primos es $x-3z$
III. Un factor primo es $3x + y + 5z$

A) FFF B) VVF C) FFV
D) VFV E) VVV

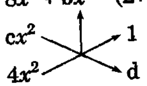
34. Indicar el valor de verdad con respecto al polinomio $P(x) = x(x-1)(x+2)(x-3)+8$

I. Tiene 2 ceros racionales
II. Tiene 3 factores primos mónicos
III. Tiene 2 factores cuadráticos

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVF

35. Luego de factorizar un polinomio $P(x)$ en los racionales por el criterio del aspa simple se obtuvo:

$$\mathbf{P(x) = 8x^a + bx^2 - (2+d)}$$

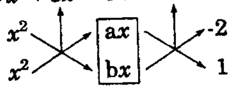


Determinar uno de sus factores primos.

A) $4x^2 - x + 3$ B) $2x^2 + 1$
C) $4x^2 + x - 1$
D) $2x^2 - 1$ E) $4x^2 + 1$

36. Luego de factorizar por aspa doble especial al polinomio $P(x)$ se obtiene el siguiente esquema

$$\mathbf{R(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx - 2}$$



Dar el valor de $a + b + m$; $a < b$

A) 5 B) -5 C) 6
D) 7 E) -6

37. Si los trinomios
$f(x) = x^2 + ax + 6 \quad \wedge \quad g(x) = x^2+bx+3$
admiten un factor común de la forma $2x+c$.
Hallar el valor de $ac-bc$.

A) 6 B) -6 C) 4
D) -4 E) 2

38. Sea el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 6x - 8$
Determinar el valor numérico de un factor primo cuando:

$$x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

39. Luego de factorizar
$S(a,b,c) = (2a^2 + ab + ac + bc)^2 + a^2(b\ \ c)^2$
Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Tiene 2 factores primos cuadráticos
II. Un factor primo es: $2a^2 - 2ab + b^2$
III. Tiene 2 factores primos lineales

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFV

40. Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones con respecto a este polinomio:
$P(x) = x^5 - 5x^4 - x^3 + 16x^2 - 11x + 2$

I. Un factor primo es cúbico de término independiente 2
II. $-5x$ es un término de un factor primo
III. $-3x$ es un término de un factor primo cuadrático

A) VVV B) VFF C) VVF
D) FVF E) FVV

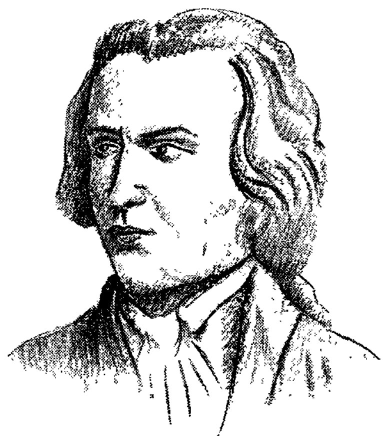
1	A	11	B	21	C	31	E
2	A	12	E	22	B	32	C
3	A	13	B	23	D	33	B
4	C	14	E	24	B	34	A
5	A	15	C	25	E	35	B
6	C	16	A	26	A	36	E
7	B	17	D	27	D	37	A
8	A	18	A	28	A	38	B
9	E	19	E	29	C	39	C
10	C	20	D	30	D	40	D

Claves

CAPÍTULO

VIII

M.C.D. M.C.M. fracciones



Leonardo Euler (1707-1783)

Matemático suizo, hizo estudios sobre el análisis matemático y mecánica racional. Escribió *La teoria nueva de la luna* y diversas obras sobre los planetas; se dedicó también a la física, la química y la metafísica.

En el campo de la matemática desarrolló la teoría de funciones $(1+x)^n$, e^x, $\log(1+x)$ dividiendo en funciones algebraicas, funciones trascendentes y funciones de una variable compleja. Fue invitado por su talento a integrar la Academia de Ciencias de Petersburgo. En 1741, se trasladó a Berlín por la intranquilidad de los movimientos políticos.

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \ldots;\ \text{si}\,|x| < 1$$

LECTURA

Cálculo de M.C.D. por divisiones sucesivas

Haciendo uso del algoritmo de Euclides ($D=dq+R$) se realiza el siguiente procedimiento para hallar el M.C.D. de dos números naturales a y b $(b>a)$

$$\text{I) } \begin{array}{r|l} b & a \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \quad \text{II) } \begin{array}{r|l} a & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \quad \text{III) } \begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ \hline r_3 & q_3 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \begin{array}{r|l} r_{n-2} & r_{n-1} \\ \hline r_n & q_n \end{array}$$

Hasta que $r_n=0 \rightarrow$ M.C.D. $\{a,b\} = r_{n-1}$

Ejemplo:

1. *Calcular el M.C.D. de 46 y 32*

$$\text{I) } \begin{array}{r|l} 46 & 32 \\ \hline 14 & 1 \end{array} \quad \text{II) } \begin{array}{r|l} 32 & 14 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \quad \text{III) } \begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \quad \text{IV) } \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array} \qquad \text{M.C.D. } \{46,32\}=2$$

2. *Halle el M.C.D. de los polinomios:*
   $P(x) = 16x^3 + 36x^2 - 12x - 18$; $Q(x) = 8x^2 - 2x - 3$

$$\text{I) } \begin{array}{r|l} 16x^3+36x^2-12x-18 & 8x^2-2x-3 \\ \hline \boxed{4x-3} & 2x+5 \end{array} \quad \text{II) } \begin{array}{r|l} 8x^2-2x-3 & 4x-3 \\ \hline \boxed{0 \quad 0} & 2x+1 \end{array}$$

$$\text{M.C.D. } (P,Q) = 4x - 3$$

3. *Hallar el M.C.D. de los polinomios:*
   $A(x) = 2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$
   $B(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$
   $C(x) = 6x^2a + 11ax + 4a$

   Hallamos el M.C.D. de A y B

$$\text{I) } \begin{array}{r|l} 2x^3-11x^2+10x+8 & 2x^3+x^2-8x-4 \\ \hline \boxed{-12x^2+18x+12} & 1 \end{array} \quad \text{II) } \begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-8x-4 & -12x^2+18x+12 \; \div(-6) \\ \hline \boxed{0 \quad 0} & -\frac{1}{6}(x+2) \end{array}$$

$$\text{M.C.D. } (A,B) = 2x^2 - 3x - 2$$

Hallemos el M.C.D. de C(x) y el M.C.D. (A,B)

$$\text{I) } \begin{array}{r|l} 6ax^2-11ax+4a & 2x^2-3x-2 \\ \hline \boxed{20ax+10a} \div 10a & 3a \end{array} \quad \text{II) } \begin{array}{r|l} 2x^2-3x-2 & 2x+1 \\ \hline \boxed{0 \quad 0} & x-2 \end{array}$$

$$\text{M.C.D. } (A,B) = 2x + 1$$

Fuente: Álgebra Superior - Bruño.

Máximo común divisor (M.C.D.) Mínimo común múltiplo (M.C.M.) Fracciones

OBJETIVO

* Conocer el significado y aplicaciones del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
* Efectuar operaciones con fracciones que permitan reducirlas para resolver ecuaciones e inecuaciones.

INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo veremos que el m.c.m. y M.C.D. son consecuencias de la teoría de múltiplos y divisores de magnitudes estudiadas en aritmética. Una de las aplicaciones técnicas del m.c.m. y M.C.D. es distribuir (encajar) una cantidad de objetos geométricos semejantes de una forma exacta en otro de mayor magnitud.

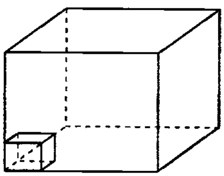


Figura (1)

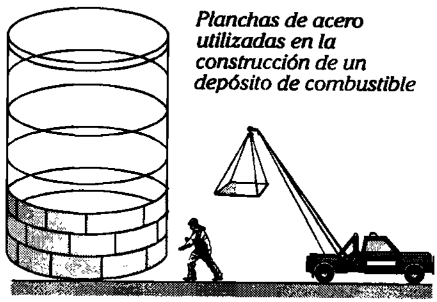


Figura (2)

Figura (1): en esta figura, para poder encontrar la cantidad de cajas pequeñas que entran en la caja grande se debe utilizar el concepto de m.c.m y M.C.D.

Figura (2): en esta figura, para calcular el número de planchas que se deben utilizar en la construcción de un depósito de dimensiones conocidas, es necesario utilizar el concepto de fracciones.

En álgebra, estos conceptos de m.c.m. y M.C.D. se generalizan a expresiones algebraicas y este será el estudio que se realiza en el presente capítulo.

CONCEPTOS BÁSICOS

FACTOR DE UN POLINOMIO. Dados dos polinomios de grados no nulos $P(x)$ y $Q(x)$, se dice que $Q(x)$ es un factor de $P(x)$ si y sólo si $P(x) \div Q(x)$ es exacta. En tal caso será posible expresarlo por:

$P(x) \equiv Q(x)\,.\,H(x)$; $H(x)$ es un polinomio no nulo

FACTOR COMÚN DE DOS O MÁS POLINOMIOS. Diremos que $M(x)$ será un factor común a dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ si existen otros polinomios $f(x)$ y $g(x)$ no nulos de tal manera que sea posible expresarlos por:

$$P(x) = M(x)\,.\,f(x) \qquad Q(x) = M(x)\,.\,g(x)$$

Ejemplo 1

$$P(x) = (2x-1)^2(x-3)^3(5x+2)$$
$$Q(x) = (x-2)(2x-1)(5x+2)^5$$

por lo tanto, sus factores comunes son:

$$(2x-1),\ (5x+2),\ (2x-1)(5x+2)$$

Ejemplo 2

$$P(x) = (x+2)^3(x-1)$$
$$Q(x) = (x+2)^2(x+3)$$

por lo tanto, sus factores comunes son:

$$(x+2),\ (x+2)^2$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Dados dos o más polinomios no constantes, llamaremos máximo común divisor al factor común de mayor grado.

Así: $P(x) = (2x+7)^4(x-1)^2(3x-1)$
$\quad\ \ Q(x) = (2x-1)^5(3x-1)^2(x-1)^2$

Los factores comunes son

$$3x-1,\ x-1,\ (3x-1)(x-1),\ (3x-1)(x-1)^2$$

de ellos el de mayor grado es $(3x-1)(x-1)^2$

$$\therefore\ \text{M.C.D.}(P,Q) = (3x-1)(x-1)^2$$

Ejemplo:

Si x^2-x-6 es el M.C.D. de los polinomios

> **NOTA:**
>
> Sea $S(x)$ el M.C.D. de $P(x)$ y $Q(x)$, entonces se tendrá que
>
> $$P(x) = S(x)\,.\,M(x)$$
> $$Q(x) = S(x)\,.\,N(x)$$
>
> Donde $M(x)$, $N(x)$ son polinomios que no poseen ningún factor común, llamados primos entre sí.

$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + Ax + B$ y

$Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + Mx + N$

Hallar $AN + BM$

Resolución:

Por definición, x^2-x-6 divide exactamente a los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente, luego

I. $P(x) \div (x^2-x-6)$

Por Horner

1	2	-3	1	A	B
1		2	12		
6			-1	-6	
				12	72
	2	-1	12	0	0

Entonces

$$A - 6 + 12 = 0 \Rightarrow A = -6$$
$$B + 72 = 0 \Rightarrow B = -72$$

II. Igualmente $Q(x) \div (x^2-x-6)$
Por Horner :

1	3	-7	0	M	N
1		3	18		
6			-4	-24	
				14	84
	3.	-4	14	0	0

De I y II se tiene que
$AN+BM = (-6)(-84)+(-72)(10) = -216$

MÚLTIPLO DE UN POLINOMIO
Sea el polinomio
$P(x) = (x+2)(x-5)$, los múltiplos de $P(x)$ son $(x+2)(x-5)$, $(x+2)^2(x-5)$, $(x+2)(x-5)x$ ...

POLINOMIO MÚLTIPLO COMÚN
El polinomio múltiplo común de dos o más polinomios es aquel polinomio que es divisible exactamente por éstos, en forma separada.
Así
Sean los polinomios $P(x) = (x+1)(x^2+3)$
$Q(x) = (x-1)(x+1)$
los polinomios múltiplos comunes de $P(x)$, $Q(x)$, son
$(x-1)(x+1)(x^2+3)$, $(x-1)^2(x+1)(x^2+3)$
$(x-1)(x+1)^2(x^2+3)^3$, ...

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

Dados dos o más polinomios, el m.c.m es el polinomio múltiplo común de menor grado.

Ejemplo:
Sean los polinomios
$P(x) = (2x-1)(4x+3)^3(x-1)^2$
$Q(x) = (3x+1)(x-1)(4x+3)^2$
Los múltiplos comunes de $P(x)$ y $Q(x)$ son
$(2x-1)(4x+3)^3(x-1)^2(3x+1)$,
$(2x-1)^2(4x+3)^3(x-1)^3(3x+1)$,
$\vdots$
pero el de menor grado es el mínimo común múltiplo.
$\therefore$ $m.c.m(P,Q) = (x-1)^2(4x+3)^3(2x-1)(3x+1)$

> **TEOREMA**
> Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se cumple que
> $P(x).Q(x) \equiv M.C.D.(P,Q)\ .\ m.c.m.(P,Q)$

Demostración:
Sean $P(x) = A(x) . B(x)$ .... (α)
$Q(x) = A(x) . C(x)$ .... (β)

donde $B(x)$ y $C(x)$ son primos entre sí.
$\Rightarrow$ M.C.D. (P,Q) = $A(x)$
$\Rightarrow$ m.c.m. (P,Q)=$A(x) . B(x) . C(x)$

De (α) × (β)
$P(x) . Q(x) \equiv A(x) . B(x) . A(x) . C(x)$
$$P(x) . Q(x) \equiv \underbrace{A(x)}_{M.C.D.(P,Q)} . \underbrace{B(x) . A(x) . C(x)}_{m.c.m.(P,Q)}$$
$\therefore$ $P(x) . Q(x) \equiv M.C.D.(P,Q) . m.c.m.(P,Q)$

Ejemplo 1
El m.c.m. de dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ es $x^3 - x^2 - 4x + 4$ y su M.C.D. es $x^2 + x - 2$. Hallar el número de factores primos de $A(x) . B(x)$
Resolución:
Por el teorema,
$A(x).B(x)$=M.C.D.(A,B) . m.c.m.(A,B)
$$= (x^3-x^2-4x+4)\,(x^2+x-2)$$
$$\begin{array}{cccc} x^2 & -4 & x & 2 \\ x & -1 & x & -1 \end{array}$$
$\equiv (x^2-4)(x-1)(x+2)(x-1)$
$\equiv (x+2)(x-2)(x-1)(x+2)(x-1)$
$\equiv (x+2)^2(x-1)^2(x-2)$

$\therefore$ $A(x) . B(x)$ tiene 3 factores primos.

Ejemplo 2

El producto de multiplicar dos polinomios en variable x es $(x^6+1)^2-4x^6$ y el cociente de dividir su m.c.m y M.C.D. de esos polinomios es $(x^2+1)^2-4x^2$. Hallar su M.C.D.

Resolución:

Sean A(x) y B(x) los polinomios, como

$$A(x)\cdot B(x)\equiv \text{M.C.D.}(x)\cdot \text{m.c.m.}(x)$$

$$\Rightarrow \text{M.C.D.(A,B)}\cdot\text{m.c.m.(A,B)}=(x^6+1)^2-4x^6 \ldots (\alpha)$$

También

$$\frac{\text{m.c.m.(A,B)}}{\text{M.C.D.(A,B)}}=(x^2+1)^2-4x^2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Como buscamos despejar M.C.D. :

(α) ÷ (β)

$$\frac{\text{M.C.D.(A,B)}\cdot\text{m.c.m. (A,B)}}{\dfrac{\text{m.c.m. (A.B)}}{\text{M.C.D.(A,B)}}}\equiv(\text{M.C.D.(A,B)})^2$$

$$\equiv\frac{(x^6+1)^2-4x^6}{(x^2+1)^2-4x^2}=\frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\equiv\left[\frac{\cancel{(x^2-1)}(x^4+x^2+1)}{\cancel{x^2-1}}\right]^2$$

de donde M.C.D.(A,B) $=x^4+x^2+1$

Ejemplo 3 *(Para el lector)*

Hallar el M.C.D. y m.c.m. de los polinomios:

a) $\begin{cases} A(x)=x^4+2x^2-3 \\ B(x)=x^4+x^3-x^2-x \\ C(x)=x^3-7x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} P(x)=x^3-6x^2+11x-6 \\ Q(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2 \end{cases}$

EXPRESIONES FRACCIONARIAS

Son aquellas expresiones algebraicas en las que ninguna variable se encuentra afectada por signo radical o por exponente fraccionario, debiendo al menos una variable presentarse en el denominador o estar afectada por exponente entero negativo.

Ejemplos:

$$P(x,y)=\frac{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{2}-4}$$

$$Q(x,y)=x^2+5xy+y^2$$

$$R(x)=\frac{x^6+x^2+1}{x^3+x+1}$$

$$S(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{4xyz}$$

$$T(x,y,z)=\frac{2x^2+3y^2+4z^4}{2z^4+3y^3+4x^2}$$

$$M(x,z)=\frac{8x^2+5z^2}{\dfrac{x-z}{8}+3xz}$$

FRACCIÓN

Una fracción algebraica se define como la división indicada de dos polinomios $N(x)$ y $D(x)$, siendo $D(x)$ polinomio no constante.

Denotado $\dfrac{N(x)}{D(x)}$

Donde

$N(x)$ polinomio numerador (no nulo)

$D(x)$ polinomio denominador (no constante)

Ejemplos:

a) $P(x,y) = \dfrac{x^2+x+4}{x-2}$ es fracción algebraica

b) $Q(x,y,z) = \dfrac{x+y+z+4}{y-x-z}$ es fracción algebraica

c) $P(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x-2}$ es fracción algebraica

d) $Q(x) = \dfrac{3\pi a^2 x^5}{203}$ no es fracción algebraica, pues no presenta variable en el denominador.

DOMINIO O CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES DE FRACCIONES ALGEBRAICAS (C.V.A.)

Se tiene la siguiente fracción algebraica:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

en variable x y sea m un número cualquiera, el valor numérico f(m) obtenido al sustituir m en $f(x)$ puede no tener sentido para algún valor de m.

Por ejemplo, si se sustituye x por 1.

$f(1) = \dfrac{1^2+3}{1-1}$, el cual carece de sentido; esto nos muestra que la variable x no puede tomar cualquier valor, sino que está restringido a un conjunto llamado ***dominio* o *conjunto de valores admisibles*** (C.V.A.).

En general, para el caso de una fracción en una variable:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

$$C.V.A.(F) = U - \{x \in U / D(x) = 0\}$$

Donde U = universo (conjunto referencial).

Ejemplos:

a) En $U = \mathbb{R}$ ← conjunto referencial

$$f(x) = \frac{x^2+5x+7}{(x+2)(x+1)}$$

La fracción está bien definida para todo número real que tome su variable "x", excepto -2 y -1, porque de tomar x tales valores, el denominador tomaría el valor de cero, para el cual no tiene sentido la fracción.

Entonces C.V.A. (f) $= \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

b) En $U = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$$

La fracción está bien definida para todo número real "x", pues x^2+4 nunca es cero.

Entonces C.V.A. (f) $= \mathbb{R}$

NOTA: Siempre debemos tener presente que debemos eliminar valores de la variable que anule al denominador.

Ahora debemos recordar:

OPERACIONES ENTRE NÚMEROS RACIONALES

Sea $\left\{\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right\} \subset \mathbb{Q}$

1. ***Adición***

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

2. *Multiplicación*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,.\,c}{b\,.\,d}$$

Además, para dividir fracciones podemos emplear la regla práctica que consiste en la división del producto de extremos entre producto de medios:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}\quad ;\ bcd\neq 0$$

De manera análoga, se realizan las operaciones entre fracciones algebraicas.

Sean las fracciones algebraicas

$$f_1(x)=\frac{N_1(x)}{D_1(x)}\quad ,\quad f_2(x)=\frac{N_2(x)}{D_2(x)}$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Adición y sustracción

$$\boxed{\frac{N_1(x)}{D_1(x)}\pm\frac{N_2(x)}{D_2(x)}=\frac{N_1(x)D_2(x)\pm N_2(x)D_1(x)}{D_1(x)\,.\,D_2(x)}}$$

C.V.A.$(f_1\pm f_2)=U-\{x/D_1(x)=0\vee D_2(x)=0\}$

Multiplicación

$$\boxed{\frac{N_1(x)}{D_1(x)}\cdot\frac{N_2(x)}{D_2(x)}=\frac{N_1(x)\,.\,N_2(x)}{D_1(x)\,.\,D_2(x)}}$$

C.V.A. $(f_1\,.\,f_2)=U-\{x\ /\ D_1(x)=0\vee D_2(x)=0\}$

División

$$\boxed{\frac{N_1(x)}{D_1(x)}\div\frac{N_2(x)}{D_2(x)}=\frac{N_1(x)\,.\,D_2(x)}{D_1(x)\,.\,N_2(x)}}$$

C.V.A.$(f_1\div f_2)=U-\{x/D_1(x)=0\vee D_2(x)=0\vee N_2(x)=0\}$

Ejemplos:

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}$

$$=\frac{(x+1)(x+1)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{2(x^2+1)}{x^2-1}\ ;\ \forall x\in U-\{1,-1\}$$

2. $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-1}{x^2-1}=1$$

$\forall x\in U-\{1,-1\}$

3. $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\div\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$

$$=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{x+2}{x-3}}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\ ;\ \forall x\in U-\{1,3,-2\}$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS REDUCTIBLES

Una fracción $f(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$ es reductible si $N(x)\wedge D(x)$ poseen factores comunes, en otro caso a la fracción se le llama irreductible. Cuando la fracción es reductible, se procede a la simplificación de factores comunes considerando como C.V.A. de la fracción reducida al C.V.A. de la fracción inicial.

Ejemplos:

I. La fracción en $\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{(x-5)(x-3)}\ ,\quad C.V.A.(f)=\mathbb{R}-\{3,5\}$$

Puede reducirse a

$$f(x)=\frac{x+2}{x-5}$$

donde su C.V.A. es el mismo que el inicial: C.V.A.$(f)=\mathbb{R}-\{3,5\}$

II. En $\mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)$$

$\Rightarrow$ C.V.A.(f) = $\mathbb{R}$ - {2, -2}

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4}$$

$\Rightarrow$ C.V.A.(f) = $\mathbb{R}$ - {2, -2}

$f(x) = 1$

$\Rightarrow$ C.V.A.(f) = $\mathbb{R}$ - {2, -2}

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Sea la fracción algebraica

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

podemos clasificarla como

a) Fracción propia

Si el grado del polinomio $N(x)$ es menor que el grado del polinomio $D(x)$.

b) Fracción impropia

Si el grado del polinomio $N(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $D(x)$.

Ejemplo 1

a) Son fracciones propias :

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^3+2}$$

$$f_2(x) = \frac{3x^4+6x+1}{3x^5+6x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2+3x}{x^4+5x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x^5}$$

b) Son fracciones impropias :

$$f_1(x) = \frac{x^2+2x+4}{x-3}$$

$$f_2(x) = \frac{3x^5+1}{x^2+2x-5}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}$$

También podemos clasificarlas por grupos como

a) Fracciones homogéneas

Un grupo de fracciones algebraicas son homogéneas si todas poseen igual polinomio denominador.

$$f_1(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f_2(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2}{x+1}$$, entonces :

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ son fracciones homogéneas.

b) Fracciones heterogéneas

Dos o más fracciones algebraicas son heterogéneas si al menos una de ellas posee distinto polinomio denominador.

Ejemplos:

$$f_1(x) = \frac{2}{x+3}$$

$$f_2(x) = \frac{5x}{x+3}$$

$$f_3(x) = \frac{6}{x+1}$$

Entonces

$f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ son fracciones heterogéneas.

TEOREMA

Si el valor numérico de

$$f(x,y)=\frac{a_1x+b_1xy+c_1y+d_1}{a_2x+b_2xy+c_2y+d_2}\ ;$$

$$a_2\neq 0,\ b_2\neq 0,\ c_2\neq 0,\ d_2\neq 0$$

para todo x e y que pertenecen al conjunto de valores admisibles de la fracción es siempre un valor constante k ; $k\neq 0$

Entonces se cumple

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}=k$$

Demostración

$$\frac{a_1x+b_1xy+c_1y+d_1}{a_2x+b_2xy+c_2y+d_2}=k$$

Entonces

$$a_1x+b_1xy+c_1y+d_1\equiv k(a_2x+b_2xy+c_2y+d_2)$$

$$\mathbf{a_1x+b_1xy+c_1y+d_1=ka_2x+kb_2xy+kc_2y+kd_2}$$

$$a_1=ka_2\rightarrow\frac{a_1}{a_2}=k\ ;\qquad a_2\neq 0$$

$$b_1=kb_2\rightarrow\frac{b_1}{b_2}=k\ ;\qquad b_2\neq 0$$

$$c_1=kc_2\rightarrow\frac{c_1}{c_2}=k\ ;\qquad c_2\neq 0$$

$$d_1=kd_2\rightarrow\frac{d_1}{d_2}=k\ ;\qquad d_2\neq 0$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}=k$$

Ejemplo:

Si la fracción

$$f(x,y)=\frac{(P-2)x+(2P+3q-1)y+3q}{8x-4y+7}$$

toma un valor constante distinto de cero para todos los valores de x e y que pertenecen al C.V.A. de la fracción, entonces determinar este valor.

Resolución:

Haremos uso del teorema anterior

$$f(x,y)=k\quad ;\quad k\neq 0$$

Entonces

$$\frac{P-2}{8}=\frac{2P+3q-1}{-4}=\frac{3q}{7}=k$$

De donde resulta que

$$P=\frac{10}{9}\ \wedge\ q=\frac{-7}{27}$$

Por lo que $\quad k=\dfrac{-1}{9}$

DESCOMPOSICIÓN DE UNA FRACCIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Hemos visto la adición de fracciones, por ejemplo

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$$

que es de suma importancia saberla aplicar. Ahora aprenderemos el proceso inverso, es decir, expresar una fracción como la adición indicada de fracciones simples.

CASO I

Para fracciones propias

Sea $F(x)$ una fracción propia irreductible, de no ser así tenemos que reducirla :

$$F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$$

Ahora debemos factorizar el polinomio denominador $D(x)$

a. Si en su factorización se observa que $(ax+b)$ es factor y $(ax+b)^2$ no es factor, por cada uno de éstos se genera como sumando a la fracción:

$$\frac{A}{ax+b}\ ;\ \{A,a,b\}\subset\mathbb{R}\ \wedge\ a\neq 0$$

Ejemplo 1

Descomponer en fracciones parciales a

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+2}$$

Resolución:

Se observa que es una fracción propia irreductible, entonces, factorizando el denominador $(x+1)(x+2)$

Donde $\quad x+1 \rightarrow$ genera $\dfrac{A}{x+1}$

$\quad x+2 \rightarrow$ genera $\dfrac{B}{x+2}$

Por consiguiente

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Luego tenemos

$$\underline{3x} + \underline{4} \equiv \underline{(A+B)}x + \underline{2A+B}$$

De donde $\quad A + B = 3$

$\quad 2A + B = 4$

Resolviendo $\quad A = 1 \wedge B = 2$

Entonces

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

Ejemplo 2

Descomponer en fracciones parciales

$$f(x) = \frac{4x^2+11x+3}{x^3+2x^2-x-2}$$

Resolución:

Como es propia e irreductible, factorizamos el denominador $(x+1)(x-1)(x+2)$

Donde

$(x+1) \rightarrow$ genera $\dfrac{A}{x+1}$

$(x-1) \rightarrow$ genera $\dfrac{B}{x-1}$

$(x+2) \rightarrow$ genera $\dfrac{C}{x+2}$

Entonces

$$f(x) = \frac{4x^2+11x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 11x + 3 \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1) \;;$$

Por identidad de polinomios

Si $\quad x=1 \;: 18=6B \rightarrow B=3$

$\quad x=-1 : -4=-2A \rightarrow A=2$

$\quad x=-2 : -3=3C \rightarrow C=-1$

Finalmente tenemos

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

b. Por cada factor de la forma $(ax+b)^n \wedge a \neq 0$ tal que $(ax+b)^{n+1}$ no es factor del denominador, se genera la adición indicada de fracciones de la forma

$$\boxed{\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{M}{(ax+b)^n}}$$

Ejemplo:

Expresar la fracción algebraica en la suma de fracciones parciales.

$$f(x) = \frac{2x^3-9x^2+10x-9}{(x-1)^3(x+2)}$$

Observamos que en el denominador $(x-1)^3$ es factor, y $(x-1)^4$ no lo es, entonces, $(x-1)^3$ genera

$$\boxed{\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}}$$

Además $(x+2)$ también es factor

$(x+2) \rightarrow$ genera $\boxed{\dfrac{D}{x+2}}$

Luego tenemos

$$f(x)=\frac{2x^3-9x^2+10x-9}{(x-1)^3(x+2)}$$

$$\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+2}$$

$$\equiv\frac{A(x-1)^2(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x+2)+D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)}$$

De donde debemos encontrar los valores de A, B, C, D, además los polinomios en los numeradores deben ser idénticos

$$2x^3-9x^2+10x-9\equiv A(x-1)^2(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x+2)+D(x-1)^3$$

Por lo tanto

Asignando valores convenientes a x

$x=1 \rightarrow -2=C$

$x=-2\rightarrow 3=D$

$x=0 \rightarrow -9=A(2)+B(-2)+C(2)+D(-1)$

$\Rightarrow B \quad A=1$

$x=-1\rightarrow -30=4A-2B-26 \Rightarrow B-2A=2$

De donde $A=-1 \wedge B=0$

$$\therefore\ f(x)=\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{3}{x+2}$$

c. A cada factor de la forma

$(ax^2+bx+c)^n$; ax^2+bx+c irreductible $\wedge$ $a\neq 0$ $\wedge$ $(ax^2+bx+c)^{n+1}$ no es factor; se genera la adición indicada de fracciones de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^3}+\dots+\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ejemplo 1

Descomponer en la adición indicada de fracciones parciales.

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

Donde

$(x^2+2x+2)^2$

genera $\dfrac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$

Entonces

$$f(x)=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Entonces los polinomios numeradores deben ser idénticos:

$$x^3+4x^2+3x+2\equiv Ax^3+(2A+B)x^2+(2A+2B+C)x+2B+D$$

De donde $A=1$, $B=2$, $C=-3$, $D=-2$

Por lo que puede expresarse

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

Ejemplo 2

Descomponer en la adición indicada de fracciones parciales

$$f(x)=\frac{2x^2+8x-8}{(x+2)(x^2+4)}$$

Donde $x+2\rightarrow$ genera $\dfrac{A}{x+2}$

$x^2+4\rightarrow$ genera $\dfrac{Bx+C}{x^2+4}$

Entonces

$$f(x)=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$f(x)=\frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+2C+4A}{(x+2)(x^2+4)}$$

Entonces los polinomios numeradores deben ser idénticos.

$$2x^2+8x-8\equiv(A+B)x^2+(2B+C)x+2C+4A$$

De donde $2=A+B$

$8=2B+C$

$-8=2C+4A$

obteniendo $A=-2$, $B=4$, $C=0$

Por lo que puede expresarse

$$f(x)=\frac{-2}{x+2}+\frac{4x}{x^2+4}$$

Ejemplo 3
Descomponer en la adición indicada de fracciones parciales

$$f(x) = \frac{x^5 - 3x^3}{(x^3 + x)^2}$$

Recordar que la fracción debe ser irreductible, de lo contrario, hay que reducir.
Reduciendo tenemos

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 1)^2}$$

Donde $(x^2+1)^2$ genera: $\dfrac{Ax + B}{x^2 + 1} + \dfrac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$

Luego:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Como los polinomios numeradores son idénticos entonces

$$x^3 - 3x \equiv (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D$$

De donde se obtiene

$$A = 1, B = 0, C = -4, D = 0$$

Por lo tanto $f(x) = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^2} + \dfrac{x}{x^2 + 1}$

d. De obtener factores en el denominador de la forma: $(ax^3+bx^2+cx+d)^n$
ax^3+bx^2+cx+d es no reductible, se genera

$$\boxed{\frac{Ax^2 + Bx + C}{ax^3 + bx^2 + cx + d} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)^2} + \ldots + \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(ax^3 + bx^2 + cx + d)^n}}$$

CASO II
Para fracciones impropias

Sea $F(x)$ una fracción impropia, $F(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

en este caso debemos efectuar la división

$$\boxed{F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = q(x) + \underbrace{\frac{R(x)}{D(x)}}_{\text{fracción propia}}}$$

En el segundo miembro tenemos una fracción propia que debemos transformarla en la adición indicada de fracciones parciales.

Ejemplo
Descomponer en la adición de fracciones parciales.

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

Resolución:
Observamos que la fracción es impropia, entonces debemos efectuar la división pues el grado del numerador es mayor que grado del denominador.

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{x^4 - 3}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$\equiv x + 1 - \underbrace{\frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}}_{\text{fracción propia}}$$

Nota: $x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

Descomponiendo la fracción propia irreductible:

$$\frac{-2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\frac{-2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A(x^2 + 1) + (x - 1)(Bx + C)}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

$$\rightarrow -2 \equiv A(x^2 + 1) + (x - 1)(Bx + C)$$

Asignando valores convenientes a "x":

$x = 1$; $-2 = 2A \rightarrow A = -1$
$x = 0$; $-2 = A - C \rightarrow C = 1$
$x = -1$; $-2 = 2A - 2(-B+C) \rightarrow B = 1$

Entonces

$$\frac{-2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

La fracción impropia

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)} = x + 1 - \frac{1}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar el M.C.D. de los polinomios

$Q(a,b) = ab(ab+a+b+2) + a + b + 1$

$R(a,b) = ab[a(a+1)+b(a+1)+1] + a^2+a+b$

$S(a,b) = [a^2b-a+ a^2-b+ab^2-b^2](a+1)$

Resolución:

Factorizando cada uno de los polinomios

$$Q(a,b) = ab(ab + a + b + 2) + a + b + 1$$

$$= \underline{(ab)^2} + \underline{\underline{ab(a + b)}} + \underline{2ab} + \underline{\underline{a + b}} + \underline{1}$$

Agrupando como se indica

$$Q(a,b) = (ab + 1)^2 + (a + b)(ab + 1)$$
$$= (ab + 1)(\underline{\underline{ab}}+1+\underline{\underline{a}}+b)$$
$$= (ab+1)\{(b+1)a + (b+1)\}$$

$\Rightarrow Q(a,b) = (ab+1)(b+1)(a+1)$

Efectuando

$$R(a,b) = ab[a(a + 1) + b(a + 1) + 1] + a^2 + a + b$$

$R(a,b) = a^2b(a+1) + ab^2(a+1)+ \underline{ab}+\underline{\underline{a^2}}+ \underline{\underline{a}} + \underline{b}$

$R(a,b) = (a+1)\ [\underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}}]$

$R(a,b) = (a+1)(a+b)(ab+1)$

Análogamente factorizamos S(a,b)

$$S(a,b) = (a+b)(b+1)(a-1)(a+1)$$

Observando los tres polinomios, su M.C.D. es

$$(a+1)$$

Problema 2

Señalar el m.c.m. de los polinomios del problema (1)

Resolución:

Observando los polinomios, el m.c.m. es

$$(ab+1)(b+1)(a+1)(a+b)(a-1)$$

Problema 3

Si el M.C.D. de los polinomios

$A(x) = x^3+4x^2+ ax + b \quad \wedge$

$B(x)=x^3+cx+d \quad$ es $\quad (x-1)(x+3)$

Halle su m.c.m.

Resolución:

Por definición el M.C.D. es un factor de los polinomios, luego por Horner

$$A(x) \div \text{M.C.D.} \quad y \quad B(x) \div \text{M.C.D.}$$

1	1	4	a	b
-2		-2	3	
3			-4	6
	1	2	0	0

1	1	0	c	d
-2		-2	34	-6
3				
	1	-2	0	0

$\Rightarrow A(x) = (x-1)(x+3)(x+2) \quad \wedge$

$B(x) = (x-1)(x+3)(x-2)$

$\therefore\ m.c.m._{(A,B)} = (x-1)(x+3)(x+2)(x-2)$

Problema 4

Sean los polinomios

$P(x) = x^4 + mx - 9x^2+n$ y otro $Q(x)$ cuyo M.C.D. (P,Q) es $x^2-5x + 6$

Calcular $\dfrac{m}{n}$

Resolución:

Como el M.C.D. es un factor común a $P(x)$ y $Q(x)$ $\Rightarrow P(x) \div (x^2 - 5x + 6)$ es exacta, esto implica que:

$$P(2) = 0 \quad \wedge \quad P(3) = 0$$

Luego

$P(2) = 2^4 + 2m - 9 \cdot 2^2 + n = 0$

$\Rightarrow 2m + n = 20 \ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$

$P(3) = 3^4 + 3m - 9 \cdot 3^2 + n = 0$

$\Rightarrow 3m + n = 0 \ldots\ldots\ldots\ (\beta)$

De (α) y (β) $\quad m = -20 \ , \ n = 60$

$$\therefore \ \frac{m}{n} = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3}$$

Problema 5

Se sabe que el producto de multiplicar el M.C.D. y m.c.m. de dos polinomios en x es (x^5-x^3) y además, la suma de dichos polinomios es (x^3+x^2-1). Hallar el residuo de dividir el m.c.m. de aquellos polinomios entre x^2+2

Resolución:

Sean los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

Por propiedad

$$P(x)\,.\,Q(x) \equiv \text{M.C.D.}(P,Q)\ .\ \text{m.c.m.}\,(P,Q)$$

$$\Rightarrow P(x)\,.\,Q(x) = x^5 - x^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

Dato $P(x) + Q(x) = x^3 + x^2 - 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\beta)$

De (α) y (β)

$$P(x)\,.\,Q(x) = x^3\,(x^2-1)$$

$$P(x) = x^3 \quad , \quad Q(x) = x^2 - 1$$

como $P(x)$ y $Q(x)$ son primos

Entonces $\ \text{m.c.m.}\,(P,Q) = x^3(x^2-1)$

Para hallar el resto de m.c.m.

$(P,Q) \div (x^2+2)$

Por teorema del resto $\quad x^2+2 = 0 \rightarrow x^2 = -2$

Reemplazando tenemos:

$$R(x) = -2x(-2-1) = 6x$$

$$\therefore \ R(x) = 6x$$

Problema 6

¿Cuántos factores racionales irreductibles admite el cociente que se obtiene de dividir el m.c.m. entre el M.C.D. de los polinomios?

$$M(x,y) = (xy+1)^4 + (x^2y^2-1)^2 + (xy-1)^4$$

$$N(x,y) = (xy+1)^6 - (xy-1)^4$$

Resolución:

Haciendo un cambio de variable

$xy + 1 = m \ \wedge \ xy - 1 = n$

$$M(m,n) = m^4 + m^2n^2 + n^4$$
$$= (m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$$

$$N(m,n) = m^6 - n^6$$
$$= (m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$$
$$= (m+n)(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$$

Luego: $\ \text{M.C.D.}(M,N) = m^4 + m^2n^2 + n^4$

$\text{m.c.m.}(M,N) = (m^2-n^2)(m^4+m^2n^2+n^4)$

De donde:

$$\frac{\text{m.c.m.}\,(M,N)}{\text{M.C.D.}\,(M,N)} = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

Reemplazando **m** y **n** se tiene

$$\frac{\text{m.c.m.}\,(x,y)}{\text{M.C.D.}\,(x,y)} = (xy+1+xy-1)(xy+1-xy+1)$$

$$= 4xy$$

Por lo tanto tendrá 2 factores primos.

Problema 7

¿Cuál será aquel polinomio que con $P(x) = (x^2-9)^2(x+2)$ tenga como M.C.D x^2+5x+6; además: $\sqrt{\text{m.c.m.}} = x^4 - 13x^2+36$?

Resolución:

Sea $Q(x)$ el polinomio, sabemos que

$$P(x)\,.\,Q(x) \equiv \text{M.C.D.}(P,Q)\,.\,\text{m.c.m.}(P,Q)$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{\text{M.C.D.}\,(P,Q)\,.\,\text{m.c.m.}\,(P,Q)}{P(x)}$$

Por dato

$$Q(x) = \frac{(x^2+5x+6)(x^4-13x^2+36)^2}{(x^2-9)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{(x+2)(x+3)(x^2-9)^2(x^2-4)^2}{(x^2-9)^2(x+2)}$$

$$\therefore \ Q(x) = (x+3)(x^2-4)^2$$

Problema 8

Hallar el valor numérico del M.C.D. de los polinomios

$$F(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 + x + 1$$
$$P(x) = 2x^4 + 7x^2 + 9x^2 + 7x + 2$$

Para $x = \sqrt{2}+1$

Resolución:

Factorizando los polinomios

$$F(x) = x^6 + x^5 + x^5 + x^4 + x + 1$$
$$= x(x^5 + x^4 + 1) + (x^5 + x^4 + 1)$$
$$= (x^5 + x^4 + 1)(x + 1)$$

Pero $x^5+x^4+1 \equiv (x^2+x+1)(x^3-x+1)$

$\Rightarrow F(x) = (x+1)(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

Análogamente factorizamos $P(x)$

$$P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 \quad \text{SDT: } 9x^2$$
$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{x} & 1 \\ 2x^2 & \boxed{5x} & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ST: } 4x^2 \\ \text{Falta: } 5x^2 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(2x^2 + 5x + 2)$$
$$\begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & 2 \end{array}$$

$$P(x) = (2x+1)(x+2)(x^2+x+1)$$

De donde M.C.D.(F,P) $= x^2 + x + 1$

$\Rightarrow$ M.C.D.$(F,P)_{(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2 + \sqrt{2} + 1 + 1$

$$= 3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2$$
$$= 5 + 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ M.C.D.$(F,P)_{(\sqrt{2}+1)} = 5 + 3\sqrt{2}$

Problema 9

Simplificar

$$H(x) = \frac{x^5 + x^4 + x^3 - x + 2}{x^5 + x^3 + x^2 - 2x + 2}$$

y dar la suma del numerador y el denominador.

Resolución:

Factorizando el numerador

$$x^5 + x^4 + x^3 - x + 2$$
$$\equiv \boxed{x^5 + x^4 + 1} + x^3 - x + 1$$
$$\equiv (x^2 + x + 1)\underline{(x^3 - x + 1)} + \underline{x^3 - x + 1}$$
$$\equiv (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 2)$$

Factorizando el denominador

$$x^5 + x^3 + x^2 - 2x + 2 \equiv x(x^4 + x^2 - 2) + x^2 + 2$$
$$\begin{array}{cc} x^2 & 2 \\ x^2 & -1 \end{array}$$
$$\equiv x(x^2+2)(x^2-1) + x^2 + 2$$
$$\equiv (x^3 - x + 1)(x^2 + 2)$$

Reemplazando

$$H(x) = \frac{(x^3 - x + 1)(x^2 + x + 2)}{(x^2 + 2)(x^3 - x + 1)} \equiv \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2}$$

Sumando numerador y denominador se tiene

$$(x^2 + x + 2) + (x^2 + 2) \equiv 2x^2 + x + 4$$

Problema 10

Simplificar

$$\left[\left(\frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a + b - ab - b^2}\right)\left(\frac{a^2 + 3ab + 2b^2}{a + ab - b - b^2}\right)\right] \div \frac{a^2 - 4b^2}{(1-b)^2}$$

Resolución :

Factorizando

$$\left[\left(\frac{(a-b)(a-2b)}{(a-b)-b(a+b)}\right)\left(\frac{(a-b)(a+2b)}{a(1+b)-b(1+b)}\right)\right] \div \frac{(a+2b)(a-2b)}{(1-b)^2}$$

$$\left[\frac{(a-b)(a-2b)(a+b)(a+2b)}{(a+b)(1-b)(1+b)(a-b)}\right] \div \frac{(a+2b)(a-2b)}{(1-b)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(a-2b)}\cancel{(a+2b)}}{\cancel{(1-b)}(1+b)} \cdot \frac{\cancel{(1-b)^2}}{\cancel{(a+2b)}\cancel{(a-2b)}}$$

$$= \frac{1-b}{1+b}$$

Problema 11

Si

$$A=\left(\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}}\right)\left[\left(\frac{x^2+1}{2a^2+2b}\right)\div\frac{2x}{a^2+b}\right]$$

$$B=\frac{x-1}{(x+2)-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}$$

Hallar A + B

Resolución:

Efectuando

$$A=\left(\frac{\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\cancel{(x-1)(x+1)}}}{\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{\cancel{(x-1)(x+1)}}}\right)\left[\frac{x^2+1}{2(\cancel{a^2+b})}\div\frac{2x}{\cancel{a^2+b}}\right]$$

Usando las identidades de Legendre

$$\frac{4x}{2(x^2+1)}\cdot\frac{x^2+1}{2(2x)}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}$$

$$B=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\boxed{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}}\;\ldots\ldots(*)$$

$$(*)\quad x-\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2+x-x+2}{x+1}=\frac{x^2+2}{x+1}$$

Luego

$$B=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x^2+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-x-1}=x-1$$

$$A+B=\frac{1}{2}+x-1=x-\frac{1}{2}$$

Problema 12

Reducir

$$\frac{1-\dfrac{4xy}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(1-\dfrac{2y}{2x+y}\right)}$$

Resolución

$$\frac{\dfrac{4x^2+2xy+y^2-4xy}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(\dfrac{2x+y-2y}{2x+y}\right)}=\frac{\dfrac{4x^2-2xy+y^2}{4x^2+2xy+y^2}}{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\left(\dfrac{2x-y}{2x-y}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)}}{\left(\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\right)}=\frac{\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}}{\left(\dfrac{8x^3+y^3}{8x^3-y^3}\right)}=1$$

Problema 13

Reducir

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}$$

Resolución:

$$\frac{(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-a)(x-c)+(a-b)(x-b)(x-a)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

efectuando en el numerador

$$(b-c)[x^2-(b+c)x+bc]+(c-a)[x^2-(a+c)x+ac]+(a-b)[x^2-(a+b)x+ab]$$

agrupando x^2, x, e independientes

$$x^2(\cancel{b}-\cancel{c}+\cancel{c}-\cancel{a}+\cancel{a}-\cancel{b})-x[\cancel{(b-c)(b+c)}+\cancel{(c-a)(a+c)}+\cancel{(a-b)(a+b)}]+bc(b-c)+$$

$$ac(c-a)+ab(a-b)$$

$$= -x\,[b^2 - \cancel{c^2} + \cancel{c^2} - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} - \cancel{b^2}] + bc(b-c)$$

$$+ \; ac^2 - a^2c + a^2b - ab^2$$

$$= bc(b-c) - a(b^2-c^2) + a^2(b-c)$$

$$= (b-c)(bc - ab - ac + a^2)$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

Reemplazando el numerador se tiene

$$\frac{(b-c)\cancel{(a-b)}\cancel{(a-c)}}{\cancel{(a-b)}(a-c)(b-c)} = 1$$

Problema 14

Si la fracción

$$\frac{(a-3)x + (2a-5b+3)y + (5b-2)}{3x - 5y + 3}$$

adopta un valor constante para cualquier valor de x e y. Hallar el valor de la constante.

Resolución:

Si es independiente de las variables se cumplirá

$$\frac{a-3}{3} = \frac{2a-5b+3}{-5} = \frac{5b-2}{3} = K$$

2

1

De (1)

$a - 3 = 5b - 2 \Rightarrow a = 5b + 1$ ..... (α)

De (2)

$$3(2a - 5b + 3) = -5(5b - 2)$$

$$6a - 15b + 9 = -25b + 10$$

$10b + 6a = 1$ . . (β)

De (α) y (β)

$$10b + 6a = a - 5b$$

$$\Rightarrow 15b + 5a = 0$$

$$\therefore\; a = -3b$$

en (1)

$$-3b = 5b + 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{8}$$

Entonces

$$k = \frac{5\left(-\dfrac{1}{8}\right) - 2}{3} = \frac{\dfrac{-21}{8}}{3}$$

$$\therefore\; k = -\frac{7}{8}$$

Problema 15

La fracción $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$

se obtuvo sumando las fracciones:

$$\frac{A}{1-3x}\,,\quad \frac{B}{1-2x}$$

calcular los valores de A y B respectivamente.

Resolución:

$$\frac{7x-1}{1-5x+6x^2} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-2x}$$

$$= \frac{A(1-2x) + B(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)}$$

$$\Rightarrow 7x - 1 \equiv A(1-2x) + B(1-3x)$$

$$7x - 1 \equiv (-2A - 3B)x + A + B$$

De donde $2A + 3B = -7$ .... (α)

$A + B = -1$ .... (β)

(α) - 2(β) : $B = -5$

en (β) $A - 5 = -1 \Rightarrow A = 4$

$$\therefore\; A = 4 \;\text{ y }\; B = -5$$

Problema 16

Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$$

Resolución:

La fracción será posible escribir como

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Buscando A, B, C

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}\equiv\frac{A(x+2)^2+B(x+2)(x-1)+C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

$9\equiv x^2(A+B)+x(4A+B+C)+4A-2B-C$

de donde

$$A+B=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$
$$4A+B+C=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$
$$4A-2B-C=9 \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

(2) + (3) $8A-B=9 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$

(α) + (1) $8-B=9 \Rightarrow A=1$

en (α) $8-B=9 \Rightarrow B=-1$

en (2) $4-1+C=0 \Rightarrow C=-3$

luego

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$$

Problema 17

Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}$$

Resolución:

La fracción se descompondrá así

$$\frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2x^3+x^2+2x-1\equiv A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-1)$$

Por identidad

Si $x=1 \Rightarrow 2+1+2-1=A(2)(2)+0+0$

$\Rightarrow A=1$

Si $x=-1 \Rightarrow -2+1-2-1=0+B(-2)(2)+0$

$\Rightarrow B=1$

Si $x^2=-1$

$\Rightarrow 2x(-1)-1+2x-1=0+0+(Cx+D)((-1)-1)$

$-2=-2cx-2d$

Luego $c=0$, $d=1$

$$\therefore\ \frac{2x^3+x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+1}$$

Problema 18

Descomponer en fracciones parciales

$$f(x)=\frac{10x^4-4x^3+15x^2-24x-46}{10x^3-4x^2+25x-10}$$

Resolución:

Como la fracción es impropia, descomponiendo se tendrá

$$\frac{10x^4-4x^3+25x^2-10x}{10x^3-4x^2+25x-10}-\frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}$$

$$=x-\boxed{\frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}}$$

Fracción Propia

Pero $10x^3-4x^2+25x-10\equiv(2x^2+5)(5x-2)$

$$\Rightarrow\ \frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+325x-10}=\frac{A}{5x-2}+\frac{Bx+C}{2x^2+5}$$

luego

$$10x^2+14x+46\equiv A(2x^2+5)+(5x-2)(Bx+C)$$
$$\equiv(2A+5B)x^2+(5C-2B)x+5A-2C$$

Por lo tanto $2A+5B=10$

$5C-2B=14$

$5A-2C=46$

De donde $A=10$, $B=-2$, $C=2$

$$\Rightarrow\ \frac{10x^2+14x+46}{10x^3-4x^2+25x-10}\equiv\frac{10}{5x-2}+\frac{-2x+2}{2x^2+5}$$

$$\therefore\ f(x)=x-\frac{10}{5x-2}+\frac{2x-2}{2x^2+5}$$

Problema 19

Descomponer en fracciones parciales

$$g(x)=\frac{x^3+2x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

Resolución:

Por ser una fracción impropia se tendrá

$$\frac{x^3+2x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{x^3+x^2-2}{x^3+x^2-2}-\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}$$

$$=1-\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}$$

Luego

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3+x^2-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

De donde

$$x^2-2x-1\equiv A(x^2+2x+2)+(x-1)(Bx+C)$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1\equiv (A+B)x^2+(2A+C-B)x+2A-C$$

Por lo tanto

$$A+B=1$$
$$2A+C-B=-2$$
$$2A-C=-1$$

Entonces $A=-\frac{2}{5}$, $B=\frac{7}{5}$, $C=\frac{1}{5}$

Además

$$\frac{x^3+2x-1}{(x-1)(x^2+2x+2)}=1-\left\{\frac{-\frac{2}{5}}{x-1}+\frac{\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+2x+2}\right\}$$

$$\therefore\ g(x)=1+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{7x+1}{x^2+2x+2}\right)$$

Problema 20

Simplificar la fracción

$$f(x)=\frac{\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)^2-\left(\frac{x+2a}{x+a}\right)-2}{\frac{x+2a}{x+a}-2}\quad ;\quad x\neq -a$$

Resolución:

Haciendo $\quad\frac{x+2a}{x+a}=y$

se tendrá

$$\frac{y^2-y-2}{y-2}=\frac{(y-2)(y+1)}{(y-2)}=y+1$$

reponiendo y

$$f(x)=\frac{x+2a}{x+a}+1=\frac{x+2a+x+a}{x+a}=\frac{2x+3a}{x+a}$$

Problema 21

Simplificar

$$f(x,y)=\frac{\frac{x^2}{y^4}-\frac{y^2}{x^4}}{\frac{(x^2+y^2)^2-x^2y^2}{x^2y^2}}\quad ;\quad xy\neq 0$$

Resolución:

Efectuando

$$\frac{\frac{x^6-y^6}{x^4y^4}}{\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}=\frac{(x^6-y^6)x^2y^2}{x^4y^4(x^4+x^2y^2+y^4)}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)x^2y^2}{(x^2y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)}=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$$

$$\therefore\ f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$$

Problema 22

Simplificar y expresarlo en fracciones parciales

$$f(x)=\frac{(x-1)^2(2x+3)-(x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)^4}\quad ;\quad xy\neq 0$$

Resolución:

Efectuando

$$f(x)=\frac{(x-1)^2(2x+3)-(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{x+5}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)^2}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}$$

Problema 23

Luego de simplificar

$$f(x) = \frac{2x^5 + x^4 + 7x^2 - 3}{x^4 + 3x - 2}$$

señale la suma de los términos lineales del numerador y del denominador.

Resolución:

Factorizando el denominador:

$$x^4+3x-2 \equiv x^4+0x^3+0x^2+3x-2$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{-x} & 2 \\ x^2 & \boxed{x} & -1 \\ & -x^2 & \end{array}$$

$$= (x^2-x+2)(x^2+x-1)$$

Factorizando el numerador

$$2x^5 + x^4 + 7x^2 - 3 = (x^2+x-1)(2x^3 \cdot x^2+3x+3)$$

Luego

$$f(x) = \frac{\cancel{(x^2 + x - 1)}(2x^3 - x^2 + 3x + 3)}{(x^2 - x + 2)\cancel{(x^2 + x - 1)}}$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 3}{x^2 - x + 2}$$

$\therefore$ Suma de términos lineales $3x - x = 2x$

Problema 24

Simplificar la fracción

$$\frac{x^3 - nx^2 + 19x^2 - n - 4}{x^3 - (n+1)x^2 + 23x - n - 7}$$

sabiendo que es reductible y dar como respuesta la suma del numerador y denominador.

Resolución:

Se deben factorizar el numerador y el denominador por divisores binómicos; los posibles ceros racionales son los divisores de n+4 y n+7; así, si x toma el valor de 1 se tiene

$$N: 1-n+19-n-4 = 0 \Rightarrow n = 8$$

$$D: 1-n-1+23-n-7 = 0 \Rightarrow n = 8$$

Luego

Numerador

	1	-8	19	-12
$x=1$	↓	-1	7	12
	1	-7	12	0
	x		-3	
	x		-4	

Denominador

	1	-9	23	-15
$x=1$	↓	1	-8	15
	1	-8	15	0
	x		-3	
	x		-4	

Luego la fracción es

$$\frac{\cancel{(x-1)(x-3)}(x-4)}{\cancel{(x-1)(x-3)}(x-5)} = \frac{x-4}{x-5}$$

Sumando numerador y denominador se tendrá

$$(x-4)+(x-5) = 2x-9$$

Problema 25

Hallar la suma

$$S = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{1}{x^2+(2k-1)x+k^2-k}$$

Resolución:

La expresión es equivalente a

$$S = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$$

$$=\frac{1}{x}-\cancel{\frac{1}{x+1}}+\cancel{\frac{1}{x+1}}-\cancel{\frac{1}{x+2}}+\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+3}}+\ldots$$

$$\ldots+\cancel{\frac{1}{x+k-1}}-\frac{1}{x+k}$$

$$\Rightarrow\ S=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+k}=\frac{(x+k)-x}{x(x+k)}=\frac{k}{x(x+k)}$$

$$\therefore\ S=\frac{k}{x(x+k)}$$

Problema 26

Qué valor toma $\frac{n^2}{mq}$ para que $f(x)=\frac{mx^2+q}{nx-q}$ sea igual a la unidad, además x toma un solo valor.

Resolución:

Como $f(x)=1 \Rightarrow mx^2+q=nx-q$

$$\Rightarrow mx^2-nx+2q=0$$

Si x adopta un solo valor, $mx^2-nx+2q$ es un trinomio cuadrado perfecto

$\Rightarrow n^2-4m(2q)=0$

$$\therefore\ \frac{n^2}{mq}=8$$

Problema 27

Sean los polinomios

$$P(x)=(x+3)(x^2+(a-2)x-2a)$$
$$Q(x)=(x-2)(x^2+(b+3)x+3b),$$

donde el término independiente del m.c.m. de éstos es 120. Además, el coeficiente del término cúbico de efectuar $P(x).Q(x)\div(\text{M.C.D.})$ es 2.

Calcular: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Resolución:

Vemos que

$$P(x)=(x+3)(x+a)(x-2)$$
$$Q(x)=(x-2)(x+3)(x+b)$$

I. Si $a=b \Rightarrow \text{m.c.m.}=(x+3)(x-2)(x+a)$

II. Si $a\neq b \Rightarrow \text{m.c.m.}=(x+3)(x-2)(x+a)(x+b)$

Del dato, el término cúbico del m.c.m. = 2 hace que (I) sea imposible

$\Rightarrow \text{m.c.m.}=(x+3)(x-2)(x+a)(x+b)$

a) Como el término independiente del m.c.m. es conocido, entonces $3.(-2)(a)(b)=120$

$\Rightarrow ab=-20$ .... (α)

b) Término cúbico

$(3-2+a+b)x^3=(a+b+1)x^3$

$\Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow a+b=1$ .... (β)

De (α) y (β) $\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=-\frac{1}{20}$

$$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{20}$$

Problema 28

Dados los polinomios

$$A(x)=x^3-2x^2+ax+b$$
$$B(x)=x^3+mx^2+px+q$$

Señalar el producto de los factores no comunes siendo:

$\text{m.c.m.}(A,B)=a_0x^n+\ \ldots\ldots\ -24$

$\text{M.C.D.}(A,B)=(x-1)(x+3)$

Resolución:

Del M.C.D.

$$A(x)=(x-1)(x+3)(x+r)$$
$$B(x)=(x-1)(x+3)(x+s)$$

En A: $\quad -1+3+r=-2 \Rightarrow r=-4$

$\Rightarrow A(x)=(x-1)(x+3)(x-4)$

$B(x)=(x-1)(x+3)(x+s)$

Además

$\text{m.c.m.}(A,B)=(x-1)(x+3)(x-4)(x+s)$

Por dato $\quad (-1)(+3)(-4).s=-24$

$\Rightarrow s=-2$

Luego los factores no comunes son

$x-4 \ \wedge\ x-2$

cuyo producto es x^2-6x+8

Problemas Propuestos

1. Hallar el M.C.D. de los siguientes polinomios

$P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

$Q(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$

Dar como respuesta la suma de los coeficientes.

A) 5 B) 4 B) 3
D) 2 E) 1

2. Determinar el número de factores primos del m.c.m. de los polinomios:

$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1 \wedge Q(x) = x^6 - 1$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Determinar el grado del m.c.m. de los polinomios:

$A(x) = x^2 - 15x + 36$

$B(x) = x^2 - 9$

$C(x) = x^3 + 6x^2 - 63x + 108$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

4. Hallar la suma de los coeficientes del M.C.D . de los polinomios:

$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$

A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

5. Si el M.C.D. de los polinomios

$M(x,y) = 48x^{n\ 2}y^{m+1}z^{n}$

$N(x,y) = 36x^{n}y^{m}$

$P(x,y) = 72x^{n\ 1}y^{m\ 1}$

es $12x^2y^3$, entonces $m^2 - n^2$ es

A) 0 B) 2 C) 3
D) -4 E) 5

6. Si los polinomios

$P(x) = 6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + mx + n$

$R(x) = 2mx^3 + 2nx^2 + px - q$

admiten como M.C.D. a $2x^2 + 2x + 1$

Hallar un divisor de $R(x)$

A) $x^2 + 2x - 1$ B) $x - 3$
C) $2x^2 + x + 1$
D) $3x - 1$ E) $2x + 1$

7. Hallar el M.C.D. de los polinomios

$P(x,y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$

$Q(x,y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$

$R(x,y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$

A) $x + y$ B) $x - y$ C) $x^2 - y^2$
D) $(x+y)^2$ E) $(x-y)^2$

8. Si el cociente del m.c.m. y M.C.D. de dos polinomios en x es $(x^2 + 1)^2 - 4x^2$, además el producto de ellos es $(x^6+1)^2 - 4x^6$. Entonces el M.C.D. es:

A) $(x-1)(x^3+1)$
B) $(x+1)(x^2+x+1)$
C) $(x^2-1)(x^2+x+1)$
D) $(x+1)(x^3-1)$
E) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

9. Simplificar

$$\frac{16a^4+28a^2-11a+36}{8a^2+12a+18} + \frac{4a^3-8a^2-26a-18}{4a^2+6a+9} + 2a$$

A) 0 B) 1 C) $2a + \frac{7}{2}$

D) $2a^2$ E) $\frac{1}{2}$

10. A partir de

$$\frac{-2xy}{x-y} = \frac{y(x-y)+n}{x+y} = \frac{x-y}{2},$$

determinar el equivalente de

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

A) n^2-1 B) $\frac{2n-1}{2n+1}$ C) $2\left(\frac{1+n}{1-n}\right)$
D) 6 E) 2

11. Simplificar la siguiente fracción

$$\frac{2(n+1)\{8(n+2)^3-[(2n+4)^3-1]+1\}+4n+8}{[(2n+3)^3+1]^2-[(2n+3)^3-1]^2}$$

A) 2n B) 2n+3 C) 3n
D) $(2n+3)^2$ E) 1

12. Si la fracción

$$\frac{mx^3-(m+7)x^2+(m+8)x-(m+1)}{mx^3-(m+9)x^2+(m+16)x-(m+7)}$$

admite simplificación, ¿cuál es el denominador que se obtiene si se efectúa dicha simplificación?

A) $2x+1$ B) $2x-1$ C) $2x+3$
D) $2x-3$ E) $2x+5$

13. Hallar la expresión más simple de la fracción, si $x\neq 1 \wedge n\in\mathbb{N}$

$$\frac{x^n+2x^{n-1}+3x^{n-2}+...+(n-2)x^3+(n-1)x^2+nx+n+1}{x^{n+2}-(n+2)x+n+1}$$

A) $(x+1)^2$ B) $(x-1)^2$ C) $(x-n)^2$
D) $(x+n)^2$ E) $(x+n+1)^2$

14. Al reducir la expresión

$$\left(\frac{x+1}{x+1-\frac{1}{x-1+\frac{1}{x+1}}}-\frac{x-1}{x-1+\frac{1}{x+1+\frac{1}{x-1}}}\right)\div\frac{2}{x^2-\frac{1}{x^2}}$$

se obtiene

A) 1 B) x^2+x+1
C) x^2-x+1
D) x^4+x^2+1 E) x^4-x^2+1

15. Sabiendo que la fracción

$$\frac{(ax+by)^2}{p^2x^2+2m^2xy+m^2y^2}$$

toma un valor constante k
$k\neq 0$, para todo valor de x, y ; $xy\neq 0$
Hallar

$\frac{a^2+b^2+p^2+m^2}{a^2+b^2-p^2-m^2}$ en términos de k.

A) $\frac{k+1}{k-1}$ B) $\frac{k^2+1}{k^2-1}$ C) k+1
D) k-1 E) k^2-1

16. Si la fracción $\frac{4x^2-2x+3}{2x^2-x-1}$, se transforma en otra equivalente a $A+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{2x+1}$ donde A, B, C son constantes reales. Calcular $\left(\frac{A}{3}+B+C\right)$

A) -1 B) 1 C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

17. Simplificar

$$\frac{ax(ax+1)(ax+2)(ax+3)+1}{(1+ax)(1+2ax)(1+3ax)+a^4x^4}$$

A) $\frac{ax+1}{ax+2}$ B) $\frac{a+x}{a+2x}$ C) $\frac{x+a}{x+2a}$
D) 1 E) $\frac{a}{x}$

18. Reducir

$$\frac{(x+4)^2-4}{(2x+2)^2-x^2}+\frac{4-25x^2}{x^2-(4x+2)^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

19. Efectuar

$$\frac{x+a+2}{2a}+\frac{x-a+2}{a(a-2)}+\frac{x+a-2}{2(2-a)}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

20. Reducir

$$\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}-\frac{8}{1-a^8}$$

A) $\frac{1}{a-1}$ B) $\frac{1}{a+1}$ C) 1
D) $\frac{1}{a^2-1}$ E) $\frac{1}{a^2+1}$

21. Efectuar

$$\frac{\left(\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{x}{x^3-8}\right)}{\frac{1}{x^2-2x}}$$

A) $1+x$ B) $1-x$ C) 1
D) $1+x^2$ E) $1-x^2$

22. Reducir

$$\frac{x^4-\frac{z^2}{y}}{x-\frac{1}{yz}}+\frac{y^4-\frac{x^2}{z}}{y-\frac{1}{xz}}+\frac{z^4-\frac{y^2}{x}}{z-\frac{1}{xy}}$$

A) $x^3+y^3+z^3$ B) $(x+y+z)^3$
C) xyz
D) $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ E) 0

23. Hallar el equivalente de

$$M=\frac{ab+a+n}{b+1}+\frac{bc+b+n}{c+1}+\frac{ac+c+n}{a+1}$$

si se verifica que

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a+b+c}{n}$$

A) n B) 2n C) 3n
D) $\frac{n}{3}$ E) 6n

24. Simplificar cada una de las fracciones:

I. $f(x,y)=\dfrac{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3-1}{\frac{x-y}{x+y}-1}$; $x+y\neq 0 \wedge y\neq 0$

II. $f(x)=\dfrac{x^2-1-\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{-1}}$; $x\notin\{0,\pm 1\} \wedge x^2-x\neq 1$

III. $f(x)=\dfrac{\frac{x+1}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}}{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}}$; $x\neq\pm a$

IV. $f(x,y)=\dfrac{\frac{x}{x^2-4y^2}+\frac{x-2y}{x}}{\frac{x^2-4y^2}{x}+\frac{x}{x-2y}}$; $x\neq\pm 2y$, $x\neq 0$

V. $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{x+\frac{1}{x+1}}{x^3-1}-\frac{1}{x^2+1}}$; $x\neq\pm 1$

VI. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+\frac{x}{x-1}}+\dfrac{2x}{x-\frac{x}{x+1}}$; $x\neq\pm 1$, $x\neq 0$

25. Expresar las siguientes fracciones en la suma de fracciones parciales:

I. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}$

II. $f(x)=\dfrac{3(x^2+x)}{(x-2)(x+1)^2}$

III. $f(x)=\dfrac{1}{x^3+4x}$

IV. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3+8}$

V. $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$

VI. $f(x) = \dfrac{12 + 6x^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

VII. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^3 - x}$

VIII. $f(x) = \dfrac{3}{4x^3 + 8x^2 + 3x}$

IX. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 2x^2 + 1}{4x^3 - x}$

26. Sabiendo que A, B, C y D son los numeradores de las fracciones parciales en que puede ser descompuesta la siguiente fracción

$\dfrac{4x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2(x+1)^2}$. Hallar : A+B+C+D

A) 2 B) -5 C) 1
D) -1 E) 0

27. Si se cumple que

$a = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ $b = \dfrac{y^2 - z^2}{y^2 + z^2}$ $c = \dfrac{z^2 - x^2}{z^2 + x^2}$

Además

$\dfrac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} + \dfrac{y^4 + z^4}{(y^2 + z^2)^2} + \dfrac{x^4 + z^4}{(x^2 + z^2)^2} - 4$,

Calcular $a^2 + b^2 + c^2$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 12

28. Luego de descomponer

$$\frac{5}{(x+1)^5 - x^5 - 1}$$

en fracciones parciales, dar la suma de sus numeradores.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 0 E) -1

29. Sea $D(x)$ el mínimo común múltiplo de los polinomios $M(x)$ y $L(x)$.

Si $A(x) = \dfrac{M(x) \, . \, L(x)}{D(x)}$. Hallar el resto de dividir $A(x)$ entre $(x-3n)$, sabiendo que

$M(x) = x^4 - nx^3 - 7n^2x^2 + n^3x + 6n^4$
$L(x) = x^3 + 4nx^2 + n^2x - 6n^3$

A) 0 B) $6n^2$ C) $-6n^2$
D) $10n^2$ E) $12n^2$

30. Si $(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = (abc)^2$

Simplificar

$$\frac{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + 1}{2c^2 - 1} + \frac{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + 1}{2a^2 - 1} + \frac{\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{a^2} + 1}{2b^2 - 1}$$

A) 0 B) 1 C) $a^2+b^2+c^2$
D) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ E) abc

31. Al simplificar

$$\frac{n^3 + 1}{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 1} - \frac{n^2 - 2n^3 + 2n - 1}{n^3 + 1},$$

se obtiene :

A) n^3+2 B) $2n^2$ C) n^3+3
D) 2 E) $2n^3+1$

32. Si $x = m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$;

$y = 1 + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\vdots}}}}$,

Hallar el equivalente de

$R = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} - \dfrac{y^2 - y + 1}{y(y-1)}$; cuando $m = n$

A) m+n B) m-n C) m-n-2
D) m-n-1 E) 0

33. Determinar el valor de k para el cual la fracción

$$f(x,y)=\frac{(a-2)x^4-(a+7)xy+(2a-1)y^4}{4x^4-(a+2)xy+(3a-14)y^4}$$

toma siempre un valor constante k.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{4}{5}$ E) 1

34. Sabiendo que el M.C.D. de los polinomios
$A(x)=2x^3-x^2+3x+m$
$B(x)=x^3+x^2+n$ es x^2-x+2
Hallar $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$

A) $\frac{4}{3}$ B) 2 C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{10}{3}$

35. Simplificar :

$$E=\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{P+1-\cfrac{P}{\vdots}}}}$$

"P" veces

A) $\frac{P^{P+1}-P}{P^{P+1}-1}$ B) $\frac{P^P-P}{P+1}$ C) $\frac{P^{P+1}-1}{P-2}$
D) $\frac{P^P-3}{P+4}$ E) $\frac{P^P+3}{P-4}$

36. Descomponer en una adición de fracciones parciales e indicar una de ellas

$$\frac{8-15x+4x^2}{-3x^2+4+x^3}$$

A) $\frac{4}{x+1}$ B) $\frac{-3}{(x-2)^2}$ C) $\frac{4}{x-2}$
D) $\frac{2}{x-2}$ E) $\frac{3}{x+1}$

37. Simplificar

$$\frac{(1+ab)(1+ac)}{(b-a)(a-c)}+\frac{(1+ab)(1+bc)}{(b-a)(c-b)}+\frac{(1+ac)(1+bc)}{(c-a)(b-c)}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

38. Simplificar

$$E=a^2b^2-\cfrac{n^5-1}{n^3+\cfrac{n^2-1}{1+\cfrac{n^3-1}{n-\cfrac{n^4-1}{n-\cfrac{1}{n}}}}}$$

si

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$$

A) n^5 B) $1-n^5$ C) n^5
D) $1-n^5$ E) $1-n$

39. Hallar el valor de "a" para que la suma de los factores primos del m.c.m. sea el doble de M.C.D. (A,B) aumentado en 1, siendo:
$A(x)=x^2+(4+a)x+4a$
$B(x)=x^2+8x+16$

A) 4 B) -2 C) 5
D) -1 E) 3

40. Determinar el equivalente reducido de λ, siendo

$$\lambda=\frac{x+y+z}{yz}+\frac{x-y+z}{y^2-yz}+\frac{x+y-z}{z^2-zy}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 0 E) -1

1	B	11	D	21	C	31	D
2	D	12	D	22	A	32	B
3	D	13	B	23	C	33	C
4	B	14	A	24	*	34	C
5	A	15	A	25	*	35	A
6	D	16	A	26	B	36	E
7	A	17	D	27	B	37	E
8	E	18	B	28	E	38	C
9	D	19	A	29	D	39	E
10	E	20	A	30	B	40	D

* Sub preguntas

Claves

CAPÍTULO

IX

Radicación

Jean Le Rond D'Alambert
(1717-1783)

Fue junto a Diderot, uno de los impulsores de la Encyclopedie (*Discours preliminare*), pero también distinguióse como matemático, especialmente por sus trabajos para demostrar el teorema fundamental del álgebra en 1746 (este teorema sería demostrado completamente por primera vez, algunos años más tarde por Gauss).
Recibió una sólida educación en derecho, medicina, ciencias naturales y matemática.
Halló la solución de la ecuación de la onda unidimensional.
Tuvo una participación activa en la Revolución Francesa.

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \equiv \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

LECTURA

La historia del número irracional π

$$\pi = 3.1415926535897 93...$$

Los antiguos le daban un valor de 3, con lo que erraban en un 5%. Arquímedes le dio el valor $\frac{22}{7}$, los chinos en el siglo I le asignaron el valor de $\sqrt{10}$ con error de 1/50. En la India de 3,1416, con un error de 1/400.000.

En el siglo XVII, Adriano Mecio le asigna la fórmula 355/113, con un error de 1/10 000 000

Legendre, en 1794, demostró que π no podía ser una fracción, y en 1882 Lindemann probó que era un número trascendente, y por lo tanto no podía ser solución de ninguna ecuación cuyos coeficientes fueran enteros.

Actualmente las máquinas electrónicas lo calcularon con más de diez mil decimales. Semejante precisión no tiene aplicación práctica.

El valor asignado por los chinos, o sea $\sqrt{10}$, es sumamente práctico; basta construir un triángulo rectángulo de la siguiente forma: uno de los catetos se lo construye igual al diámetro de la circunferencia, y el otro cateto igual a tres veces dicho diámetro. La hipotenusa del mismo es igual a la longitud de la circunferencia.

Si consideramos el diámetro de una circunferencia igual a la unidad, su longitud será:

$\pi.d$; si $d = 1$, la longitud de la circunferencia es igual a $\pi.1 = \pi$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo antes mencionado, cuyo cateto menor es 1, y el mayor 3, su hipotenusa será $\pi = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Fuente: Enciclopedia Temática - Argos Vergara.

Radicación

OBJETIVOS

- Extraer la raíz cuadrada de polinomios.
- Manejar la simplificación de radicales.
- Transformar los radicales dobles a simples.
- Racionalizar y simplificar ecuaciones e inecuaciones irracionales.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de esta operación estuvo a la par con la evolución de la aritmética y la geometría, y su descubrimiento en Grecia lo debemos a la Escuela Pitagórica ("escuela" cultural - religiosa fundada por Pitágoras, cuyos adeptos, rigurosamente seleccionados, se seguían por severísimos principios).

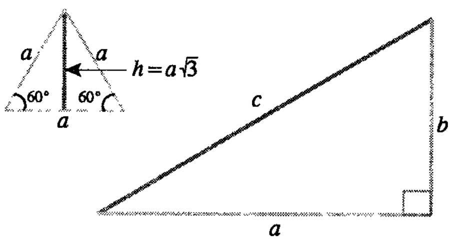
Los pitagóricos solamente conocían los números enteros y fraccionarios, pero al calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad por medio de su teorema; se encontraron con la sorpresa de que dicha longitud de la diagonal no pertenecía a ninguno de los números conocidos por ellos.

Este descubrimiento puso a los pitagóricos en notable aprieto, hasta que uno de ellos, Hiparo reveló el secreto, siendo arrojado al mar por dicha osadía.

Dicha revelación trajo como consecuencia, el estudio de lo que más tarde recibirían el nombre de números irracionales, expresado esto por medio de radicales, símbolo que caracteriza a una nueva operación a desarrollar llamada **radicación**.

Siglos más tarde con el desarrollo de la simbología matemática (es decir cuando los símbolos tomaron un rol protagónico en la matemática), los radicales tuvieron utilidad importante, como por ejemplo, en la resolución de ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado; sus raíces se expresaban por medio de radicales o una combinación de ellos.

En aritmética tiene aplicación al averiguar si un número es primo o no; en geometría, expresar el lado de un polígono en términos de radicales, etc.



Teorema de Pitágoras

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$I=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\dots\}$$

DEFINICIÓN

Es aquella operación matemática a través de la cual, dados dos números llamados radicando e índice, se busca encontrar un tercer elemento llamado raíz n-ésimo del radicando, de modo que se cumpla la siguiente identidad:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n}$$

Donde

- **n** es el índice ($n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$)
- **a** es el radicando o cantidad subradical
- **b** es la raíz n-ésima de **a**

DEFINICIÓN DE RAÍZ ARITMÉTICA

Sea **a** un número real positivo y **n** un número natural $n \geq 2$. Se llama raíz n-ésima aritmética de "a" al número positivo "b", tal que $b^n = a$; la cual se denota por $b = \sqrt[n]{a}$, es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n$$

Ejemplos:

I. $\sqrt[5]{32} = 2 \leftrightarrow 32 = 2^5 \Rightarrow 2$ es raíz aritmética de 32 de orden 5.

II. $\sqrt[4]{81} = 3 \leftrightarrow 81 = 3^4 \Rightarrow 3$ es la raíz aritmética de 81 de orden 4.

NOTA:

En $\mathbb{R}$ existe $\sqrt[n]{a}$ y es igual a "b", donde "b" es único.

I. Si **n** es par: $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

II. Si **n** es impar: $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$, además b tiene el mismo signo de a

Ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2$

Ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$

Como vemos $-27 \wedge -3$ tienen el mismo signo.

TEOREMAS DE RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Sean $\{a,b\} \subset \mathbb{R}_0^+ \wedge \{n,p\} \subset \mathbb{N} - \{1\}$, entonces se tiene :

1. $\boxed{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo: $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\,.\sqrt{2} = 2(1,41) = 2,82$

2. $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,;b \neq 0}$

Ejemplo: $\sqrt{\dfrac{81}{25}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \dfrac{9}{5}$

3. $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}}$

Ejemplo: $\sqrt[4]{\sqrt[5]{19}} = \sqrt[4.5]{19} = \sqrt[20]{19}$

4. $\boxed{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.P]{a^P}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3.5]{2^5} = \sqrt[15]{32}$

5. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^P = \sqrt[n]{a^P}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

6. $\boxed{a^P.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{nP}.b}}$

Ejemplo: $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4.3} = \sqrt[4]{16.3} = \sqrt[4]{48}$

RAÍZ ALGEBRAICA

Se llama raíz algebraica de $\sqrt[n]{a}$ donde $a \in \mathbb{R}$ ∧ $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$; a cada una de las **n** raíces diferentes de $\sqrt[n]{a}$.

Ejemplos:

1. De $\sqrt[4]{16}$ sus raíces algebraicas son $2, -2, 2i, -2i$; $i = \sqrt{-1}$
2. De $\sqrt{25}$ sus raíces algebraicas son 5 y -5

RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio $P(x)$ de grado par, hallar su raíz cuadrada consiste en hallar otros dos polinomios llamados raíz cuadrada $q(x)$ y residuo $R(x)$ de tal modo que $P(x)=q^2(x)+R(x)$

Esquema

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{P(x)} & \underline{q(x)} \\ R(x) & \end{array}$$

Donde

$P(x)$ es el polinomio radicando de grado par

$q(x)$ es el polinomio raíz

$R(x)$ es el polinomio residuo

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DE LA RADICACIÓN

$$\boxed{P(x) \equiv q^2(x) + R(x)}$$

CLASES DE RAÍZ CUADRADA

- Se llama raíz cuadrada exacta si y sólo si su residuo es idénticamente nulo, es decir:

$$\boxed{P(x) \equiv q^2(x)}$$

Ejemplo :

$\sqrt{x^2+6x+9} \equiv x+3$; ya que

$x^2+6x+9 \equiv (x+3)^2$

- Se llama raíz cuadrada inexacta si y sólo si su residuo no es polinomio idénticamente nulo, es decir:

$$\boxed{P(x) \equiv q^2(x) + R(x)}$$

Ejemplo:

$\sqrt{x^2+5x+3}$ no es exacto.

$$\Rightarrow \; x^2+5x+3 \equiv \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$$\therefore \; q(x) = x+\frac{5}{2} \;\wedge\; R(x) = -\frac{13}{4}$$

PROPIEDADES:

1. Si el grado de $P(x)$ es 2m, entonces el grado de $q(x)$ es m.
2. El grado del residuo es menor que el grado de la raíz salvo que el residuo sea nulo.

PROCEDIMIENTO PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

1. El polinomio radicando generalmente debe ser completo y ordenado en una variable en forma descendente y si faltase algún término se puede completar con ceros.
2. Se agrupan a los términos del polinomio de dos en dos a partir del último término.
3. Se extrae la raíz cuadrada al primer término del polinomio que será el primero de la raíz, luego éste se eleva al cuadrado y el resultado se resta del polinomio.
4. Se bajan los dos siguientes términos del polinomio, seguidamente se duplica la raíz encontrada, luego se divide el primer término de los bajados entre éste y el resultado será el segundo término de la raíz, a este valor obtenido se adiciona la raíz duplicada y todo ello queda multiplicado por el segundo término de la raíz para luego restarlo del polinomio.
5. Se baja los dos términos siguientes y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el residuo sea de grado menor que la raíz o el residuo sea un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo 1
Hallar m y n si el polinomio
$P(x) = 4x^4 + mx^3 + nx^2 + 24x + 16$ tiene raíz cuadrada exacta.

Resolución:
El polinomio raíz es de segundo grado por lo tanto asumo un polinomio convenientemente
$4x^4+mx^3+nx^2+24x+16 \equiv (2x^2+px+4)^2$
Efectuando
$4x^4+mx^3+nx^2+24x+16 \equiv 4x^4+4px^3+(p^2+16)x^2 + 8px + 16$
Por identidad de polinomios
$m = 4p \quad ; \quad n = p^2 + 16 \quad ; \quad 8p = 24$
Por lo tanto
$p = 3 \quad ; \quad n = 25 \quad \wedge \quad m = 12$

Ejemplo 2
Hallar la raíz cuadrada de
$P(x) = 12x^3+4x^4+13x^2+5$
Resolución:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{4x^4+12x^3+13x^2+0x+5} & 2x^2+3x+1 \\ \hline
\underline{-4x^4} \quad\quad\quad\quad\quad\quad & (4x^2+3x)3x \\
\underline{-12x^3-9x^2} \quad\quad\quad & \\ \hline
4x^2+0x+5 & (4x^2+6x+1)1 \\
\underline{-4x^2-6x-1} & \\
-6x+4 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \; q(x) = 2x^2 + 3x + 1$
$\therefore \; R(x) = -6x + 4$

Ejemplo 3
Hallar la raíz cuadrada de
$P(x,y) = x^4-2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+4y^4$
Resolución:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{x^4-2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+4y^4} & x^2-xy-2y^2 \\ \hline
\underline{-x^4} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad & (2x^2-xy)(-xy) \\
-2x^3y-3x^2y^2 \quad\quad\quad\quad & -2x^3y+x^2y^2 \\ \hline
\underline{2x^3y-x^2y^2} \quad\quad\quad\quad & (2x^2-2xy-2y^2)(-2y^2) \\
-4x^2y^2+4xy^3+4y^4 & -4x^2y^2+4xy^3+4y^4 \\ \hline
\underline{4x^2y^2-4xy^3-4y^4} & \\
0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 &
\end{array}
$$

> **NOTA:**
> Averiguando los otros términos de la raíz cuadrada
> $\dfrac{-2x^3y}{2x^2} = -xy \; ; \; \dfrac{-4x^2y^2}{2x^2} = -2y^2$
> De aquí la raíz cuadrada del polinomio es
> $q(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$
> y su residuo $R(x,y) \equiv 0$

RADICALES DOBLES

Son aquellos que se caracterizan porque dentro de un radical, se encuentra otros radicales relacionadas con las operaciones de adición o sustracción $\left(\sqrt[n]{A \pm \sqrt[m]{B}}\right)$

TRANSFORMACIÓN DE UN RADICAL DOBLE EN SIMPLE

I. Para la forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Siendo A y B dos elementos racionales positivos para su transformación en radicales simples $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

De donde
$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

tal que $\{x, y\} \subset \mathbb{Q}^+ \wedge x > y$
sumando miembro a miembro las expresiones
$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado
$$\left(A + \sqrt{B}\right) + \left(A - \sqrt{B}\right) + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x$$
de aquí
$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Análogamente restando las expresiones, obtendremos

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Si hacemos que

$C = \sqrt{A^2 - B}$ (como $x\,;\ y \in Q^+ \Rightarrow C \in Q$)

tendremos $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

Ejemplo 1

Expresar $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ en radicales simples

Resolución:

Sea $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ la transformación en radicales simples; entonces

$$11 + 6\sqrt{2} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$11 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

De $(\alpha)+(\beta)$ $\quad 22 = 2(x+y)$

$$\Rightarrow x+y = 11 \ \ldots\ldots\ \ \ldots \ (I)$$

De $(\alpha)-(\beta)$ $\quad 12\sqrt{2} = 4\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow x\,.\,y = 18 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

De I y II, se obtiene $x = 9 \ \wedge \ y = 2$

Luego tenemos

$$\Rightarrow \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}$$

Usando directamente la fórmula

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{11 + \sqrt{72}}$$

$$A = 11 \ \wedge \ B = 72 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{11^2 - 72} = 7$$

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\therefore \ \sqrt{11 + \sqrt{72}} = 3 + \sqrt{2}$$

Ejemplo 2:

Con $1 < x < \sqrt{2}$ transforme a radicales simples

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{2 - x^2}} \quad ; \quad x \in Q$$

Resolución:

Si $A = \dfrac{1}{x}$; $B = 2 - x^2$; entonces

$$C = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - (2 - x^2)} = \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2}} = \frac{x^2 - 1}{x}$$

Luego

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{2 - x^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x} - \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{2 - x^2}{2x}}$$

NOTA

Una "manera práctica" de esta transformación es buscando ganar un trinomio cuadrado perfecto en el radicando. Así

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{A \pm \sqrt{4b}} = \sqrt{\underset{x+y}{\widehat{A}} \pm 2\sqrt{\underset{xy}{\widehat{b}}}}$$

Bajo esta circunstancia, si $b = xy \wedge A = x + y$

$$\rightarrow A \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$$

y esto conducirá a que

$$\sqrt{A \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad ; \quad x > y$$

$$\boxed{\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad ; \quad x + y = M \quad xy = N \quad x > y}$$

Ejemplos:

a) Transformar a radicales simples

$$\sqrt{10 + \sqrt{84}}$$

Resolución

aquí busquemos el "2" de $\sqrt{84}$

$$\sqrt{84}=\sqrt{4\times 21}=2\sqrt{21}$$

$$\sqrt{\underbrace{10}_{7+3}+2\sqrt{\underbrace{21}_{7.3}}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sqrt{10+\sqrt{84}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

b) Transformar a radicales simples

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}$$

Resolución:

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{17-2.6\sqrt{2}}$$

Como ahora sobra un "6" hagamos que reingrese en

$$6\sqrt{2}=\sqrt{36.2}=\sqrt{72}$$

Así

$$\sqrt{\underbrace{17}_{9+8}-2\sqrt{\underbrace{72}_{9\times 8}}}=\sqrt{9}-\sqrt{8}=3-2\sqrt{2}$$

c) Transformar a radicales simples

$$\sqrt{\frac{x}{2}-\sqrt{2x-4}}\ ;\quad 2<x<4\quad ;\quad x\in\mathbb{Q}$$

Como el "2" no es posible obtenerlo del radical interno, hagamos que ingrese desde lo externo. Para esto multipliquemos y dividamos por $\sqrt{2}$ y acondicionándole convenientemente tenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x}{2}-\sqrt{2x-4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\underbrace{x}_{2+x-2}-2\sqrt{2(x-2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}-1}=1-\sqrt{\frac{x}{2}-1}$$

II. Para un radical de la forma

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\\ A;B;C;D;\ x\ ;\ y\ ;\ z\in\mathbb{Q}^{+}\end{gathered}}$$

elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$$

Identificando expresiones racionales e irracionales se tiene $x+y+z=A$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{B}\ \rightarrow 4xy=B\ \dots\dots\dots\ (1)$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{C}\ \rightarrow 4xz=C\ \dots\dots\dots\ (2)$$

$$2\sqrt{yz}=\sqrt{D}\ \rightarrow 4yz=D\ \dots\dots\dots\ (3)$$

Al resolver el sistema tendremos los valores de x, y, z.

Ejemplo 1

Hallar la raíz cuadrada de

$$16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}$$

Resolución:

$$\sqrt{16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}$$

comparando se tiene

$$x+y+z=16\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \text{(I)}$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{80}\ \rightarrow xy=20=5.4\ \dots\dots\dots\ \text{(II)}$$

$$2\sqrt{xz}=\sqrt{112}\ \rightarrow yz=28=4.7\ \dots\dots\dots\ \text{(III)}$$

$$2\sqrt{xz}=\sqrt{140}\ \rightarrow xz=35=5.7\ \dots\dots\dots\ \text{(IV)}$$

De II, III, IV $x=5\ ;\ y=4\ ;\ z=7$

además verifica (I)

$$\sqrt{16+\sqrt{80}+\sqrt{112}+\sqrt{140}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}+\sqrt{7}$$

Forma práctica:

Se transforma el radicando en un trinomio cuadrado perfecto, es decir

$$\sqrt{\underset{x+y+z}{\underset{\wedge}{A}}+2\sqrt{\underset{xy}{\underset{\wedge}{\theta}}}+2\sqrt{\underset{xz}{\underset{\wedge}{\alpha}}}+2\sqrt{\underset{yz}{\underset{\wedge}{\beta}}}} = \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}$$

$$= \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Donde $\{A; \theta; \alpha; \beta; x, y, z\} \subset \mathbb{R}^+$

Ejemplo 2

Transformar a radical simple

$$\sqrt{24+\sqrt{240}+\sqrt{336}+\sqrt{140}}$$

Resolución:

Transformando el radicando

$$\sqrt{\underset{5+12+7}{\underset{\wedge}{24}}+2\sqrt{5\,.\,12}+2\sqrt{7\,.\,12}+2\sqrt{7\,.\,5}} = \sqrt{5}+\sqrt{12}+\sqrt{7}$$

$$= \sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{7}$$

Ejemplo 3

Expresar en forma de radicales sencillos a la expresión:

$$\sqrt{14+\sqrt{40}+\sqrt{56}+\sqrt{140}} = \sqrt{\underset{2+5+7}{\underset{\downarrow}{14}}+2\sqrt{5.2}+2\sqrt{2.7}+2\sqrt{5.7}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

III. Radical de la forma

$$\boxed{\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}}$$

Se considera el radicando un trinomio cuadrado perfecto de la forma $(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D} = x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$$

De donde se tiene $\quad x+y+z = A$

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{B} \Rightarrow 4xy = B$$

$$-2\sqrt{xz} = -\sqrt{C} \Rightarrow 4xz = C$$

$$-2\sqrt{yz} = -\sqrt{D} \Rightarrow 4yz = D$$

Al resolver se obtiene los valores de x ; y ; z .

Ejemplo:

Expresar en forma de radicales simples la expresión

$$\sqrt{14+2\sqrt{10}-\sqrt{56}-\sqrt{140}}$$

Resolución:

El radical doble es equivalente a

$$\sqrt{14+2\sqrt{10}-2\sqrt{14}-2\sqrt{35}}$$

$$= \sqrt{\underset{2+5+7}{\underset{\wedge}{14}}+2\sqrt{5\times 2}-2\sqrt{7\times 2}-2\sqrt{7\times 5}}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}$$

NOTA:

Con el objetivo de ganar tiempo frente a este tipo de radicales, busquemos una **regla práctica**, la misma que estará sujeta al principio deductivo de la forma genérica, es decir, la expresión

$$A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}$$

debe provenir de un trinomio al cuadrado de la forma $\quad (\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2$

De modo que

$$\sqrt{\underset{x+y+z}{\underset{\downarrow}{A}}+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})^2} = \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

Donde $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z} \in \mathbb{R}^+$

IV. Radical de la forma

$$\boxed{\sqrt[3]{A\pm\sqrt{B}}}$$

Para su transformación a radicales simples tenemos en consideración que el radicando $A\pm\sqrt{B}$ sea un cubo perfecto de la forma $(x\pm\sqrt{y})^3$

De donde podemos establecer que

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}\ldots\ldots(1)\\ \sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x-\sqrt{y}\ldots\ldots(2)\end{array}\right. \quad ; \ \{x,y\}\subset\mathbb{Q}$$

De (1) y (2) hallaremos ***x*** e ***y***

I. Hallando *x*

Sumando (1) y (2) miembro a miembro

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}+x-\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=2x$$

Luego elevando al cubo

$$\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3=(2x)^3$$

Desarrollando

$$\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)^3+$$

$$+3\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\right)\left(\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)\underbrace{\left(\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}\right)}_{2x}=8x^3$$

$$A+\sqrt{B}+A-\sqrt{B}+3\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B})}(2x)=8x^3$$

$$\Rightarrow 2A+6\sqrt[3]{A^2-B}\,.\,x=8x^3$$

$$\therefore \boxed{4x^3-3\sqrt[3]{A^2-B}\,x-A=0}\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Como los valores de A y B son conocidos de esta ecuación, podremos determinar el valor de ***x*** el cual será racional.

II. Hallando *y*

Multiplicando (1) y (2) miembro a miembro se obtiene

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}\,.\,\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$$

$$\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B})}=x^2-y$$

$$\sqrt[3]{A^2-B}=x^2-y$$

Entonces

$$\boxed{y=x^2-\sqrt[3]{A^2-B}}\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Como conocemos "***x***", además A y B son conocidos, fácilmente podremos obtener "***y***" el cual será racional solamente si (A^2-B) es cubo perfecto.

Enseguida veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1

Transformar $\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}$ a radicales simples.

Resolución:

$$\sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+\sqrt{y}$$

Reconociendo A y B, tenemos

$$A=-7 \wedge B=50$$

Hallando ***x*** en (α)

$$4x^3-3\sqrt[3]{(-7)^2-50}\,x-(-7)=0$$

$$4x^3+3x+7=0$$

Factorizando

$$(x+1)(4x^2-4x+7)=0$$

Como ***x*** es racional entonces $x=-1$

hallando ***y*** en (β)

$$y=x^2-\sqrt[3]{(-7)^2-50}$$

$$y=x^2+1$$

Como $x=-1 \Rightarrow y=(-1)^2+1 \Rightarrow y=2$

$$\therefore \sqrt[3]{-7+\sqrt{50}}=-1+\sqrt{2}$$

Ejemplo 2

Transformar $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ a radicales simples.

Resolución:

$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{26+\sqrt{15^2.3}} = \sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = x+\sqrt{y}$,

reconociendo A y B, tenemos

$$A = 26 \wedge B = 15^2.3 = 675 ,$$

hallando x en (α)

$$4x^3 - 3\sqrt[3]{(26)^2 - 675}\,x - 26 = 0$$

$$4x^3 - 3x - 26 = 0$$

Factorizando

$$(x-2)(4x^2+8x+13) = 0$$

como x es racional, entonces: $x=2$

Hallando y en (β)

$$y = x^2 \quad \sqrt[3]{(26)^2 - 675}$$

$$y = x^2 - 1$$

Como $x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 1 \Rightarrow y = 3$

$$\therefore \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

Ejemplo 3

Cuando el binomio consta de dos radicales cuadráticos procederemos como sigue a continuación.

Transformar a radicales simples

$$\sqrt[3]{60\sqrt{3} - 42\sqrt{6}}$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{60\sqrt{3} - 42\sqrt{6}} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}\,(20 - 14\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt[3]{3}\ \sqrt[6]{3}\ \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{3}\ \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{60\sqrt{3} - 42\sqrt{6}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Ahora transformaremos $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = x - \sqrt{y} ;$$

reconociendo A y B, tenemos

$$A = 20 \wedge B = 392 ,$$

hallando x en (α)

$$4x^3 - 3\left(\sqrt[3]{(20)^2 - 392}\right)x - 20 = 0$$

$$4x^3 - 6x - 20 = 0$$

$$2x^3 - 3x - 10 = 0$$

factorizando $(x-2)(2x^2+4x+5) = 0$

como $x \in Q$, entonces $x=2$;

$x = 2$ es el único racional que resuelve la ecuación.

Hallando y en (β)

$$y = x^2 - \sqrt[3]{20^2 \quad 392}$$

$$y = x^2 - 2$$

como $x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 2 \Rightarrow y = 2$,

entonces $\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = 2 - \sqrt{2}$

De donde $\sqrt[3]{60\sqrt{3} \quad 42\sqrt{6}} = \sqrt{3}(2 - \sqrt{2})$

$$\therefore \sqrt[3]{60\sqrt{3} - 42\sqrt{6}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

Ejemplo 4

Expresar $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ en radicales simples

Resolución:

Sea $a+b\sqrt{2}$ el radical simple, es decir

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$$

Elevando al cubo miembro a miembro

$$45 + 29\sqrt{2} = a^3+3a^2b\sqrt{2} + 3ab^2.2 + b^3 2\sqrt{2}$$

$$= a^3+6ab^2+(3a^2b+2b^3)\sqrt{2} ,$$

de donde

$$\begin{matrix} 45 = a^3 + 6ab^2 \\ 29 = 3a^2b + 2b^3 \end{matrix} \quad ; \quad a , b \in Q^+$$

Resolviendo este sistema se tiene que

$$a=3 \quad ; \quad b=1$$

$$\therefore \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

RACIONALIZACIÓN

CONCEPTO

Siendo $I(x)$ una expresión irracional, se denomina racionalización a aquel proceso que permite transformarla equivalentemente en otra racional.
Por lo general, se busca eliminar la irracionalidad en los denominadores de las expresiones, salvo se diga lo contrario.

Para este efecto, usaremos una expresión irracional, al cual se le llamará factor racionalizante.

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R)

Es aquella expresión irracional (algebraica) capaz de transformar equivalentemente a aquella expresión irracional en otra racional a través del siguiente esquema:

$$\frac{K}{I(x)}\times\frac{F.R}{F.R}=\frac{K\times F.R}{\text{Racional}}$$

Casos que se presentan

CASO I

Forma

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}}\ ;\ n>m \wedge m,n\in\mathbb{N}\ ;\ a\in\mathbb{R}^+$$

Para este denominador su factor racionalizante es

$$\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

NOTA: $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}=\sqrt[n]{a^n}=a$

Entonces se tendrá

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{N\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Ejemplo 1

Racionalizar el denominador de $\dfrac{10}{\sqrt{5\sqrt[5]{3^3}}}$

Resolución:

Descomponiendo en el radicando

$$\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}$$

cuyo factor racionalizante es $\left(\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}\right)$

Luego

$$\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}=\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^3}}\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt[10]{3^7}}$$

$$=\frac{\cancel{10}\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{\cancel{5}\cdot 3}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt[10]{3^7}}{3}$$

Ejemplo 2

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3\sqrt{2}}}$$

Resolución:

Transformando el denominador

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{2}}$$

cuyo factor racionalizante es $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[8]{2^7}$

Luego

$$\frac{24}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[4]{3}.\sqrt[8]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[4]{3^3}.\sqrt[8]{2^7}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[4]{3^3}.\sqrt[8]{2^7}}$$

se obtiene

$$\frac{\cancel{24}\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[4]{3^3}.\sqrt[8]{2^7}}{5.\cancel{3.2}} = \frac{4\sqrt[3]{25}.\sqrt[4]{27}.\sqrt[8]{128}}{5}$$

∴ El denominador racionalizado es 5.

CASO II

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}} \quad ; \ f(x), g(x) \in \mathbb{R}^+}$$

Veamos en el cuadro:

Expresión Irracional	Factor Racionalizante	Racional
$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$	$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$f(x) - g(x)$
$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$	$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$	$f(x) - g(x)$

Ejemplo 1

Racionalizar el denominador de

$$\frac{24}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-2}} \quad , \quad x > 2/3$$

Resolución:

$$\frac{24}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-2}} \times \frac{\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-2}}$$

Se obtiene

$$\frac{24(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-2})}{(3x+2) - (3x-2)} = \frac{\cancel{24}(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-2})}{\cancel{4}}$$

$$= 6(\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-2})$$

El denominador racionalizado es 1

Ejemplo 2

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{15}{\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 6}$$

Resolución:

Agrupando el denominador como se indican

$$\sqrt{3}(\sqrt{2} + 3) + 2(\sqrt{2} + 3) = (3 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})$$

se tiene

$$= \frac{15}{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})} \times \frac{(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{15(3 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})}{(3^2 - 2)(2^2 - 3)}$$

$$= \frac{15(3 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})}{7}$$

∴ El denominador racionalizado es 7

Ejemplo 3

Racionalizar el denominador de

$$\frac{5}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

Resolución:

Agrupando convenientemente

$$\frac{5}{\sqrt{5} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})} \times \frac{\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}{5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$$

$$\frac{5(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}{\cancel{5} - \cancel{5} + 2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})}{12}$$

CASO III

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[3]{f^2_{(x)}} \pm \sqrt[3]{f(x)\, g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)}}} \ \ldots \ldots (1)$$

$$\boxed{\frac{M}{\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)}}} \ \ldots \ldots (2)$$

Veamos en el siguiente cuadro:

Expresión Irracional	Factor Racionalizante	Racional
$\sqrt[3]{f^2} \pm \sqrt[3]{f.g} + \sqrt[3]{g^2}$	$\sqrt[3]{f} \mp \sqrt[3]{g}$	$f \mp g$
$\sqrt[3]{f} \pm \sqrt[3]{g}$	$\sqrt[3]{f^2} \mp \sqrt[3]{f.g} + \sqrt[3]{g^2}$	$f \pm g$

Ejemplo 1

Racionalizar $\dfrac{14}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$

Resolución:

Como el denominador es $\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1$

Entonces el factor racionalizante es $\sqrt{3}-1$

luego tenemos

$$\frac{14}{\underbrace{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}} \times \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\underbrace{\sqrt[3]{3}-1}} = \frac{14(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1}$$

$$= 7(\sqrt[3]{3}-1)$$

Ejemplo 2

Racionalizar

$$\frac{13}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$$

Resolución:

Como el denominador es $\sqrt[3]{2}^{\,2}-\sqrt[3]{3.2}+\sqrt[3]{3}^{\,2}$

Su factor que la racionaliza es $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$,

así $\dfrac{13}{\underbrace{\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{3.2}+\sqrt[3]{3^2}}} \times \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{\underbrace{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}}$

Que efectuando es

$$\frac{13(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{3+2} = \frac{13(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{5}$$

cuyo denominador es 5

CASO IV

Forma

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)}} \; ; n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2}$$

En este caso , el factor racionalizante depende del índice y estará relacionado con los cocientes notables exactos.

Recordemos

$$\frac{a^n-b^n}{a-b} = a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1} \; ; n \in \mathbb{N}$$

Así :

$$\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{g(x)}$$

tendrá como factor racionalizante a

$$\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-1}+\sqrt[n]{f(x)}^{\,(n-2)}\sqrt[n]{g(x)}+\ldots+\sqrt[n]{g(x)}^{\,n-1}$$

Para cualquier $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$, se tendrá

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[n]{g(x)}} \times \frac{\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-1}+\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-2}\sqrt[n]{g(x)}+\ldots+\sqrt[n]{g(x)}^{\,n-1}}{\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-1}+\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-2}\sqrt[n]{g(x)}+\ldots+\sqrt[n]{g(x)}^{\,n-1}}$$

$$= \frac{N\left(\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-1}+\sqrt[n]{f(x)}^{\,n-2}\sqrt[n]{g(x)}+\ldots+\sqrt[n]{g(x)}^{\,n-1}\right)}{f(x)-g(x)}$$

Resumiendo

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)}} = \frac{N.F.R.}{f(x)-g(x)} \quad ; \quad n \text{ es par}$$

$$\frac{N}{\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)}} = \frac{N.F.R.}{f(x) \pm g(x)} \quad ; \quad n \text{ es impar}$$

Ejemplo 1

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{45}{\sqrt[30]{13}-\sqrt[30]{3}}$$

Resolución:

El factor racionalizante es

$$\sqrt[30]{13}^{29}+\sqrt[30]{13}^{28}\sqrt[30]{3}+\ldots+\sqrt[30]{3}^{29}$$

$$\frac{45}{\sqrt[30]{13}-\sqrt[30]{3}}\times\frac{F.R}{F.R}=\frac{45{\times}F.R}{13-3}=\frac{9\,.\,F.R.}{2}$$

$\therefore$ Su denominador es 2

Ejemplo 2

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{4}{\sqrt[22]{17}+\sqrt[22]{15}}$$

Resolución:

Observamos que el índice es par. Al multiplicar por el factor racionalizante se tiene:

$$\frac{4}{\sqrt[22]{17}+\sqrt[22]{15}}\cdot\frac{F.R}{F.R}=\frac{4\,.\,F.R}{17-15}=\frac{4.F.R}{2}=2\text{ F.R.}$$

$\therefore$ El denominador racionalizado es 1

Ejemplo 3

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{3-\sqrt[6]{2}}$$

Resolución:

Transformando a

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{3}^{6}-\sqrt[6]{2}}$$

Multiplicando por el F.R. (índice par)

$$\frac{\sqrt[3]{3}\,.\,F\,.\,R}{(\sqrt[6]{729}-\sqrt[6]{2})F.R}=\frac{\sqrt[3]{3}F.R}{729-2}$$

$\therefore$ El denominador racionalizado es 727

Ejemplo 4

Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{36}{\sqrt[7]{25}+\sqrt[7]{4}}$$

Resolución:

Multiplicando por el F.R. (índice impar)

$$\frac{36}{\sqrt[7]{25}+\sqrt[7]{4}}\times\frac{F.R}{F.R}=\frac{36{\times}F.R}{25+4}$$

$\therefore$ El denominador racionalizado es 29

Ejemplo 5

Indicar:

a) Factor racionalizante (F.R)

b) Denominador racionalizado de

$$\frac{5}{\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{125}+\sqrt[5]{25}+\sqrt[5]{5}+1}$$

Resolución:

El denominador $\sqrt[5]{5}^{4}+\sqrt[5]{5}^{3}+\sqrt[5]{5}^{2}+\sqrt[5]{5}+1$

es un cociente notable

a) El factor que racionaliza es $\sqrt[5]{5}\quad 1$

b) $$\frac{5}{\sqrt[5]{5^4}+\sqrt[5]{5^3}+\sqrt[5]{5^2}+\sqrt[5]{5}+1}\times\frac{\sqrt[5]{5}-1}{\sqrt[5]{5}-1}$$

$$=\frac{5\,.\,(\sqrt[5]{5}-1)}{5-1}=\frac{5\,(\sqrt[5]{5}-1)}{4}$$

NOTA: $$\frac{\sqrt[5]{5}^{5}-1}{\sqrt[5]{5}-1}=\sqrt[5]{5}^{4}+\sqrt[5]{5}^{3}+\sqrt[5]{5}^{2}+\sqrt[5]{5}+1$$

$\therefore$ El denominador racionalizado es 4

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar **m** y **n** en el polinomio
$P(x) = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + mx+n$
para que su raíz cuadrada sea $\left(\dfrac{m-n-10}{8}\right)x^2$ aumentado en 4 veces su residuo.

Resolución

Aplicando el método para extraer raíz cuadrada

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{81x^4+216x^3+216x^2+mx+n} & 9x^2+12x+4 \\
\hline
-81x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & 2(9x^2)=18x^2 \\
216x^3+216x^2 \qquad\quad & (18x^2+12x)(12x) \\
-216x^3-144x^2 \qquad\quad & =216x^3+144x^2 \\
72x^2+mx+n & (18x^2+24x+4)(4) \\
-72x^2-96x-16 & =72x^2+96x+16 \\
\underbrace{(m-96)x+n-16}_{\text{Resto}} &
\end{array}
$$

Luego tenemos por el dato

$$9x^2+12x+4 \equiv \left(\frac{m-n-10}{8}\right)x^2+4[(m-96)x+n-16]$$

$$\Rightarrow \frac{m-n-10}{8}=9 \Rightarrow m-n=82$$

También

$$4(m-96)=12 \quad \wedge \quad 4(n-16)=4$$

$$\Rightarrow m = 99 \quad \wedge \quad n = 17$$

Problema 2

Si la raíz cuadrada del polinomio
$P(x) = ax^6+bx^5+8x^4+4x^3+16x^2+16x+ 4$
es exacta. Hallar $\dfrac{a-b}{a}$

Resolución:

Por conveniencia el polinomio se ordena en forma creciente con respecto a x, es decir

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{4+16x+16x^2+4x^3+8x^4+bx^5+ax^6} & 2+4x+x^3 \\
\hline
-4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 2(2)=4 \\
16x+16x^2 \qquad\qquad\qquad & (4+4x)(4x) \\
-16x-16x^2 \qquad\qquad\qquad & =16x+16x^2 \\
4x^3+8x^4+bx^5+ax^6 & 2(2+4x)=4+8x \\
-4x^3-8 \qquad\quad -x^6 & (4+8x+x^3)(x^3) \\
\underbrace{bx^5+(a-1)x^6}_{\text{Resto}} & =4x^3+8x^4+x^6
\end{array}
$$

como el resto es idénticamente nulo, entonces:

$$b=0 \quad \wedge \quad a=1$$

$$\therefore \frac{a-b}{a}=1$$

> **NOTA:** El polinomio $P(x)$ es ordenado en forma creciente puesto que tiene raíz cuadrada exacta.

Problema 3

Hallar el mínimo valor de $a + b$, con $\{a;b\} \subset \mathbb{Z}^+$, si $P(x) = x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ tiene raíz cuadrada exacta.

Resolución:

Considero un polinomio raíz de 2do. grado, es decir

$$x^4+ax^3+bx^3+ax+1 \equiv (x^2 + mx + 1)^2 ,$$

desarrollando en el segundo miembro

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 \equiv x^4 + 2mx^3 +(m^2+2)x^2 +2mx + 1$$

Igualando coeficientes

$$a = 2m$$
$$b = m^2 + 2$$

sumando

$$a + b = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1$$

$\therefore$ El mínimo de $(a+b)$ es 1

Problema 4

Si el polinomio

$$P(x) = 4x^{30}-4x^{19}+12x^{15} + x^6 + mx^3+9$$

tiene raíz cuadrada exacta, hallar el valor de "m"

Resolución

Considerando un polinomio raíz de grado 15 convenientemente, se tendrá

$$4x^{30}-4x^{18}+12x^{15}+x^6+mx^3+9 \equiv (2x^{15}-x^3+3)^2$$

efectuando

$$4x^{30} - 4x^{18} + 12x^{15} + x^6 + mx^3 + 9$$
$$\equiv 4x^{30} - 4x^{18} + 12x^{15} + x^6 - 6x^3 + 9$$

igualando coeficiente, tendremos $m = -6$

Problema 5

Transformar a radical doble

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \ , \quad x > 3$$

Resolución

Recordemos

$$\boxed{\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\ ,\ a>b>0}$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3})^2}=\sqrt{x-2+x-3+2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$$

$$=\sqrt{2x-5+2\sqrt{x^2-5x+6}}$$

Problema 6

Reducir

$$\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}+\frac{3}{\sqrt{9+\sqrt{72}}}-\frac{4}{\sqrt{8+\sqrt{48}}}$$

Resolución:

Transformando los denominadores a radicales simples y racionalizando:

$$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3.2}}}=\frac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{9+2\sqrt{6.3}}}=\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{8+2\sqrt{6.2}}}=\frac{4(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Reemplazando tenemos:

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0$$

Problema 7

Calcular

$$\sqrt{3+\sqrt{7}}\left(\sqrt{13+\sqrt{7}}-\sqrt{5+\sqrt{7}}\right)$$

Resolución:

Efectuando

$$\sqrt{\underbrace{(13+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}}-\sqrt{\underbrace{(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}}$$

$$=\sqrt{46+16\sqrt{7}}-\sqrt{22+8\sqrt{7}}$$

Trasformando

$$\sqrt{46+2\sqrt{32.14}}-\sqrt{22+2\sqrt{14.8}}$$

$$=\sqrt{32}+\sqrt{14}-(\sqrt{14}+\sqrt{8})=2\sqrt{8}-\sqrt{8}=\sqrt{8}$$

$$=2\sqrt{2}$$

Problema 8

Reducir

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

Resolución:

Transformando el numerador y denominador

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{3-\sqrt{5}})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{4+\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+3)}{3+\sqrt{5}}=2$$

Problema 9

Si la expresión $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ puede descomponerse a radicales simples. Hallar dicha descomposición, si se cumple $4A+B=4x^2+8x-16$

Resolución:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

elevando al cuadrado

$$A+\sqrt{B}=m+n+2\sqrt{mn}$$

$$A=m+n\ ;\ \ B=4mn$$

Reemplazando en el dato

$$4(m+n)+4mn=4x^2+8x-16$$

$$m+n+mn=x^2+2x-4$$

$$\underline{m}+\underline{n}+\underline{mn}=\underline{2x}+\underline{(x+2)(x-2)}$$

$$\Rightarrow m=x+2\ \wedge\ n=x-2$$

$$\therefore\ \sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$$

Problema 10

Si el radical doble

$$\sqrt{2ax^2y+5bxz^4+\sqrt{(7ab-2c)x^3z^4}}$$

se descompone en radicales simples. hallar el valor de

$$\frac{c}{ab}$$

Resolución:

Recordar $\quad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\ \ ;\ \ x>y$

donde

$$x=\frac{A+C}{2}\quad\wedge\quad y=\frac{A-C}{2}$$

$\wedge\quad C=A^2-B$: cuadrado perfecto.

Aplicando en el problema

$C=(2ax^2y+5bxz^4)^2-(7ab-2c)x^3yz^4$, debe ser un cuadrado perfecto.

$C=4a^2x^4y^2+(13ab+2c)x^3yz^4+25x^2z^8b^2$

Entonces

$$C=(2ax^2y)^2+\underbrace{(13ab+2c)x^3yz^4}_{\text{doble producto}}+(5xz^4b)^2$$

Luego se cumplirá

$$2(2ax^2y)(5bxz^4)=(13ab+2c)x^3yz^4$$

$$\Rightarrow 20ab=13ab+2c$$

$$\Rightarrow 7ab=2c$$

$$\therefore\ \frac{c}{ab}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

Problema 11

Hallar el valor de "a" en

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

Resolución:

Transformando a radical simple el primer miembro

$$\frac{\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}+1}+7=\sqrt{2}+8$$

$$8+\sqrt{2}=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

elevando al cuadrado

$$66+16\sqrt{2}=a+2\sqrt{128}$$

$$66+2\sqrt{128}=a+2\sqrt{128}$$

$$a=66$$

Problema 12

Hallar la raíz cuadrada de

$$\sqrt{3y}+y^2+2y\sqrt{2x}+\sqrt{4x^2+3y-4x\sqrt{3y}}$$

si $\quad 2x>\sqrt{3y}>0$

Resolución:

Analicemos por separado

$$\sqrt{4x^2-4x\sqrt{3y}+\left(\sqrt{3y}\right)^2}=\sqrt{\left(2x-\sqrt{3y}\right)^2}=2x-\sqrt{3y}$$

Reemplazando

$$\sqrt{3y}+y^2+2y\sqrt{2x}+2x-\sqrt{3y}$$

luego

$$\sqrt{y^2+2y\sqrt{2x}+\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\sqrt{\left(y+\sqrt{2x}\right)^2}=y+\sqrt{2x}$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada es $y+\sqrt{2x}$

Problema 13

Hallar el valor de A y B en

$$\sqrt[4]{8x^2+24x+9+4(2x+3)\sqrt{x^2+3x}}=\sqrt{x+A}+B\sqrt{x}$$

Resolución:

Acondicionamos buscando la forma práctica.

$$\sqrt{\sqrt{(2x+3)^2+4x(x+3)+2\sqrt{4x(x+3)(2x+3)^2}}}$$

entonces

$$\sqrt{2x+3+2\sqrt{x(x+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x+A}+B\sqrt{x}$$

$$\therefore\quad A=3\quad\wedge\quad B=1$$

Problema 14

Hallar el valor de

$$\sqrt{x+1+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x+1-\sqrt{2x+1}}$$

Para $\quad -\dfrac{1}{2}<x<0$

Resolución:

Transformando

$$=\frac{\sqrt{2x+2+2\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+2-2\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

Pero

$$-1<2x<0$$

$$0<2x+1<1$$

$$0<\sqrt{2x+1}<1$$

$$0>-\sqrt{2x+1}>-1$$

$$1>1-\sqrt{2x+1}>0$$

Luego, se tiene

$$\frac{\sqrt{2x+1}+1+1-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Problema 15

Hallar **a** y **b** en la siguiente igualdad

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{10}}+\sqrt{-3+\sqrt{10}}}{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{10}}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Resolución:

Transformando el numerador

$$N=\sqrt{3+\sqrt{10}}+\sqrt{-3+\sqrt{10}}$$

elevando al cuadrado

$$N^2=2\sqrt{10}+2\sqrt{(1)}=2\left(\sqrt{10}+1\right)$$

$$\Rightarrow N=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}$$

Luego

$$\frac{N}{D}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{10}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+3}\left(\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

entonces

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ a=5 \ \wedge\ b=2$$

Problema 16

Transformar en radical simple la expresión

$$\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-1-4a(a+1)}}$$

Resolución:

Transformando convenientemente.

$$\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-(2a+1)^2}}$$

Factorizando

$$\sqrt{3x+\sqrt{(2a+1)\left[6x-(2a+1)\right]}}$$

Haciendo un artificio: (Multiplicando y dividiendo $\sqrt{2}$)

$$\frac{\sqrt{6x+2\sqrt{(2a+1)\left[6x-(2a+1)\right]}}}{\sqrt{2}}$$

Como $6x=(2a+1)+(6x-(2a+1))$

$$\sqrt{\frac{2a+1}{2}}+\sqrt{\frac{6x-(2a+1)}{2}}$$

Problema 17

Si el polinomio

$$P(x)=16x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+1$$

admite raíz cuadrada exacta, hallar $P(-1)+P(1)$, sabiendo que sus coeficientes son enteros positivos, además $C^2-4C-5=A\cdot B$

Resolución:

Aplicando identidad $P(x)\equiv(4x^2+mx+1)^2$

desarrollando

$$16x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+1\equiv16x^4+8mx^3+(m^2+8)x^2+2mx+1$$

se tendrá

$$A=8m$$
$$B=m^2+8$$
$$C=2m$$

del dato $4m^2-8m-5=8m\cdot m^2\cdot 8$

Ordenando

$$5m^2-16m+3=0$$

$$\begin{array}{lcl} 5m & \times & -1 \\ m & & -3 \end{array}\qquad\Rightarrow m=3\ ;\ m\in\mathbb{Z}^+$$

Luego tenemos

$$P(x)=16x^4+24x^3+17x^2+6x+1$$

$$\therefore\ P(-1)+P(1)=68$$

Problema 18

Hallar la raíz cuadrada de

$M=(a^2+ab+bc+ac)(b^2+ab+bc+ac)(c^2+ab+bc+ac)$

si $\{a;b;c\}\subset\mathbb{R}^+$

Resolución:

Factorizando por agrupación se tiene

$$M=[a(a+b)+c(a+b)][b(b+a)+c(b+a)][c(c+a)+b(a+c)]$$

$$M=(a+b)(a+c)(a+b)(b+c)(c+a)(c+b)$$

$$M=(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2$$

$$\sqrt{M}=\sqrt{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}$$

$$\therefore\ \sqrt{M}=(a+b)(a+c)(b+c)$$

Problema 19

Hallar m; n; p si la raíz cuadrada de $mx^6+nx^5+px^4-22x^3+25x^2-8x+16$ es exacta.

Resolución:
Aplicando el método de la raíz cuadrada, pero en forma conveniente.
Como la raíz cuadrada es exacta, entonces debe cumplirse que

$$r(x) = (p-13)x^4 + (n+12)x^{15} + (m-4)x^6 = 0,$$

de aquí $m = 4$, $n = -12$ ∧ $p = 13$

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{16 - 8x + 25x^2 - 22x^3 + px^4 + nx^5 + mx^6} & 4 - x + 3x^2 - 2x^3 \\ \hline
\underline{-16} & 2(4) = 8 \\ \hline
\quad - 8x + 25x^2 & (8 - x)(-x) \\ \hline
\quad \underline{\ \ 8x - \quad x^2} & 2(4 - x) = 8 - 2x \\ \hline
\qquad 24x^2 - 22x^3 + px^4 & (8 - 2x + 3x^2)3x^2 \\ \hline
\qquad \underline{-24x^2 + 6x^3 - 9x^4} & 2(4 - x + 3x^2) \\ \hline
\qquad\quad -16x^3 + (p-9)x^4 + nx^5 + mx^6 & (8 - 2x + 6x^2 - 2x^3)\cdot \\
\qquad\quad \underline{16x^3 - 4x^4 + 12x^5 - 4x^6} & \qquad (-2x^3) \\
\qquad\quad (p-13)x^4 + (n+12)x^5 + (m-4)x^6 &
\end{array}$$

Problema 20

Dado
$P(x) = (x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+.....+ (x+ n)^2$
¿Cuál es el polinomio que debe adicionarse para que la expresión sea un cuadrado perfecto?

Resolución:
Reduciendo $P(x)$ tenemos
$P(x)=nx^2+2x(1+2+....n)+(1^2+2^2+.....+ n^2)$

$$P(x) = nx^2 + n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para que sea cuadrado perfecto

$$P(x) = nx^2 + n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + A$$

su $\Delta=0$
Luego de operar queda:

$$4n\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + A\right] = n^2(n+1)^2$$

efectuando

$$A = \frac{(1-n)(n)(1+n)}{12}$$

Problema 21

Racionalizar e indicar su denominador racionalizado de

$$\frac{8}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2\ \sqrt[5]{8}}$$

Resolución:

Haciendo $\sqrt[5]{2} = x \Rightarrow x^5 = 2$
Luego se tiene

$$\frac{8}{(1+x+x^2+x^3)^2\ x^3}$$

Pero $x^3+x^2+x+1 = \dfrac{x^4-1}{x-1}$

$$\frac{8}{\left(\dfrac{x^4-1}{x-1}\right)^2 x^3} = \frac{8(x-1)^2}{(x^4-1)^2\ x^3(x-1)^2}$$

Efectuando se tiene

$$\frac{8(x-1)^2}{x^8 - \cancel{2x^4} + 1 \quad x^5 + \cancel{2x^4} - x^3} = \frac{8(x-1)^2}{(x^5-1)(x^3-1)}$$

Reemplazando

$$\frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt[5]{2^5}-1\right)\left(\sqrt[5]{2^3}-1\right)} = \frac{8\left(\sqrt[5]{2}-1\right)^2}{\sqrt[5]{2^3}-1}$$

$$\frac{8(\sqrt[5]{2}-1)^2}{\sqrt[5]{8}-\sqrt[5]{1}} \times \frac{F.R}{F.R} = \frac{8(\sqrt[5]{2}-1)^2 F.R}{8-1}$$

∴ Su denominador es 7

Problema 22

Hallar el radical doble equivalente a

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}+4+2\sqrt{2}\,\sqrt[6]{8x}} - \sqrt{\sqrt[3]{x}+3+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x}}$$

Resolución:
Observamos que

$$(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{2}\,\sqrt[6]{8x}+4) = \sqrt[6]{x}^{\,2}+4\sqrt[6]{x}+4 = (\sqrt[6]{x}+2)^2$$

$$\sqrt[3]{x}+3+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x}^{\,2}+2\sqrt{3}\,\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}^{\,2} = (\sqrt[6]{x}+\sqrt{3})^2$$

Luego tenemos

$$\sqrt{\left(\sqrt[6]{x}+2\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \cancel{\sqrt[6]{x}}+2-\cancel{\sqrt[6]{x}}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$$

cuyo radical doble es $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{4+3-2\,.\,2\sqrt{3}} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

Problema 23

Si a, b, c son positivos y además $c > b > a$
Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{3abc}{\sqrt{a+b+c+\sqrt{4ac-3b^2+6bc-2ab}}}$$

Resolución:

$\underline{4ac}\ \ \underline{3b^2}+6bc-2\underline{\underline{a}}b$

$2a(\underline{2c-b})+3b(\underline{2c-b})=(2c-b)(2a+3b)$

En

$$\frac{3abc}{\sqrt{a+b+c+\sqrt{(2c-b)(2a+3b)}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}abc}{\sqrt{\underbrace{2a+2b+2c}_{x+y}+2\sqrt{\underbrace{(2c-b)(2a+3b)}_{x.y}}}}$$

Racionalizando

$$=\frac{3\sqrt{2}abc}{\sqrt{2c-b}+\sqrt{2a+3b}}\times\frac{\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}abc(\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b})}{2c-b-2a-3b}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}abc(\sqrt{2c-b}-\sqrt{2a+3b})}{2c-2a-4b}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}abc(\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2c-b})}{2(a+2b-c)}$$

El denominador racionalizado es $2(a+2b-c)$

Problema 24

Si m y n se diferencian en 1, racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt[2(n+1)]{2^{C_n^m}}+\sqrt[3(n+1)]{3^{C_n^m}}}$$

e indicar el denominador

además $C_n^m=C_n^{n+1}$

Resolución:

Como $C_n^m=C_n^{n+1}\Rightarrow m=n+1$

Luego

$$\frac{1}{\sqrt[\cancel{2(n+1)}]{2^{\cancel{n+1}}}+\sqrt[\cancel{3(n+1)}]{3^{\cancel{n+1}}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\quad \text{es equivalente a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{3^2}}=\frac{1}{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{8}}\times\frac{F.R}{F.R}$$

$$=\frac{F.R}{9-8}=\frac{F.R}{1}$$

∴ El denominador es 1

Problema 25

Racionalizar y proporcionar su denominador en

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^3-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}$$

Resolución:

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^3-\sqrt{2}^3-\sqrt{3}^3-\sqrt{5}^3$

Desarrollando

$$=\sqrt{2}^3+\sqrt{3}^3+\sqrt{5}^3+3(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}^3-\sqrt{3}^3-\sqrt{5}^3$$

$$=\frac{1}{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\times\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1\,.\,F.R.}{3(3-2)(5-3)(5-2)}=\frac{F.R}{18}$$

∴ El denominador es 18

Problema 26

Si se verifica que

$$2a=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{8}{a}}\ ,\quad 2b=\sqrt{\frac{b}{8}}+\sqrt{\frac{8}{b}}$$

Donde $1 < b < a < 2$

Hallar el equivalente de

$$E=\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}}\right)$$

Resolución:

Del primer dato

$$2a\pm 2=\sqrt{\frac{a}{8}}+\sqrt{\frac{8}{a}}\pm 2$$

$$2(a\pm 1)=\left(\sqrt[4]{\frac{8}{a}}\pm\sqrt[4]{\frac{a}{8}}\right)^2 ,$$

de donde

$$\sqrt{2}\,\sqrt{a+1}=\sqrt[4]{\frac{8}{a}}+\sqrt[4]{\frac{a}{8}} \quad . \qquad \ldots(\alpha)$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{a-1}=\sqrt[4]{\frac{8}{a}}-\sqrt[4]{\frac{a}{8}} \quad . \qquad \ldots(\beta)$$

De $(\alpha+\beta)$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)=2\sqrt[4]{\frac{8}{a}} \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

De $(\alpha)-(\beta)$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)=2\sqrt[4]{\frac{a}{8}} \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

(I) ÷ (II)

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\right)}{\cancel{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\right)}=\frac{\cancel{2}\sqrt[4]{\frac{8}{a}}}{\cancel{2}\sqrt[4]{\frac{a}{8}}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=\sqrt[4]{\frac{8^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{8}{a}}$$

$$,\quad \sqrt{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}\right)=\sqrt{8} \quad \ldots\ldots (*)$$

Similarmente $2b=\sqrt{\dfrac{b}{8}}+\sqrt{\dfrac{8}{b}}$

Se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{b+1}-\sqrt{b-1}}{\sqrt{b+1}+\sqrt{b-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{8}} \quad \ldots \qquad \ldots\ldots (**)$$

Reemplazando (*) y (**) en E

$$E=\sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{8}}=1$$

Problema 27

Si $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$,

calcular $a+b+c$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Resolución:

Racionalizando en el radicando

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}+1}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}^2+\sqrt[3]{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt[3]{3}$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}\times\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}^2+3\sqrt[3]{2}+3}}$$

Escribiendo 3 como $\sqrt[3]{2}^3+1$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \ ;$$

de donde $a=\dfrac{4}{9}, b=-\dfrac{2}{9}, c=\dfrac{1}{9}$

$$\therefore a+b+c=\frac{1}{3}$$

Problemas Propuestos

1. Al efectuar

$\sqrt[21]{7+5\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[7]{1-\sqrt{2}}$, se obtiene:

A) -1 B) 1 C) 2
D) -3 E) -7

2. Indicar uno de los radicales simples de la expresión

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}$ E) $-\sqrt{3}$

3. Si el polinomio
$P(x) = 1 + \alpha x + 9x^2 + \beta x^3 + 16x^4$
posee raíz cuadrada exacta.
Determinar el valor de: $\alpha\beta$

A) 0 B) -8 C) 8
D) -16 E) 16

4. El valor reducido de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{6}\right)^4$$

A) 125 B) 100 C) 96
D) 80 E) 576

5. Hallar uno de los radicales simples de la expresión

$$\sqrt{x^2+1-2\sqrt{x^3-2x^2+3x-2}}\ ;\ x>1$$

A) $\sqrt{x^2-x+1}$ B) $\sqrt{x^2+x-2}$
C) $\sqrt{x^2-x+2}$
D) $\sqrt{x-1}$ E) C o D

6. El radical doble

$$\sqrt{24+8\sqrt{5}+12\sqrt{3}+4\sqrt{15}}$$

equivale a

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{w}$$

Calcular $(x\,.y\,.\,z\,.\,w)$

A) 200 B) 225 C) 215
D) 23 E) 25

7. Calcular el valor de m+n, sabiendo que el cuadrado del resto es igual a la raíz cuadrada del polinomio
$P(x) = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + mx + n$

A) 117 B) 115 C) 100
D) 99 E) 81

8. Si el radical doble

$$\sqrt{ax+by+\sqrt{xy(ab+c)}}$$

se desdobla en simples

Determinar el valor de $\left(\dfrac{ab}{c}\right)$

A) 3 B) 2 C) 1
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{3}$

9. El equivalente de la expresión

$$\sqrt{1+x+\sqrt{2x+1}}+\sqrt{1+x-\sqrt{2x+1}}$$

Para $-0{,}5 < x < 0$
Será

A) $x+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-x$ C) $2x$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

10. Hallar la raíz cúbica de

$$\left(9\sqrt{3}+11\sqrt{2}\right)$$

A) $\sqrt{2}+3$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{6}$

D) $1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

11. El equivalente de

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\ , \text{ es :}$$

A) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}+1$ B) $\sqrt{2}-1$

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

12. Proporcionar el denominador racional de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$$

A) 1 B) 2 C) 5

D) 14 E) 15

13. El denominador racional de

$$\frac{-6}{-2+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}\ , \text{ sería :}$$

A) 1 B) 2 C) -6

D) 7 E) 14

14. El valor del término racional que se obtenga al efectuar

$$\frac{16\sqrt[3]{4}-8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}\ , \text{ será :}$$

A) 16 B) 12 C) 24

D) 2 E) 1

15. Hallar el denominador racional de la expresión

$$\frac{N}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{32}}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 6 E) 0

16. Descomponer en radicales sencillos e indicar uno de los radicales simples de

$$\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y}+\sqrt{\left(\frac{4}{x^2+xy}\right)+\left(\frac{4}{xy+y^2}\right)}}$$

A) $\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ B) $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$ C) $\sqrt{\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}}$

D) $\sqrt{\dfrac{2}{x+y}}$ E) $\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$

17. El denominador racional de la expresión

$$\frac{\sqrt{16\,.\cos(2\pi)}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[6]{6}}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)}, \text{ es :}$$

A) 5 B) 2 C) 3

D) 8 E) 9

18. Hallar el equivalente de

$$\sqrt{\frac{6+\sqrt{12}}{3-\sqrt{3}}}$$

A) $\sqrt{3}-1$ B) $2-\sqrt{3}$ C) $1+\sqrt{3}$

D) $2+\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

19. Averiguar al denominador racional de la expresión

$$\frac{9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}}}{\sqrt[9]{9^8}-\sqrt[9]{9^7}+\dots+1}$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) incalculable E) no se racionaliza

20. Hallar el valor reducido de :

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\sqrt{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,\sqrt{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\,\sqrt{\sqrt{8}}}$$

A) $\frac{(1+\sqrt{3})}{4}$ B) $\frac{(1+\sqrt{2})}{3}$ C) $\frac{(1+\sqrt{3})}{3}$
D) $\frac{(2+\sqrt{3})}{3}$ E) $\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

Al racionalizar el denominador de

$$f=\frac{323}{21-2\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{11}}$$

se obtiene otra expresión equivalente cuyo denominador es :

A) 50 B) 20 C) 40
D) 30 E) 10

Efectuar

$$4\left[\frac{1}{1+\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{4}}\right]\left[\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{4}+\sqrt{3}}\right]$$

A) $13+5\sqrt{3}$ B) $5+13\sqrt{3}$ C) $5-13\sqrt{3}$
D) $13-5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}-13$

23. La igualdad

$$\frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}+7=\sqrt{a+2\sqrt{128}}$$

se verifica, si "a" toma el valor de :

A) 60 B) 64 C) 66
D) 62 E) 68

24. Indicar el denominador racionalizado de

$$\frac{5}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}$$

A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 5

25. Reducir

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}+1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

26. Indicar un radical simple de

$$\sqrt{\frac{2x+\sqrt{8x}}{4}+\sqrt[4]{2x^3}}$$

A) $\sqrt[3]{x}$ B) $\sqrt{\frac{x}{2}}$ C) $\sqrt{x}$
D) $2\sqrt{x}$ E) $\sqrt{2/x}$

27. Siendo $x^2 = x + 1$; $x > 0$
Simplificar

$$P(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

A) $x^2/\sqrt{2}$ B) $x^3/\sqrt{2}$ C) $x/\sqrt{2}$
D) 1 E) $-x^2/\sqrt{2}$

28. Determinar el valor de
$m^2+m^2n^2+n^2-2m^2n+2mn^2-2mn$
Si

$$m = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{29}+\sqrt{13}}{\sqrt{11}-\sqrt{29}+\sqrt{13}}$$

$$n = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{11}+\sqrt{13}}$$

A) 2 B) 1 C) -1
D) -2 E) 3

29. Indicar su denominador racionalizado de

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}$$

A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x-1$
D) $2x+1$ E) $2x-1$

30. Hallar el equivalente de la suma

$$S = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \ldots\ldots(\text{"n"sumandos})$$

A) $\sqrt{n}+1$ B) $\sqrt{n+1}-1$ C) $\sqrt{n}-1$
D) $\sqrt{n+1}+1$ E) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

31. Determinar el denominador de la expresión que se obtiene al racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a+b}}$$

A) 3ab(a+b) B) a+b C) a^2+b^2
D) ab E) 3ab

32. Reducir

$$\frac{7\sqrt{113+72\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-1} - 22\sqrt{2}$$

A) 3 B) 25 C) 12
D) 6 E) 15

33. Si $0 < a < 1$; reducir

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}} + \sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}$$

A) a B) $1/a^2$ C) $1/a$
D) a^2 E) 2a

34. Transformar a radicales simples

$$\sqrt{3x+\sqrt{6x(1+2a)-4a(a+1)-1}}\ ,$$

indicando un radical simple.

A) $\sqrt{\frac{1-2a}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{1+2a}{2}}$

C) $\sqrt{\frac{2+a}{2}}$

D) $\sqrt{\frac{2-a}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{6x+2a+1}{2}}$

35. Hallar el valor de

$$\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

A) $\frac{13}{5}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{13}{7}$

D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{13}{9}$

36. Racionalizar

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}}$$

e indicar el denominador racionalizado.

A) a^2+b^2 B) a^2-b^2 C) a^4+b^4

D) $(a-b)$ E) $a+b$

37. Si :

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

Calcular $a+b+c$

A) $1/3+3\sqrt{2}$ B) 2 C) 1

D) 3 E) 1/3

38. Racionalizar las expresiones

- $\dfrac{8}{(1+\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{8})^2-\sqrt[5]{8}}$
- $\dfrac{4}{(1-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$
- $\dfrac{100}{\sqrt[99]{9^{98}}-\sqrt[99]{9^{97}}+\sqrt[99]{9^{96}}-\ldots+1}$

Y dar como respuesta el producto de denominadores racionales y positivos.

A) 7 B) 100 C) 1

D) 35 E) 14

39. Luego de racionalizar

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[6]{243}+1)+\sqrt{3}(\sqrt[6]{3}+1)}$$

indique el denominador obtenido.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 6 E) 12

40. Simplificar la expresión

$$\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)$$

si $0<a<1$

A) -2 B) 2 C) -1

D) 1 E) 0

1	A	11	E	21	D	31	A
2	A	12	B	22	E	32	B
3	E	13	D	23	C	33	C
4	E	14	C	24	A	34	B
5	E	15	C	25	B	35	D
6	B	16	A	26	B	36	D
7	A	17	A	27	C	37	E
8	E	18	C	28	B	38	A
9	E	19	C	29	C	39	C
10	E	20	E	30	B	40	C

Claves

CAPÍTULO

X

Análisis combinatorio

Gottfried Wilhelm Leibnitz
(1646-1716)

Fue político, historiador, jurista, filósofo, pedagogo, viajero de origen alemán, la mente más universal de su época. Se pasaba días enteros en la biblioteca de su padre, leía indiscriminadamente a Platón, Aristóteles, Cicerón, Descartes, y a los 15 años era estudiante de la Universidad de Leipzig donde asombraba a sus profesores, a los 19 años quiso recibir el grado de Bachiller pero es impedido por su juventud, a los 20 años escribe *Disertación del Arte Combinatorio*, a los 21 años recibe el título de Doctor en Derecho, a los 26 años se encuentra en París, allí es donde comienza el período más fructífero y relativamente constante de sus trabajos de matemática, paralelamente a Newton descubre el Cálculo Diferencial, desarrolló notablemente "El Análisis Combinatorio".
Murió cuando escribía la historia de la familia Brunswick en la Biblioteca de Hanover.

$$\binom{p}{q} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q} \quad q \in \mathbb{N}\,;\, p \in \mathbb{R}$$

LECTURA

La probabilidad de ganar

D'Alembert, celebre matemático, erró la solución de este sencillo problema: "Si se arroja dos veces una misma moneda a cara o cruz, ¿cuál es la posibilidad de obtener cruz por lo menos una vez?"

El matemático respondió que sólo había tres casos posibles: cruz en el primer tiro, cruz en el segundo o cruz en ninguno. Es decir dos casos favorables sobre tres posibles.

Pero en realidad los casos posibles son cuatro:

	Primer tiro	Segundo tiro
1.	Cara	Cara
2.	Cara	Cruz
3.	Cruz	Cara
4.	Cruz	Cruz

La probabilidad de ganar se da en 3/4, ya que en el primer lanzamiento la mitad de los casos es cruz; de la mitad restante el 50%, es decir la 1/4 parte del total será también cruz. La probabilidad total es pues 1/2 + 1/4 = 3/4

Un negocio redondo

Juan, un estudiante de matemáticas, propone el siguiente negocio a un amigo suyo llamado Alfonso.

"Tomemos el día 1 del mes próximo como punto de partida. Yo te daré cada día 1 000 000 de soles durante todo el mes. A cambio, tú me darás el primer día 1 sol, el segundo 2soles, el tercero 4 soles y así sucesivamente. ¿Aceptas el trato?

Alfonso, muy seguro de que a su amigo el estudiar tantas matemáticas le había ablandado el cerebro, acepta rápidamente, y empieza a hacer proyectos para emplear el dinero que va a pagar. Sin embargo, Juan hace cálculos para saber cuánto le rentarán sus ganancias si las coloca en un Banco e interés compuesto.

¿Quién tiene razón en su optimismo?

Un sencillo cálculo nos dará la respuesta:

Juan pagará a Alfonso: $30 \times 1\,000\,000 = 30\,000\,000$ *soles*

Alfonso pagará a Juan: $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots$ *; es decir, la suma de una progresión geométrica,*

$S_{30} = a_1 . \dfrac{r^{30} - 1}{r - 1}$ *y como* $a_1 = 1$ *y* $r = 2$*, sale* $S_{30} = 1 . \dfrac{2^{30} - 1}{2 - 1} = 2^{30} - 1 = 1\,073\,741\,823$ *soles*

Por tanto, Juan ganará imás de mil millones de soles

Fuente. Enciclopedia Temática - Argos Vergara.

Análisis combinatorio

OBJETIVOS

- Comprender los diversos arreglos y selecciones que sea posible formar con los elementos de algún conjunto.
- Dotar al lector de los elementos de juicio a fin de que en lo posterior aplique en la resolución de los problemas de análisis combinatorio y probabilidades que surgen en el transcurso de la vida cotidiana.
- Diferenciar la utilidad de una ordenación, permutación o combinación que están relacionados con el factorial.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo veremos la teoría de coordinación (permutaciones, ordenaciones, combinaciones). Citaremos algunos ejemplos donde podrá distinguir la diferencia y la afinidad entre cada una de ellas.

I. Un aficionado a la carrera de caballos juega al "tiercés" (apuesta .... los tres primeros caballos de una carrera), los caballos son designados con las iniciales A, B, C.

¿Cuáles son las posibles órdenes de llegada y cuántas son?

En este caso el apostador tendrá que ordenar a estos tres elementos A, B, C ; veamos las posibles llegadas:

1er.	A	A	B	B	C	C
2do.	B	C	C	A	A	B
3er.	C	B	A	C	B	A

De aquí concluimos que existen 6 formas de llegar.

II. Volvamos al hipódromo, ¡un día de gran premio! A la partida tenemos 20 caballos que designaremos por medio de números {1, 2, 3, ... , 20}. Nuestro jugador deshace, dando muestras de prudencia, viene a consultar para preguntar cuántos "tiercés" tiene que jugar en total para estar seguro de ganar en el orden, -recordando que {1,2,3} es diferente {2,1,3}. El problema consiste en determinar de cuántas maneras pueden ordenar veinte objetos de tres en tres, considerando que dos ordenamientos que comprenden los mismos elementos en orden diferente son distintas. $A_3^{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$ (6 840 tiercés)

III. Volvamos con el apostador. Si 6 840 tiercés es demasiado oneroso para su bolsillo puede renunciar a "cubrir" todas posibilidades de llegada y conformarse con una ganancia (en el desorden). Por consiguiente, para él, un tiercés como {3,4,5} es idéntico a {4, 5, 3}; {5, 4, 3}; {4, 3, 5}, etc., en lugar de jugar los 6 órdenes posibles, sólo jugará uno.

De donde el número de combinaciones es entonces 6 veces menos elevado que en el de las ordenaciones. $C_3^{20} = \dfrac{A_3^{20}}{6}$

Este último jugará solamente 1 140 tiercés.

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Se define al factorial del número natural "**n**" como aquel producto que resulta de multiplicar todos los números naturales desde la unidad hasta el número **n**.

La simbología a utilizar será: $n!$; $\lfloor\underline{n}$; $\underline{n}\rfloor$

Se lee: el factorial del número "n" o "n" factorial.
Matemáticamente:

$$\boxed{n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ ó } n = 1 \\ 1\times 2\times 3\ldots\ldots\times n; & \text{si } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \end{cases}}$$

Ejemplos: $3! = 1\times2\times3 = 6$

$5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$

$(-1/3)!$ no está definido, porque $-1/3 \notin \mathbb{N}$

PROPIEDADES

1. $\lfloor\underline{n} = 1\,.\,2\,.\,3\,.....\,(n-1).n \Rightarrow \boxed{\lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n-1}}$

2. Si: $\lfloor\underline{a} = \lfloor\underline{b} \Rightarrow a = b \;\; \forall\, a, b, \in \mathbb{N}$

Ejemplo:
Al efectuar la expresión

$$\sqrt[\lfloor\underline{1}+\lfloor\underline{2}+\lfloor\underline{3}]{\frac{\lfloor\underline{25}}{\lfloor\underline{25}+\lfloor\underline{26}+\lfloor\underline{27}}}$$

Resolución:
Al operar tendremos

$$\sqrt[1+2+6]{\frac{\lfloor\underline{25}}{\lfloor\underline{25}\,(1+26+27.26)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27\,(1+26)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{27\,.\,27}}$$

$$= \frac{1}{3\,.\,3} = \frac{1}{9}$$

SEMIFACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Notación $\lfloor\!\lfloor\underline{n}$ ó $n!!$
Se define

$$\boxed{\lfloor\!\lfloor\underline{n} = \begin{cases} 1\times3\times5\times\ldots\ldots n, & \text{si "n" es impar} \\ 2\times4\times6\times\ldots\ldots n, & \text{si "n" es par} \end{cases}}$$

Ejemplo 1: $7!! = 1\times3\times5\times7 = 105$

$8!! = 2\times4\times6\times8 = 384$

Nota: $(n!)! \neq n!!$

Ejemplo 2

Expresar $\lfloor\!\lfloor\underline{2n}$ en función de $\lfloor\underline{n}$; $n \in \mathbb{N}$

Resolución:

$$\lfloor\!\lfloor\underline{2n} = 2\times4\times6\times\ldots..(2n)$$

$$= (1\times2)(2\times2)(3\times2)\ldots(2\times n)$$

$$= 1\times2\times3\times\ldots..\times n\times\underbrace{2\,.\,2\,.\,2\ldots2}_{\text{"n" veces}}$$

$$\therefore\; \lfloor\!\lfloor\underline{2n} = 2^n\lfloor\underline{n}$$

ORDENACIONES

Dados los elementos a_1 ; a_2, ..., a_n se define a una ordenación (de orden) como aquel sub-conjunto capaz de ser formado ya sea tomando parte o el total de estos "n" elementos, los mismos que lograrán distinguirse ya sea por la composición de sus elementos o por el orden de seguimiento.

Así por ejemplo diremos que las ordenaciones binarias de los elementos: a, b, c son seis, siendo éstas: ab, bc, ca, ac, cb, ba.

Para representar una ordenación usaremos la notación: $A_{(n,k)}$ o A_k^n

NOTA: Observemos que: $n \geq k \geq 0$ (acorde con nuestra definición) y en el caso particular en que k=0, la ordenación de estos "**n**" elementos dispuestos de cero a cero ofrecería como único subconjunto al vacío, puesto que no contendría elementos.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

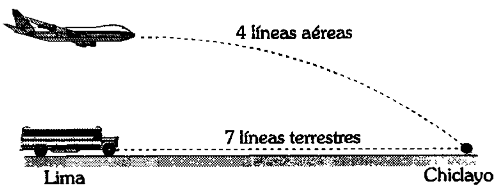
Nos permite determinar el número de posibilidades diferentes que tenemos para efectuar tal o cual acción.

I. Principio de adición

Ejemplo 1

Arturo desea viajar de Lima a Chiclayo, contando para ello con 7 líneas terrestres y 4 líneas aéreas. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar su viaje?

Resolución:



Viaja por tierra		Viaja por aire	
7	+	4	= 11

puede realizar su viaje de 11 maneras distintas.

Principio de adición

Si un evento designado como A se puede realizar de "a" maneras diferentes y otro evento B puede realizar de "b" maneras diferentes (A y B no simultáneamente) en total pueden realizarse de "a+ b" maneras diferentes.

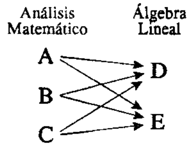
II. Principio de multiplicación

Ejemplo 2

Cuando Arturo va a la universidad lleva siempre dos libros (de cursos diferentes) pero el cuenta en el ciclo con tres libros de análisis matemático (A, B, C) y 2 libros de álgebra lineal (D,E)

¿De cuántas maneras distintas podrá llevar sus libros?

Resolución:



Puede llevar de 6 maneras diferentes.

Principio de multiplicación

Si un evento designado por A ocurre de "a" maneras diferentes y para cada una de ellas otro evento designado como B ocurre "b" maneras diferentes, entonces el evento A seguido del otro evento B o ambos A y B ocurren simultáneamente de "a . b" maneras distintas.

NÚMERO DE ORDENACIONES

TEOREMA

El número de ordenaciones de "**n**" elementos (distintos) dispuestos de "**k**" en "**k**" es igual al producto de los "**k**" números naturales consecutivos desde [**n**-(**k**-1)] hasta n.

Es decir:

$$A_k^n = n.(n-1)(n-2).....[n-(k-1)] \; ; \quad k>0 \quad n \geq k \quad n \; ; k \in \mathbb{N} \quad .... (I)$$

Demostración:

Como el número de ordenaciones de "**n**" elementos dispuestos de **k** en **k** es igual al número de todos los subconjuntos ordenados de **k** elementos del conjunto que contiene **n** elementos. Pues es evidente que el primer elemento del subconjunto podrá ser elegido de "**n**" modos, mientras que el segundo elemento del subconjunto sólo podrá ser escogido de "n-1" modos. Pero como cada una de las maneras de escoger al primer elemento puede unirse con cada una de las maneras de elegir al segundo elemento, pues tendremos **n(n-1)** modos de elegir los dos primeros elementos al construir un subconjunto ordenado de **k** elementos.

Escogidos estos dos primeros elementos, quedan aún (n-2) posibilidades para escoger al tercer elemento y una vez más cada una de estas posibilidades podrá realizarse con cada una de las posibilidades de escoger los primeros dos elementos, o sea que, la opción de realizar a los primeros tres elementos será de: $n(n-1)(n-2)$ modos. Siguiendo este análisis el último, es decir el k-ésimo elemento del subconjunto de **k** elementos podrá ser escogido de $[n-(k-1)]$ modos, ya que al elegir este elemento k-ésimo, "k-1" elementos ya habrían sido escogidos, quedando únicamente $[n-(k-1)]$ elemento.

De modo que para el número de posibilidades que se tendrían hasta este k-ésimo elemento será de: $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots [n-(k-1)]$

Con lo cual queda demostrada la fórmula (I)

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras podrá ser elegido el delegado y subdelegado, en un salón constituido de 20 alumnos, bajo la condición de que cada alumno pueda ser elegido sólo a uno de estos cargos?

Resolución:

Asumamos que primero se eligiera al delegado. Puesto que cada alumno del grupo tiene la posibilidad de ser elegido como delegado, es evidente que existan 20 maneras de ser elegido.

Luego cada una de las 19 personas que quedan tendrán la facultad de ser tomadas como delegado suplente. De modo que cada uno de los 20 modos de elegir al delegado tendrá que relacionarse con cada una de las 19 posibilidades de obtener al subdelegado. Es decir existirán $20 \cdot 19 = 380$ maneras de elegir al delegado y subdelegado de este salón.

Ejemplo 4

¿De cuántas maneras diferentes podrán sentarse cuatro personas al entrar en un vagón de ferrocarril que posee seis asientos?

Resolución:

La primera persona podrá escoger su asiento de seis maneras, la segunda de cinco, la tercera de cuatro y la cuarta de tres, además como cada una de estas maneras puede asociarse con cada una de las otras, pues, resulta que podrán sentarse de $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ maneras distintas.

Observación: Si multiplicamos y dividimos por $\lfloor n-k$ en (I) obtendremos

$$A_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]\lfloor n-k}{\lfloor n-k}$$

$$\boxed{A_k^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k} \; ; \quad n, k \in \mathbb{N} \wedge n \geq k}$$

PERMUTACIONES

Se define como aquel caso particular de una ordenación en la cual los "n" elementos se dispongan de **n** en **n**.

De donde podemos desprender que las diferentes permutas sólo varían en función al orden de elementos.

Así que todas las permutas que podríamos obtener con los elementos: **a, b, c** serían seis a saber:

abc, acb, bac, bca, cab, cba

NÚMERO DE PERMUTACIONES

TEOREMA 1

El número de permutaciones de **n** elementos (y que designaremos por P_n) será igual al número de todos los subconjuntos ordenados de **n** elementos del conjunto que contiene "**n**" elementos.
Matemáticamente:

$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1 = \lfloor\underline{n}$;
$n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$

Ejemplo 5
En una reunión 4 personas manifestaron su deseo de hacer uso de la palabra.
¿De cuántas maneras será posible disponerlas en la lista de oradores?
Resolución:
El primer orador tendrá la posibilidad de ser escogido de cuatro modos, mientras que el segundo, como es evidente, tendrá tres maneras. Pues ahora sólo quedan dos personas que pretenderán ser elegidas en el tercer puesto de esta lista de oradores y como es lógico, sólo hay dos maneras de llenarlo. Finalmente el cuarto orador ya no tiene ninguna opción en vista de que intervendrá como último.
Pero como cada manera de escoger al primer orador puede combinarse con cada manera de escoger al segundo orador y con cada una de las dos maneras de escoger al tercer orador, pues el número de modos de hacer la lista de oradores es igual a $4.3.2.1 = 24$

TEOREMA 2

Si "p_n" representa el número de permutaciones distintas de **n** elementos tomados de **n** en **n**, en donde exista un primer tipo de α elementos iguales entre sí, β elementos iguales de un segundo tipo, γ elementos iguales entre sí de un tercer tipo y así sucesivamente, entonces

$$P_n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}\ldots}$$

Demostración:
Si sustituyéramos los α primeros elementos iguales por α objetos diferentes entre sí y también de los elementos restantes, entonces de cada una de las P_n permutaciones obtenidas podemos tener $\lfloor\underline{\alpha}$ permutaciones diferentes permutando los α nuevos elementos entre ellos mismos. Luego de las P_n permutaciones originales obtendremos $P_n \cdot \lfloor\underline{\alpha}$ permutaciones conteniendo cada una β elementos iguales entre sí, γ objetos iguales entre sí, etc. Análogamente al sustituir estos β elementos iguales por β elementos diferentes, obtendremos: $P_n \cdot \lfloor\underline{\alpha} \cdot \lfloor\underline{\beta}$ permutaciones, conteniendo cada una γ elementos iguales entre sí, etc.
Al seguir este proceso finalmente podremos obtener: $P_n \cdot \lfloor\underline{\alpha} \cdot \lfloor\underline{\beta} \cdot \lfloor\underline{\gamma} \cdot \ldots\ldots = \lfloor\underline{n}$ permutaciones, cada una de las cuales estarían formadas con "n" objetos distintos.

Ejemplo 8
Determinar el número de permutaciones diferentes que serían posible formarse con las letras de la palabra **acacias.**
Resolución:
La palabra contiene 7 letras, de las cuales 3 son "a", 2 son "c" y el resto diferentes. De modo que aplicando el razonamiento anterior tendremos

$$P_7 = \frac{\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{2}} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 420$$

Ahora consideremos el número de arreglos de **n** elementos diferentes alrededor de un círculo. Cada uno de tales arreglos se denomina una permutación circular o cíclica. Primero consideremos a los **n** elementos distintos ordenados en línea recta y designemos a uno de estos con "A", y en torno a la posición que puede ser al inicio o final realicemos los diversos arreglos permisibles pero solo a nivel de los "n-1" elementos restantes. Sin embargo, cabe notar que esto no se daría en una permutación circular, donde la posición del elemento **A** debe considerarse fija y los "n-1" elementos restantes podrán arreglarse de $\lfloor\underline{n-1}$ formas distintas respecto a A. De aquí surge el teorema siguiente:

> **TEOREMA 3**
>
> El número de permutaciones circulares de "n" objetos diferentes es igual a $\underline{|n-1}$

Ejemplo 9
Deseamos ubicar a un grupo formado de 3 hombres y 3 mujeres de un modo tal que ellas queden alternadas con ellos. Averiguar el número de formas de hacerlo si:
a) Se sientan en línea recta.
b) Se sentarían alrededor de una mesa circular.
Resolución:

- **Caso a:**
  Consideremos inicialmente que las mujeres se ubican en los lugares con número impar y los hombres en los lugares de número par, pudiendo realizarse esto de $\underline{|3} \cdot \underline{|3}$ formas distintas.

Un número igual de arreglos podrán obtenerse sentando a los hombres en los lugares de número impar y a las mujeres en los lugares con número par.
Por tanto, el número total de formas diferentes será igual a: $2 \cdot \underline{|3} \cdot \underline{|3} = 72$

- **Caso b:**
  Sentemos primero a las mujeres alrededor de la mesa en $\underline{|2}$ formas (según el teorema 3).
  Luego quedarían 3 lugares alternados para sentar a los tres hombres y esto podrá realizarse de $\underline{|3}$ formas. Por lo tanto, el número total de formas diferentes será igual a $\underline{|2} \cdot \underline{|3} = 12$

COMBINACIONES

DEFINICIÓN

Recibe el nombre de combinación cada uno de los diferentes grupos que puedan formarse tomando a todos o parte de los elementos de un conjunto, sin considerar el orden de sus elementos.

Para su representación usaremos la simbología $C_{(n,k)}$; C^n_k ; $\binom{n}{k}$

> **TEOREMA**
>
> El número de combinaciones de "**n**" elementos diferentes tomados de **k** en **k**, (designado por C^n_k) viene a ser aquel número de maneras en que estos "**n**" elementos pueden juntarse con la condición de que cada grupo se diferencie de los demás por lo menos en un elemento, sin interesar su orden.
>
> Matemáticamente:
>
> $$C^n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-1)]}{\underline{|k}} \; ; \; k \le n$$

Demostración:
De cada combinación de "k" elementos diferentes podremos formar $\underline{|k}$ ordenaciones. Por tanto, de todas las combinaciones podemos tener un total de $C^n_k \cdot \underline{|k}$ pudiéndose igualar al número de ordenaciones de "n" elementos distintos al ser tomados de **k** en **k**. Por lo tanto: $C^n_k \cdot \underline{|k} = A^n_k$

De donde

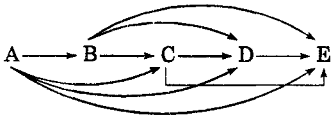
$$\boxed{C^n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-1)]}{\underline{|k}}} \;\ldots\ldots\ldots (I)$$

Ejemplo:

Un grupo de alumnos de la facultad de ciencias, requieren ser evaluados en matemática por una comisión formada de dos profesores, ¿De cuántos modos podrá ser compuesta tal comisión, si en esta facultad existen cinco profesores de matemática?

Resolución:

Designemos a los profesores por A, B, C, D, E, con los cuales será posible formar las comisiones



Se desprenden 10 comisiones de evaluación.

NOTA: Como es natural la resolución de este problema suscitará un sentimiento de insatisfacción. En efecto, si la cantidad de profesores no fuese de cinco, sino de catorce y la comisión quede conformada de siete. Pues el intento de obtener el resultado con el mismo método sería un fracaso, ya que en este caso se podría obtener de más de tres mil comisiones de examinadores. De esto surge la necesidad de deducir fórmulas genéricas que resuelvan este tipo de problemas.

Corolario:

El número de combinaciones de **"n"** elementos diferentes tomados de **k** en **k**, es posible obtenerla de otro modo.

Si multiplicamos y dividimos por $\lfloor\underline{n-k}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-1)]}{\lfloor\underline{k}\cdot\lfloor\underline{n-k}}\cdot\lfloor\underline{n-k}$$

aquí el numerador es el $\lfloor\underline{n}$

en consecuencia

$$\boxed{C^n_k=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{k}\cdot\lfloor\underline{n-k}}}$$

Ejemplo:

Un estudiante dispone de una biblioteca con 12 libros, ¿de cuántas maneras podrá realizar una selección de 5 libros?

a) Cuando un determinado libro sea incluido siempre.

b) Cuando un determinado libro sea siempre excluido.

Resolución:

Caso a:

Si queremos que un libro específico esté siempre incluido en cada selección, tendremos que escoger sólo 4 de los 11 restantes. Por ello el número de maneras será

$$C^{11}_4=\frac{\lfloor\underline{11}}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{7}}=\frac{11.10.9.8.\cancel{\lfloor\underline{7}}}{1.2.3.4.\cancel{\lfloor\underline{7}}}=330$$

Caso b:

Si queremos que un determinado libro no participe en la selección, tendremos la posibilidad de seleccionar 5 libros de los 11 restantes.

Es decir, el número de maneras será

$$C^{11}_5=\frac{\lfloor\underline{11}}{\lfloor\underline{6}\,\lfloor\underline{5}}=\frac{11.10.9.8.7\cancel{\lfloor\underline{6}}}{\cancel{\lfloor\underline{6}}.1.2.3.4.5}=462$$

PROPIEDADES GENERALES DE C^n_k

I. El número de combinaciones de **"n"** elementos diferentes tomados todos a la vez es la unidad, es decir

$$C^n_n=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{0}}=1$$

II. Combinatorios complementarios

$$\boxed{C^n_k=C^n_{n-k}\ ;\ \forall\ n\geq k\ \wedge\ n\ ;\ k\in\mathbb{N}}$$

NOTA: Si $C^n_k=C^n_p \Rightarrow k=p$ ó $p=n-k$

III. Suma de números combinatorios

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1} \quad ; \quad n > k}$$

Demostración:

$$C_k^n + C_{k+1}^n = \frac{\lfloor n}{\lfloor k \, \lfloor n-k} + \frac{\lfloor n}{\lfloor k+1 \, \lfloor n-(k+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor k+1 \, \lfloor n-k}\left\{\frac{\lfloor k+1}{\lfloor k} + \frac{\lfloor n-k}{\lfloor n-k-1}\right\}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor k+1 \, \lfloor n-k}\left\{\frac{(k+1)\cancel{\lfloor k}}{\cancel{\lfloor k}} + \frac{(n-k)\cancel{\lfloor n-k-1}}{\cancel{\lfloor n-k-1}}\right\}$$

$$= \frac{\lfloor n \, (n+1)}{\lfloor k+1 \, \lfloor n-k} = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor k+1 \, \lfloor n-k} = C_{k+1}^{n+1}$$

Ejemplo:
La suma de

$C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + \ldots\ldots\ldots + C_{96}^{99}$, será:

Resolución:

Sumando y restando $C_0^4 = 1$ y luego utilizando la propiedad anterior se tiene:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{C_0^4 + C_1^4}_{C_1^5} + C_2^5}_{C_2^6} + C_3^6}_{C_3^7} + \ldots}_{C_{95}^{99}} \ldots C_{96}^{99} - C_0^4 = C_4^{100} - 1$$

$$C_1^5 + C_2^5 \to C_2^6 + C_3^6 \to C_3^7 + \ddots \to C_{95}^{99} + C_{96}^{99} \to C_{96}^{100}$$

Esta propiedad nos permite encontrar de manera sucesiva a los números combinatorios.

En efecto, cuando: $n = 1 \wedge k = 0$, obtendremos

$$C_0^1 + C_1^1 = C_1^2 \rightarrow 1 + 1 = 2$$

Cuando: $n = 2 \wedge (k=0 \vee k=1)$ tendremos

$$\begin{cases} C_0^2 + C_1^2 = C_1^3 \rightarrow 1 + 2 = 3 \\ C_1^2 + C_2^2 = C_2^3 \rightarrow 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

A continuación cuando $n = 3$ y $(k=0, 1, 2)$ obtendremos

$$\begin{cases} C_0^3 + C_1^3 = C_1^4 \rightarrow 1 + 3 = 4 \\ C_1^3 + C_2^3 = C_2^4 \rightarrow 3 + 3 = 6 \\ C_2^3 + C_3^3 = C_3^4 \rightarrow 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

Ordenando a estos números en forma de una tabla triangular tendremos

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_0^1 & & C_1^1 & & \\ & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & \\ C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 \end{array}$$

A la disposición de elementos en los cuales los números resultan ser la suma de los dos que están por encima en la línea precedente (a excepción de los extremos) se denomina "Triángulo de Pascal". Siendo este

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

IV. Degradación de índices.
Todo número combinatorio puede degradarse, como:

Degradación de ambos índices

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{k} \cdot C_{k-1}^{n-1}}$$

Degradación de índice superior

$$\boxed{C_k^n = \frac{n}{n-k} \cdot C_k^{n-1}}$$

Degradación de índice inferior

$$\boxed{C_k^n = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_{k-1}^{n}}$$

Ejemplo 1
Al simplificar:

$$\frac{\frac{21}{8} \cdot \frac{20}{7} \cdot \frac{19}{6} \cdot C_5^{18}}{C_5^{18} + C_{12}^{18} + C_{12}^{19} + C_8^{20}}$$, se obtiene:

Resolución:
Para el numerador
Aplicando degradaciones sucesivas

$$\frac{21}{8} \cdot \frac{20}{7} \cdot \frac{19}{6} \cdot C_5^{18} = C_8^{21}$$

Para el denominador

$$D = \underbrace{\underbrace{\underbrace{C_5^{18} + C_6^{18}}_{C_6^{19}} + C_7^{19}}_{C_7^{20}} + C_8^{20}}_{C_8^{21}}$$

$\therefore\ D = C_8^{21}$

Como el numerador y el denominador son iguales, la expresión pedida resulta ser 1.

Ejemplo 2
La suma de

$$\frac{1 \cdot C_1^{n+1}}{C_0^n} + \frac{2 \cdot C_2^{n+1}}{C_1^n} + \frac{3 \cdot C_3^{n+1}}{C_2^n} + \ldots + \frac{n \cdot C_n^{n+1}}{C_{n-1}^n}$$ será:

Resolución:
Degradando el numerador en cada sumando tendremos

$$\frac{1 \cdot (n+1)\cancel{C_0^n}}{\cancel{C_0^n}} + \frac{\cancel{2} \cdot \frac{n+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{C_1^n}}{\cancel{C_1^n}} + \ldots + \frac{\cancel{n} \cdot \frac{(n+1)}{\cancel{n}} \cdot \cancel{C_{n-1}^n}}{\cancel{C_{n-1}^n}}$$

$$= (n+1)\underbrace{(1+1+1+ \ldots + 1)}_{\text{“n” veces}} = n(n+1)$$

Ejemplo 3
Al resolver el sistema indicado

$C_{4y-1}^{2(x+6)} = C_{y+2}^{x^2-23}$; proporcione $x \cdot y$

Resolución:
$2(x+6) = x^2-23 \wedge \{4y-1 = y+2 \vee 4y-1+y+2 = 2x+12\}$

Luego
$x^2-2x-35 = 0 \quad \wedge \quad \{y = 1 \vee 5y = 2x+11\}$
$\Rightarrow (x-7)(x+5) = 0$
$\therefore\ x = 7$ ó $x = -5$
La igualdad sólo admite $x = 7$,
entonces $y = 1$ ó $y = 5$
Por lo tanto $xy = 7$ ó $xy = 35$

Problemas Resueltos

Problema 1

¿De cuántas formas se puede seleccionar una consonante y una vocal de la palabra "estudio"?

Resolución:

La palabra "estudio" posee 3 consonantes s, t, d y 4 vocales e, u, i, o.

De ahí, que para seleccionar una consonante tenemos 3 opciones y para seleccionar una vocal tenemos 4 opciones. Por ser acciones independientes; podemos aplicar el principio de multiplicación, y el número total de formas de selección es $3 . 4$

$\therefore$ Existen 12 formas en total

Problema 2

Un investigador privado desea acceder a una información confidencial, para ello debe ingresar un "password" (palabra secreta de acceso) a la computadora. Si dicho "password" posee 3 caracteres (letras y/o números), ¿cuántos intentos tendrá que realizar el investigador para encontrar el "password"?

Nota: El alfabeto posee 25 letras.

Resolución:

Para resolver el problema nos vamos a apoyar de un gráfico, que nos represente el "password".

A	B	C
↑	↑	↑
35 ×	35 ×	35

El primer carácter se puede escoger de entre 25 letras y 10 dígitos (del 0 al 9) es decir de 35 posibilidades. Luego el segundo y tercer carácter también nos ofrecen el mismo número de opciones. Como son sucesos independientes se puede aplicar el principio de multiplicación.

$\therefore$ Existen 35^3 intentos posibles.

Problema 3

Del problema anterior, puede Ud. indicar ¿cuántos intentos realizará el investigador si dicho "password" tiene por lo menos 2 caracteres diferentes?

Resolución:

Si como mínimo 2 caracteres son diferentes; entonces podemos lograrlo de 2 formas:

I. Dos caracteres diferentes

A	B	C
↑	↑	↑
35 ×	34 ×	34

El primer carácter puede ser seleccionado de entre 35 opciones tal como lo habíamos visto en el problema anterior. Ahora una vez escogido el primer carácter, ya no podemos seguir seleccionando; ya que 2 caracteres deben ser diferentes; entonces para el segundo carácter sólo tendremos 34 opciones, con esto ya se satisface la condición; por eso que el segundo carácter seleccionado puede también ser escogido en la 3ra. posición.

Con esto afirmamos que para la 3ra. posición también tenemos 34 opciones, por ser selecciones independientes aplicaremos el principio de la multiplicación y tenemos 35.34^2 intentos.

II. Tres caracteres diferentes:

A	B	C
↑	↑	↑
35 ×	34 ×	33

Ahora para la primera casilla tenemos 35 opciones, una vez escogido el carácter, nos quedan 34 opciones y una vez escogido este carácter, nos quedaran sólo 33 opciones para la tercera posición.

Así tendremos $35 . 34 . 33$ intentos.

Finalmente de I) y II) por ser 2 formas de satisfacer nuestro requerimiento, debemos aplicar el principio de adición, existiendo $35 . 34^2 + 35 . 34 . 33$ intentos posibles.

$\therefore$ Existen 79 730 intentos posibles.

Problema 4

La compañía telefónica desea saber cuántas líneas como máximo puede instalar en San Martín de Porres cuya serie es 531. Tal misión es encargada a un empleado de la sección de operaciones. ¿Puede Ud. indicar la respuesta de dicho empleado?

Resolución:

Los números telefónicos poseen 7 caracteres; así nos podemos apoyar en un gráfico

5	3	1	2	5	9	6
fijo			↑ 10 ×	↑ 10 ×	↑ 10 ×	↑ 10

La serie de San Martín de Porres se mantiene fija ocupando las 3 primeras casillas. La 4ta. casilla debe ser un dígito, entonces tenemos 10 opciones (del 0 al 9). Igualmente la 5ta. casilla, la 6ta. casilla y 7ma. casilla tienen el mismo número de opciones. Al final como cada selección es independiente; por el principio de multiplicación, tendremos 10^4 números telefónicos diferentes.

Por lo tanto, se pueden instalar hasta 10^4 líneas telefónicas en San Martín de Porres.

Problema 5

Del problema anterior, puede indicar, ¿cuántos números telefónicos no poseen a las cifras 4, 7 y 9, y el número formado por las 4 últimas cifras como mínimo debe ser 6 000?

Resolución:

Este problema podemos resolverlo apoyándonos en el gráfico

5	3	1	6	1	2	3
fijo			↑ 2 ×	↑ 7 ×	↑ 7 ×	↑ 7

Nuestro problema está en seleccionar los dígitos en cada una de las 4 casillas últimas, así, en la 4ta. casilla, el menor dígito a seleccionar debe ser 6 por condición (número mayor a 6 000) pero no podemos seleccionar a 7 ni a 9. Así nos quedan 2 opciones: 6 y 8. Para la 5ta. casilla, 6ta y 7ma casilla podemos escoger cualquier cifra diferente de 4, 7 y 9 así nos quedan 7 opciones.

Por lo tanto, existirá 2.7^3 números telefónicos con tales características.

Problema 6

¿Cuántas placas de automóvil se pueden registrar como máximo, tales que comiencen con C y terminen en 5?

Tener en cuenta que la placa de automóvil se compone de 3 letras seguidas de 2 dígitos, y el alfabeto tiene 25 letras.

Resolución:

Nos podemos apoyar en el gráfico

C	A	W	2	5
↑ fijo	↑ 25 ×	↑ 25 ×	↑ 10	↑ fijo

Para la 2da casilla, tenemos 25 opciones (letras del alfabeto) igualmente para la 3ra casilla y para la 4ta casilla que debe ser completada por un dígito, tenemos 10 opciones. En total $25^2 . 10$ formas.

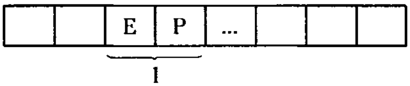
Por lo tanto, se pueden registrar 6 250 placas con esas características.

Problema 7

En una reunión cumbre de los presidentes de los países de América donde participan 24 países debidamente representados se desea tomar una foto que rememore tal acontecimiento. ¿De cuántas formas se pueden ubicar los presidentes, si el presidente peruano debe ir siempre acompañado al lado izquierdo del presidente ecuatoriano?

Resolución:

Si graficamos la situación, tenemos



A las casillas tomadas por los presidentes peruano y ecuatoriano la podemos considerar como una sola ya que ellos son "inseparables", entonces tendremos 23 casillas, entre las cuales se pueden permutar las posiciones de todos los presidentes, por lo tanto, en total hay 23 formas de tomar la foto.

Problema 8

De un Congreso de estudiantes de Ingeniería a nivel del Perú, a la hora del almuerzo, en una de las salas se encuentra un grupo de participantes donde 10 son del interior y 5 son de la capital. ¿De cuántas formas se pueden seleccionar los alumnos para almorzar si en cada grupo debe haber 3 estudiantes del interior y 2 de la capital?

Resolución:

En cada grupo hay 5 personas, de las cuales 2 son de la capital; a los cuales debemos escogerlas de entre 5; entonces tenemos C_2^5 formas de hacerlo.

Igualmente de los 3 estudiantes del interior a seleccionar de los 10 que hay en la sala tenemos C_3^{10} formas de hacerlo. Como cada selección es independiente tenemos $C_2^5 \cdot C_3^{10}$ formas de lograrlo.

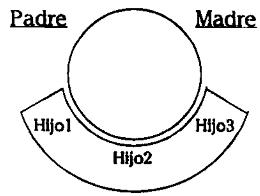
Por lo tanto, se pueden formar 12 grupos de alumnos.

Problema 9

En una reunión familiar se encuentran el padre de familia, su esposa y sus 3 hijos. Si están alrededor de una mesa circular entreteniéndose con un juego de salón. ¿De cuántas formas se pueden ubicar alrededor de la mesa si los 3 niños deben estar siempre juntos?

Resolución:

Podemos graficar



Estamos frente a un caso de permutación circular ya que deseamos saber cuántas formas diferentes de ubicación pueden tener los elementos de la familia. Pero si los 3 chicos están siempre juntos podemos considerarlos como un sólo elemento. Así tendríamos 3 elementos a permutarse circularmente, habían entonces 2! formas.

Pero los 3 niños también pueden permutar sus posiciones de 3! formas. Luego en total tendremos 2! . 3! formas posibles de ordenamiento.

Por lo tanto, la familia puede disponerse en la mesa de 12 formas diferentes.

Problema 10

¿Cuántas ordenaciones diferentes se pueden hacer con 2 camisetas de la selección peruana, 4 camisetas de Universitario de Deportes y 2 camisetas de Alianza Lima, dispuestas en forma lineal?

Resolución:

Apoyándonos en el gráfico

P	U	U	U	U	A	A	P

Resolución:

En primer lugar de los **m** objetos iguales podemos seleccionar a 1, 2, 3, ... **m** objetos o quizás no seleccionar ninguno; tenemos entonces (m+1) posibilidades. De ahí de los **n** objetos iguales, similarmente, tenemos (n+1) opciones. Adicionalmente, si ahora **p** objetos son diferentes para cada 1 de ellos tengo 2 opciones: lo escojo o no lo escojo. Así en total, debo tomar $\mathbf{2^p}$ opciones.

Finalmente como cada una de las selecciones es independiente.

En total tendremos:

$\mathbf{(m+1)(n+1)(2^p)}$ formas de selección, pero este número incluye a una, aquella que no escoge a ningún objeto la cual debemos desechar. Así tendremos en total:

$$\mathbf{(m+1)(n+1)2^p - 1}$$

Problema 15

Si los "n+1" números a, b, c, d, ... z ; {a, b, c, d, ... z} $\subset \mathbb{Z}^+$ son todos diferentes y cada uno de ellos es primo, demostrar que el número de factores diferentes de la expresión

$a^n bcd \ldots z$; $n \in \mathbb{Z}^+$ es $(n+1)2^n - 1$

Resolución:

Para esta demostración debemos saber que un número primo sólo tiene como factores a 1 y al mismo número. Así, deduzcamos los factores de cada uno de los números incluidos en

$$a^n bcd \ldots z$$

1. De $\mathbf{a^n}$, podemos tener como factores a 1, a, a^2, a^3, ... a^n, es decir (n+1) factores.
2. De **b** como es primo sólo tenemos a 1 y b como factores, es decir 2 factores.
3. De **c** como es primo sólo tenemos a 1 y c como factores, es decir, 2 factores.

Podemos continuar y los demás números poseen 2 factores, la unidad y el mismo número.

Como el proceso de selección de factores es independiente, por el principio de multiplicación tendremos:

$$(n+1)\,\underbrace{2\,.\,2\,.\,2\,.\ldots\ldots.\,2}_{\text{"n" veces}} = (n+1)\,.\,2^n \ \text{ factores}$$

Pero este número de factores incluye el factor trivial 1

$\therefore$ Existen $(n+1)2^n - 1$ factores diferentes.

Problema 16

Resolver a la ecuación expresada como

$$\frac{(n+3)!\,(n+5)!}{(n+3)! + (n+4)!} = 120$$

Resolución:

En el denominador usemos la degradación a fin de que

$$\frac{(n+3)!\,(n+5)!}{(n+3)! + (n+4)\,(n+3)!} = 120$$

$$\Rightarrow \frac{(n+5)\,(n+4)!}{1 + (n+4)} = 120$$

De donde $(n+4)! = 5!$

$$\rightarrow n + 4 = 5$$

$$\therefore n = 1$$

Problema 17

Simplificar

$$\frac{11^{\lfloor\underline{11}+3}\,.\,5^{\lfloor\underline{11}}\,.\,\lfloor\underline{2}^{\lfloor\underline{11}}\,.\,\lfloor\underline{9}^{\lfloor\underline{12}}}{\lfloor\underline{9}^{11\lfloor\underline{11}}\,.\,\lfloor\underline{11}^{\lfloor\underline{11}}\,.\,11}$$

Debemos permutar las posiciones de las camisetas, pero varios de ellos se repiten. Entonces podemos ver que si consideramos todos diferentes tendríamos 10! ordenaciones, pero 2 son iguales a la camiseta de Perú, estas se pueden disponer de 2! formas, cada una de ellas iguales, entonces estarían repitiéndose, por ello en el total debe estar contenidas estas 2! formas, habrían entonces $\frac{10!}{2!}$ formas "distintas" de ordenación. Pero similarmente hay 4 camisetas de Universitario de Deportes y 2 de Alianza Lima que pueden permutarse de 4! y 2! formas las cuales se estarían repitiendo; en el total encontrado así para evitar que se repitan; tendríamos que dividir el total entre el número de ordenaciones iguales. Tenemos $\frac{10!}{2!\,4!\,2!}$

Por lo tanto, se pueden ordenar las camisetas de 37 800 formas distintas.

Problema 11

¿De cuántas formas se pueden ordenar en una fila 15 automóviles del mismo modelo si 5 son azules, 4 negros y 6 son rojos?

Resolución:

Como se trata de automóviles del mismo modelo, en total si permutamos las posiciones de cada uno de ellos tendríamos 15! ordenaciones pero hay algunos de ellos que son iguales.

Así, de los 5 azules iguales podemos encontrar 5! ordenaciones todas ellas iguales contenidas en el total, igualmente de los 4 negros, tendremos 4! ordenaciones iguales y 6! ordenaciones iguales por ser 6 autos de color rojo.

Por lo tanto, en total hay $\frac{15!}{5!\,4!\,6!}$ ordenaciones distintas.

Problema 12

La cerradura de la bóveda de un banco consta de 3 discos, cada una de ellas con 30 posiciones. Una vez cerrada la bóveda, para abrirla de nuevo, cada uno de los 3 discos debe estar en la posición correcta. Si un amigo de lo ajeno desea abrir la bóveda, ¿cuántos intentos infructuosos como máximo tendrá que realizar?

Resolución:

Para que el 1er. disco esté en la posición correcta habrían 30 opciones; luego para el 2do. y 3er. disco también habrían 30 opciones; en total habrían que realizar 30^3 combinaciones como máximo para abrir la bóveda, pero como nos piden, cuántos intentos infructuosos como máximo tendrá que realizar nuestro personaje, tendremos $30^3 - 1$ ya que el último debe ser el intento exitoso.

Problema 13

Miguel desea festejar sus 18 años y desea invitar a su fiesta a sus 9 compañeros.

¿De cuántas maneras puede invitar a uno o más de ellos?

Resolución:

Miguel analizando a su primer compañero dirá: lo invito o no lo invito, tiene 2 opciones. Similarmente para el segundo compañero; también 2 opciones; y así sucesivamente con cada uno de sus 9 compañeros.

Al final tendré 2^9 maneras diferentes, pero consideraría una posibilidad que no invite a nadie; entonces hay que excluir esa situación ya que por lo menos debe invitar a 1.

Por lo tanto Miguel tendrá $2^9 - 1$ formas diferentes de invitar a su fiesta.

Problema 14

Si de m+n+p objetos $\{m,n,p\} \subset \mathbb{Z}^+$; **m** son iguales, **n** son iguales y las restantes diferentes. Demostrar que el número total de combinaciones es $(m+1)(n+1)2^p - 1$

Resolución:
Operando convenientemente

$$\frac{11^{\lfloor 11}\cdot 11^{3}\cdot 5^{\lfloor 11}\cdot 2^{\lfloor 11}\cdot(\lfloor 9)^{12\lfloor 11}}{\left(\dfrac{\lfloor 11}{\lfloor 9}\right)^{11}\cdot(\lfloor 11)^{\lfloor 11}\cdot 11}$$

$$=\frac{(11.5.2)^{\lfloor 11}\left\{(\lfloor 9)^{\lfloor 11}\right\}^{12}.11^{3}}{(11.10)^{\lfloor 11}\left\{(\lfloor 9)^{\lfloor 11}\right\}^{11+1}.11}=\frac{11^{3}}{11}=121$$

Problema 18

Calcular la suma límite de la serie

$$\frac{1}{2\lfloor 1}+\frac{3}{2^{2}\lfloor 2}+\frac{5}{2^{3}\lfloor 3}+\cdots$$

Resolución:
Sea "**S**" esta suma límite, es decir

$$S=\frac{1}{2\lfloor 1}+\frac{3}{2^{2}\lfloor 2}+\frac{5}{2^{3}\lfloor 3}+\cdots$$

multiplicando por (2)

$$2S=\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{3}{2\lfloor 2}+\frac{5}{2^{2}\lfloor 3}+\cdots$$

Acondicionemos numeradores convenientemente

$$2S=1+\left(\frac{4-1}{2\lfloor 2}\right)+\left(\frac{6-1}{2^{2}\lfloor 3}\right)+\left(\frac{8-1}{2^{3}\lfloor 4}\right)+\cdots$$

Ahora desdoblemos

$$2S=1+\left\{\frac{4}{2\lfloor 2}-\frac{1}{2\lfloor 2}\right\}+\left\{\frac{6}{2^{2}\lfloor 3}-\frac{1}{2^{2}\lfloor 3}\right\}+\left\{\frac{8}{2^{3}\lfloor 4}-\frac{1}{2^{3}\lfloor 4}\right\}+\cdots$$

$$2S=1+\left\{1-\cancel{\frac{1}{2\lfloor 2}}\right\}+\left\{\cancel{\frac{1}{2\lfloor 2}}-\cancel{\frac{1}{2^{2}\lfloor 3}}\right\}+\left\{\cancel{\frac{1}{2^{2}\lfloor 3}}-\frac{1}{2^{3}\lfloor 4}\right\}+\cdots$$

$$2S=1+1-\boxed{\frac{1}{2^{n}\lfloor n}}$$

NOTA: Cuando $n\Rightarrow\infty$, $\dfrac{1}{2^{n}\lfloor n}\Rightarrow 0$

Entonces $2S=1+1-0=2$

$$\therefore S=1$$

Problema 19

Al reducir

$$\frac{C_{10}^{20}\cdot C_{20}^{26}-C_{9}^{19}\cdot C_{6}^{26}}{C_{5}^{25}\ C_{9}^{19}+C_{6}^{25}\ C_{10}^{19}}\text{, se obtiene:}$$

Resolución:
Degradando, y por complemento se tiene

$$\frac{\dfrac{20}{10}\cdot C_{9}^{19}\cdot C_{6}^{26}-C_{9}^{19}\cdot C_{6}^{26}}{C_{5}^{25}\cdot C_{9}^{19}+C_{6}^{25}\cdot C_{9}^{19}}$$

$$=\frac{C_{9}^{19}\cdot C_{6}^{26}\{2-1\}}{C_{9}^{19}\underbrace{\left\{C_{5}^{25}+C_{6}^{25}\right\}}_{C_{6}^{26}}}=$$

Problema 20

Determinar el conjunto

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ;\ C_{2}^{x}+2C_{3}^{x}+C_{4}^{x}=C_{y}^{7}\right\},$$

por extensión
Resolución:
Para conocer los pares ordenados que constituyen a este conjunto, debemos resolver a la ecuación, expresada mediante:

$$\underbrace{\underbrace{C_2^x + C_3^x}_{C_3^{x+1}} + \underbrace{C_3^x + C_4^x}_{C_4^{x+1}}}_{C_4^{x+2}} = C_y^7 \quad ; \quad x > 4 \;\wedge\; y \leq 7$$

$$\Rightarrow C_4^{x+2} = C_y^7$$

De donde se tiene

$x+2=7 \;\wedge\; 4=y \;\rightarrow\; x=5 \;\wedge\; y=4$

o pudiendo ser

$x+2=7 \;\wedge\; 4+y=7 \rightarrow x=5 \;\wedge\; y=3$

$\therefore\; A = \{(5,4)\;(5,3)\}$

Problema 21

Determinar el valor de (m+n+p) a partir de la condición

$$\underbrace{C_9^{10} + C_9^{11} + C_9^{12} + \ldots + C_9^{m}}_{\text{"n" sumandos}} = C_p^{29} - 1$$

Resolución:

De cada número combinatorio hallamos su complemento

$$C_1^{10} + C_2^{11} + C_3^{12} + \ldots + C_{m-9}^{m} = C_p^{29} - 1$$

Ahora a fin de ganar la propiedad de la adición, añadimos C_0^{10} a ambos miembros:

De donde

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{C_0^{10} + C_1^{10}}_{C_1^{11}} + C_2^{11}}_{C_2^{12}} + C_3^{12}}_{C_3^{13}} + \ldots + C_{m-9}^{m}}_{C_{m-10}^{m} + C_{m-9}^{m} = C_{m-9}^{m+1}} = C_p^{29} - 1 + 1$$

Luego $C_{m-9}^{m+1} = C_p^{29}$

De la igualdad :

I. $m+1 = 29 \;\Rightarrow\; m = 28$

$\wedge$

$m - 9 = p \;\Rightarrow\; p = 19$

Siendo conocido "m" , se tiene

$m-9 = n \;\Rightarrow\; n = 19$

Por lo tanto $m+n+p = 66$

II. Se cumple también

$m + 1 = 29 \;\Rightarrow\; m = 28$

$m - 9 + p = 29 \;\Rightarrow\; p = 10$

Además : $m - 9 = n \;\Rightarrow\; n = 19$

De donde $m + n + p = 57$

$\therefore\; m + n + p$ es 66 ó 57

Problemas Propuestos

1. En una reunión cumbre entre los presidentes de 10 países de América del Sur, el día final de sesiones deciden retratarse para la posteridad. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los 10 mandatarios, si los presidentes de Perú y Ecuador por voluntad propia no desean posar juntos?

   A) 9! B) 8! C) 9!.8
   D) 10! E) 7!.8

2. Un coleccionista de artículos precolombinos ha sido invitado a exponer sus mejores cerámicas Nazca. Dicho coleccionista ha decidido presentar 8 ceramios de los 10 de su colección. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos si 3 de ellos no pueden faltar en la exposición?

   A) 7 B) 3 C) 21
   D) 8 E) 10

3. Un turista europeo desea realizar un Tours en el Perú. Para tal efecto ha contactado con una agencia de viajes; la cual le ofrece una estadía en 8 ciudades, 5 de la región andina y 3 de la región costeña. Pero por el tiempo del que dispone dicho turista sólo desea visitar 6 ciudades. ¿De cuántas maneras puede seleccionar dichas ciudades a visitar, si 4 ciudades andinas son punto obligatorio de visita?

   A) 30 B) 18 C) 15
   D) 24 E) 12

4. Se han matriculado 5 caballeros y 7 señoritas en el curso inicial de química, en el cual las prácticas se dan en el laboratorio. En dicho laboratorio se deben formar grupos bipersonales, necesariamente formados por un caballero y una señorita. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse dichos grupos si un caballero decide no trabajar con 2 de sus compañeras?

   A) 30 B) 16 C) 33
   D) 32 E) 25

5. Un agente vendedor de productos farmacéuticos de primera calidad visita diariamente 5 farmacias en el Centro de Lima. Para no tratar de dar preferencias a uno u otro establecimiento ha decidido alterar el orden de sus visitas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

   A) 24 B) 60 C) 5
   D) 120 E) 720

6. En un Congreso de Estudiantes de Ingeniería se esta realizando un taller en una sala de exposiciones, donde participan 10 estudiantes, los cuales deben agruparse en 3 grupos: 2 de 3 personas y el último de 4. ¿De cuántas formas se pueden agrupar los 10 estudiantes?

   A) 10 B) 8 C) 36
   D) 16 E) 4 200

7. En una reunión entre 5 compañeros de colegio que se reencuentra después de 10 años de haber egresado; ellos van acompañados de sus respectivas esposas. ¿De cuántas maneras pueden disponerse en una mesa circular si siempre deben estar hombres y mujeres en forma alternada?

   A) 1 400 B) 2 600 C) 2 880
   D) 4 200 E) 5 760

8. Seis compañeras de la universidad se encuentran en un evento tecnológico. Determinar, ¿cuántos saludos se intercambian como mínimo, si 2 de ellas están reunidas?

   A) 6 B) 30 C) 15
   D) 12 E) 14

9. En un simposio organizado por la Municipalidad de Lima participan 4 alcaldes del Cono Norte y 3 alcaldes del Cono Sur, los cuales están ubicados en una mesa rectangular dando de frente al público asistente. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los alcaldes, si los burgomaestres de un mismo cono no pueden estar separados?

A) 12 B) 240 C) 144
D) 288 E) 270

10. En un programa de concursos en la TV se presenta un juego que consiste en abrir 4 puertas contando con un juego de 7 llaves, ¿cuántos intentos como máximo dispone un participante para ganar el premio?

A) 840 B) 2 800 C) 2 100
D) 240 E) 7 200

11. La compañía de teléfonos desea averiguar cuántas líneas adicionales puede instalar en la serie 531, si se sabe que hasta el momento no ha usado 2 cifras para las últimas 3 casillas y 5 para la 4ta casilla.
Observación: El número telefónico dispone de 7 casillas.

A) 15 B) 24 C) 40
D) 28 E) 531

12. En un circo, un payaso tiene a su disposición 5 trajes multicolores diferentes, 6 gorras especiales diferentes y 3 triciclos. ¿De cuántas maneras puede seleccionar su equipo para salir a la función?

A) 45 B) 30 C) 18
D) 90 E) 40

13. En una reunión 10 amigos desean ordenarse para tomarse una foto. Si entre ellos hay una pareja de enamorados que no desea separarse. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse?

A) 9! B) 8! C) 2 . 9!
D) 3 . 8! E) 3 . 9!

14. Si se dispone de **m** objetos iguales, otros **n** objetos iguales y finalmente **p** objetos diferentes. ¿De cuántas maneras puede Ud. seleccionar por lo menos a 1 de ellos?

A) mnp
B) $(m+1)(n+1)p - 1$
C) $(m+1)(n+1)2^p - 1$
D) $mn2^p$
E) $mn2^{p+1} - 1$

15. Si se dispone de $(n+1)$ números primos, ¿cuántos factores diferentes tiene el producto de dichos números?

A) 2^n B) 2^{n+1} C) $2^{n-1}-1$
D) $2^n - 1$ E) $2^{n+1} - 1$

16. Hallar la suma de

$$\frac{11! - 10!}{9!} + \frac{10! - 9!}{8!} + \frac{9! - 8!}{7!} + \ldots\ldots + \frac{2! - 1!}{0!}$$

A) 55 B) 77 C) 285
D) 85 E) 385

17. Averiguar el valor de "n" que justifique a la igualdad

$\lfloor\underline{n+3} = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$,

e indique tal valor aumentado en su triple.

A) 8 B) 6 C) 4
D) 3 E) A $\vee$ C

18. Al simplificar

$$\frac{C_8^{21} + C_{13}^{21}}{C_5^{18} + C_{12}^{18} + C_{12}^{19} + C_8^{20}}$$, se obtiene:

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) 2 E) 4

19. La expresión

$$\sqrt[3]{\frac{C_0^n + 7.C_1^n + 12\,C_2^n + 6\,C_3^n}{C_1^n + 6\,C_2^n + 6\,C_3^n}}$$

$n \in \mathbb{N} \geq 3$

se reducirá a:

A) $1 + \frac{1}{n}$ B) $1 - \frac{1}{n}$ C) $1 + \frac{2}{n}$

D) $\frac{1}{n}$ E) n

20. El valor de la suma

$$C_m^{m+1} + C_{m+1}^{m+2} + C_{m+2}^{m+3} + ... + C_{2m-1}^{2m}$$

será:

A) $\frac{1}{2}(2m+1)$ B) $\frac{m}{2}(2m+1)$

C) $\frac{m}{2}(m+1)$

D) $\frac{m}{2}(3m+1)$ E) 2m

1	C	6	E	11	C	16	E
2	C	7	C	12	D	17	E
3	A	8	E	13	C	18	D
4	C	9	D	14	C	19	A
5	D	10	A	15	E	20	D

Claves

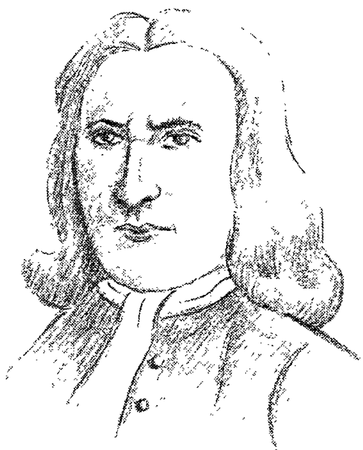
CAPÍTULO

XI

Binomio de Newton

Isaac Newton (1642-1727)

De origen inglés, fue alumno de Barrow, comienza investigando los trabajos de Galileo, Fermat, Huygens y Descartes y en 1664 inicia los trabajos con el binomio de Newton y el cálculo de Fluxiones. En 1672 fue elegido miembro de la Royal Society Londinense y en 1703 llegó a ser presidente. Las áreas principales de la actividad científica de Newton fueron la física, la mecánica, la astronomía y la matemática.
A Newton le corresponden la deducción y formulación de las leyes fundamentales de la mecánica clásica, la ley de la gravitación universal, la descomposición espectral de la luz, cálculo diferencial e integral en la forma del método de fluxiones, entre otros.
Fue probablemente el mayor genio conocido y a su vez poseía una gran sensibilidad humana que lo llevó a ser miembro del parlamento inglés.



$$(a+b)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k^n . a^{n-k} . b^k,\ n \in \mathbb{N}$$

LECTURA

Los cuaternios de Hamilton

La teoría de los cuaternios fue descubierta y desarrollada por Hamilton en 1 843.

Definición: *Los complejos han sido construidos a partir del espacio vectorial de dos dimensiones de los vectores (a, b), siendo a y b números reales. Consideremos ahora el espacio vectorial de 4 dimensiones reales de los vectores (a, b, c, d).*

Dos vectores $\overrightarrow{X_1} = (a_1\ ,\ b_1\ ,\ c_1\ ,\ d_1)$ *y* $\overrightarrow{X_2} = (a_2\ ,\ b_2\ ,\ c_2\ ,\ d_2)$*, serán iguales si:*

$$a_1 = a_2\ ,\ b_1 = b_2\ ,\ c_1 = c_2\ ,\ d_1 = d_2$$

La adición (primera operación interna) se escribe: $\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2)$

La homotecia (operación externa): $m\overrightarrow{X_1} = (ma_1\ ,\ mb_1\ ,\ mc_1\ ,\ md_1)$

Para definir una segunda operación interna (producto), elijamos una base con cuatro vectores $\{\vec{e}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *de este espacio, siendo* $\vec{e}$ *el elemento neutro para el producto. No es necesario precisar (al menos por el momento) los componentes de estos vectores. La tabla de multiplicación será definida como sigue:*

1er factor \ 2do factor	$\vec{e}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{e}$	$\vec{e}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$-\vec{e}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$-\vec{e}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$-\vec{e}$

Al examinar este cuadro, vemos que $\vec{e}$ *es elemento neutro para esta operación:*

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = -\vec{e}^{\,2}\ ;$$

el producto no es conmutativo: depende del orden en el que se toman los factores. Así $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{k}$*, mientras que* $\vec{j}\,\vec{i} = -\vec{k}$ *(y de ahí la necesidad de precisar, en la tabla: primer factor, segundo factor).*

Un vector $\vec{q}$ *cualquiera del espacio vectorial considerado se escribe algebraicamente:* $\vec{q} = a\vec{e} + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}$ *y se da el nombre de cuaternio.*

Fuente: Algebra Moderna William L. [illegible]

Desarrollo del Binomio de Newton

OBJETIVOS

- Expandir o desarrollar polinómicamente $(x+a)^n$
- Calcular cualquier término de la expresión de $(x+a)^n$ contando de derecha a izquierda o viceversa.
- Resolver por aproximación, las ecuaciones e inecuaciones irracionales para ciertos intervalos en las que se encuentre la incógnita.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del Binomio de Newton que abordaremos en este capítulo desempeña un papel importante en el desarrollo de los capítulos siguientes de álgebra y, en especial, en el análisis matemático que se estudia en los primeros ciclos en todas las carreras de ingeniería y ciencias.

Por ello, mostraremos algunas de sus aplicaciones, por ejemplo, en la desigualdad de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\ x \geq -1 \ ; \quad n \in \mathbf{N}$

Así mismo para demostrar: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Como sabemos, dicho número e=2,718 281 .... es muy importante en el análisis matemático.

También se observa la gran aplicación en la teoría de ecuaciones, desigualdades, funciones y fundamentalmente en la teoría de sucesiones y series que son temas centrales en el análisis matemático real y complejo, por ello, citamos un ejemplo de una serie:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = (1-x)^{1} \quad \forall x \in \langle -1 ; 1 \rangle$$

Por lo visto, el binomio de Newton tiene muchas aplicaciones en los diferentes capítulos.

CUANDO "n" ES UN NÚMERO NATURAL

Analicemos el desarrollo del binomio $(x+a)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, mediante los siguientes ejemplos:

$$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$$
$$\vdots$$

La inquietud es averiguar cómo es el desarrollo de $(x+a)^n \ ; \ n \in \mathbf{N}$

MÉTODO INDUCTIVO

Partiremos de los productos notables:

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2 +(ab+ac+bc)x+abc$

$\vdots$

$(x+a)(x+b)(x+c) \dots (x+h) = x^n+S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3}+ \dots + S_n$

Donde:

$S_1 = a + b + c + \dots + h$

$S_2 = ab + ac + ad \dots + ah + bc + \dots$

$S_3 = abc + abd + \dots + abh + bcd + \dots$

$\vdots$

$S_n = a.b.c \dots h$

En caso que $a = b = c = d = \dots = h$

$$S_1 = \underbrace{a + a + \dots + a}_{\text{“n” veces}} = na = C_1^n a$$

$$S_2 = \underbrace{a^2 + a^2 + \dots + a^2}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ veces}} = \frac{n(n-1)}{2}a^2 = C_2^n a^2$$

$$S_3 = \underbrace{a^3 + a^3 + \dots + a^3}_{\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right)\text{ veces}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}a^3$$

$$= C_2^n a^3$$

$\vdots$

$$S_n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{“n” veces}} = a^n = C_n^n a^n$$

Luego

$$\boxed{(x+a)^n \equiv C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \dots + C_n^n a^n}$$

$n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

Halle el desarrollo de $(x+a)^6$.

Resolución:

$$(x+a)^6 \equiv C_0^6 x^6 + C_1^6 x^5 a + C_2^6 x^4 a^2 + C_3^6 x^3 a^3 + C_4^6 x^2 a^4 + C_5^6 x a^5 + C_6^6 a^6$$

Desarrollando los números combinatorios

$$(x+a)^6 \equiv x^6 + 6x^5 a + 15x^4 a^2 + 20x^3 a^3 + 15x^2 a^4 + 6xa^5 + a^6$$

PROPIEDADES

I. El desarrollo de $(x+a)^n$ es un polinomio homogéneo y completo de $(n+1)$ términos con respecto a las variables “x” ; “a” de grado “n”.

II. Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son combinatorios complementarios, en tal razón, tendrán el mismo valor.

III. Los exponentes de “x” disminuyen de uno en uno, mientras los de “a”, aumentan de uno en uno.

IV. Para hallar cualquier término del desarrollo

Sea el desarrollo

$$(x+a)^n = \underbrace{C_0^n x^n}_{t_1} + \underbrace{C_1^n x^{n-1} a}_{t_2} + \underbrace{C_2^n x^{n-2} a^2}_{t_3} + \underbrace{C_3^n x^{n-3} a^3}_{t_4} + \dots + \underbrace{C_n^n a^n}_{t_{n+1}}$$

Vemos que cada término es:

$t_1 = C_0^n x^n$

$t_2 = C_1^n x^{n-1} a^1$

$t_3 = C_2^n x^{n-2} a^2$

$\vdots$

$t_k = C_{k-1}^n x^{n-(k-1)} a^{k-1}$

$$\boxed{t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k}$$ *(Término general)*

$k=0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n$

Se llama el término de lugar $(k+1)$, contado de izquierda a derecha.

Ejemplo 1

Hallar el término de lugar 10 en la expansión de $\left(27x^5+\dfrac{1}{3x}\right)^{12}$

Resolución:

Usando la fórmula general

$$t_{10}=t_{9+1}=C_9^{12}(27x^5)^{12-9}\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$=C_9^{12}(27x^5)^3\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$=\frac{\underline{|12}}{\underline{|9}\,.\,\underline{|3}}\cdot\cancel{(3^3)^3}\cdot(x^5)^3\cdot\frac{1}{\cancel{3^9}\cdot x^9}$$

$$=\frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot 10\cdot\cancel{\underline{|9}}}{\cancel{\underline{|9}}\,\cancel{6}}\cdot x^{15-9}=220x^6$$

Ejemplo 2

Hallar el número de términos del desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{5n+2}$, si el término de lugar 25 tiene a x con exponente **44**.

Resolución:

En la fórmula del término general

$$t_{25}=t_{24+1}=C_{24}^{5n+2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^{(5n+2)-24}\cdot\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^{24}$$

$$=C_{24}^{5n+2}x^{2(5n-22)-\frac{24}{2}}\cdot y^{-(5n-22)+2(24)}$$

Por dato $2(5n-22)-12=44 \Rightarrow 2(5n-22)=56$

$\Rightarrow 5n-22=28 \Rightarrow 5n=50 \Rightarrow 5n+2=52$

$\therefore$ En el desarrollo, existen 53 términos

NOTA: Si se cuenta de derecha a izquierda sólo se cambia el orden de las bases, así en $(x+a)^n$:

$\longrightarrow$	$\longleftarrow$
$\boxed{t_{k+1}=C_k^n x^{n-k}a^k}$	$\boxed{t_{k+1}=C_k^n a^{n-k}x^k}$
contado del inicio	contado del final

Veamos en: $(x+a)^6$

$$(x+a)^6=C_0^6x^6+C_1^6x^5a+\underline{\underline{C_2^6x^4a^2}}+C_3^6x^3a^3+\underline{\underline{C_4^6x^2a^4}}+C_5^6xa^5+C_6^6a^6$$

$\underset{\rightarrow}{t_3}=C_2^6x^4a^2$ $\qquad$ $\underset{\leftarrow}{t_3}=C_4^6x^2a^4=C_2^6x^2a^4$

V. En el siguiente polinomio

$P(x,a)=(x+a)^n$

$$=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}a+C_2^nx^{n-2}a^2+\ldots\ldots+C_n^na^n$$

Casos Particulares

Si $x=1$

$\Rightarrow (1+a)^n=C_0^n+aC_1^n+a^2C_2^n+a^3C_3^n+\ldots\ldots+a^nC_n^n$

Si $x=a=1$

$\Rightarrow 2^n=C_0^n+C_1^n+C_2^n+C_3^n+\ldots\ldots+C_n^n$

Ejemplo 1

Determinar el equivalente reducido de:

$S=C_0^n+2C_1^n+3C_2^n+\ldots\ldots+(n+1)C_n^n$

Resolución:

NOTA: $(k+1)C_k^n=kC_k^n+C_k^n$

$$S = C_0^n + C_1^n + C_1^n + C_2^n + 2C_2^n + C_3^n + 3C_3^n + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n + nC_n^n$$

$$= \left[C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n\right] + \left[C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \ldots \ldots + nC_n^n\right]$$

$$= \left[C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n\right] + \left[\frac{n}{1}C_0^{n-1} + 2\frac{n}{2}C_1^{n-1} + \ldots \ldots + n\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}\right]$$

$$S = 2^n + n\underbrace{\left\{C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}\right\}}_{2^{n-1}}$$

$$\therefore \quad S = 2^n + 2^{n-1} \cdot n$$

Ejemplo 2

Determinar el equivalente reducido de

$$K = C_0^n + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$$

Resolución:

Multiplicando por $n+1$ miembro a miembro

$$(n+1)K = \frac{n+1}{1}C_0^n + \frac{n+1}{2}C_1^n + \frac{n+1}{3}C_2^n + \ldots \ldots + \frac{n+1}{n+1}C_n^n$$

De la fórmula de degradación

$$\frac{n+1}{K}C_{K-1}^n = C_K^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)K = C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}$$

Sumando 1

$$(n+1)K+1 = 1 + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}$$

Pero $\quad 1 = C_0^{n+1}$

$$\Rightarrow (n+1)K = \underbrace{C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}}_{2^{n+1}} - 1$$

$$\therefore \; K = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

VI. En el desarrollo de $(ax^{\alpha}+by^{\beta})^n$ se tiene :

a. El coeficiente de cualquier término es $C_k^n a^{n-k} b^k$

b. La suma de grados absolutos de todos los términos es: $\dfrac{n(n+1)}{2}(\alpha+\beta)$

Demostración:

a. Aplicando la fórmula general

$$t_{k+1} = C_k^n (ax^{\alpha})^{n-k} \cdot (by^{\beta})^k$$
$$= C_k^n a^{n-k} \cdot b^k x^{\alpha(n-k)} \cdot y^{\beta k}$$

de donde observamos que el coeficiente de cualquier término es $C_k^n a^{n-k} b^k$

b. Como la parte literal de cada término es $x^{\alpha(n-k)} \cdot y^{\beta k}$; su grado absoluto es $\alpha(n-k)+\beta k$, donde $k=0,1,2,\ldots, n$; luego la suma de estos grados es

$$=[\alpha(n)+0\beta]+[\alpha(n-1)+\beta]+[\alpha(n-2)+2\beta)] + \ldots +[\alpha(1)+\beta(n-1)]+\beta n$$

$$= \alpha\underbrace{[n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \beta\underbrace{[1+2+3+\ldots+n]}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(\alpha+\beta)$$

VII. La suma de coeficientes de los términos de lugar impar, es igual a la suma de coeficientes de lugar par en el desarrollo de $(x+a)^n$

Demostración:

Del binomio de Newton

$$(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n$$

Si $\; x=1 \;$; $\; a=-1$

a. Cuando "n" es par :

$$0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \ldots + C_n^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{C_0^n + C_2^n + \ldots + C_n^n}_{\text{sum de coef. de lugar impar}} = \underbrace{C_1^n + C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n}_{\text{suma de coef. de lugar par}}$$

b. Cuando "n" es impar :

$$0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n + \ldots + C_{n-1}^n - C_n^n$$

$$\underbrace{C_0^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n}_{\text{suma de coef. de lugar impar}} = \underbrace{C_1^n + C_3^n + \ldots + C_n^n}_{\text{suma de coef. de lugar par}}$$

VIII. Término de Máximo Valor Numérico

En el desarrollo de $(x+a)^n$; donde $\{a,x\} \subset \mathbb{R}^+$

Tenemos que $(x+a)^n = x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$. Siendo x^n factor de todos los términos del desarrollo de $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$; será suficiente hallar el término máximo de $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$.

Consideremos dos términos consecutivos del desarrollo de lugares r y r+1.

El término de lugar r+1 se obtiene multiplicando el término de lugar r por $\dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{a}{x}$

Es decir $t_{r+1} = \left(\dfrac{n+1}{r} - 1\right)\dfrac{a}{x}t_r$

El factor $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)\dfrac{a}{x}$ disminuye cuando **r** aumenta de valor, por lo tanto, el término de lugar (r+1) no es siempre mayor que el de lugar **r**, sino cuando $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)\dfrac{a}{x}$ sea mayor que uno, es decir, $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)\dfrac{a}{x} > 1$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{r} - 1 > \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{n+1}{r} > \frac{x}{a} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1} > r$$

Si $\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ es un entero, llamémosle **p**

Luego:

I. Si $\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ es un entero le llamaremos p y se tendrá que los términos de lugares p y p+1 son iguales y a su vez son los términos de máximo valor en el desarrollo.

II. Si $\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ no es entero, a su parte entera le llamaremos q y el término de lugar q+1 será el término de máximo valor en el desarrollo.

Ejemplo 1

Si $x = 1/3$, hallar el máximo término en el desarrollo de $(1+4x)^8$

Resolución:

Sean los términos de lugares r y r+1

$$t_r = C_{r-1}^8 (4x)^{r-1} = C_{r-1}^8\left(4.\frac{1}{3}\right)^{r-1}$$

$$t_{r+1} = C_r^8 (4x)^r = C_r^8\left(4.\frac{1}{3}\right)^r$$

Como $t_{r+1} > t_r \Rightarrow \dfrac{t_{r+1}}{t_r} > 1$

$$\Rightarrow \frac{C_r^8\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^r}{C_{r-1}^8\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{r-1}} > 1 \Rightarrow \frac{\dfrac{\cancel{\lfloor\underline{8}}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{8-r}}}{\dfrac{\cancel{\lfloor\underline{8}}}{\lfloor\underline{r-1}\ \lfloor\underline{9-r}}}\cdot\frac{\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)^r}}{\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)^r}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}} > 1$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\lfloor\underline{r-1}}\,(9-r)\cancel{\lfloor\underline{8-r}}}{r\cancel{\lfloor\underline{r-1}}\ \cancel{\lfloor\underline{8-r}}}\cdot\frac{4}{3} > 1 \rightarrow \frac{9-r}{r} > \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 7r < 36 \Rightarrow r < 5 + \frac{1}{7}$$

$r_{máx} = 5$

Luego, el término de máximo valor es el término de lugar 6

$$t_6 = C_5^8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{\underline{|8}}{\underline{|5} \cdot \underline{|3}} \cdot \frac{4^5}{3^5}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5} \times 4^5}{\underline{|5} \cdot 6 \cdot 3^5} = \frac{57344}{243}$$

Ejemplo 2

Hallar el término de máximo valor numérico en el desarrollo de $(3-2x)^9$ cuando $x=1$.

Resolución:

Como $(3-2x)^9 = 3^9\left(1-\dfrac{2}{3}x\right)^9$ será suficiente considerar el desarrollo de $\left(1-\dfrac{2}{3}x\right)^9$

En este caso

$$t_r = C_{r-1}^9\left(-\frac{2}{3}x\right)^{r-1} \qquad t_{r+1} = C_r^9\left(-\frac{2}{3}x\right)^r$$

De t_{r+1} degradando índice inferior

$$\Rightarrow \ t_{r+1} = \frac{9-r+1}{r} \cdot \frac{2x}{3} \cdot t_r$$

Para $x=1$: $\quad t_{r+1} = \dfrac{10-r}{r} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot t_r$

Como $\quad t_{r+1} > t_r \ \Rightarrow \ \dfrac{10-r}{r} \cdot \dfrac{2}{3} > 1 \ \Rightarrow \ r<4$

Luego para todos los valores de r hasta 3 tenemos que $t_{r+1} > t_r$, pero si $r=4$ entonces $t_{r+1} = t_r$ y estos términos son los de máximos valores.

Por lo tanto, el término cuarto y quinto son numéricamente iguales y mayores que cualquier otro término y su valor es:

$$t_4 = 3^9 \cdot C_3^9\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 489\,888$$

IX. En el desarrollo de $(x+a)^n$ se halla una forma práctica de calcular el coeficiente de cualquier término en función al coeficiente anterior.

$$\boxed{\text{Coeficiente de un término cualquiera} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{Coeficiente del}\\ \text{término anterior}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{Exponente de } x \text{ en}\\ \text{el término anterior}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{Exponente de a en}\\ \text{el término anterior}\end{array}\right)+1}}$$

Demostración:

$$t_k = C_{k-1}^n x^{n-k+1} \cdot a^{k-1}$$

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} \cdot a^k$$

Vemos

$$\text{Coef. } t_{k+1} = C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

(degradación de índice inferior)

$$\Rightarrow \ \text{Coef. } t_{k+1} = C_{k-1}^n \cdot \frac{(n-k+1)}{(k-1)+1}$$

De donde se tiene:

$$\boxed{\text{Coef. } t_{k+1} = \frac{(\text{Coef. } t_k)\left(\begin{array}{c}\text{exponente}\\ \text{de } x \text{ en } t_k\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{exponente}\\ \text{de a en } t_k\end{array}\right)+1}}$$

Ejemplo:

$$(a+x)^5 = x^5 + \left(\frac{1.5}{0+1}\right)x^4 a + \left(\frac{5.4}{1+1}\right)x^3 a^2 + \left(\frac{10.3}{2+1}\right)x^2 a^3 + \left(\frac{10.2}{3+1}\right)x a^4 + \left(\frac{5.1}{4+1}\right)a^5$$

$$\therefore \ (x+a)^5 = x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5x a^4 + a^5$$

X. En $(x+a)^n$ si **n** es par, existe un *término central* que ocupa el lugar $\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$\boxed{t_c = t_{\frac{n}{2}+1} = C^n_{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}}}$$

Ejemplo:

En $(x+a)^6$ tiene 7 términos existe un término central que ocupa el lugar $\left(\frac{6}{2}+1\right)$, es decir, el lugar cuarto

$\Rightarrow\ t_c = t_4 = t_{3+1} = C^6_3 x^{6-3} a^3 = 20x^3a^3$

POTENCIA DE UN POLINOMIO

El objetivo no es tanto la expansión o desarrollo del polinomio sino ubicar un término cualquiera de la expansión:

Ejemplo

Halle el coeficiente de $x^3a^4b^3c^2$ en el desarrollo de $(x+a+b+c)^{12}$

Resolución:

El desarrollo es el producto de multiplicar 12 factores iguales a $x+a+b+c$ y cada término del desarrollo es de 12 dimensiones siendo un producto que se ha formado tomando una letra de cada uno de estos factores.

Así, para formar el término $x^3a^4b^3c^2$ tomamos "x" de tres cualquiera de los doce factores; "a" de cuatro cualquiera de los nueve restantes; "b" de tres cualquiera de los cinco restantes; y "c" de los dos restantes.

Pero el número de maneras en esto puede hacerse, evidentemente, igual al número de maneras de ordenar 12 letras cuando 3 de ellos deben ser x, cuatro **a**, tres **b**, y dos **c**; es decir es igual a:

$$\frac{\lfloor\underline{12}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{2}}$$

Esto es por lo tanto, el número de veces que aparece el término $x^3a^4b^3c^2$ en el producto final y, consecuentemente, el coeficiente requerido es: 277 200

TÉRMINO GENERAL (Fórmula de Leibnitz)

Partimos del problema:

Hallar el coeficiente de cualquier término en el desarrollo de $(a+b+c+d+.....)^n$ siendo "n" un número natural.

Resolución:

El desarrollo es el producto de "n" factores iguales cada uno a $a+b+c+d+.....+$ cada término del desarrollo se forma tomando una letra de cada uno de estos "n" factores y, por lo tanto, el número de maneras en que cualquier término de la forma: $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\sigma$ ..... aparecerá en el producto final, es igual al número de maneras de ordenar n letras cuando α de ellos son a; β de ellos son b; γ de ellos son c y así sucesivamente.

Es decir, el coeficiente de $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ ..... es:

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}\,\lfloor\underline{\delta}\,.....}$$

donde $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ .....\ = n$

Luego, un término cualquiera es:

$$\boxed{\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}\,\lfloor\underline{\delta}\,.....}\ a^\alpha . b^\beta . c^\gamma . d^\delta .....}$$

COROLARIO:

En el desarrollo de: $(a+bx+cx^2+dx^3+.....)^n$

El término que contiene a: $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$...... es:

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}\,\lfloor\underline{\delta}}\left(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta .....\right) x^{\beta+2\gamma+}$$

donde $\alpha+\beta+\gamma+\delta+..... = n$

Ejemplo

Hallar el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(a+bx+cx^2)^9$

Resolución:
El término general del desarrollo es:

$$\sum \frac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}}\cdot a^{\alpha}(bx)^{\beta}(cx^2)^{\gamma} \Big/ \alpha+\beta+\gamma=9$$

es decir:

$$\sum \frac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}}\cdot a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}x^{\beta+2\gamma} \quad ; \quad \alpha+\beta+\gamma=9$$

además $\beta + 2\gamma = 5$
Luego, los valores que toma α, β, γ las podemos encontrar de las condiciones

$$\alpha+\beta+\gamma = 9$$
$$\beta+2\gamma = 5$$

Siendo además α, β, γ enteros no negativos. Entonces:

si $\gamma = 2 \Rightarrow \beta = 1 \wedge \alpha=6$
si $\gamma = 1 \Rightarrow \beta = 3 \wedge \alpha=5$
si $\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 5 \wedge \alpha=4$

El coeficiente requerido será la suma de los valores correspondientes.
Por lo tanto, el coeficiente buscado es:

$$\frac{9}{\lfloor\underline{6}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{2}}a^6bc^2+\frac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{1}}a^5b^3c+\frac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{0}}a^4b^5$$

$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5$$

FÓRMULA DEL DESARROLLO (Fórmula de Leibnitz)

En el desarrollo de $(a+b+c+.....)^n / n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(a+b+c+.....)^n=\sum \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}.....}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}.....}$$

donde
$\alpha+\beta+\gamma+..... = n \quad ; \quad \{\alpha, \beta, \gamma, ...\} \subset \mathbb{Z}_0^+$

Ejemplo:
Hallar el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(1+2x+3x^2)^5$
Resolución:

El desarrollo es $\displaystyle\sum \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}}(1)^{\alpha}(2x)^{\beta}(3x^2)^{\gamma}$

donde, $\alpha+\beta+\gamma = 5$

Equivalente $\displaystyle\sum \frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\beta}\,\lfloor\underline{\gamma}}2^{\beta}3^{\gamma}.x^{\beta+2\gamma}$

En nuestro caso $\alpha+\beta+\gamma = 5$
$\beta+2\gamma = 6$

Si $\gamma = 1 \Rightarrow \beta=4 \wedge \alpha=0$
$\gamma = 2 \Rightarrow \beta=2 \wedge \alpha=1$
$\gamma = 3 \Rightarrow \beta=0 \wedge \alpha=2$

Luego el coeficiente de x^6 es

$$\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{1}}2^4.3^1+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}2^2.3^2+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{3}}2^0.3^3$$

$240 + 1\,080 + 270 = 1\,590$

NÚMERO DE TÉRMINOS

El desarrollo de $\underbrace{(a+b+c+\ ....\ +p)^n}_{\text{"r" términos}}$ tiene

$$\boxed{\frac{\lfloor\underline{n+r-1}}{\lfloor\underline{n}\,.\lfloor\underline{r-1}}\ \text{términos}}$$

En su desarrollo

I. Así: $\underbrace{(a+b+c)^2}_{\text{3 términos}}$ tendrá:

$$\frac{\lfloor\underline{2+3-1}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3-1}}=\frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}=\frac{4\times3\times\lfloor\underline{2}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}=6\ \text{términos}$$

Efectivamente, ya que su desarrollo es: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ de 6 términos.

II. En $(1+x+y+z)^3$ se tendrá

$$\frac{\lfloor\underline{3+4-1}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{4-1}}=\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{3}}=20\ \text{términos}.$$

CUANDO "n" ES UN NÚMERO RACIONAL (no natural)

Se busca la expansión de $(x+a)^n$ cuando **n** es un entero negativo o fraccionario.

DEFINICIÓN

Coeficiente Binomial

Notación $\binom{n}{k}$

Se define por

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\,.....\,(n-k+1)}{\underline{|k}}\;;\qquad n\in\mathbb{R}\;;\; k\in\mathbb{N}_0$$

Ejemplos:

1. $\binom{3}{4}=\dfrac{3(3-1)(3-2)(3-3)}{\underline{|4}}=0$

2. $\binom{\sqrt{2}+2}{5}=\dfrac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{\underline{|5}}$

$$=\frac{(-2)(1)\sqrt{2}}{1\times2\times3\times4\times5}=-\frac{\sqrt{2}}{60}$$

3. $\binom{-2}{1}=\dfrac{-2}{\underline{|1}}=-2$

4. $\binom{-2}{3}=\dfrac{(-2)(-3)(-4)}{\underline{|3}}=-4$

5. $\binom{-2}{2}=\dfrac{(-2)(-3)}{\underline{|2}}=3$

6. $\binom{-2}{4}=\dfrac{(-2)(-3)(-4)(-5)}{\underline{|4}}=5$

FORMA GENERAL DEL DESARROLLO

Buscamos el desarrollo de $(1+x)^n$; $n\in\mathbb{Q}$ no natural

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+.....$$

Ejemplo 1

Hallar la expansión de $(1-x)^{-2}$

Resolución:

$$(1-x)^{-2}=\binom{-2}{0}-\binom{-2}{1}x+\binom{-2}{2}x^2-\binom{-2}{3}x^3+\binom{-2}{4}x^4\,.....$$

$$=1-(-2)x+3x^2-(-4)x^3+5x^4+.....$$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+....$$

Está fórmula será válida si $x\in\,<-1,1>$

Ejemplo 2

Hallar el desarrollo de $(1-x)^{3/2}$

Resolución:

$$(1-x)^{3/2}=\binom{3/2}{0}-\binom{3/2}{1}x+\binom{3/2}{2}x^2-\binom{3/2}{3}x^3+\,....$$

$$=1-\frac{\frac{3}{2}}{\underline{|1}}x+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{\underline{|2}}x^2-\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{\underline{|3}}x^3+\,...$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+.....$$

Está fórmula será válida si $x\in\,<-1,1>$

Ejemplo 3

Desarrollar $\left(2+\dfrac{3}{2}x\right)^{-5}$

Resolución:

Será equivalente a

$$2^{-5}\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-5}$$

$$=2^{-5}\left\{\binom{-5}{0}+\binom{-5}{1}\left(\frac{3}{4}x\right)+\binom{-5}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\binom{-5}{3}\left(\frac{3}{4}x\right)^3+.....\right\}$$

$$=\frac{1}{32}\left\{1-5\cdot\frac{3}{4}x+\frac{(-5)\cancel{(-6)}^{\,3}}{\cancel{\underline{|2}}}\cdot\frac{9}{16}x^2+\frac{(-5)\cancel{(-6)}(-7)}{\cancel{\underline{|3}}}\cdot\frac{27}{64}x^3+\,...\right\}$$

$$=\frac{1}{32}\left\{1-\frac{15}{4}x+\frac{135}{16}x^2-\frac{945}{64}x^3+.....\right\}$$

$$=\frac{1}{32}-\frac{15}{128}x+\frac{135}{512}x^2-\frac{945}{2048}x^3+.....$$

Está fórmula será válida si

$$x \in \left\langle -\frac{4}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right\rangle$$

Ejemplo 4

Desarrollar $\left(3+\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Resolución:

Es equivalente al desarrollo de:

$$3^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\binom{-\frac{1}{2}}{0}+\binom{-\frac{1}{2}}{1}\left(\frac{x}{6}\right)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{x}{6}\right)^2+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x^2}{36}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-\frac{x}{12}+\frac{x^2}{96}-\ldots\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{x}{12\sqrt{3}}+\frac{x^2}{96\sqrt{3}}-\ldots$$

Está fórmula será válida si $x \in \langle -6\,;6\rangle$

TÉRMINO GENERAL

En el desarrollo de $(1+x)^n$ se tiene el término de lugar (k+1)

$$\boxed{t_{k+1}=\binom{n}{k}x^k}$$

donde "**n**" es cualquier racional

Ejemplo 1

Halle el término de lugar 8 en el desarrollo de $(1-2x^3)^{2}$

Resolución:

Por fórmula general

$$t_8=t_{7+1}=\binom{-2}{7}(-2x^3)^7$$

$$=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8)}{\underline{|7}}(-2^7)x^{21}$$

$$=\frac{2.3.4.5.6.7.8.2^7}{2.3.4.5.6.7}x^{21}=1\,024x^{21}$$

$$\therefore\ t_8=1\,024x^{21}$$

Ejemplo 2

Halle el término de lugar 5 en el desarrollo de $(5+3x^2)^{2/3}$

Resolución:

El desarrollo será equivalente al de $5^{2/3}\left(1+\dfrac{3}{5}x^2\right)^{2/3}$ por la fórmula general:

$$t_5=t_{4+1}=5^{2/3}\binom{2/3}{4}\left(\frac{2}{5}x^2\right)^4$$

$$=\sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-3\right)}{\underline{|4}}\cdot\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$=\sqrt[3]{25}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1.2.3.4}\cdot\frac{3^4}{5^4}x^8$$

$$=\sqrt[3]{25}\,\frac{-7.x^8}{3.625}=-\frac{7\sqrt[3]{25}}{1875}x^8$$

$$\therefore\ t_5=\frac{7\sqrt[3]{25}}{1\,875}x^8$$

> **TEOREMA**
>
> El desarrollo de $(1+x)^n$ es aproximadamente $1+nx$ cuando x tiende a cero.

> **NOTA:** Si el valor de x es tan pequeño, sus potencias a partir de la segunda, pueden ser despreciadas.

Ejemplo 1

Reducir la expresión, si x es suficientemente pequeño

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+\sqrt{4+2x}}{(4+x)^{3/2}}$$

Resolución:

Como x es suficientemente pequeña, entonces aplicamos el teorema anterior

En el problema

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/2}}{8\left(1+\frac{x}{4}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}x(-5)\right)+2\left(1+\frac{x}{2}.\frac{1}{2}\right)}{8\left(1+\frac{x}{4}.\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1-\frac{10}{3}x+2+\frac{x}{2}}{1+\frac{3}{8}x}\right\}=\frac{1}{8}\left\{\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1-\frac{3}{8}x\right)=\frac{1}{8}\left(3-\frac{95}{24}x\right)$$

Ejemplo 2

Hallar el valor de $\frac{1}{\sqrt{47}}$ con una aproximación de 3 cifras decimales.

Resolución:

$$\frac{1}{\sqrt{47}}=(49-2)^{-1/2}=\frac{1}{7}\left(1-\frac{2}{7^2}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{7}\left\{1-\binom{-1/2}{1}\left(\frac{2}{7^2}\right)^1+\binom{-1/2}{2}\left(\frac{2}{7^2}\right)^2-\binom{-1/2}{3}\left(\frac{2}{7^2}\right)^3+\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\left\{1+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{2}.\frac{1}{7^4}+\frac{5}{2}.\frac{1}{7^6}+\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{3}{2}.\frac{1}{7^5}+\frac{5}{2}.\frac{1}{7^7}+\dots$$

Pero

$$\frac{1}{7}=0,142857\dots$$

$$\frac{1}{7^3}=0,002915$$

$$\frac{1}{7^5}=0,000059\dots$$

Luego se tendrá

$$\frac{1}{\sqrt{47}}\cong 0,142857+0,002915+0,000088\cong 0,14586$$

NÚMERO DE TÉRMINOS

En la expansión de $(x+a)^n$ cuando **n** no es natural, el número de términos, es ilimitado; en tal caso, no hablaremos de término central.

TÉRMINO NUMÉRICAMENTE MÁS GRANDE

En el desarrollo de $(1+x)^n$ para cualquier **n** racional, como sólo nos interesa el valor numérico del término máximo, se presentarán los siguientes casos:

Sea una fracción positiva

El término de orden r+1 se obtiene multiplicando el término de lugar **r** por $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$

I. Si x es mayor que la unidad, aumentando el valor de **r** podemos hacer el factor anterior tan cercano a $-x$ como queramos. Los términos crecen consecutivamente en tal caso no habrá término máximo.

II. Si x es menor que la unidad, vemos que el factor continúa positivo y decrece hasta que $r>n+1$; y a partir de este punto se vuelve negativo, pero siempre permanece menor que 1 numéricamente; de donde se concluye que habrá un término máximo.

NOTA: $(a+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k$; $n\in\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}^+$; $|x|<a$

Problemas Resueltos

Problema 1

Hallar n + k, si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$

Resolución:

Recordemos

$$\boxed{\text{En } (a+b)^n \;;\; t_{k+1} = C_k^n a^{n-k}.b^k}$$

En el problema

$$t_4 = t_{3+1} = C_3^n . x^{n-3} . 2^3 = 2^3 C_3^n . x^{n-3}$$

Se tiene $2^3.C_3^n = 80 \Rightarrow C_3^n = 10 \Rightarrow n=5$

Además $n-3 = k \Rightarrow k=2$

$$\therefore\ n+k = 7$$

Problema 2

Hallar la relación entre **r** y **n** para que los coeficientes de los términos de lugares 3r y r+2 de la expansión de $(1+x)^{2n}$ sean iguales.

Resolución:

Usando la fórmula general de la expansión de $(1+x)^{2n}$

$$t_{3r} = t_{(3r-1)+1} = C_{3r-1}^{2n} . x^{3r-1}$$

$$t_{r+2} = t_{(r+1)+1} = C_{r+1}^{2n} . x^{r+1}$$

Por dato $C_{3r-1}^{2n} = C_{r+1}^{2n}$

I. $3r-1 = r+1 \Rightarrow r=1 \wedge n \in \mathbb{N}$

II. $(3r-1) + (r+1) = 2n \Rightarrow 4r = 2n$

$$\therefore\ n = 2r$$

Problema 3

Hallar el término independiente de x si existe en la expansión de

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$$

Resolución

Buscando el término general

$$t_{k+1} = C_k^9 \sqrt{x}^{\,9-k} . \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_k^9\, x^{\frac{9-k}{2} - \frac{k}{4}}$$

Si el término es independiente de x debe ser de grado nulo.

$$\Rightarrow \frac{9-k}{2} - \frac{k}{4} = 0 \Rightarrow k=6$$

Luego, el término independiente será el término de lugar 7

$$t_7 = t_{6+1} = C_6^9 \qquad \therefore\ t_{\text{Indep.}} = 84$$

Problema 4

En el desarrollo de $\left(x^4 + x^{-3}\right)^{2n-1}$ uno de los términos centrales es independiente de x. Halle el número de términos.

Resolución:

Los términos centrales ocupan los lugares

$$\frac{(2n-1)+1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{(2n-1)+1}{2} + 1$$

es decir $t_n \wedge t_{n+1}$ son términos centrales.

I. $t_n = t_{(n-1)+1} = C_{n-1}^{2n-1} . (x^4)^n . (x^{-3})^{n-1}$

$\Rightarrow 4n-3(n-1)=0 \Rightarrow n=-3$ (absurdo)

II. $t_{n+1} = C_n^{2n-1} . (x^4)^{n-1} . (x^{-3})^n$

$\Rightarrow 4(n-1)-3n = 0 \Rightarrow n=4$

Luego, el número de términos será igual a: $(2n-1)+1 = 2n = 8$

$\therefore$ El número de términos es 8

Problema 5

Hallar el número de términos irracionales en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{48}$$

Resolución:

De la fórmula general

$$t_{K+1} = C_K^{48} \left(\sqrt[4]{x}\right)^{48-k} . \sqrt[3]{x}^{\,K}$$

$$\Rightarrow t_{K+1} = C_K^{48} . x^{\frac{48-K}{4} + \frac{K}{3}} \;;\; K = 0, 1, ..., 48$$

Analizando el exponente de x

$$\frac{48-K}{4}+\frac{K}{3}=12-\frac{K}{4}+\frac{K}{3}=12+\frac{K}{12}$$

Si el término es racional, $\left(12+\frac{K}{12}\right)$ es entero

$\Rightarrow\ K=\overset{\circ}{12}\ \Rightarrow\ K=0, 12, 24, 36, 48$

De donde diremos que existen 5 términos racionales.

$\therefore$ 44 serán irracionales

Problema 6

Teniendo en cuenta el desarrollo de la expresión

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{56}$$

¿Cuál de las proposiciones, al determinar su valor, es verdadero?

I. El número de términos irracionales es 40
II. El número de términos fraccionarios es 4
III. El término independiente de x ocupa el décimo tercer lugar

Resolución:

De la fórmula del término general

$$t_{k+1}=C_k^{56}\left(\sqrt{x}\right)^{56-k}.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}$$

$$=C_{k}^{56}.x^{\frac{56-k}{2}+\left(-\frac{k}{3}\right)}$$

Analizando el exponente

$$\frac{56-K}{2}-\frac{K}{3}=28-\frac{K}{2}-\frac{K}{3}=28-\frac{5K}{6}$$

son racionales, si $K=\overset{\circ}{6}$

$\Rightarrow K=0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$

es decir, 10 términos son racionales

I. Términos irracionales son $(56+1)-10=47$ (falso)

II. Será fraccionario si $\left(28-\frac{5K}{6}\right)\in\mathbb{Z}$ lo cual ocurre si K es 36, 42, 48, 54; es decir, 4 términos. (verdadero)

III. Se tendrá término independiente de "x", si $\left(28-\frac{5K}{6}\right)=0\ \Rightarrow\ \nexists\, K\in\mathbb{N}$

Luego, no existe término independiente (falso)

Problema 7

Si x^P se encuentra en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, entonces ¿su coeficiente es?

Resolución:

Sea el término de lugar $k+1$

$$t_{k+1}=C_k^{2n}\left(x^2\right)^{2n-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=C_k^{2n}.x^{4n-2k-k}$$

Por dato $4n-3k=P\ \Rightarrow\ K=\frac{4n-P}{3}$

Luego, su coeficiente es $C^{2n}_{\frac{4n-P}{3}}$

Problema 8

Calcular el coeficiente de x^7 en el desarrollo de:

$$(2x^2+x-1)^5$$

Resolución:

Agrupando $\left[(2x^2+x)-1\right]^5$

Aplicando la fórmula general como si fuera un binomio

$$t_{k+1}=C_k^5\underbrace{(2x^2+x)^{5-k}}.(-1)^k$$

$$\boxed{C_P^{5-k}(2x^2)^{5-k-P}.x^P}$$

Entonces

$$t_{k+1}=(-1)^kC_k^5C_P^{5-k}.2^{5-k-p}.x^{2(5-k-p)+p}\ ....(\alpha)$$

Por dato $10-2K-2P+P=7\ \Rightarrow\ 2K+P=3\ /\ k\geq P$

$\Rightarrow$ Se cumple cuando

$K=1\wedge P=1$ ó $K=0\wedge P=3$

I. Si $K=1$; $P=1$ en (α)

$\Rightarrow\ t_2=C_2^5.C_2^4.2^2.x^7=5.4.8x^7=-160x^7$

II. $K=0\wedge P=3$; en (α)

$t_1=(1)C_0^5.C_3^5.2^2.x^7=40x^7$

Luego el término es $(-160+40)x^7=-120x^7$

$\therefore$ Su coeficiente es -120

Problema 9

Sabiendo que

$$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ .....\ +a_nx^n\ /\ n\in\mathbb{N}$$

Calcular $k=a_0+2a_1+3a_2+4a_3+....(n+1)a_n$

Resolución:

Del dato

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+.....+C_n^nx^n$$

Si $x=1\Rightarrow C_0^n+C_1^n+C_2^n+.....+C_n^n=2^n$

Se pide el valor de

$$K=C_0^n+2C_1^n+2C_2^n+4C_3^n+.....(n+1)C_n^n$$

$$=\left[C_0^n+C_1^n+..+C_n^n\right]+\left[C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+..+nC_n^n\right]$$

$$=2^n+nC_0^{n-1}+nC_1^{n-1}+....+nC_{n-1}^{n-1}$$

$$=2^n+n\left[C_0^{n-1}+C_1^{n-1}+...+C_{n-1}^{n-1}\right]$$

$$=2^n+n.2^{n-1}$$

$$\therefore\ K=2^n+n.2^{n-1}$$

Problema 10

Hallar el número de términos en el desarrollo de $S_{(x,y)}=(x^2+y^5)^n$

Si la suma de los grados absolutos de todos los términos es igual a 252

Resolución:

El desarrollo es

$$C_0^n(x^2)^n+C_1^n(x^2)^{n-1}(y^5)^1+C_2^n(x^2)^{n-2}(y^5)^2+...+C_n^n(y^5)^n$$

Entonces, la suma de grados absolutos es

$$=2[n+(n-1)+.....+1]+5[1+2+3+.....+n]$$

$$=2\frac{n(n+1)}{2}+5\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{7}{2}[n(n+1)]=252\Rightarrow n(n+1)=8(9)$$

$$\Rightarrow n=8$$

$\therefore$ Existen 9 términos

Problema 11

Calcular la suma siguiente

$$E=\frac{\lfloor\underline{1}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{n-1}}+\frac{\lfloor\underline{1}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{n-3}}+\frac{\lfloor\underline{1}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{n-5}}+.....+\frac{1}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{1}}$$

Resolución:

Multiplicando por $\lfloor\underline{n}$

$$\lfloor\underline{n}.E=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{n-1}}+\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{n-3}}+\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{n-5}}+..$$

$$....+\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{1}}$$

$$\lfloor\underline{n}.E=C_1^n+C_3^n+C_5^n+.....+C_{n-1}^n\ .....(\alpha)$$

$$\lfloor\underline{n}.E=2^{n-1}$$

$$\therefore\ E=\frac{2^{n-1}}{\lfloor\underline{n}}$$

Problema 12

Resolver la ecuación

$$3C_1^x+5C_2^x+.....+(2x-1)C_{x-1}^x=8^{23}-2(x+1)$$

Resolución:

$$3C_1^x+5C_2^x+...+(2x-1)C_{x-1}^x+\underbrace{2(x+1)}_{(2x+1)C_x^x+1}=8^{23}$$

NOTA: $(2k+1)C_k^x=2kC_k^x+C_k^x$

Luego

$$\left(2C_1^x+C_1^x\right)+\left(4C_2^x+C_2^x\right)+.....+\left(2xC_x^x+C_x^x\right)+1$$

$$=\underbrace{\left(C_1^x+C_2^x+...+C_x^x+1\right)}+2\left\{C_1^x+2C_2^x+3C_3^x+\right.$$

$$\left.+.....+xC_x^x\right\}$$

$$2^x+2\left\{xC_0^{x-1}+2.\frac{x}{2}C_1^{x-1}+3.\frac{x}{3}C_2^{x-1}+....+x.\frac{x}{x}C_{x-1}^{x-1}\right\}$$

$$=2^x+2x.2^{x-1}=2^x+x.2^x=2^x(x+1)$$

De donde se tiene:

$$2^x(x+1)=8^{23}\Rightarrow 2^x(x+1)=2^{69}=2^{63}.2^6$$

$$2^x(x+1)=2^{63}(63+1)$$

$$\therefore\ x=63$$

Problema 13

Hallar el coeficiente de a^3b^3c en el desarrollo de $(2a+b+3c)^7$

Resolución:

Su término general es

$$\frac{\underline{|7}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}(2a)^{\alpha}b^{\beta}(3c)^{\gamma}=\frac{\underline{|7}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}2^{\alpha}3^{\gamma}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$$

como la parte variable es a^3b^3c

Donde $\alpha=3$; $\beta=3$; $\gamma=1$

Luego, su coeficiente es

$$\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|3}\,\underline{|1}}.2^3.3^1=\frac{7\times\cancel{6}\times5\times4\times\cancel{\underline{|3}}}{\cancel{\underline{|3}}\,\cancel{\underline{|3}}}.8.3$$

$$=7\times5\times4\times8\times3=3\,360$$

Problema 14

Hallar el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de: $(2+3x^3+x^4)^4$

Resolución:

Su término general es

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}.2^{\alpha}.(3x^3)^{\beta}(x^4)^{\gamma}=\frac{\underline{|4}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}.2^{\alpha}.3^{\beta}.x^{3\beta+4\gamma}$$

De donde

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=4\\ 3\beta+4\gamma=10\end{cases},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}_0^+$$

Resolviendo el sistema

$\gamma=1 \wedge \beta=2 \wedge \alpha=1$

Luego su coeficiente es

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}2^1.3^2=\frac{4\times3\times\cancel{2}}{\cancel{\underline{|2}}}.\cancel{2}\times9=216$$

Luego el coeficiente de x^{10} es 216

Problema 15

¿Cuántos términos existen en el desarrollo de $(3x+2y^3-z^2+w)^5$?

Resolución:

El desarrollo de

$$\underbrace{(3x+2y^3-z^2+w)^5}_{\text{4 términos}}$$

Tendrá

$$\frac{\underline{|5+4-1}}{\underline{|5}\,.\,\underline{|4-1}}=\frac{\underline{|8}}{\underline{|5}\,\underline{|3}}=\frac{8\times7\times\cancel{6}\cancel{\underline{|5}}}{\cancel{\underline{|5}}\,\cancel{\underline{|3}}}=56$$

$\therefore$ 56 términos

Problema 16

Hallar el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(2+x^2-x^3)^{10}$

Resolución:

El término general es

$$\frac{\underline{|10}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}2^{\alpha}(x^2)^{\beta}.(-x^3)^{\gamma}$$

$$=\frac{\underline{|10}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}2^{\alpha}(-1)^{\gamma}.x^{2\beta+3\gamma}\quad .....\quad (*)$$

De donde $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=10\\ 2\beta+3\gamma=8\end{cases}$

El sistema se resuelve en

$\gamma=0 \wedge \beta=4 \wedge \alpha=6$

$\gamma=2 \wedge \beta=1 \wedge \alpha=7$

Luego el coeficiente de x^8 es (en $*$)

$$\frac{\underline{|10}}{\underline{|6}\,\underline{|4}\,\underline{|0}}2^6.(-1)^0+\frac{\underline{|10}}{\underline{|7}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}2^7.(-1)^2$$

$$=\frac{10\times\overset{3}{\cancel{9}}\times\cancel{8}\times7\cancel{\underline{|6}}}{\cancel{\underline{|6}}\,\cancel{\underline{|4}}}.64+\frac{10\times9\times\overset{4}{\cancel{8}}\cancel{\underline{|7}}}{\cancel{\underline{|7}}\,\cancel{\underline{|2}}}.128=$$

$=13\,440+46\,080=59\,520$

$\therefore$ El coef. de x^8 es 59 520

Problema 17

Hallar el coeficiente de x^{17} en el desarrollo de $(1-2x+3x^2-x^4-x^5)^5$

Resolución:

Su término general es

$$\frac{\underline{|5}}{\underline{|a}\,\underline{|b}\,\underline{|c}\,\underline{|d}\,\underline{|e}}(1)^a.(-2x)^b.(3x^2)^c.(-x^4)^d.(-x^5)^e$$

$$\frac{\underline{|5}}{\underline{|a}\,\underline{|b}\,\underline{|c}\,\underline{|d}\,\underline{|e}}(-2)^b.3^c(-1)^d.(-1)^e.x^{b+2c+4d+5e}\quad ..\quad (*)$$

De donde $\begin{cases} a+b+c+d+e=5 \\ b+2c+4d+5e=17 \end{cases}$

Del sistema se tendrá:

$e=0 \wedge d=4 \wedge c=0 \wedge b=1 \wedge a=0$

$e=1 \wedge d=2 \wedge c=2 \wedge b=0 \wedge a=0$

$e=2 \wedge d=1 \wedge c=1 \wedge b=1 \wedge a=0$

$e=3 \wedge d=0 \wedge c=0 \wedge b=2 \wedge a=0$

$e=3 \wedge d=0 \wedge c=0 \wedge b=1 \wedge a=1$

Luego, el coeficiente será en α :

$$\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{0}}(-2)^1.3^0(-1)^4.(-1)^0+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{1}}(-2)^0.3^2(-1)^2.(-1)^1$$

$$+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{2}}(-2)^1.3^1(-1)^1.(-1)^2+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{3}}(-2)^2.3^0(-1)^0.(-1)^3$$

$$+\frac{\lfloor\underline{5}}{\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{1}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{3}}(-2)^1 3^0(-1)^0(-1)^3$$

Reduciendo

$$5(-2)+\frac{5\times\cancel{4}\times3\times2}{\cancel{4}}.9(-1)+\frac{5\times4\times3\times\cancel{\lfloor\underline{2}}}{\cancel{\lfloor\underline{2}}}.(-2)(-3)+$$

$$\frac{5\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{\lfloor\underline{3}}}{\cancel{2}\cancel{\lfloor\underline{3}}}.4(-1)+\frac{5\times4\times\cancel{\lfloor\underline{3}}}{\cancel{\lfloor\underline{3}}}.(-2)(-1)$$

$$=-10-270+360-40+40=80$$

$\therefore$ Su coef. de x^{17} es 80

Problema 18

Hallar el término general de $(1-nx)^{1/n}$ en su desarrollo.

Resolución:

De la fórmula general

$$t_{k+1}=\binom{1/n}{k}(-nx)^k$$

$$=\frac{(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)\ldots.(\frac{1}{n}-k+1)}{\lfloor\underline{k}}(-1)^k n^k x^k$$

$$=\frac{(\frac{1}{\cancel{n}})(\frac{1-n}{\cancel{n}})(\frac{1-2n}{\cancel{n}})\ldots.(\frac{1-nk+n}{\cancel{n}})}{\lfloor\underline{k}}(-1)^k\cancel{n^k}x^k$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}.(n-1)(2n-1)\ldots.[(k-1)n-1]}{\lfloor\underline{k}}(-1)^k.x^k$$

Pero

$$(-1)^{k-1}.(-1)^k=(-1)^{2k-1}=-1$$

$$\therefore\ \boxed{t_{k+1}=-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots.[(k-1)n-1]}{\lfloor\underline{k}}x^k}$$

Problema 19

Si los coeficientes de tres términos consecutivos de la expansión de $(x+y)^n$ son proporcionales a los números 3, 12, 28; hallar n, siendo $n<10$.

Resolución:

Sean los términos consecutivos t_k , t_{k+1} , t_{k+2}

$$t_k=C^n_{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$$

$$t_{k+1}=C^n_k x^{n-k}y^k$$

$$t_{k+2}=C^n_{k+1}x^{n-k-1}y^{k+1}$$

Por dato $\dfrac{C^n_{k-1}}{3}\underset{(1)}{=}\dfrac{C^n_k}{12}\underset{(2)}{=}\dfrac{C^n_{k+1}}{28}$

De (1)

$$4C^n_{k-1}=C^n_k\Rightarrow 4\frac{\cancel{\lfloor\underline{n}}}{\lfloor\underline{k-1}\,\lfloor\underline{n-k+1}}=\frac{\cancel{\lfloor\underline{n}}}{\lfloor\underline{k}\,\lfloor\underline{n-k}}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{\cancel{\lfloor\underline{k-1}}(n-k+1)\cancel{\lfloor\underline{n-k}}}=\frac{1}{k\,\cancel{\lfloor\underline{k-1}}\,\cancel{\lfloor\underline{n-k}}}$$

$$\Rightarrow 4k=n-k+1\Rightarrow k=\frac{n+1}{5}\ \ldots\ldots..\ (\alpha)$$

De (2)

$$28C^n_k=12C^n_{k+1}\Rightarrow 7\frac{\cancel{\lfloor\underline{n}}}{\lfloor\underline{k}\,\lfloor\underline{n-k}}=3\frac{\cancel{\lfloor\underline{n}}}{\lfloor\underline{k+1}\,\lfloor\underline{n-k-1}}$$

$$\Rightarrow\frac{7}{\cancel{\lfloor\underline{k}}(n-k)\cancel{\lfloor\underline{n-k-1}}}=\frac{3}{(k+1)\cancel{\lfloor\underline{k}}\,\cancel{\lfloor\underline{n-k-1}}}$$

$$\Rightarrow 7k+7=3n-3k\Rightarrow 10k+7=3n\ \ldots..$$

(α) en (β) $\quad 10\left(\dfrac{n+1}{5}\right)+7=3n$

$$\Rightarrow 2n+2+7=3n$$

$$\therefore\ n=9$$

Problema 20

Si los coeficientes del primer y último término del desarrollo de $P(x;y) = (3a^2x^3 + ay^7)^{20}$ son iguales. Hallar el coeficiente del término de lugar 18.

Resolución:

Veamos los términos

$$t_1 = C_0^{20}(3a^2x^3)^{20}$$

$$t_{21} = C_{20}^{20}(ay^7)^{20}$$

Por dato $\quad 3^{20}a^{40} = a^{20} \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \ t_{18} = t_{17+1} = C_{17}^{20}(3a^2x^3)^3(ay^7)^{17}$$

$$\Rightarrow \ \text{Coef. } t_{18} = C_{17}^{20}\,3^3a^6a^{17} \text{ donde } a=1/3$$

$$\Rightarrow \ \text{Coef. } t_{18} = \frac{\lfloor\underline{20}\ 3^3}{\lfloor\underline{17}\ \lfloor\underline{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{23} = \frac{20\times 19\times 18}{6}.3^{-20}$$

$$\Rightarrow \ \text{Coef. } t_{18} = 380.3^{\ 19}$$

Problema 21

El coeficiente binómico de x^{45} en el desarrollo de $(x+x^{2})^{78}$ es $\begin{pmatrix}78\\a\end{pmatrix}$ siendo $a<20$. Hallar el coeficiente de $x^{4a\ 8}$

Resolución:

Sea el término de lugar a+1

$$t_{a+1} = \begin{pmatrix}78\\a\end{pmatrix}x^{78-a}.(x^{-2})^a$$

Del dato

$78 - a - 2a = 45 \Rightarrow 38 = 3a \Rightarrow a = 11$

Se busca entonces el coeficiente de $x^{4(11)\ 8}$, es decir, de x^{36}

Sea el término de lugar k+1

$$\Rightarrow \ t_{k+1} = \begin{pmatrix}78\\k\end{pmatrix}x^{78-k}(x^{-2})^k$$

Por dato $\quad 78 - k - 9k = 36 \Rightarrow k = 14$

$\therefore$ Su coeficiente es $\begin{pmatrix}78\\14\end{pmatrix}$

Problema 22

Señalar el coeficiente de x^5, en el desarrollo de $P(x) = (1+x-x^3)^6$

Resolución:

Aplicando la fórmula del término general

$$\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{\alpha}\ \lfloor\underline{\beta}\ \lfloor\underline{\gamma}}(1)^{\alpha}.(x)^{\beta}(-x^3)^{\gamma} = (-1)^{\gamma}\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{\alpha}\ \lfloor\underline{\beta}\ \lfloor\underline{\gamma}}x^{\beta+3\gamma}$$

Donde: $\quad \beta + 3\gamma = 5$

$\qquad\qquad \alpha + \beta + \gamma = 6$

Resolviendo tenemos

$\gamma = 0 \ \wedge \ \beta = 5 \ \wedge \ \alpha = 1$

$\gamma = 1 \ \wedge \ \beta = 2 \ \wedge \ \alpha = 3$

Entonces, su coeficiente es

$$\underbrace{(-1)^{\gamma}\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{1}\ \lfloor\underline{5}\ \lfloor\underline{0}}}_{6} + \underbrace{(-1)^{1}\frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{3}\ \lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{1}}}_{-60}$$

$\therefore$ El coeficiente de x^5 es -54

Problema 23

Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x + \dfrac{1}{x} + 1\right)^4$

Resolución:

En el término general

$$\frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{\alpha}\ \lfloor\underline{\beta}\ \lfloor\underline{\gamma}}(x)^{\alpha}.(x)^{-\beta}(1)^{\gamma} = \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{\alpha}\ \lfloor\underline{\beta}\ \lfloor\underline{\gamma}}x^{\alpha-\beta}$$

Del dato

$\alpha+\beta+\gamma = 4$

$\alpha-\beta = 0 \Rightarrow \alpha=\beta \quad \Rightarrow 2\alpha+\gamma = 4$

Si $\quad \alpha=0 \ \wedge \ \gamma=4$

$\qquad \alpha=1 \ \wedge \ \gamma=2$

$\qquad \alpha=2 \ \wedge \ \gamma=0$

Luego, su coeficiente es :

$$\frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{0}\ \lfloor\underline{0}\ \lfloor\underline{4}} + \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{1}\ \lfloor\underline{1}\ \lfloor\underline{2}} + \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{2}\ \lfloor\underline{0}} = 1 + 12 + 6 = 19$$

Problema 24

Al desarrollar sólo dos términos de la expresión matemática $A(x)=\dfrac{2^{12}}{\sqrt{4-x}}$, aproximadamente se obtiene un polinomio $P(x)$. Hallar $P_{(8)}$

Resolución:

$$A(x)=2^{12}(4-x)^{-1/2}=2^{12}.\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

$$P(x)=2^{11}.\left(1-\frac{x}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\Rightarrow P(x)=2^{11}\left(1+\frac{x}{8}\right)$$

$\therefore\ P(8)=2^{11}.2=2^{12}$

Problema 25

Sabiendo que el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^n$ admite 495 términos. Indicar, ¿cuántos términos tendrá el desarrollo de $(p+q+r)^n$?

Resolución:

Recordar en el desarrollo de

$$(\underbrace{a+b+c+....}_{\text{“k” términos}})^n$$

el número de términos de su desarrollo es:

$$\frac{\lfloor\underline{n+k-1}}{\lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{k-1}}$$

En el problema $k=5$

$$\frac{\lfloor\underline{n+4}}{\lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{4}}=495\Rightarrow\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}.24}$$

$\Rightarrow\ (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=24\times495$

Entonces

$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=9\times10\times11\times12$

de donde $n=8$

Entonces $(p+q+r)^8$ tendrá

$$\frac{\lfloor\underline{8+3-1}}{\lfloor\underline{8}\ \lfloor\underline{3-1}}=\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{8}.\lfloor\underline{2}}=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}\times9\times\cancel{\lfloor\underline{8}}}{\cancel{\lfloor\underline{8}}.\cancel{2}}=45$$

$\therefore$ Tendrá 45 términos

Problema 26

Hallar el tercer término de la expansión de

$$\frac{(1+x)^{3/4}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$$

Resolución:

La expresión es equivalente a

$$[(1+x)^{3/4}+(1+5x)^{1/2}](1-x)^{2}$$

Desarrollando tenemos

$$\left(1+\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2+..+1+\frac{5}{2}x-\frac{25}{8}x^2+...\right)(1+2x+3x^2+..)$$

$$=\left(2+\frac{13}{4}x-\frac{103}{32}x^2+...\right)(1+2x+3x^2+...)$$

Efectuando la multiplicación

$$2+4x+6x^2+\frac{13}{4}x+\frac{13}{2}x^2+\frac{13}{4}.3x^3-\frac{103}{32}x^2-\frac{103}{32}x^2.2x...$$

$$=2+\left(4+\frac{13}{4}\right)x+\left(6+\frac{13}{2}-\frac{103}{32}\right)x^2+...$$

$$=2+\frac{29}{4}x+\frac{297}{32}x^2+...$$

$\therefore$ El tercer término es $\dfrac{297}{32}x^2$

Problema 27

Hallar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de: $(1-2x+3x^2)^3$

Resolución:

Agrupando $[1-(2x-3x^2)]^3$ cuyo desarrollo :

NOTA: $(1-a)^3=1+3a+6a^2+10a^3+15a^4+...$

En el problema

$=1+3(2x-3x^2)+6(2x-3x^2)^2+10(2x-3x^2)^3+15(2x-3x^2)^4+$

Sumando los coeficientes de x^4

$6.9+10.3.2^2(-3)+15.2^4$

Efectuando se obtiene -66

$\therefore$ El coeficiente de x^4 es -66

Problema 28

Indicar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de: $(1-2x+3x^2)^{1/2}$

Resolución:

Agrupando $\left[1-(2x-3x^2)\right]^{-1/2}$ su desarrollo es:

$$1+\frac{1}{2}(2x-3x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}(2x-3x^2)^2-$$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{\lfloor 3}.(2x-3x^2)^3+$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{\lfloor 4}(2x-3x^2)^4+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{2}(2x-3x^2)+\frac{3}{8}(2x-3x^2)^2+\frac{5}{16}(2x-3x^2)^3$$

$$+\frac{35}{128}(2x-3x^2)^4+\ldots$$

Buscando el coeficiente de x^4

$$\frac{3}{8}.3^2+\frac{5}{16}.3.2^2(-3)+\frac{35}{128}.2^4=\frac{27}{8}-\frac{45}{4}+\frac{35}{8}$$

$$=-\frac{9}{4}$$

$\therefore$ El coeficiente es $-9/4$

Problema 29

Hallar el coeficiente de x^7y^2 en el desarrollo de

$$f(x\,;y)=(x+y)^5\,.\,(2x-y)^4$$

Resolución:

Un término cualesquiera de la expansión de $f(x;y)$ es

$$t_{k+1\,;\,r+1}=C_k^5\,x^{5-k}\,y^k\,.\,C_r^4\,(2x)^{4-r}(-y)^r$$

$$=\underbrace{2^{4-r}(-1)^r\,C_k^5\,C_r^4}_{\text{Coef.}}\,x^{9-k-r}\,y^{k+r}$$

Del dato tenemos $9-k-r=7 \wedge k+r=2$

$\Rightarrow k+r=2$, además $k,\ r\in \mathbb{Z}_0^+$

$\Rightarrow k=2-r$;

$\Rightarrow k=0\ ;\ r=2$

$k=1\ ;\ r=1$

$k=2\ ;\ r=0$

Luego, el coeficiente de x^7y^2 es:

$$\text{Coef}=\sum 2^{4-r}(-1)^r C_k^5\, C_r^4$$

$$=\sum_{r=0}^{2} 2^{4-r}(-1)^r C_{2-r}^5\, C_r^4=24-160+160$$

$$=24$$

$\therefore$ El coeficiente de x^7y^2 es 24

Problema 30

Hallar el lugar que ocupa el término independiente en la expansión de $\left(\sqrt[7]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$.

Si los coeficientes de los términos t_{r+1} y t_r están en la relación de $(2r+3)$ a r respectivamente.

Solución:

Sea $t_{k+1}=C_k^n\left(x^{\frac{1}{7}}\right)^{n-k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k$ el término arbitrario; luego si se trata del término independiente; el exponente de x es cero; entonces; $\dfrac{n-k}{7}-\dfrac{k}{3}=0 \Rightarrow 3n=10k$ .... (*), $n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n=\overset{\circ}{10} \wedge k=\overset{\circ}{3}$

También tenemos por dato

$$\frac{C_r^n}{C_{r-1}^n}=\frac{2r+3}{r}\Rightarrow\frac{\frac{n-r+1}{r}C_{r-1}^n}{C_{r-1}^n}=\frac{2r+3}{r}$$

$\Rightarrow n=3r+2,\ r\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N},\ n=\overset{\circ}{10}$

luego el menor valor de r=6; para n=20; de (*)

$3(20)=10k\Rightarrow k=6$

$\therefore$ El lugar del término independiente (t_7) es siete.

Problemas Propuestos

1. En la expansión de $(1+x)^{43}$, los coeficientes de los términos de lugares $2r+1$ y $r+2$ son iguales. Hallar r si es mayor que 2.

A) 13 B) 11 C) 10
D) 12 E) 14

2. ¿Cuántos términos del desarrollo de $\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{12}$ son números naturales?

A)7 B) 6 C) 3
D) 4 E) 5

3. Si en el desarrollo del binomio $\left(ax^{a}+bx^{b}\right)^{n}$ los términos de lugares $a+3$ y $b-1$ equidistan de los extremos; además la suma de todos los coeficientes es 27. Hallar la suma de todos los exponentes de variable (x) en su desarrollo.

A) 20 B) 18 C) 16
D) 14 E) 15

4. Señalar el valor del término central en el desarrollo de $\left(x^{2n}+x^{-2n}+2\right)^{2n}$, si se sabe que es equivalente a

$$\frac{\underline{|4n}}{\underline{|12-n}\ \underline{|5n-12}}$$

A) C_9^{16} B) C_7^{20} C) C_8^{16}
D) C_{10}^{16} E) C_{12}^{20}

5. En el desarrollo del siguiente binomio $\left(a^4+b^5\right)^{3n}$ los términos de lugares $(n+6)$ y $(n+8)$ equidistan de los extremos. Encontrar el exponente de "a" en el término central.

A) 25 B) 36 C) 48
D) 72 E) 81

6. Hallar el lugar que ocupa el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}$$

A) 111 B) 113 C) 115
D) 117 E) 120

7. Hallar el coeficiente del término que lleva x^6 en el desarrollo de $\left(x^2-2x+1\right)^5$

A) 320 B) 420 C) 210
D) 260 E) 180

8. Hallar el término independiente de "x" en el desarrollo de $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$

A) $(-1)^n\dfrac{\underline{|3n}}{\underline{|n}\ \underline{|2n}}$ B) $(-1)^n\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\ \underline{|n}}$

C) $(-1)^n\dfrac{\underline{|3n}}{\dfrac{\underline{|3n}}{2}\ \dfrac{\underline{|3n}}{2}}$

D) $(-1)^n\dfrac{\underline{|3n}}{\underline{|n-2}\ \underline{|2n+2}}$ E) $(-1)^{n+1}\dfrac{\underline{|3n}}{\underline{|n-1}\ \underline{|2n+1}}$

9. Hallar "2n" en
$\left(C_1^n\,C_2^n\,C_3^n\ .....\ C_n^n\right)(1!\ 2!\ 3!\ .....\ n!)^2=(40\ 320)^9$

A) 12 B) 14 C) 10
D) 16 E) 18

10. De la expansión de $(ax^b+bx^a)^{a+b}$, la raíz cuadrada de la suma de coeficientes es 216; y la parte literal (variable) del 5to. término es x^{20}.
Hallar el coeficiente del 4to. término si $(a+b)\in\mathbb{N}$.

A) 10 240 B) 20 480 C) 5 120
D) 2 560 E) 51 200

11. Dados los términos semejantes uno del desarrollo de $x(x^a+y^b)^a$ y otro de $y(x^b+y^a)^b$ ambos ocupan la misma posición en cada polinomio. Hallar el valor de $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{1+a^2b^2}$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

12. Siendo n un número entero positivo, hallar el valor de

$$R=\frac{1}{4^n}\left\{C_0^{4n}-C_2^{4n}+C_4^{4n}-C_6^{4n}+.....+C_{4n}^{4n}\right\}$$

A) 2 B) $(-1)^n$ C) $(-1)^{n+1}$
D) $(-1)^{n-1}$ E) 2

13. Hallar el equivalente reducido de

$$S=\frac{C_1^n}{3}+\frac{2C_2^n}{3^2}+\frac{3C_3^n}{3^3}+\frac{4C_4^n}{3^4}+...+\frac{nC_n^n}{3^n}$$

A) $\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ B) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$ C) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}$

D) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ E) $\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}$

14. Sumar

$$5C_0^n+\frac{5^2C_1^n}{2}+\frac{5^3C_2^n}{3}+\frac{5^4C_3^n}{4}+.....+\frac{5^{n+1}C_n^n}{n+1}$$

A) $\dfrac{5^{n+1}-1}{n+1}$ B) $\dfrac{6^{n+1}+1}{n-1}$ C) $\dfrac{6^{n+1}-1}{n+1}$

D) $\dfrac{6^{n+1}-2}{n+2}$ E) $\dfrac{5^{n+1}-2}{n+2}$

15. Calcular

$C_1^n-3C_3^n+9C_5^n-27C_7^n+.....\ ;\ n\in\mathbb{N}$

A) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\text{Sen}\,\dfrac{2n\pi}{3}$ B) $(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\,\text{Sen}\dfrac{2n\pi}{3}$

C) $(-1)^n\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\,\text{Sen}\dfrac{2n\pi}{3}$

D) $\text{Sen}\dfrac{2\pi}{3}$ E) $\text{Cos}\,\dfrac{2\pi}{3}$

16. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^9$

A) $\dfrac{5}{18}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{7}{18}$

D) $\dfrac{4}{9}$ E) $\dfrac{1}{2}$

17. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^4$$

A) 18 B) 15 C) 17
D) 19 E) 16

18. Hallar el equivalente de

$C_1^n x(1-x)^{n-1}+2C_2^n x^2(1-x)^{n-2}+...+nC_n^n x^n$

A) nx B) $(n+1)x$ C) $(n-1)x$
D) $(1+x)n$ E) $(1-x)n$

19. Hallar el término de mayor valor en el desarrollo de $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x\right)^{100}$ cuando $x=1$.

A) $\dfrac{\underline{\lfloor 100}\,.\,2^{-100}}{\left(\underline{\lfloor 49}\right)^{2}}$ B) $\dfrac{\underline{\lfloor 100}}{\underline{\lfloor 50}\,.\,\underline{\lfloor 51}}\,.\,2^{-100}$

C) $\dfrac{\underline{\lfloor 100}\,.\,2^{-99}}{\underline{\lfloor 50}\,.\,\underline{\lfloor 50}}$

D) $\dfrac{\underline{\lfloor 100}\,.\,2^{-99}}{\underline{\lfloor 51}\,.\,\underline{\lfloor 49}}$ E) $\dfrac{\underline{\lfloor 100}\,.\,2^{-100}}{\left(\underline{\lfloor 50}\right)^{2}}$

20. Sabiendo que en la expansión de $(3x+1)^n$; los términos de lugares sexto y séptimo tienen el mismo coeficiente. Calcular la suma de todos los coeficientes de dicha expansión.

A) 2^{22} B) 2^{26} C) 2^{34}
D) 2^{36} E) 2^{46}

21. En el desarrollo de $\left(3x^3+\dfrac{1}{x}\right)^n$ la suma de coeficientes de su desarrollo es 2^{34}. ¿Qué lugar ocupa un término que contiene a x elevado a un exponente igual al número de su lugar?

A) 10 B) 9 C) 12
D) 8 E) 11

22. Un término que se obtiene en el desarrollo de: $(x+y+z+w)^9$ es $kx^3y^2z^3w$. ¿Cuánto será el valor de k?

A) 2 520 B) 5 040 C) 1 460
D) 1 260 E) 1 070

23. Hallar el valor de

$$\left(C_0^n\right)^2+\left(C_1^n\right)^2+\left(C_2^n\right)^2+\ldots..+\left(C_n^n\right)^2$$

A) $\dfrac{\underline{\lfloor 2n}}{\underline{\lfloor n}\,\underline{\lfloor n}}$ B) $\underline{\lfloor n}$ C) $\dfrac{\underline{\lfloor 2n}}{\underline{\lfloor n}}$

D) 2^{2n} E) $\underline{\lfloor 2n}-1$

24. Hallar el segundo término de la expansión de

$$\frac{(1+x)^{1/4}.\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$$

A) $\dfrac{17}{2}x$ B) $\dfrac{23}{4}x$ C) $\dfrac{19}{4}x$

D) $6x$ E) $\dfrac{17}{4}x$

25. Hallar el valor de la sumatoria

$$S=2+\frac{5}{3\,\underline{\lfloor 2}}+\frac{5.7}{3^2\,\underline{\lfloor 3}}+\frac{5.7.9}{3^3\,\underline{\lfloor 4}}+\ldots..$$

A) $\sqrt{3}$ B) $3^{3/2}$ C) $3^{\ 1}$
D) $3^{\ 1/2}$ E) $\sqrt{2}$

26. Hallar el valor de la sumatoria

$$K=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots..$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{8}$

D) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ E) 2

27. Si el desarrollo de $(1+x+x^2)^n$ es
$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots..+a_rx^r+\ldots+a_{2n}x^{2n}$
Hallar el valor de $a_1+a_4+a_7+\ldots..$

A) 3^n B) $3^{n\ 1}$ C) 2^n
D) $2^{n\ 1}$ E) 3^{n+1}

28. Hallar el coeficiente de x^6 en el desarrollo de

$$\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}\right)^{-2}$$

A) $-\dfrac{10}{27}$ B) $\dfrac{10}{27}$ C) $\dfrac{2}{27}$

D) $-\dfrac{2}{27}$ E) $\dfrac{6}{27}$

29. Si $n \in \mathbb{Z}^+$, hallar la suma de la serie "S" de "n" términos siendo :

$$S = \frac{1}{2(1!)} + \frac{3}{2^2(2!)} + \frac{5}{2^3(3!)} + \frac{7}{2^4(4!)} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n(n!)}$$

A) $(2^n-1)/n!$ B) $(2^n.n!-1)/2^n.n!$
C) $(2n+1)/2^n.n!$
D) $(2n-1)/2^n.n!$ E) $(2n-n!)/2^n.n!$

30. Indicar la raíz cúbica del producto de todos los términos de la progresión de 3 términos.

$$\div\div\ 9C_4^n : 5C_5^n : 5C_6^n$$

A) 25 B) 105 C) 116
D) 95 E) 138

31. ¿Cuál es el valor del término independiente en el desarrollo de:

$$A(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5 ?$$

A) 10 B) 20 C) 30
D) 39 E) 25

32. Hallar el término constante del desarrollo de:

$$F(x;y) = \left(\frac{x^{n^2}}{y^{n-1}} + \frac{2y^{2n}}{\sqrt[n]{x}}\right)^{4n}$$

A) 220 B) 455 C) 1760
D) 458 E) 1920

33. Si el único término central del desarrollo de:

$$H(x;y) = \left(3x^2 - \frac{2y}{x}\right)^n \text{ es de sexto grado.}$$

¿Qué exponente tendrá "y" en ese término?

A) 6 B) 4 C) 3
D) 5 E) 2

34. En la expansión de

$$F(x) = (x^3\sqrt[3]{x} - x^{4})^{15}$$

el término de lugar (2n-3), contado a partir del extremo final, tienen por grado 45.

Hallar el grado del término de lugar (n-1), contado a partir del extremo inicial.

A) 8 B) 26 C) 28
D) Cero E) 30

35. Los términos de lugares: n ; (n+1) y (n+2) del desarrollo de $E(x)=(1-x)^m$ se hallan en progresión geométrica; según esto halle el término de lugar veinte.

A) x^{19} B) x^{21} C) x^{22}
D) x^{20} E) x^{23}

36. Si $Ka^2b^3c^m$ pertenece a la expansión de: $E(a;b;c) = (a+b+c)^7$; calcular el valor de $k+3m$

A) 4^3 B) 5^3 C) 6^3
D) 7^3 E) 8^3

37. En el desarrollo de

$(x+\sqrt{x^2-1})^7 + (x-\sqrt{x^2-1})^7$; indicar el coeficiente del término lineal.

A) -7 B) -14 C) 21
D) 7 E) 14

38. Hallar el coeficiente de x^7y^2 en el desarrollo de $f(x;y) = (x+y)^5(2x-y)^4$

A) -16 B) 24 C) -160
D) 48 E) 344

39. Calcular el valor aproximado de

$$\sqrt[3]{30} + \sqrt[4]{93} + \sqrt[5]{288} + \ldots\ldots \quad 27 \text{ radicales}$$

A) 80 B) 81 C) 82
D) 83 E) 84

40. En el desarrollo de $(x^2+y-x)^8$; hallar el coeficiente de los términos de la forma: $x^{10}y^k$ donde k es un número par no nulo.

A) 420 B) 420; 560 C) -420; 56
D) 56 E) 560

1	E	11	B	21	E	31	A
2	A	12	B	22	B	32	C
3	B	13	B	23	A	33	C
4	C	14	C	24	C	34	D
5	D	15	B	25	B	35	A
6	B	16	C	26	C	36	C
7	C	17	D	27	B	37	B
8	A	18	A	28	D	38	B
9	D	19	E	29	B	39	E
10	A	20	E	30	B	40	A

Claves

CAPÍTULO

XII

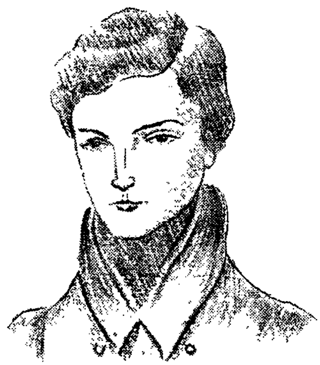
Números reales

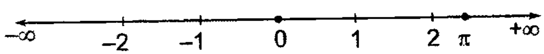
Evaristo Galois (1811-1832)

El genio matemático más precoz. Fue suspendido en el examen de ingreso a la escuela politécnica en 1830, y expulsado de la Escuela Normal Superior en 1831 por haber participado en la lucha librada por los demócratas contra la Monarquía. Murió trágicamente, a consecuencia de un duelo de pistolas a la edad de 21 años, no sin haber escrito, en la noche anterior a su muerte, una carta a Agust Chevalier que constituye un genial testamento científico, en el cual Galois resume sus ideas sobre la teoría de las ecuaciones algebraicas, ideas que constituyen la base del álgebra moderna, dando un aporte significativo al desarrollo de la teoría de grupos.

A los diecisiete años, envió a la Academia de Ciencias una memoria sobre la resolución de ecuaciones algebraicas que contenía algunas de las ideas matemáticas más importantes del siglo. Desgraciadamente, Galois nunca supo nada más de ese trabajo; es muy probable que Cauchy, el principal matemático francés de la época, la haya perdido.

Envió un segundo trabajo a la Academia: esta vez Poisson, un matemático de prestigio, fue el juez y declaró el trabajo "incomprensible".





Recta numérica real

L E C T U R A

Cortaduras en Q

Introducimos ahora un método alternativo para definir el número real a partir de Q basado en las cortaduras de DEDEKIND.

Definición (Cortadura) :

El sub conjunto $A \subset Q$ es una Cortadura en Q si y sólo si se verifica:

$$\text{I. } A \neq 0 \wedge A \neq Q$$
$$\text{II. } x \in A \wedge y < x \Rightarrow y \in A$$
$$\text{III. } x \in A \Rightarrow \exists\ y \notin A \text{ tal que } x < y$$

La condición (I) significa que una Cortadura en Q es una parte propio y no vacía de Q. En (II) queda especificado que A carece de máximo.

Es claro que toda Cortadura en Q caracteriza una partición en Q que denotamos por $\{A,A^C\}$ los elementos de A^C son cotas superiores de A.

Ejemplos:

1. *El siguiente sub conjunto A de Q es un Cortador: $A=\{x \in Q/x < 1/3\}$*

   En este con $\frac{1}{3} \in A^C$ es el extremo superior de A es decir el primer elemento del conjunto de las cotas superiores de A

2. *Si A es una Cortadura en Q, entonces todo elemento de A es menor que todo elemento de A^C es decir $x \in A \wedge y \in A^C \Rightarrow x < y$*

   En efecto, si fuera $y \leq x$, como $x \in A$, entonces por la condición (II) de la definición resultaría $y \in A$ lo que es contrario a la hipótesis.

3. *Todo número racional "a" determina una Cortadura en Q definida por*
   $$A = \{x \in Q \text{ tal que } x < a\}$$

   El número "a" se llama frontera racional de la Cortadura y se identifica con el mínimo de A^C.

Fuente: Análisis Matemático - Walter Rudín

El sistema de los números reales

OBJETIVOS:
- Distinguir la diferencia con otros tipos o clases de números.
- Saber cómo se encuentra constituido este conjunto numérico.
- Dar a los números reales una categoría de campo numérico.
- Conocer una estructura algebraica (grupo, anillo, campo).
- Realizar algunas demostraciones usando los axiomas de los números reales.

INTRODUCCIÓN

No es posible jugar ajedrez sin conocer las reglas, podríamos mover un peón 4 espacios o una de las torres diagonalmente; análogamente no podemos trabajar con los números sin conocer las reglas que la gobiernan.

Los números están vinculados a tantas aplicaciones teóricas y prácticas. Por citar el caso donde la música y los números se relacionan estrechamente ya que se ha descubierto que existe una relación entre la calidad armónica de los acordes de una lira y las razones entre las longitudes de las cuerdas pulsadas.

De tantas otras aplicaciones no nos equivocamos al decir que el mundo está gobernado por los números

El número es el concepto matemático más importante, incluso marca hitos en la historia, así:

I. El origen de los números naturales caracteriza a la sociedad primitiva y es acondicionado para resolver las necesidades de las actividades prácticas del hombre.

II. La aparición de los números fraccionarios positivos fue acondicionado a la necesidad de efectuar mediciones más pequeñas que la unidad.

III. La introducción de los números negativos fue provocado por el desarrollo del álgebra en la resolución de problemas generales (siglo XVII).

IV. En los años 70 del siglo XIX, fue desarrollado una teoría rigurosa de los números reales en los trabajos de R. Dedeking, G. Cantor y K. Weierstrass.

Cada uno de estos conjuntos numéricos han sido creados por extensión debido a las necesidades circunstanciales de resolver los problemas concretos de la vida cotidiana.

CONCEPTOS PREVIOS

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Para tener una idea más completa de los números reales, veamos cómo están estructurados los diversos conjuntos que lo conforman:

I. Conjunto de los números Naturales (N)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

II. Conjunto de los Números Enteros (Z)

$$\mathbb{Z} = \{ .... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

III. Conjunto de los Números Racionales (Q)

Un número racional es todo aquel número que se puede expresar como la división indicada de dos números enteros.

$$\mathbb{Q} = \{x \ / \ x = \frac{m}{n} ; \ m, n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \neq 0\}$$

Ejemplo 1

$$3 = \frac{6}{2} \Rightarrow 3 \in \mathbb{Q}$$

Ejemplo 2

$$0{,}25 = \frac{1}{4} \Rightarrow 0{,}25 \in \mathbb{Q}$$

Si el número dado es decimal periódico, su transformación a fraccionaria es:

1. $$e,\widehat{abc} = \frac{eabc - e}{999}$$

$$\Rightarrow 3,\widehat{271} = \frac{3271 - 3}{999} = \frac{3268}{999}$$

2. $$m,a\widehat{bc} = \frac{mabc - ma}{990}$$

$$\Rightarrow 2,3\widehat{44} = \frac{2344 - 23}{990} = \frac{2321}{990}$$

Ejemplo 3

Halle la fracción equivalente a

0,142857142857 ....

Resolución:

Veamos, es equivalente a

$$0,\widehat{142857} = \frac{142857 - 0}{999999} = \frac{1}{7}$$

IV. Números Irracionales (Q'): Un número irracional es todo aquel número que no es posible expresarlo como la división indicada de dos números enteros. Un número irracional se caracteriza por tener parte decimal no periódica, con infinitas cifras decimales.

$$\mathbb{Q}' = \{x \ / \ x \neq \frac{m}{n} ; \ m, n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \neq 0\}$$

Los números irracionales son de dos tipos:

a. ***Irracionales Algebraicos:*** Raíces de polinomios de coeficientes enteros:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{3}$, ...

b. ***Números Trascendentes:*** No son raíces de ningún polinomio de coeficientes enteros: π, e , ...

Ejemplos:

1. $\pi = 3{,}141592$ ... infinitos no periódicos
2. e = 2,71828182 ... infinitos no periódicos
3. $\sqrt{2} = 1{,}41421356$ ... infinitos no periódicos

Esquematizando:

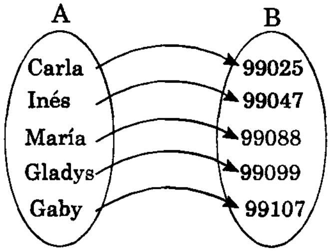
$$\text{Núm. Reales}(\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Núm. Racionales } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{Enteros } \mathbb{Z} \begin{cases} \text{Positivos } \mathbb{Z}^+ \text{ o } \mathbb{N} \\ \text{Cero} \\ \text{Negativos } \mathbb{Z}^- \end{cases} \\ \text{Fraccionarios } \dfrac{m}{n} ; \ m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \end{cases} \\ \text{Núm. Irracionales } (\mathbb{Q}' \text{ o } \mathbb{I}) \end{cases}$$

Correspondencia Biunívoca

Dados dos conjuntos no vacíos A y B diremos que existe una correspondencia biunívoca entre éstos, si a cada elemento del primer conjunto le corresponde un sólo elemento del segundo y a cada elemento del segundo conjunto le corresponde un sólo elemento del primero.

Ejemplo:

Consideremos el conjunto A de las alumnas becadas y el conjunto B los códigos correspondientes a cada alumna del conjunto A. Graficando la correspondencia entre estos conjuntos.



Analizando el gráfico vemos que a cada alumna le corresponde un código y cada código pertenece a una alumna; a ello se llama una **correspondencia biunívoca**.

Igualdad de números

Cada uno de los conjuntos, subconjuntos de los números reales gozan de esta definición, de manera particular en los números naturales.

Propiedades de la igualdad en N

1. Propiedad reflexiva: Todo número natural es igual así mismo.

   Simbólicamente: $\boxed{\forall\ a \in \mathbb{N}\ ;\ a = a}$

2. Propiedad simétrica en $\mathbb{N}$: Si un número natural es igual a un segundo, entonces este segundo es igual al primero.

   Simbólicamente:

   $\boxed{\forall\ a, b \in \mathbb{N} : a = b \Rightarrow b = a}$

3. Propiedad transitiva: si un número natural es igual a un segundo y este segundo es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.

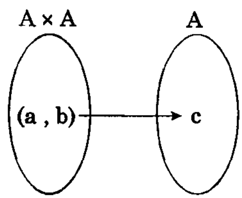
   Simbólicamente:

   $\boxed{\forall\ a, b, c \in \mathbf{N}\ ;\ a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c}$

Estructuras algebraicas

Operación binaria.- Llamada también ley de composición interna, definida en un conjunto no vacío A. Consiste en una correspondencia biunívoca que asigna a cada par de elementos de A, un único elemento de A. Esto significa que a cada elemento de A×A le corresponde un único elemento de A.

Definición: La operación binaria o ley de composición interna definida en un conjunto A no vacío, es toda correspondencia biunívoca de A×A en A.



La correspondencia biunívoca la denotaremos por $*$, entonces $*$ es una operación binaria en A$\Rightarrow * : A \times A \rightarrow A$, es decir $a \in A \wedge b \in A \rightarrow a*b \in A$

Ejemplos:

1. La adición usual en $\mathbb{Z}$ es una operación binaria ya que la suma de todo par de números enteros es otro entero:

   $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

   $(3,5) \rightarrow 3 + 5 = 8$

2. La sustracción en $\mathbb{N}$ no es una operación binaria, puesto que la diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural.

   $4 , 7 \in \mathbf{N}$ sin embargo $4 - 7 = -3 \notin \mathbf{N}$

3. La multiplicación en Q' no es una operación binaria puesto que el producto de dos números irracionales no necesariamente es irracional.
$\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1 \in Q'$, pero $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=2 \notin Q'$

4. Si S = {a, b, c, d} podemos definir una operación en S, haciendo uso de la siguiente tabla (tabla de doble entrada).

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	b	b	c

→ Fila Superior

→ Diagonal principal

Columna principal

Se leerá:

a*a = a (a , a) → a
a*b = b (a , b) → b
a*c = c (a , b) → c
⋮ ⋮
d*d = c (d , d) → c

Se concluye que * define una operación binaria en A porque cada uno de los resultados está en A.

Ley de clausura o cerradura

Sea A un conjunto no vacío, a, b ∈ A y una operación *, si a*b ∈ A ∀ a, b ∈ A, entonces se dirá que la operación * es cerrado en A.

> **NOTA:** Toda operación binaria cumple la ley de clausura o cerradura.

Ejemplo: Consideremos el conjunto A={1,2,3,4} y la operación * entre los números a,b de A, como el máximo común divisor de dichos números.
Simbólicamente a*b = M.C.D {a,b}

Resolución:
Veamos en la siguiente tabla de doble entrada:

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	1
4	1	2	1	4

* es una operación cerrada en A.

Estructura de Monoide

Definición: El par ordenado (M, *) donde M es un conjunto no vacío y * una operación, es un monoide si y sólo si * es una operación binaria o ley de composición interna.

Ejemplos:

1. Son modelos de monoides los conjuntos ℕ, ℤ, ℚ, ℝ con la adición ordinaria, es decir, (ℕ, +), (ℤ, +), (ℚ, +), (ℝ,+)
2. El par (ℕ, −) no es un monoide, ya que la sustracción no es una ley de composición interna en ℕ.
3. El par (ℕ , *), donde * se define como: a*b=max {a,b} tiene la estructura de monoide.
4. Sea A = {m, n, p} y la operación * definida por la siguiente tabla:

*	m	n	p
m	n	p	m
n	p	m	n
p	m	n	p

Vemos que el par (A, *) es un monoide.

Definición (ley asociativa)

La operación binaria * es asociativa en A. s. sólo si (a*b)*c = a*(b*c) ∀ a, b, c ∈ A

Ejemplos:

1. $a*b = a + b$, donde $a, b \in \mathbb{N}$, es asociativa
   Resolución:
   Veamos
   Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$
   I. $(x*y)*z = (x+y)*z = x + y + z$
   II. $x*(y*z) = x*(y+z) = x + y + z$

   De I y II vemos que $*$ es asociativo

2. $a*b = a+b+ab \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$
   Veamos: sean $x, y, z \in \mathbb{N}$

   I. $(x*y)*z = (x+y+xy)*z = x+y+xy+z + (x+y+xy)z$
   $= x+y+z + xy + xz + yz + xyz$

   II. $x*(y*z) = x*(y+z+yz) = x+y+z+yz + x(y+z+yz)$
   $= x+y+z+yz+xy+xz+xyz$

   De I y II $*$ es asociativa.

ESTRUCTURA DE SEMIGRUPO

Definición: El par ordenado $(A, *)$, donde A es un conjunto no vacío y $*$ es una operación binaria, se llamará semigrupo si y sólo si $*$ es asociativo en A. En otras palabras un semigrupo es un monoide asociativo.

Ejemplos:

1. Los pares $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, .)$ Son modelos de semigrupos.
2. Sea el par $(A, *)$ tal que $A = \mathbb{N}$ y $a*b=a+b+1$ $\forall\, a,b \in A$ es un semigrupo ya que la operación $*$ es ley de composición interna y asociativa.

DEFINICIONES

I. Ley conmutativa en A. La operación binaria $*$ es conmutativa en un conjunto A no vacío si y sólo si $a*b = b*a \quad \forall\, a,b \in A$

Ejemplos:

1. $a*b = a+b \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$
   Veamos $a*b = a+b = b+a = b*a$
   entonces $*$ es conmutativa en $\mathbb{Z}$
2. $a*b = a.b$ en $\mathbb{Q}$
   Veamos $a*b = a.b = b.a = b*a$
   entonces $*$ es conmutativa en $\mathbb{Q}$
3. $*$ definida mediante la tabla de doble entrada, $A = \{a, b, c\}$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

M

Es conmutativa si la matriz M es simétrica. Luego diremos que $*$ es conmutativa en A.

II. Elemento neutro o identidad
Dado un conjunto no vacío A y una operación binaria $*$, $e \in A$ se llamará elemento identidad o neutro de A bajo la operación $*$ si y sólo si $e*a=a*e = a \quad \forall a \in A$

Ejemplos:

1. En $(\mathbb{Z}, +)$ el número 0 es el elemento identidad ya que $a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
2. En $(\mathbb{N}, .)$ el número 1 es el elemento identidad puesto que $a.1 = 1.a = A$ $\forall a \in \mathbb{N}$
3. En $A = \{a, b, c\}$ y la operación $*$ definido mediante la tabla:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Se observa: $a*a = a$
$a*b = b = b*a$
$a*c = c = c*a$

de donde se concluye que a es el elemento neutro del conjunto A con la operación $*$.

III. Elemento inverso o recíproco

Dado un conjunto no vacío A y una operación binaria $*$. Se dirá que un elemento denotado como $a'\in A$ es el inverso de $a\in A$ si y sólo si $a*a' = a'*a=e$, siendo "e" el elemento identidad de A bajo $*$.

Ejemplos:

1. En $(\mathbb{Q}, +)$ el inverso de 3 es -3 ya que $3+(-3)=0$
2. En $(\mathbb{R}, .)$ el inverso de 7 es $\frac{1}{7}$ puesto que

   $7.\frac{1}{7}=1$
3. En la operación $*$ definida mediante la tabla

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

vimos que su neutro era **a** y como

$a*a=a \Rightarrow a'=a$

$b*c=a=c*b \Rightarrow b'=c$

es decir, el inverso de a es a y el inverso de b es c.

IV. Distributividad de una operación binaria respecto a otra

Consideremos el caso de dos operaciones binarias $*$ y $\blacktriangledown$ definidos en un mismo conjunto A, nos interesa caracterizar el comportamiento relativo de dichas operaciones binarias en el sentido de obtener $(a*b)\blacktriangledown c$ o también $(a\blacktriangledown b)*c$

a) $\blacktriangledown$ es distributiva a derecha respecto a $*$ si y sólo si $(a*b)\blacktriangledown c=(a\blacktriangledown c)*(b\blacktriangledown c)\ \forall a,b,c\in A$

b) $\blacktriangledown$ es distributiva a izquierda respecto a $*$ si y sólo si $c\blacktriangledown(a*b)=(c\blacktriangledown a)*(c\blacktriangledown b)\ \forall a,b,c\in A$

c) Se dice que $\blacktriangledown$ es distributiva respecto de $*$ si y sólo si lo es a izquierda y a derecha.

Ejemplos:

1. La adición y la multiplicación en $\mathbb{N}$ son operaciones binarias y la segunda es distributiva con respecto a la primera.

   Veamos: sean $a, b, c\in\mathbb{N}$

   $a.(b+c)=a.b+a.c$

   $(b+c).a=b.a+c.a$

2. La potenciación en $\mathbb{N}$ es distributiva a derecha respecto a la multiplicación ya que $(a.b)^n=a^n.b^n$

   Sin embargo no lo es a la izquierda puesto que $n^{a.b}\neq n^a.n^b$

3. La división es distributiva a derecha con respecto a la adición ya que $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$ y no sería correcto decir que la adición es distributiva a derecha respecto a la división ya que $c\div(a+b)\neq c\div a+c\div b$

ESTRUCTURA DE GRUPO

El concepto de grupo juega un papel importante, no sólo en matemáticas, sino también en otras ciencias como en la física y la química. La teoría de grupos es la base del álgebra abstracta moderna y puede ser encarado imponiendo condiciones a las estructuras de monoide o de semigrupo.

Definición: Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria, el par $(G, *)$ se llama grupo si y sólo si $*$ es una operación binaria asociativa, con elemento neutro y todo elemento de G admite un inverso en G.

Simbólicamente:

$(G, *)$ es un grupo si y sólo si se verifican los axiomas:

G_1 $\quad *: G\times G\rightarrow G$

G_2 $\quad *$ es asociativo, es decir, $(a*b)*c=a*(b*c)$, $\forall a, b, c\in G$

G_3 Existencia del elemento neutro o identidad
$\exists e \in G$ tal que $a*e = e*a = a \quad \forall\, a \in G$

G_4 Existencia de inversos
$\forall a \in G,\ \exists a' \in G$ tal que $a*a' = a'*a = e$

Ejemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo
   Veamos:
   a) La adición de números enteros genera otro número entero.
   b) La adición de números enteros es asociativo, es decir, $a+(b+c) = (a+b)+c$
   c) Tiene a cero como el elemento neutro $(0 \in \mathbb{Z})$ ya que $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$
   d) Todo elemento entero $a \in \mathbb{Z}$ tiene un elemento inverso denotado por $(-a) \in \mathbb{Z}$ de tal modo que $a+(-a) = 0$

2. $(\mathbb{N}_0, +)$ no es un grupo, siendo:
   $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3, ...\}$ puesto que sus elementos no tienen sus inversos respecto a la adición.

3. $(\mathbb{R} - \{0\}, .)$ es un grupo ya que se cumple con los axiomas requeridos, en cambio $(\mathbb{R}, .)$ no lo es porque no existe el inverso multiplicativo para 0.

4. El elemento identidad en un grupo es único.
   En efecto:
   Supongamos que e y e' son neutros respecto a $*$ entonces se tiene:
   $e' = e'*e = e*e' = e$
   $\therefore e' = e$

5. Los elementos inversos en un grupo son únicos.
   En efecto:
   Supongamos que a' y a" son los inversos de a, entonces se tiene:
   $a'' = a''*e = a''*(a*a') = (a''*a)*a' = e*a' = a'$
   $\therefore a'' = a'$

6. Sea $(a, *)$ un grupo $\forall\, a,b \in G$ probar la existencia y unicidad de $x \in G$ tal que $x*a = b$

   Demostración:
   I. Sea $x = b*a'$ veamos que verifica la ecuación:
   como $x = b*a' \Rightarrow x*a = b*a'*a = b*e = b$
   $\Rightarrow x*a = b$, luego existe tal x

   II. Ahora veamos que x es único
   Supongamos que x_1 y x_2 verifican la ecuación.
   $\Rightarrow x_1*a = b = x_2*a \Rightarrow x_1*a = x_2*a$
   $\Rightarrow x_1*a*a' = x_2*a*a'$ (a' es el inverso de a)
   $\Rightarrow x_1*e = x_2*e \Rightarrow x_1 = x_2$
   $\therefore x$ es único

7. Demostrar que $(a*b)' = b'*a' \quad \forall\, a, b \in G$ siendo $(G, *)$ un grupo.
   (*Para el lector*)

Definición (grupo abeliano)
Si en el grupo $(G, *)$ se cumple que $a*b = b*a$ $\forall\, a,b \in G$, se dice que el grupo es abeliano o conmutativo.

NOTA: El término de grupo abeliano se debe en honor al célebre matemático noruego Niels Henrik Abel quien escribió tratados acerca de las estructuras algebraicas y demostró por la teoría de grupos la imposibilidad de resolver las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco por fórmulas generales en función a sus coeficientes.

Definición (potenciación)
Sea $a \in G$ y $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ se define:
$a^n = a*a*a* \ldots *a$ " n" veces.

8. Demostrar que si $(a*b)^2 = a^2 * b^2 \ \forall\, a, b \in G$, entonces el grupo $(G, *)$ es abeliano.

Demostración:

A partir de la condición habría que demostrar que $a*b = b*a \ \forall a, b \in G$

Veamos:

$(a*b)^2 = a^2*b^2 \Rightarrow (a*b)*(a*b) = a*a*b*b$

$\Rightarrow a*(b*a)*b = a*(a*b)*b$

$\Rightarrow a'*a*(b*a)*b*b' = a'*a*(a*b)*b*b'$

$\Rightarrow e*(b*a)*e = e*(a*b)*e$

de donde $b*a = a*b$

$\therefore$ $(G, *)$ es abeliano.

9. **Teorema de cancelación**

I. Teorema de cancelación (por izquierda). Sea el grupo $(G, *)$ con $a*b = a*c$; entonces $b=c \ \forall a, b, c \in G$.

Demostración

Como $a \in G \Rightarrow a' \in G$; luego componiendo con a' tenemos:

$a*b = a*c$

$\Rightarrow a'*(a*b) = a'*(a*c)$

$\Rightarrow (a'*a)*b = (a'*a)*c$

$\Rightarrow e*b = e*c \Rightarrow b = c$

II. Teorema de cancelación (por derecha) Sea el grupo $(G, *)$ con $b*a = c*a$, entonces $b=c \ \forall a, b, c \in G$.

La demostración queda como ejercicio para el lector.

SUBGRUPO

Definición: Sea H un subconjunto no vacío de G, el par $(H,*)$ es un subgrupo de $(G,*)$ si y sólo si $(H, *)$ es un grupo.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$
2. Si $T = \{x / x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $(T, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$
3. Sea el grupo $(A, *)$, donde $A = \{a, b, c, d\}$ y la ley de composición interna $*$ definida por la tabla siguiente:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Es fácil ver que $(A, *)$ es un grupo abeliano. Vemos que si $H=\{a, b\}$ entonces $(H, *)$ es un subgrupo de $(A, *)$, en cambio si $H' = \{a, b, c\}$ vemos que $(H', *)$ no es subgrupo de $(A, *)$ ya que $b*c = d \notin H$.

4. **Teorema:** Si H es subconjunto no vacío de un grupo $(G,*)$ que verifica $a \in H \wedge b \in H \Rightarrow a*b' \in H$, entonces $(H,*)$ es un subgrupo de $(G,*)$

Demostración:

Veamos que $(H,*)$ es un grupo

a) Asociatividad garantizada pues $H \subset G$
b) Elemento neutro:
$a \in H \wedge a' \in H \Rightarrow a*a' \in H \Rightarrow e \in H$
c) Elemento inverso:
sea $e \in H \wedge a \in H \Rightarrow e*a' \in H \Rightarrow a' \in H$
d) Clausura o cerradura
$(a \in H \wedge b \in H \Rightarrow a*b \in H)$
En efecto:
$a \in H \wedge b' \in H \Rightarrow a*(b')' \in H \Rightarrow a*b \in H$
(Demuestre que $(b')' = b$)

$\therefore$ $(H, *)$ es un subgrupo de $(G, *)$

5. Si $(H_1, *)$ y $(H_2, *)$ son subgrupos de $(G,*)$ demostrar que $(H_1 \cap H_2, *)$ es un subgrupo de $(G, *)$

Demostración:
Usando el teorema anterior (ejemplo 4)
Bastará demostrar que
si $a \in H_1 \cap H_2 \wedge b \in H_1 \cap H_2$ entonces $a*b' \in H_1 \cap H_2$

Veamos:

$a \in H_1 \cap H_2 \quad \wedge \quad b \in H_1 \cap H_2$
$a \in H_1 \quad\quad a \in H_2$
$b \in H_1 \quad\quad b \in H_2$

$\Rightarrow a*b' \in H_1 \quad \wedge \quad a*b' \in H_2$

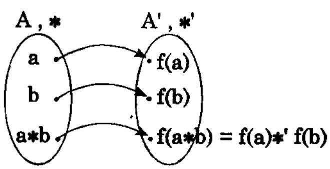
$\Rightarrow a*b' \in H_1 \cap H_2$
$\therefore (H_1 \cap H_2\ ,\ *)$ es un subgrupo de $(G, *)$

HOMOMORFISMO DE GRUPOS

Sean dos conjuntos no vacíos A y A' y las leyes de composición interna:

$$* \ : A \times A \rightarrow A$$
$$*' \ : A' \times A' \rightarrow A'$$

Definición (homomorfismo)
La función f: A → A' es un homomorfismo respecto de $*$ y $*'$ si y sólo si la imagen de la composición en A es igual a la composición de imágenes en A.
Así:
$f : A \rightarrow A'$ es un homomorfismo de
$* \text{ y } *' \Leftrightarrow f(a*b) = f(a)*' f(b)$
$\forall\, a, b \in A$



Interpretado como:

I. $a \in A \wedge b \in A \Rightarrow a*b \in A \Rightarrow f(a*b) \in A'$
II. $a \in A \wedge b \in A \Rightarrow f(a) \in A' \wedge f(b) \in A'$
$\Rightarrow f(a) *' f(b) \in A'$

Ejemplo:
Sean $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ los conjuntos y + , . las leyes de composición interna, tenemos que: $f(x) = a^x$ con $a>0 \wedge a \neq 1$
Veamos que $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \,.\, a^y = f(x) \,.\, f(y)$
$\Rightarrow$ f es un homomofismo de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$

Homomorfismos Especiales

Sea f: A → A' un homomorfismo de $*$ y $*'$

I. f es un monomorfismo si y sólo si f es inyectivo.
II. f es epimorfismo si y sólo si f es suryectivo.
III. f es un isomorfismo si y sólo si f es biyectivo
IV. f es un automorfismo si y sólo si A = A'

Ejemplos:

1. Sea f: Z → R tal que $f(x) = \lambda^x$; $\lambda > 2$
como $f(a+b) = \lambda^{a+b} = \lambda^a \,.\, \lambda^b = f(a) \,.\, f(b)$
$f(x)$ es un isomorfismo

2. Sea h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -7x$
$h(a+b) = -7(a+b) = -7a+\cdot 7b = h(a)+h(b)$
$h(x)$ es un automorfismo e isomorfismo.

3. Si f: A → A' es un homomorfismo de grupos, entonces la imagen del neutro del primer grupo es el neutro del segundo grupo.

Resolución:
Se trata de probar que f(e)=e', donde e es el neutro de (A, $*$) y e' es el neutro de (A' , $*'$)
Veamos para cualquier $x \in A$ se tiene $x*e = x$
$\Rightarrow f(x*e) = f(x)$
Por definición de homomorfismo
$f(x)*' f(e) = f(x) \Rightarrow f(x)*' f(e) = f(x)*' e'$
luego por ley de cancelación $f(e) = e'$

4. Si f: A → A' es un homomorfismo de grupos, entonces la imagen del inverso de todo elemento de A es igual al inverso de su imagen, es decir $f(x') = (f(x))'$, donde x' es el inverso de x en A.

Resolución:

Sabemos que $x*x' = e \quad \forall\, x \in A$ entonces,

$f(x*x^{1}) = f(e)$

Por definición de homomorfismo

$f(x)*' f(x') = f(e)$. Del ejemplo anterior

$f(x)*' f(x') = e'$

$\therefore f(x') = (f(x))'$

ESTRUCTURA DE ANILLO

Sea A un conjunto no vacío y dos leyes de composición interna $*$, $\blacktriangledown$

Definición: La terna $(A, *, \blacktriangledown)$ es un anillo si y sólo si:

I. El par ordenado $(A, *)$ es un grupo abeliano
II. El par ordenado $(A, \blacktriangledown)$ es un semigrupo
III. La segunda ley $(\blacktriangledown)$ es distributiva con respecto a la primera $(*)$

Estas condiciones se traducen en los siguientes axiomas:

A_1 : $\forall\, a, b \in A \Rightarrow a*b \in A$

A_2 : $\forall\, a,b,c \in A \Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

A_3 : $\exists e \in A$ tal que $a*e = e*a = a \quad \forall\, a \in A$

A_4 : $\exists a' \in A \quad \forall\, a \in A$ tal que $a*a' = a'*a = e$

A_5 : $a*b = b*a \quad \forall\, a, b \in A$

A_6 : $\forall\, a, b \in A \Rightarrow a \blacktriangledown b \in A$

A_7 : $\forall\, a, b, c \in A \Rightarrow a\blacktriangledown(b\blacktriangledown c) = (a\blacktriangledown b)\blacktriangledown c$

A_8 : $\blacktriangledown$ es distributivo respecto a $*$, esto es:

$a\blacktriangledown(b*c) = (a\blacktriangledown b)*(a\blacktriangledown c) \qquad \forall\, a, b, c \in A$

$(b*c)\blacktriangledown a = (b\blacktriangledown a)*(c\blacktriangledown a) \qquad \forall\, a, b, c \in A$

Ejemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +, .)$ es un anillo conmutativo y con unidad.
2. $(\mathbb{N}, +, .)$ no es un anillo, puesto que no existe neutro para la adición.

Definiciones: Sea $(A, +, .)$ un anillo:

I. Si existe un elemento $1 \in A$ tal que $a.1 = 1.a = a \quad \forall\, a \in A$, entonces $(A, +, .)$ se llama anillo con elemento identidad.
II. Si $a.b = b.a \quad \forall\, a, b \in A$, entonces $(a,+,.)$ se llama anillo conmutativo.

3. **Teorema:** Sea $(A,+,.)$ un anillo, entonces:
   I. $a.0 = 0.a = 0 \quad \forall\, a \in A$
   II. $a.(-b) = (-a).b = -(a.b) \quad \forall\, a, b \in A$
   III. $(-a).(-b) = a.b \quad \forall\, a, b \in A$

Demostración

I. $a.0 = a(0+0) = a.0 + a.0$

$$\Rightarrow \underbrace{-(a.0)+a.0}_{0} = \underbrace{-(a.0)+a.0}_{0} + a.0$$

$\therefore\ a.0 = 0$

II. $a.0 = a(b+(-b)) = 0$

$a.b + a.(-b) = 0$

$$\underbrace{-(ab) + ab}_{0} + (a(-b)) = -(a.b)$$

$\therefore\ a(-b) = -(a.b)$

También:

$0.b = (a+(-a)).b = 0$

$$a.b+(-a).b = 0 \Rightarrow \underbrace{-(ab)+ab}_{0}+(-a)(b) = -(ab)+0$$

$\therefore (-a)b = -(ab)$

III. $0.0 = 0 \Rightarrow (a+(-a))(b+(-b)) = 0$

por distributividad

$$a.b + \overbrace{a(-b)}^{-(ab)} + \overbrace{(-a)b}^{-(ab)} + (-a)(-b) = 0$$

$$\underbrace{ab + (-ab)}_{0} + -(ab) + (-a)(-b) = 0$$

$\therefore\ (-a)(-b) = ab$

Subanillo: Sea (A, + , .) un anillo, un subanillo de (A, + , .) es una parte no vacía de (A, + , .) que tiene la estructura de anillo con las mismas leyes de composición interna.

Definición (subanillo)

En subconjunto no vacío $S \subset A$ es un subanillo de (A, + , .) si y sólo si (S, +) es subgrupo de (A ,+) y además S es cerrada para el producto.

Resultado obvio que $S \subset A$ es subanillo de (A,+,.) Si y sólo si $\forall$ a, b $\in$ A se verifica que $a - b \in A$ y $a.b \in A$.

Ejemplo:

Sea $a\in\mathbb{Z}$ el conjunto de todos los múltiplos de a $S = \{k.a \ ; k\in\mathbb{Z}\}$, entonces (S,+,.) es un subanillo de ($\mathbb{Z}$,+,.)

En efecto, si $x , y \in S \rightarrow x = ka \wedge y = k'a$

$\Rightarrow x - y = ka - k'a = a(k-k') = ak''$

Es decir $x - y \in S$

por otra parte $x, y \in S \Rightarrow x = k.a \wedge y = k'a$

$\Rightarrow x.y = k.a.k'a = (k.a.k')a = k''a$

Es decir: $x, y \in S$

ESTRUCTURA DE CUERPO

Un anillo con unidad, cuyos elementos no nulos son invertibles, se llama anillo de división. Todo anillo de división conmutativo es un cuerpo.

Definición (cuerpo)

La terna (S , + , .) es un cuerpo si y sólo si es un anillo conmutativo, con identidad y cuyos elementos no nulos admiten inversos multiplicativos.

Los axiomas que caracterizan a la estructura de un cuerpo son:

I. (S , +) es un grupo abeliano.

II. (S - {0}, .) es un grupo abeliano

III. El producto es distributivo con respecto a la suma.

Las condiciones I, II y III se traducen en los siguientes axiomas:

C_1 : Si $a, b \in S \Rightarrow (a+b) \in S$ y $a . b \in S$

C_2 : Las operaciones + y . son conmutativos, es decir: $a+b = b+a$ y $a.b = b.a$

C_3 : Las operaciones + y . son asociativas, es decir:
$a+(b+c) = (a+b)+c$ y $a(bc) = (ab)c$

C_4 : $\forall a \in S \Rightarrow a + 0 = a=0+a$, es decir 0 es el elemento idéntico bajo la operación +

C_5 : $\forall a \in S$ se tiene $a.1 = 1.a = a$ el elemento 1 es el elemento idéntico bajo la operación.

C_6 : Para cada $a \in S$, existe un elemento inverso denotado por:
$(-a) / a+(-a) = 0 = (-a)+a$

C_7 : Para cada elemento $a \in S$, excepto el cero existe un inverso bajo la operación . , es decir
$\forall a \in S, \ \exists a^{1} \in S \ / \ a . a^{1} = 1 = a^{1} . a$

C_8 : La operación . es distributiva respecto a la operación +:
I. $a(b+c) = ab + ac$
II. $(b+c)a = ba + ca = ab + ac$

Ejemplos:

1. Las ternas ($\mathbb{Q}$, + , .) y ($\mathbb{R}$, + , .) son cuerpos.

2. La terna (Z , + , .) no es un cuerpo, pues los únicos elementos no nulos que admiten inverso multiplicativo son -1 y 1.

3. El anillo $\mathbb{R}$ de todos los números reales es un campo porque cumple con las 8 propiedades de campo.

4. La terna ($\mathbb{C}$; + ; .) es un campo porque verifica las 8 propiedades de campo, $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos $0=(0;0)$ y el número complejo $e=1 = (1 ; 0)$.

CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES COMO UN CUERPO ORDENADO Y COMPLETO

Se estudiará como un cuerpo que satisface ciertos postulados.

En la estructura de cuerpo tenemos el conjunto $\mathbb{R}$, denotando a sus elementos por a, b, c, d, ... en el cual existe una relación de equivalencia denotada por (=) y además dos operaciones: (+), (.) adición y multiplicación respectivamente, que están unívocamente definidas con respecto a la relación de equivalencia. Primeramente necesitamos de la terna ($\mathbb{R}$; + ; .) con los siguientes axiomas de cuerpo.

AXIOMAS DE ADICIÓN

A_1 : **Ley de clausura:** Para todo a, b $\in \mathbb{R}$, (a+b) $\in \mathbb{R}$, la suma también es real.

A_2 : **Ley de conmutatividad:** Para todo a,b $\in \mathbb{R}$ la suma de cualquier par de números reales no depende del orden en que le sumen a+b = b+a.

A_3 : **Ley Asociativa:** Para todo a, b, c en $\mathbb{R}$ (a+b)+c = a+(b+c) la suma de tres o más números reales es independientes del modo en que son agrupados (asociados).

A_4 : **Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo:** Existe un elemento en $\mathbb{R}$ y sólo uno denotado por 0, tal que $\forall$ a $\in \mathbb{R}$:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

A_5 : **Existencia y unicidad del elemento inverso aditivo:** Para cada número real "a" existe un elemento en $\mathbb{R}$ y sólo uno, denotado por (-a) tal que a+(-a) = (-a) + a = 0

AXIOMAS DE MULTIPLICACIÓN

M_1 : **Ley de clausura:** Para todo a, b $\in \mathbb{R}$: ab $\in \mathbb{R}$, la multiplicación ab también es un real.

M_2 : **Ley conmutativa:** Para todo a . b $\in \mathbb{R}$: ab=ba, la multiplicación de dos números reales no depende del orden en que son multiplicados.

M_3 : **Ley asociativa:** Para todo a, b, c $\in \mathbb{R}$: a .(bc) = (ab) . c, la multiplicación de tres o más números reales produce el mismo resultado, sean agrupados de cualquier manera.

M_4 : **Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo:** Existe un elemento en $\mathbb{R}$ y solo uno, denotado por "1" distinto de cero, tal que, para todo a $\in \mathbb{R}$: a.1 = 1.a = a

M_5 : **Existencia y unicidad del inverso multiplicativo:** Para cada a$\neq$0 en $\mathbb{R}$, existe uno y sólo un elemento en $\mathbb{R}$ denotado por "a^{-1}", tal que: $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$

AXIOMAS DE DISTRIBUTIVIDAD

Para todo a, b, c en $\mathbb{R}$:

$$a . (b+c) = ab + ac$$
$$(a+b) . c = ac + bc$$

por lo tanto la terna ($\mathbb{R}$; + ; .) también es un cuerpo.

Ahora para que la terna ($\mathbb{R}$; + ; .) sea un "cuerpo ordenado completo" tiene que satisfacer los siguientes postulados.

1. Existe un subconjunto propio M de $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:
   a. $0 \notin M$
   b. Si $x \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:
   I. $x \in M$, II. $-x \in M$, III. $0 \in M$, es cierta
2. El subconjunto **M** está cerrado bajo la operación + y . de ($\mathbb{R}$; + ; .) o sea si:
   $x, y \in M \Rightarrow x + y \in M$ y $x \, . \, y \in$ **M**
3. Si **T** es un subconjunto no nulo de $\mathbb{R}$ y si tiene una cota superior en $\mathbb{R}$, entonces T tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$.

Los elementos del conjunto M descritos en los postulados 1 y 2 se llaman elementos positivos de $\mathbb{R}$ o simplemente números positivos.

Los elementos del conjunto M', donde $M' = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \notin M \wedge x \neq 0\}$ se llama números negativos.

Ahora si $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tal que $y+(-x)=(y-x) \in M$, decimos que x es menor que y $(x < y)$, que nos indica la existencia de la relación de orden, por lo tanto la terna ($\mathbb{R}$; + ; .) es un campo ordenado.

Al postulado 3 se le llama ***"postulado de completitud"*** o postulado de continuidad. Uno de los efectos de este postulado será asegurar que se puedan establecer una correspondencia biunívoca, entre los elementos de $\mathbb{R}$ y los puntos de una línea recta, esto es enunciado algunas veces, diciendo que no existe huecos en $\mathbb{R}$.

Como conclusión diremos que si un cuerpo numérico cumple estos tres postulados, será un "cuerpo ordenado y completo".

Definición de la sustracción

$\forall x, y \in \mathbb{R} ; x-y = x + (-y)$

Definición de la división

$\forall x\ ,\ y \in \mathbb{R} \wedge y \neq 0 : \dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$

Ley de cancelación

Sean a, b, c elementos de un cuerpo de $\mathbb{R}$

Demostrar:

1. Si: $a+c = b+c \Rightarrow a = b$
2. Si: $a \cdot c = b \cdot c \wedge c \neq 0 \Rightarrow a = b$

Demostración:

1. $a + c = b + c$

   $a + c + (-c) = b + c + (-c)$ sumando $(-c)$

   $a + (c+(-c)) = b + (c + (-c))$ propiedad asociativa

   $a + 0 = b + 0$ elemento neutro

   $\therefore\ a = b$
2. Para el lector.

TEOREMA

$\forall x \in \mathbb{R}:\ x.0 = 0$

Demostración:

$0 + 0 = 0$	neutro aditivo
$x(0+0) = x.0$	multiplicando por x
$x.0 + x.0 = x.0$	propiedad distributiva
$x.0 + x.0 = x.0 + 0$	neutro aditivo
$\therefore\ x \cdot 0 = 0$	ley de cancelación

Relación de orden: Sea **A** el conjunto de los números reales. Un subconjunto $R \subset A \times A$ es una relación de orden en **A**, si y sólo si **R** satisface las siguientes propiedades:

I. Si $a, b \in A \wedge a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$

II. Si $aRb \Rightarrow a \neq b$

III. Si $a, b, c, \in A$, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Si A es $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es < (menor que) se tendrá:

I. Ley de Tricotomía: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y solamente una de las relaciones:

$a < b \vee a = b \vee b < a$;

De (I) si: $a < b \Rightarrow a \neq b$

II. Ley de Transitividad: Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$, se cumple que si:

$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Conjuntos Acotados

Si A es un conjunto de números reales, de un número finito de elementos entonces A tiene un elemento máximo y uno mínimo. Pero también este conjunto puede tener infinitos números reales, en este caso A puede ser que tenga un elemento máximo y uno mínimo o tal vez no existen dichos elementos.

Ejemplos:

$A = \{-3, 2, 5, 10\}$; en este conjunto el elemento máximo es 10 y el mínimo es -3.

$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle/ x^2 \geq \dfrac{1}{2}\right\}$; este conjunto no tiene ni máximo ni mínimo elemento. ¿Por qué?

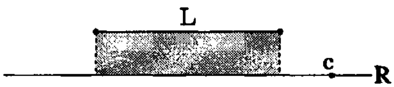
$C = \{x \in \mathbb{R} / x \in [-2, 15\rangle\}$ sólo tiene mínimo que es -2

$D = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 16\}$ no tiene ni máximo ni mínimo elemento.

Cota superior de un conjunto

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$ diremos que el conjunto L está acotado superiormente (o tiene una cota superior) si existe un número **c** $\in \mathbb{R}$ si y sólo si **c** es mayor o igual que todos los elementos de L.

Así:



Se puede ver que L está acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

a. Sea: $L = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 16\}$ o L está acotado superiormente en $\mathbb{Z}$

Resolución:

$L = \{-4, -3, ... 0, ... 4\}$

$5 \in \mathbb{Z}$ es una cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 5$

$10 \in \mathbb{Z}$ es cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 10$

$4 \in \mathbb{Z}$ es cota superior de L, pues $\forall x \in L$; $x \leq 4$

pero $3 \in \mathbb{Z}$ no es cota superior de L, pues $\forall x \in L$ no es cierto que $x \leq 3$ porque existe un elemento 4.

De donde concluimos que las cotas superiores de L son todos los números enteros mayores o iguales a 4.

Asimismo podemos decir que el conjunto L está acotado superiormente en el conjunto $\mathbb{Z}$.

b. El conjunto:

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \in <-3 ; +\infty>\}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ puesto que no existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in S ; x \leq c$

Cota inferior de un conjunto

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$, diremos que el conjunto L está acotado inferiormente (o tiene una cota superior) si existe un número **c** $\in \mathbb{R}$, sí y sólo sí **c** es menor o igual que todos los elementos de L.

Conjuntos acotados

Sean $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $L \subset \mathbb{R}$. El conjunto L está acotado si existe un número $c \in \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in L$; $-c \leq x \leq c$, es decir el conjunto L es acotado si es acotado superior e inferiormente.

Ejemplo:

Sea: $L = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 25\}$

Resolución:

Si: $x^2 < 25 \Rightarrow x \in <-5, 5>$

$\Rightarrow L = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -5 < x < 5\}$ y, como vemos existen cotas tanto superiores como inferiores. El conjunto de cotas inferiores es $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -5\}$ y el conjunto de cotas superiores es $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 5\}$ con lo cual queda establecido que el conjunto es acotado.

Supremo de un conjunto

Sea L un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, diremos que un elemento de $c \in \mathbb{R}$ es el supremo de L si y sólo si c es la menor de las cotas superiores de L.

Notación: c = sup. L

Ínfimo de un conjunto

Sea **b** un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, diremos que un elemento $c \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de L si y sólo si **c** es la mayor de todas las cotas inferiores de **L**.

Notación: C = inf. L

Ejemplo:

Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \Big/ x = \dfrac{(-1)^n}{n} \wedge n \in N\right\}$,

se tendrá

$\left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...\right\}$ que ordenado es

$\left\{-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{5}, ... \dfrac{1}{2}\right\} \rightarrow$ inf. $A = -1$,

sup. $A = \dfrac{1}{2}$

Problemas Resueltos

Problema 1

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La operación • sobre $\mathbb{Z}$ es binaria /

$$a \cdot b = \frac{a+1}{b}$$

II. La operación $*$ sobre $\mathbb{Q}$ es binaria /

$$a*b = \frac{ab+1}{a+b} \text{ con } a+b \neq 0$$

III. La operación $\oplus$ sobre $\mathbb{R}$ es conmutativa /

$$a \oplus b = \frac{a+b-2}{ab} \text{ con } ab \neq 0$$

Resolución:

I. Como para todo a, b $\in \mathbb{Z}$; $\left(\frac{a+1}{b}\right)$

no necesariamente es entero; entonces la operación . no es binaria

$\therefore$ (Falso)

II. Como para todo a, b racionales, se tiene que ab es racional, ab + 1 también es racional.

$\Rightarrow \frac{ab+1}{a+b}$ con $a+b \neq 0$ es también racional.

$\therefore$ $*$ es una operación binaria sobre $\mathbb{Q}$ (verdadero)

III. Si $\oplus$ es conmutativa se debe verificar que $a \oplus b = b \oplus a$ para todo a, b reales.

a. $a \oplus b = \frac{a+b-2}{ab}$

b. $b \oplus a = \frac{b+a-2}{ba} = \frac{a+b-2}{ab}$

De (a) y (b) la operación $\oplus$ es conmutativa (Verdadero)

Problema 2

La operación $*$ está definida en $\mathbb{Q}-\{-1\}$ según:

$a * b = a + ab + b \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$

Demostrar que 0 es su elemento neutro.

Resolución:

Sea: b = e donde "e" es el elemento neutro

$\Rightarrow a * e = a$

$\Rightarrow a + ae + e = a$

$\Rightarrow ae + e = 0$

$\Rightarrow e(a+1) = 0 \ ; \ a \neq -1$

$\therefore e = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

Problema 3

Del problema N° 2 demostrar que el elemento inverso de 2 es $-2/3$

Resolución:

Sea e' el inverso de 2

$\Rightarrow 2 * e' = e$ (por definición)

$\Rightarrow 2 + 2e' + e' = 0$ (del prob. anterior)

$\Rightarrow 2 + 3e' = 0$

$\Rightarrow e' = -\frac{2}{3}$

Problema 4

En A = {1, 2, 3, 4} se define una operación $*$ cuyos valores están dados por la tabla de doble entrada adjunta:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	1

Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. En $x*4 = 1$ existe un solo valor x en A

II. La operación $*$ es conmutativa

III. $(2*3)*[3*(1*4)] = 1$

Resolución:

I. De la tabla: $2*4 = 1$

$4*4=1$

$\Rightarrow$ para x existen 2 valores (falso)

Problema 7

Sea $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y la operación binaria $*$ definida por el siguiente esquema:

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Demostrar que el par $(S, *)$ es un grupo.

Resolución:

I. La operación binaria $*$ cumple con la ley de composición interna $*$:
$S \times S \rightarrow S$

II. Se cumple con la propiedad asociativa

III. Cumple con la existencia del elemento neutro único $(e=0)$ por que este elemento se encuentra en la intersección de la fila superior con la columna principal repetidos en el esquema tabular:

$$0 * 0 = 0 = 0 * 0$$
$$0 * 1 = 1 = 1 * 0$$
$$0 * 2 = 2 = 2 * 0$$
$$0 * 3 = 3 = 3 * 0$$

IV. Hallando los elementos inversos o simétricos de 0, 1, 2, 3 en S:

$0 * a = 0 = a' * 0 \Rightarrow a' = 0$

luego, el simétrico de 0 es 0

$1 * b' = 0 = b' * 1 \Rightarrow b' = 3$ (fijarse en la tabla)

$\Rightarrow$ el simétrico de 1 es 3

$2 * c' = 0 = c' * 2 \Rightarrow c' = 2$

$\Rightarrow$ el simétrico de 2 es 2

$3 * d' = 0 = d' * 3 \Rightarrow d' = 1$

$\Rightarrow$ el simétrico de 3 es 1

Con lo cual queda demostrado que $\langle S; * \rangle$ es un grupo.

Problema 8

Se define la operación $*$ por: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

$a*b = a^2 - b$

$a^{*2} = a*a$

$a^{*3} = (a^{*2})*a$; calcular a^{*3}

Resolución:

$a^{*3} = (a*a)*a = (a^2-a)*a = (a^2 \cdot a)^2 - a$

$= a^4 - 2a^3 + a^2 - a$

$\therefore a^{*3} = a^4 - 2a^3 + a^2 - a$

Problema 9

En el conjunto $\mathbb{N}_0$ (naturales ampliados) se define una operación $\square$:

$a \square b = (a+b) \cdot (a-b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$

Responder a las siguientes preguntas:

I. Está la operación $\square$ totalmente definida en $\mathbb{N}_0$

II. Es la operación $\square$ asociativa

Resolución:

I. $\square$ está totalmente definida en $\mathbb{N}_0$, si:

$\square : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}_0$

$a \square b = (a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Si: $a=2$, $b=3 \Rightarrow a \square b = 2^2 - 3^2 = -5$,

pero $-5 \notin \mathbb{N}_0$

$\therefore$ la operación $\square$ no está totalmente definida.

II. La operación $\square$ es asociativa si:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}_0$, $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$

$(a \square b) \square c = (a^2 - b^2) \square c$

$= (a^2 - b^2)^2 - c^2$ .... (α)

$a \square (b \square c) = a \square (b^2 - c^2)$

$= a^2 - (b^2 - c^2)^2$ .... (β)

Como $(\alpha) \neq (\beta)$ la operación $\square$ no es asociativa.

Problema 10

Del mismo problema anterior (9) responda:

I. Tiene un elemento neutro

II. Tiene elemento simétrico todo número natural respecto a la operación $\square$

II. Observando la tabla:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	1

al trazar una diagonal se observa simetría, entonces la operación $*$ es conmutativa (Verdadero)

III. Reduciendo:

$(2*3)*[3*(1*4)]$

$= 4 * [3*4]$

$= 4 * 2 = 1$ (Verdadero)

Problema 5

Si $(a ; b)$ y $(c ; d)$ son elementos de $\mathbb{N}^2$ y definimos las operaciones de $+, .$ mediante:

$(a ; b) + (c ; d) = (a + c ; b + d)$

$(a ; b) . (c, d) = (a . c ; b . d)$

establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. $\mathbb{N}^2$ es cerrada con respecto a $+$ y $.$

II. Las operaciones $+$ y $.$ son conmutativas y asociativas.

III. Existe un único elemento neutro en las operaciones $+$ y $.$

Resolución:

I. Como vemos, $(a+c, b+d)$ y (ac, bd) son también elementos de $\mathbb{N}^2$

$\Rightarrow \mathbb{N}^2$ es cerrada respecto a las operaciones de $+$ y $.$ .... (V)

II. $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

$= (c+a, d+b)$

$= (c,d) + (a,b)$

$(a,b) . (c,d) = (a.c , b.d)$

$= (c.a , d.b)$

$= (c,d) . (a,b)$

$\Rightarrow$ las operaciones $+$ y $.$ son conmutativas

Observación: La asociatividad se prueba del modo análogo. .... (V)

III. Los elementos neutros son: $(0, 0)$ para $+$ y $(1,1)$ para . ... (V)

Problema 6

Si en los números naturales definimos la operación ∇ mediante $m\nabla n = \sqrt{m^2 + n^2}$, entonces indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $m\nabla(r\,n) = r(m\nabla n),\ r \in \mathbb{N}$

II. $(m\nabla n) + (n\nabla p) \geq (m\nabla p),\ r \in \mathbb{N}$

III. $m\nabla n = (m\ \ n)\nabla\sqrt{mn};\ m \geq n$

IV. $m\nabla(n+p) = (m\nabla n) + (n\nabla p)$

Resolución:

I. Por su definición

$$m\nabla r\,n = \sqrt{m^2 + r^2n^2} \neq r\sqrt{m^2 + n^2}$$

.... (falso)

II. $(m\nabla n) + (n\nabla p) \geq (m\nabla p)$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 + n^2} + \sqrt{n^2 + p^2} \geq \sqrt{m^2 + p^2}$$

al cuadrado

$$m^2+n^2+n^2+p^2+\sqrt{(m^2 + n^2)(n^2 + p^2)} \geq m^2+p^2$$

$$2(n^2+\sqrt{(m^2 + n^2)(n^2 + p^2)}) \geq 0$$

.... (verdadero)

III. $(m\nabla n) = (m-n)\nabla\sqrt{mn}$

$$\rightarrow \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(m-n)^2 + \sqrt{(mn)}^2}$$

$$\sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn + mn}$$

$$\sqrt{m^2 + n^2} \neq \sqrt{m^2 + n^2 - mn}$$

.... (falso)

IV. $m\nabla(n+p) = (m\nabla n) + (m\nabla p)$

$$\rightarrow \sqrt{m^2 + (n+p)^2} = \sqrt{m^2+n^2} + \sqrt{m^2+p^2}$$

.... (falso)

$\therefore$ FVFF

Resolución:

I. Sea **e** el elemento neutro $\forall$ a $\in \mathbb{N}_0$

$a\square e = a \Rightarrow a^2 - e^2 = a$

$\Rightarrow e = \pm\sqrt{a(a-1)}$ .... (α)

$e\square a = a \Rightarrow e^2 - a^2 = a$

$\Rightarrow e = \pm\sqrt{a(a+1)}$ .... (β)

Como $\alpha \neq \beta$, entonces $\square$ no tiene elemento neutro.

II. Si no existe **e** para la operación $\square$ sobre los $\mathbb{N}_0$, tampoco habrá elemento simétrico para todo $a \in \mathbb{N}_0$

Problema 11

Demostrar que $\forall -x \in \mathbb{R}: -x = (-1)x$

Demostración:

$x \cdot 0 = 0$ Teorema anterior

$1 + (-1) = 0$ postulado (elemento neutro adit.)

$x(1 + (-1)) = x \cdot 0$ multiplicando por x

$x \cdot 1 + x(-1) = 0$ distributividad

$x + (-1)x = 0$ conmutatividad

$x + (-x) + (-1)x = (-x)$ sumando $(-x)$

$(x + (-x)) + (-1)x = -x$

$0 + (-1)x = -x$ neutro aditivo

$\therefore (-1)x = -x$

Problema 12

TEOREMA:

Si x es un número real y $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Demostración:

(Por contradicción o reducción al absurdo).

$x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

$x^2 = 0$ suposición contradiciendo a la hipótesis

$0 = x \cdot 0$ teorema anterior

$x^2 = x \cdot 0$ realizando sustitución

$x.x = x \cdot 0$

$x = 0$ aplicando cancelación

Con lo cual queda demostrado que si

$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Problema 13

Teorema:

Si $x, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 0 \Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} . y^{-1}$

Demostración:

$(xy)(xy)^{-1} = 1$

elemento inverso multiplicativo

$(xy) . (xy)^{-1} = 1.1$

elemento neutro

$(xy)(xy)^{-1} = (xx^{-1}).(y.y^{-1})$

inverso multiplicativo

$(xy)(xy)^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}.y)$

conmutatividad y asociatividad

$(xy)(xy)^{-1} = (xy)(x^{-1}y^{-1})$

$\therefore (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ ley de cancelación

Problema 14

Demostrar $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = \dfrac{y}{x}$, si $xy \neq 0$

Demostración:

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = (xy^{-1})^{-1}$ def. de la división

$= x^{-1}(y^{-1})^{-1}$ .... (I)

$*$ pero $a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ $(a^{-1})^{-1} = a$

Como $a \neq 0$ tendrá inverso multiplicativo a asumiendo $x = a^{-1} \neq 0,\ a \neq 0$

$\Rightarrow x^{-1} = (a^{-1})^{-1}$

$x . x^{-1} = 1 = (a^{-1})(a^{-1})^{-1}$ inverso multiplicativo

también $a^{-1} . a = 1$ de donde se tendrá

$a^{-1}.(a^{-1})^{-1} = a^{-1} . a$

$\therefore (a^{-1})^{-1} = a$ ley de cancelación

Luego en (I):

$\therefore \left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} = x^{-1} . y = \dfrac{y}{x}$ def. de división

Problema 15

En el conjunto c = {a, b} se dèfine las operaciones binarias por los siguientes esquemas tabulares:

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\cdot$	a	b
a	a	a
b	a	b

¿Cuáles de los pares $(C, *)$, $(C, .)$ es un grupo?

Resolución:

Verificaremos si satisfacen las 4 propiedades para ser grupo.

I. Ambos sistemas cumplen la ley de composición interna:

$*: c \times c \rightarrow c$

$.: c \times c \rightarrow c$

II. Propiedad asociativa:

$\forall\, a, b, c, \in C\, /\, (a*b)*c = a*(b*c)$ y

$a.(b.c) = (a.b).c$

Para todos los casos se cumple la asociatividad

III. Existencia del elemento neutro

$\exists\, e \in c \quad \forall\, a \in c \quad a*e = a = e*a \quad \Rightarrow a = e$

$\exists\, e \in c \quad \forall\, a \in c \quad a.e = e.a = a \quad \Rightarrow e = b$

El elemento neutro, si es que existe, se encuentra en la intersección de la fila principal repetida con la columna principal repetida del esquema tabular.

IV. Existencia del elemento simétrico

$\forall\, a \in c \qquad \exists\, a' \in c\, /\, a*a' = e = a'*a \Rightarrow e = a$

$\forall\, a \in c \qquad \exists\, a' \in c\, /\, a \,.\, a' = e = a' \,.\, a\,,\ e = b$

$$\left.\begin{array}{l} a*a = a'*a \Rightarrow a' = a' \\ b*b = b'*b \Rightarrow b' = b' \end{array}\right\} \text{existe el inverso respectivo}$$

$$\left.\begin{array}{l} a'.a = a.a' = a \Rightarrow a' \\ b.b' = b'.b = b' \Rightarrow b \end{array}\right\} \text{no existe elemento inverso respecto a la operación}$$

de donde se concluye:

$(C, *)$ es un grupo

$(C, .)$ no es un grupo, porque no existe el elemento inverso.

Problema 16

Sea el conjunto T = {0,1} con las operaciones binarias dadas por los siguientes esquemas tabulares:

+	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*1*	*0*

•	*0*	*1*
0	*0*	*0*
1	*0*	*1*

¿T es un cuerpo respecto a estas operaciones binarias?.

Resolución:

Tenemos la terna (T , + , .): para que esta terna sea un cuerpo tendrán que verificarse los postulados de cuerpo:

C_1: Si $x, y \in T \Rightarrow x + y \in T \wedge xy \in T$

$+: T \times T \rightarrow T \quad \wedge \quad .: T \times T \rightarrow T$

C_2: La conmutatividad por simetría del esquema tabular respecto a la diagonal principal donde se define las operaciones

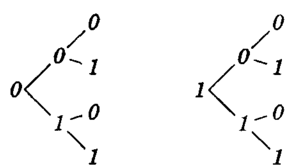
$+ ; .$ es decir si $xy \in T$

$\Rightarrow \ x+y = y+x \wedge x.y = y.x$

C_3: La asociatividad, si $x, y, z \in T$

$\Rightarrow x + (y + z) = (x+y) + z$

Como el conjunto T tiene 2 elementos, entonces el número de casos que tiene que verificarse la propiedad asociativa para la + y . son:



Problema 19

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración:

Usaremos el método del absurdo

Suponemos que $\sqrt{2}$ es racional

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ / a y b $\in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$

asimismo sean a y b irreductibles

De $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ al cuadrado $\rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow a^2$ es par, de donde **a** es par

Si a es par sea $a = 2k / k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$

lo cual implica también que **b** es par, lo cual lleva a la contradicción de lo supuesto **a** y **b** irreductibles (primos).

$\therefore \sqrt{2}$ no es racional

Problema 20

Demostrar que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Demostración:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$

$= a.1.b^{-1} + c.1.d^{-1}$

$= a.d.d^{-1}.b^{-1} + c.b.b^{-1}.d^{-1}$

$= (ad+bc).b^{-1}d^{-1} =$

pero $b^{-1}.d^{-1} = (bd)^{-1}$ .... (prob. 13)

$\therefore \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b.d}$

Problema 21

Teorema: Si $a, b, x \in \mathbb{R}$ y si $a \neq 0$, entonces

$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -a^{-1}.b$

Demostración:

I. Si $ax+b=0$

$\Rightarrow ax+b+(-b) = 0+(-b)$

$\Rightarrow ax+0 = -b \Rightarrow ax = -b$

$\Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}(-b)$

$\Rightarrow (aa^{-1})x = -a^{-1}.b$

$1.x = -a^{-1}b \Rightarrow x = -a^{-1}.b$

II. Si $x = a^{-1}.b \Rightarrow ax = a(-a^{-1}.b)$

$= -(a.a^{-1})b = -(1).b = -b$

$\Rightarrow ax + b = (-b) + b = 0$

$\Rightarrow ax + b = 0$

De (I) y (II) queda demostrado el teorema.

Problema 22

Para cada número real x, demostrar que $x + x + x = 3x$

Demostración:

$x+x+x = x + (x + x)$

$= x + (x.1 + x.1)$

$= x + x(1+1)$

$= x + x.2$

$= x(1+2)$

$= x.3$

$\therefore x + x + x = 3x$

Problema 23

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 64\}$

¿El conjunto está acotado?

Resolución:

$x^2 \geq 64 \Leftrightarrow x \geq 8$ ó $x \leq -8$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -8] \cup [8, +\infty\rangle$

Es decir:

Para la (+)

1. $(0+0)+0 = 0+(0+0) \Rightarrow 0 = 0$
2. $(0+0)+1 = 0+(0+1) \Rightarrow 1 = 1$
3. $(0+1)+0 = 0+(1+0) \Rightarrow 1 = 1$
4. $(0+1)+1 = 0+(1+1) \Rightarrow 0 = 0$
5. $(1+0)+0 = 1+(0+0) \Rightarrow 1 = 1$
6. $(1+0)+1 = 1+(0+1) \Rightarrow 0 = 0$
7. $(1+1)+0 = 1+(1+0) \Rightarrow 0 = 0$
8. $(1+1)+1 = 1+(1+1) \Rightarrow 1 = 1$

Para la (•)

1. $(0.0).0 = 0.(0.0) \Rightarrow 0 = 0$
2. $(0.0).1 = 0.(0.1) \Rightarrow 0 = 0$
3. $(0.1).0 = 0.(1.0) \Rightarrow 0 = 0$
4. $(0.1).1 = 0.(1.1) \Rightarrow 0 = 0$
5. $(1.0).0 = 1.(0.0) \Rightarrow 0 = 0$
6. $(1.0).1 = 1.(0.0) \Rightarrow 0 = 0$
7. $(1.1).1 = 1.(1.0) \Rightarrow 0 = 0$
8. $(1.1).1 = 1.(1.1) \Rightarrow 1 = 1$

Con lo cual queda demostrado la validez de la propiedad asociativa para las operaciones de la adición y la multiplicación.

C_4: Si $x, y, z \in T$, entonces $x.(y+z)=x.y+x.z$ tendrá que probarle igualmente 8 casos.

1. $0(0+0) = 0.0 + 0.1 \Rightarrow 0 = 0$
2. $0(1+1) = 0.0 + 1.1 \Rightarrow 0 = 0$
3. $0(1+0) = 0.1 + 0.0 \Rightarrow 0 = 0$
4. $0(1+1) = 0.1 + 0.1 \Rightarrow 0 = 0$
5. $1.(0+0) = 1.0 + .1.0 \Rightarrow 0 = 0$
6. $1.(0+1) = 1.0 + 1.1 \Rightarrow 1 = 1$
7. $1.(1+0) = 1.1 + 1.0 \Rightarrow 1 = 1$
8. $1.(1+1) = 1.1 + 1.1 \Rightarrow 0 = 0$

C_5: $\exists\, 0 \in T \;\; \forall x \in T \Rightarrow x+0 = 0+x = x$

$\Rightarrow e = 0 \in T$ (neutro aditivo)

C_6: $\exists\, 1 \in T \;\; \forall x \in T \Rightarrow x.1 = 1.x = x$

$\Rightarrow e = 1 \in T$ (neutro multiplicativo)

C_7: $\forall x \in T\,;\, \exists -x \in T\,;\, x+(-x)=(-x)+x = 0$

$0+0' = 0'+0 = 0 \Rightarrow 0' = 0$

0' inverso aditivo de 0

$1 = 1.1' = 1'.1 = 1' \Rightarrow 1 = 1'$

(1' inverso multiplicativo de 1)

C_8: $\forall x \in T\,.\; x \neq 0 \;\; \exists x^{-1} \in T / x.x^{-1} = x^{-1}x = 1$

$1.x^{-1} = x^{-1}.1 = 1 \Rightarrow x^{-1} = 1$

$\therefore 1^{-1} = 1$

(1^{-1} es el recíproco multiplicativo de 1)

$\therefore$ Queda demostrado que la terna (T , + , .) es un cuerpo.

Problema 17

Corolario: $\forall\, a,b \in \mathbb{R} : a(-b) = -(ab) = (-a)b$

Demostración:

I. $a.(-b) = a[(-1)b]$ (del prob. 11)

$= (a(-1)b)$ (M_3)

$= (-1)(ab)$ (M_2, M_3)

$a(-b) = -(ab)$ .... (I)

II. $(-a)b = (-1)(ab)$ .... (prob. 11)

$(-a)b = -(ab)$ .... (II)

De (I) y (II) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

Problema 18

Teorema: $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, $(-a)(-b) = a.b$

Demostración:

Como $(-a)(-b) = (-a)(-b)$ .... (reflexión)

$= (-1)(a)(-b)$ ...... (prob. 11)

$= a(-1)(-b)$ .... (M_2, M_3)

$= a(-(-b))$ .... (prob. 1)

$= ab$ .... Teor. $(-(-b)=b)$

$\therefore (-a)(-b) = ab$

Hallando las cotas inferiores y superiores de A, si existen:

$\nexists\ c \in \mathbb{R} / \forall x \in A\ ;\ c \leq x$

$\nexists\ c \in \mathbb{R} / \forall x \in A\ ;\ x \leq c$

lo cual nos hace concluir que el conjunto A no es acotado.

Problema 24

Si $(C_1\ ;\ .)$ es un semi grupo con identidad y $\cup$ es el conjunto de todo las unidades de C_1 bajo . , entonces $(\cup, .)$ es un grupo.

Demostración:

Para verificar que $(\cup; .)$ es un grupo debemos demostrar que $\cup \neq \phi$; esto es inmediato porque $e \in \cup$ y con ello podemos ver que se verifican los axiomas I, II y III de la definición de grupo.

El axioma IV se satisface para todo $g \in \cup$ (unidad)

Faltaría demostrar que $\cup$ es cerrado con respecto a . para lo cual escogemos $g_1, g_2 \in \cup$ cualquiera.

Entonces existen $\overline{g_1}\ \overline{g_2} \in C_1$

Tal que: $g_1\ \overline{g_1} = g_2 \cdot \overline{g_2} = e$

Para demostrar que $g_1 \cdot g_2 \in \cup$, debemos encontrar su inversa como especifica el axioma IV

$$\overline{(g_1\ ;g_2)} = \overline{g_2} \cdot \overline{g_1}$$

$$(g_1 \cdot g_2)(\overline{g_1 \cdot g_2}) = g_1\ \underbrace{(g_2 \cdot \overline{g_2})}_{e} \cdot \overline{g_1}$$

$$= g_1 \cdot \overline{g_1} = e$$

Se tiene pues que $\overline{g_2} \cdot \overline{g_1}$ es inverso de $g_1 \cdot g_2$

Es decir: $\overline{g_2} \cdot \overline{g_1} = \overline{g_1\ ; g_2}$

$\therefore\ g_1 \cdot g_2$ y $\overline{g_2} \cdot \overline{g_1}$ son de $\cup$

Problema 25

Tres amigos, José, Pedro y Luis hacen las afirmaciones siguientes, respecto a un número irracional x.

I. José : x^2 es irracional
II. Pedro : toda potencia de x es irracional
III. Luis : alguna potencia de x (de exponente diferente de cero) es racional.

¿Cuál de los tres amigos dio una afirmación correcta?

Resolución:

I. Si $x \in$ Irracional $\Rightarrow (x^2 \in \mathbb{Q} \vee x^2 \in \mathbb{Q}')$
II. Toda potencia de x irracional no siempre es irracional.
Ejemplo: $(\sqrt{2})^6 = 8 \in$ a
III. Algunas potencias de x irracional es racional
Ejemplo: $(\sqrt{3})^2 = 3 \in \mathbb{Q}$

Conclusión: Luis dio una afirmación correcta.

Problema 26

Dadas las afirmaciones, indicar el valor de verdad.

I. $\forall\ a \in \mathbb{Q}$ se tiene $(a^2)^{1/2} = a$
II. $\forall\ a \in \mathbb{Q}\ ; \forall\ r \in \mathbb{R}$; existe a^r
III. Si $a \in \mathbb{Q}$ y $\forall\ r \in \mathbb{R}$ existe a^r entonces existe r^a

Resolución:

I. $\forall\ a \in \mathbb{Q} : (a^2)^{1/2} = \sqrt{a^2} = |a|$
II. $\forall\ a \in \mathbb{Q} : \forall\ r \in n$, no siempre está definido a
Ejemplo: $a=0 \wedge b=-1 : 0^{-1}$ no está definido.
III. Si $\forall\ a \in \mathbb{Q}\ ;\ \forall\ r \in \mathbb{R}$ existe a^r , no necesariamente existe r^a
Ejemplo: $(-4)^0 = 1$; pero 0^{-4} no existe

Respuesta: FFF

Problema 27

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La suma de dos irracionales es otra irracional.
II. En una división en Z; el resto es menor que el divisor.
III. La gráfica de la clase de equivalencia [2/3] es una recta.

Resolución:

I. La operación de adición en los irracionales no es cerrada.

Ejemplo: $(2+\sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = 2 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{3} + (1-2\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$

II. No siempre:

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 16 & -3 \\ \hline 1 & -5 \end{array} \Rightarrow r = 1 > d = -3$$

III. $\left[\dfrac{2}{3}\right] = \left\{\ldots, \dfrac{20}{30}, \dfrac{-16}{24}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{6}{9}, \ldots\right\}$

Es un conjunto de puntos discontinuos.

Respuesta: I. F , II. F , III. F

Problema 28

Sabiendo que $\sqrt{2}$ es un irracional, demostrar que: $\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)$ es irracional.

Resolución:

Supongamos que $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt{2}$ es un número racional.

$\Rightarrow x - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3}$; elevando al cubo:

$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3$

$\Rightarrow x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}(3x^2 + 2)$

$\Rightarrow \dfrac{x^3 + 6x - 3}{3x^2 + 2} = \sqrt{2}$

Pero el primer miembro $\left(\dfrac{x^3 + 6x - 3}{3x^2 + 2}\right)$ es racional, ya que $x \in \mathbb{Q}$, esto implica una contradicción.

Por lo tanto x no es racional, entonces es irracional.

Problema 29

Sean a y b dos números reales tales que el producto ab es irracional, luego analizar las siguientes proposiciones:

I. Si a es irracional, entonces b debe ser irracional.
II. Si a es racional, entonces b debe ser irracional.
III. Si a es irracional, entonces b debe ser racional.

Resolución:

I. $ab \in \mathbb{Q}' \wedge a \in \mathbb{Q}'$, entonces "b" puede pertenecer a $\mathbb{Q} \vee \mathbb{Q}'$.

Ejemplo: $\underset{a}{\sqrt{2}} \cdot \underset{b}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}'$

$\underset{a}{\sqrt{5}} \cdot \underset{b}{3} \in \mathbb{Q}'$

II. $ab \in \mathbb{Q}' \wedge a \in \mathbb{Q}$, entonces b necesariamente pertenece a $\mathbb{Q}'$

Ejemplo: $\underset{a}{5} \cdot \underset{b}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}'$; $b \in \mathbb{Q}'$

III. $ab \in \mathbb{Q}' \wedge a \in \mathbb{Q}'$, entonces $b \in \mathbb{Q} \vee b \in \mathbb{Q}'$

Respuesta: FVF

Problema 30

Sea: $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$ definimos la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}_5$ como sigue

$$a + b = \begin{cases} a+b & \text{Si } a+b < 5 \\ a+b-5 & \text{Si } a+b \geq 5 \end{cases} \quad \forall\, a, b, \in \mathbb{Z}_5$$

$$a \cdot b = \begin{cases} ab & , \text{ si } ab < 5 \\ \text{Resto}\left(\dfrac{ab}{5}\right) & , \text{ si } ab \geq 5 \end{cases}$$

Resolver en $\mathbb{Z}_5$ el sistema:

$2x + 3y = 2$ .... (1)

$x + 2y = 4$ .... (2)

Resolución:

De (2) : $x = 4 - 2y$, en (1) : $2(4-2y) + 3y = 2$

$\Rightarrow 3 - 4y + 3y = 2 \Rightarrow y = 1$

Luego, $x = 4 \quad 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 2$

$\therefore\ x = 2 \quad , \quad y = 1$

Observación: $2 \cdot 4 = 3$ en $\mathbb{Z}_5$

Problemas Propuestos

1. En el conjunto de los números naturales se define la operación $*$
$a*b = a + b + 2ab \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$
Indicar el valor de verdad respecto a las siguientes proposiciones:

I. La operación $*$ es asociativa
II. La operación $*$ es conmutativa
III. El elemento neutro es 0

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

2. Definamos una nueva operación binaria sobre los números reales. Para a, b $\in \mathbb{R}$ llamaremos $a*b = a$, donde $*$ es el nuevo operador.
Luego será cierto que:

A) La suma de los resultados de $2*0$, $-4*6$, $8*8$ es 8
B) Dado un elemento $a \in \mathbb{R}$, no es posible, hallar otro número $b / a*b=a$
C) La operación $*$ es asociativa
D) La operación $*$ es conmutativa
E) No es operación binaria

3. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales se define la operación binaria
$* / * : (a,b) \rightarrow 2a + 3b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
Es cierto que:

A) La operación $*$ es conmutativa
B) La operación $*$ es asociativa
C) Hay un elemento identidad para la operación $*$
D) No tienen elementos recíprocos para cada elemento de $\mathbb{Q}$.
E) $(4*3)*(3*4)$ es 71

4. Se define una operación $*$ en el conjunto de los números naturales de modo que $a*b = a + (b+1)$.
Indicar el valor de verdad en las siguientes proposiciones:

I. $3*2$ es 6
II. $\mathbb{N}$ es cerrado para esta operación
III. La operación $*$ es conmutativa y asociativa.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) CFF E) FVV

5. Sobre $\mathbb{R}-\{-1\}$ se define la operación binaria $*$, de modo que:
$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ a*b = a+b+ab.$
Establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El par $(\mathbb{R}\ ;\ *)$ es un grupo conmutativo
II. El simétrico del real r es $-\dfrac{r}{r+1}$
III. El elemento neutro es 0

A) VVV B) VFV C) FVV
D) VFF E) FFV

6. Si $E=\{a\}$, la terna $(P(E)\ ;\ \cup, \cap)$ y la ley de composición para los operadores $\cup$ (unión), $\cap$ (intersección) están dados por las tablas siguientes:

$\cup$	ϕ	E
ϕ	ϕ	E
E	E	ϕ

$\cap$	ϕ	E
ϕ	ϕ	ϕ
E	ϕ	E

indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La operación $\cap$ es distributiva con respecto a la $\cup$ (unión)
II. Es un grupo
III. Es un anillo la terna $(P(E)\,;\cup\,;\cap)$

A) VVV B) VFF C) VFV
D) FVF E) VVF

7. ¿Cuál de los pares no es un grupo?

A) $(A\,,.)\,;A=\{1,i,-1,-i\}$
B) $(\mathbb{R}\,;+)\wedge(\mathbb{R}\,;+)\wedge(\mathbb{R}\,;+)\wedge(\mathbb{R}\,;.)$
C) $(\{1\}\,,.)$
D) $(\{0\}\,,+)$
E) $(\mathbb{N}\,;.)$

8. Establecer el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

I. Sea L el conjunto de todos los números reales de la forma $p+q\sqrt{2}$, donde p y q $\in \mathbb{Z}$, luego el sistema $(L\,,+\,,.)$ es un anillo.
II. Sea L el conjunto de todos los números reales de la forma $p+q\sqrt{2}$, donde p, q son racionales. La terna $(L\,,+\,,.)$ es un anillo.
III. El par $(\{1,-1\}\,,.)$ es un grupo.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FFV

9. La terna $(T\,,+\,,.)$ con $T=\{0,1,2,\}$ y $+\,;.$ definidos por las tablas.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Establecer el valor de verdad:

I. Es un campo la terna $(T\,,+\,,.)$
II. Es un campo ordenado.
III. Es un grupo

A) VVV B) VFV C) VFF
D) VVF E) FFV

10. Demostrar utilizando los axiomas del campo de los números reales.

I. $-(a+b)=-a+(-b)$
II. $-0=0$
III. $(-a)^2=a^2$
IV. $(a+b)(a+(-b))=a^2-b^2$
V. $a\in\mathbb{R}-\{0\}$ y $a^2=a\Rightarrow a=1$

11. Establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El conjunto

$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\;\Big/\;n\in\mathbb{N}\right\}$$

es acotado superiormente.

II. El conjunto

$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\Big/n\in\mathbb{N}\right\}$$

es acotado inferiormente.

III. El conjunto

$$\left\{n+(-1)^n\frac{1}{n}\Big/n\in\mathbb{N}\right\}$$

es acotado

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FFF E) VVF

12. Señalar la afirmación incorrecta:

A) El supremo del conjunto
$\left\{x \in \mathbb{R} \Big/ x = \dfrac{(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ es $\dfrac{1}{2}$

B) El ínfimo del conjunto
$\left\{x \in \mathbb{R} \Big/ x = \dfrac{(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ es -1

C) El conjunto $\{n / n \in \mathbb{N}\}$ es acotado sólo inferiormente y su ínfimo es 1.

D) El conjunto
$\left\{n + (-1)^n . \dfrac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{N}\right\}$
no tiene ínfimo ni supremo.

E) El conjunto
$A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} < 2\}$ es un conjunto acotado.

13. ¿Cuál de los siguientes conjuntos no es acotado?.

A) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 81\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt{x^2-4} < \sqrt{21}\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 > 25 \;\wedge\; x^2 \geq 100\}$
D) $\{x \in Z^+ \;/\; x^2 < 16 \;\wedge\; x^2 > 4\}$
E) $\sqrt{2x+3} < -x$

14. Demostrar los siguientes teoremas:
I. $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$, si a>b y b>c
$\Rightarrow$ a>c
II. Si: a,b $\in \mathbb{R}$, si: a<b $\Rightarrow$ -a > -b
III. Si: a < b $\wedge$ c>0 $\Rightarrow$ ac < bc
IV. Si: a<b $\wedge$ c<0 $\Rightarrow$ ac>bc
V. Si: $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \neq 0$
(x^{-1} inverso multiplicativo de x).
VI. Si: x e y tienen el mismo signo
$\Rightarrow xy > 0$

15. Si m $\otimes$ n= residuo de dividir (m+n) entre 8 y m # n=residuo de dividir m.n entre 8, calcular (6$\otimes$7) # (5$\otimes$7)

A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 10

16. Sean las operaciones definidas por:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

•	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	c

Si: x = b*c determinar el valor de:
(c*x) . (b*a)

A) a B) b C) b
D) d E) c

17. Si: a * b = (a^2+b^2)-ab, entonces el valor de:
a * (b*(b+1)) es:

A) $ab(b+1) + a^2 + b^2(b+1)^2$
B) $(1+b+b^2)\,[1+b^2+b+a-a^2]$
C) $[(1+b+b^2)\,(1+b+b^2-a)+a^2]$
D) $ab(b+1) + a^2+a(b+1+b^2)$
E) $ab(b+1) + a^2 - a\,(1+b+b^2)$

18. En $\mathbb{R}$ definimos las siguientes operaciones

$a * b = 3b + \dfrac{1}{2}a$

$a \# b = 3a + \dfrac{3}{2}b$

$a \Delta b = 7a - 3b$; si $x * x = 9$; $y \# y = 21$, hallar el valor de $(x \Delta y)+20$

A) 24 B) 25 C) 26
D) 28 E) 14

19. Sea B={m; n; p; q} y $*$ la operación definida en A mediante la tabla. Hallar el valor de:

$$x = [(q * m^{\ 1})^{\ 1} * n]^{\ 1}$$

$*$	m	n	p	q
m	m	n	p	q
n	n	m	q	p
p	p	q	m	n
q	q	p	n	m

Observación: $m^{\ 1}$: representa el inverso de m bajo la operación $*$

A) m B) q C) n
D) p E) mn

20. Sea A = { a; b; c; d; e} y $\odot$ la operación binaria asociativa definida en A; según la tabla adjunta y dado el sistema:

$x \odot y = b$; $x \odot y^{\ 1} = d$

Hallar el par ordenado:

$(x \odot a\ ;\ y \odot d)$

$\odot$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

A) (a,b) B) (c,c) C) (a,d)
D) (b,c) E) (a,c)

21. Sea G={a_0 ; a_1; a_2; a_3; a_4}
definir la operación binaria $*$ como:

$$a_i * a_j = \begin{cases} a_{i+j} & ; \ \text{si } i+j < 5 \\ a_{i+j-5} & ; \ \text{si } i+j \geq 5 \end{cases}$$

Si b_i es el inverso de a_i.
Calcular: $b_2 * (b_3 * b_4)$

A) a_2 B) a_4 C) a_3
D) a_1 E) a_o

22. Sea $*$ una operación binaria definida en $\mathbb{R}$ como:

$$a * b = (a^2 - b)(b^2 - a)$$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $*$ es conmutativa
II. $4 * (3*2) = 5.9^2$
III. $\forall k \in \mathbb{R}$: $k^2[a*b] = [ka]*[kb]$

A) VFV B) VVV C) FVV
D) VVF E) FFV

23. Se define

$$a*b = \min\{a;b\}$$
$$a\Delta b = \max\{a;b\} \in \mathbb{R}$$

además
mínimo : menor entre a y b
máximo: mayor entre a y b
Calcular $(5\ \Delta\ 4) * \left(\sqrt{2} * \pi\right)$

A) 5 B) 4 C) 0
D) $\sqrt{2}$ E) 1

24. Definimos en $\mathbb{N}$ la operación $*$ como $a * b = a^b$; hallar la suma usual de:

$2 * 3$; $3 * 4$; $4 * 2$; y $1 * 100$

A) 100 B) 106 C) 102
D) 205 E) 206

25. Si a; b $\in \mathbb{R}$; se define la operación $*$ como:

$a*b = \dfrac{a+b-1}{3}$; determinar el conjunto solución de: $(x+1)^2 * 2 \geq 3\,((2*x) * 1)$

A) <3;4] B) [-3; 3] C) [-2; 6]
D) [-2; 6> E)< ∞;+∞>

26. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?, si se comparan dos variables independientes del tercero.

I. Si x varía directamente con y, y varía directamente con z; entonces x varía directamente con z.

II. Si x varía directamente con z; y varía directamente con z; entonces $x+y$ varía directamente con z; donde x; y; z son positivos

III. Si $x; y \in \mathbb{R}$; x varía directamente con y; y varía directamente con x; entonces $x=y$

A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) VFF

27. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones:

I. $a<b \Leftrightarrow -a>-b$

II. $0<a<1 \Leftrightarrow a^3<a^2$

III. $b \not< a \Leftrightarrow a \neq b$

IV. $a \not< b \wedge a \not> b \Rightarrow a \neq b$

son verdaderas ?

A) I B) I y II C) I , II y IV
D) I y III E) I, III y IV

28. En $\mathbb{R}$ los números reales se define la operación $*$ como:

$$a*b = ab+|a+b|$$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $a*a > 0$; entonces $a \neq 0$

II. El cero es el elemento neutro de la operación ($*$)

III. La operación $*$ es conmutativa

A) VVV B) FFF C) VFV
D) FFV E) VVF

29. Si definimos en $\mathbb{R}$ la operación $*$ definida por:

$$a*b = \text{mínimo}\ \{a;b\}$$

¿cuáles de la siguientes proposiciones son falsas?

I. $a*b = b*a$

II. $a*(b*c) = (a*b)*c$

III. $(x*4) = 2 \Rightarrow x=1$

IV. $(x*1) = 2-x^2 \Rightarrow x=1$ ó $x=-2$

A) I B) III C) II y IV
D) III y IV E) IV

30. Demostrar axiomáticamente las siguientes igualdades sean $a, b \in \mathbb{R}$

I. $(a+b)+[(-a)+(-b)] = 0$

II. $(a.b)\left(\frac{1}{a}.\frac{1}{b}\right) = 1 \Big/ ab \neq 0$

III. $-a+(-b) = -(a+b)$

31. Demostrar los siguientes teoremas:

I. Si a, b y $c \in \mathbb{R} \wedge a+c = b+c$
$\Rightarrow a = b$

II. $-(-b) = b \ \forall b \in \mathbb{R}$

III. Si $a=b \wedge c=b \Rightarrow a = c$

IV. Si $a=b \Rightarrow -a = -b$

32. Demostrar los teoremas:

I. Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a(-1) = -a$

II. Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (-1)a = -a$

III. Si $a, c \in \mathbb{R} \Rightarrow (b+c)+(-c)=b$

33. Sean a y b números naturales, si se define $a*b = a+2b$, entonces es verdadero que:

A) $(a*b)*a = a+4b$
B) $a*b = b*a$
C) $(a*b)*b = a+4b$
D) $(a*b)*(a*b) = (a+2b)^2$
E) $(a*b)*c = a*(b*c)$

34. Determinar, ¿cuáles de los siguientes sistemas forman grupos?

I. G = Conjunto de los enteros; operación sustracción.

II. G = {1, - 1} ; operación multiplicación

III. G = Conjunto de los racionales diferentes de cero; operación división

IV. G = {a+bi ; a,b $\in \mathbb{Z}$}; operación adición

A) I $\wedge$ III B) Solo III C) I, II $\wedge$ IV
D) III $\wedge$ IV E) II $\wedge$ IV

35. Probar que:

$F=\{a+b\sqrt{2}$; a,b racionales$\}$ es un cuerpo.

36. Sea R un anillo con elemento identidad. Formamos con R otro anillo $\hat{R}$ definiendo:

$a \oplus b = a+b+1 \quad \wedge$

$a \odot b = a.b+a+b$

I. Verificar que $\hat{R}$ es un anillo.

II. Determinar los elementos neutros de $\oplus$ y $\odot$ respectivamente.

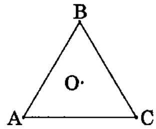
37. Supongamos que $a^2=a \ \forall a \in M$. Probar que M es un anillo conmutativo (un anillo con esta propiedad se llama anillo booleano).

38. Sean (A , $*$) , (B , #) grupos abelianos y (C , Δ) un grupo no abeliano.
Dar $A \times B \times C$ una estructura de grupo.
¿El nuevo grupo será abeliano?.

Respuesta:

El grupo $(A \times B \times C ; \alpha)$ no es abeliano.

39. Consideremos las rotaciones de un triángulo equilátero ABC alrededor de su centro "O", como se muestra en la figura.



Demostrar si este proceso con la operación de adición es un grupo.

Respuesta:

Sea G = {rot. 0 , rot. 120°, rot 240°}

Luego la estructura algebraica (G , +) es un grupo.

40. En el conjunto A = {0, 1, 2, ... , 9} se define la operación binaria.

$$a*b = \begin{cases} a+b & \text{Si: } a+b < 10 \\ a+b-10 & \text{Si: } a+b \geq 10 \end{cases}$$

Conteste las siguientes preguntas:

I. ¿A es cerrada para esta operación?

II. ¿Es conmutativa?

III. ¿Admite elemento neutro?, ¿cuál es?

IV. ¿Todo elemento de A tiene simétrico en A?

Respuesta:

Todas las preguntas tienen respuesta afirmativas.

Colección Álgebra

1	A	11	C	21	D	31	*
2	C	12	B	22	D	32	*
3	C	13	C	23	D	33	C
4	A	14	*	24	B	34	C
5	A	15	C	25	E	35	*
6	C	16	E	26	D	36	*
7	E	17	C	27	B	37	*
8	A	18	A	28	C	38	*
9	B	19	D	29	B	39	*
10	*	20	B	30	*	40	*

* Demostraciones

Claves

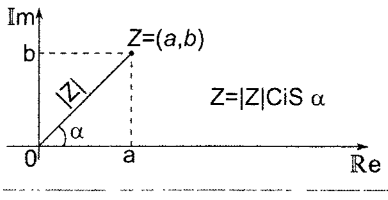
CAPÍTULO

XIII

Números complejos

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Fue el más grande matemático del Siglo XIX y probablemente, junto con Arquímedes y Newton, uno de los tres grandes matemáticos de todos los tiempos.
Gauss nació en Brunswick, Alemania, en el seno de una familia obrera. Fue un niño prodigio y desde su niñez mostró una asombrosa habilidad para el cálculo. Cuando aún no tenía 3 años, observó a su padre que era capataz, quien hacía las nóminas de los albañiles. El padre cometió un error y el hijo se lo hizo notar y cuando revisó los números halló que el pequeño -precoz muchacho- estaba en lo cierto.
La sagacidad con que Gauss guardaba sus teorías se explica en parte a su pasión por la perfección "poco, pero selecto" era su lema.
Contribuyó a allanar el camino del álgebra abstracta superior con su pensamiento sobre los números complejos, demostró por primera vez con tanta rigurosidad el teorema fundamental del álgebra.
Procedió hacia 1819 a inventar otro tipo de números al cual su compatriota Hermann Grassmann en 1840 la llamaría el álgebra de los hiper complejos ($a+bi+cj+dk$), contradiciendo a las leyes de la aritmética básica ($xy \neq yx$; siendo x, y hipercomplejos).
Ha dejado innumerables aportes a la ciencia principalmente a la matemática.
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$



ÁLGEBRA

LECTURA

Sistemas hipercomplejos

Sea K un cuerpo cualquiera (puede ser el de los complejos, por ejemplo, pero no es imprescindibles) cuyos elementos son {a, b, ...}; dotado de un elemento unidad, e, y sea V un espacio vectorial sobre K, de n dimensiones. Si los elementos de V son indicados por $\{\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \ldots\}$, *sabemos que, en este espacio vectorial:*

1° *Existe una ley de composición interna, indicada "+", conmutativa, asociativa, que admite un elemento neutro,* $\overrightarrow{0}$, *y tal que cada vector* $\overrightarrow{X}$ *tenga para esta ley un opuesto* $\overrightarrow{X'}$: $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{X'} = \overrightarrow{X'} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$;

2° *Existe una ley de composición externa con operadores en K, asociativa y distributiva con respecto a los elementos de V y a los elementos de K;*

3° *Existe por lo menos n vectores* $\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \ldots, \overrightarrow{U_n}$ *tales que un vector cualquiera de V se expresa linealmente en función de estos vectores y de coeficientes* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *pertenecientes a K:*

$$\overrightarrow{X} = k_1\overrightarrow{U_1} + k_2\overrightarrow{U_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{U_n} = \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{U_i}$$

Para dar al espacio V una estructura de anillo, es preciso definir en el mismo una segunda ley de composición interna, la operación "x" que es asociativa, distributiva con respecto a la adición y compatible con la ley externa, es decir, de tal clase que tengamos, en especial:

$$(k\overrightarrow{X})\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{X}(k) = k \quad , \quad k \in K$$

Se establece un cuadro cuadrado que define el producto del anillo considerado, el cual es denominado entonces sistema hipercomplejo o, mejor un álgebra. Sus elementos se denominan números hipercomplejos. Cuando los elementos de base forman un grupo para la multiplicación, se dice que se ha formado el álgebra del grupo.

Fuente. Álgebra Moderna – William E. Artemus.

Números complejos

OBJETIVOS:

- Estudiar un nuevo campo numérico llamado "El campo Complejo" que desempeña un papel importante en la resolución de ecuaciones polinomiales.
- Ver la aplicación en las diferentes ramas de la ingeniería y de la ciencia.
- Aplicar dicha teoría en los circuitos eléctricos, geometría fractal, etc.

INTRODUCCIÓN

Los números complejos desempeñan un papel muy importante en el desarrollo del Álgebra Moderna; ya que la Teoría de Ecuaciones, en especial las ecuaciones polinomiales obedece al Teorema Fundamental del Álgebra, cuya demostración es complicada por medios algebraicos; en cambio por el análisis complejo, utilizando el Teorema de Lioville; la demostración es bastante sencilla y rigurosa (ver cualquier libro de análisis complejo).

En el estudio de un fenómeno físico o químico necesitamos hacer uso de las ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales; para resolver dichas ecuaciones se utilizan a los números complejos por lo general; por ejemplo para resolver un problema de ondas se utiliza el método de variables separables donde se aplica la serie de Fourier.

Por ello, su aplicación es frecuente en todas las ramas de la Ingeniería. Por ejemplo en la electrónica se utiliza en los circuitos eléctricos.

Cabe mencionar que en estas últimas décadas se ha desarrollado la Geometría Fractal; donde entre diversos tópicos intervienen en ella los números complejos los cuales son un componente importante y obviamente su importancia crece por las aplicaciones propias de la Geometría Fractal (Física, Química, Biología, Sociología, Psicología, Economía, Arte, etc.). La Geometría Fractal nace por la misma necesidad de afrontar problemas reales; ya que la geometría tradicional o Euclidea tiene limitaciones por las formas encontradas en la naturaleza, como montañas, franjas costeras, sistema hidrográficos, nubes, árboles, etc., un sin número de otros objetos que no son fácilmente descritos por la geometría Euclidea.

En cambio la geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza; todo esto es posible por que la dimensión fractal no es **entera** como en la Geometría Euclidea.

Una característica propia de la Geometría Fractal es el de autosimilitud, esto quiere decir, que cada porción de un gráfico fractal visto inclusive con una lupa posee la misma forma y características que el gráfico inicial.

NOCIÓN HISTÓRICA

El problema de resolver las ecuaciones algebraicas ha llevado al hombre desde los números naturales, a los enteros, a los racionales, a los números irracionales y al sistema completo de los números reales.

En el siglo XIX, Leopoldo Kronecker, el primer crítico de los fundamentos del análisis moderno, describió esta evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de números por el hombre. Sabemos por ejemplo, que no existe ningún número real "x" con la propiedad de verificar $x^2+1=0$; el problema es análogo; cuando el hombre no conocía los números enteros negativos; sólo contemplaba la ecuación $x+9=4$; el número -5 aún no tenía algún sentido.

Discutiremos el sistema de los números complejos siguiendo estas mismas líneas, las definiciones y reglas se dan en primer lugar.

Demostraremos después como este sistema de números es una extensión del sistema de los números reales.

La primera representación clara de los números complejos y la primera prueba satisfactoria del teorema fundamental del álgebra la dio Karl Gauss (1 777 - 1 855) en su disertación doctoral en 1 799. El término número complejo lo introdujo Gauss y la definición de números complejos como pares ordenados de números reales fue usada por primera vez en 1 835 por el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1 805 - 1 865) y luego Herman Grassman (1 809 - 1 877) extendió esta definición de los números complejos a las n-adas ordenadas de números reales (x_1; x_2; x_3; ..... ; x_n); estos números hipercomplejos generalizan a los números complejos y a los cuaterniones de Hamilton.

Los números complejos son de capital importancia en Álgebra. En la teoría de las funciones analíticas de una variable compleja; los números complejos juegan un papel importante en las ecuaciones diferenciales; en los circuitos eléctricos, oscilaciones, vibraciones, fenómenos ondulatorios, en los fractales que es una herramienta poderosa así como los diferenciales.

DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo es un par ordenado de números reales $(x\,;y)$; es decir $x\,;y \in \mathbb{R}$; donde "x" es la primera componente "y" es la segunda componente.

Notación: $z=(x\,;y)$; $x\,,\ y\in\mathbb{R}$

"x" : parte real

"y" : parte imaginaria

Es decir: $\mathbb{R}\mathrm{e}(z)=x$

$\mathbb{I}\mathrm{m}(z)=y$

Luego formamos el conjunto de los números complejos; denotado por

$$\mathbb{C}=\{(x\,;y)\ \ ;\ \ x\,,\ y\in\mathbb{R}\}$$

Ejemplos de Números Complejos

$z_1=(3\,;7)$ $\qquad z_2=(-1\,;\sqrt{2})$

$z_3=(0\,;4)$ $\qquad z_4=(0\,;0)$

OPERACIONES DEFINIDAS EN $\mathbb{C}$

Sean los complejos

$$z_1=(x_1\,;y_1)\ \ ;\ \ z_2=(x_2\,;y_2)$$

Se define

I. Adición

$$z_1+z_2=(x_1+x_2\ ;\ y_1+y_2)$$

II. Multiplicación

$$z_1\,z_2=(x_1x_2-y_1y_2\ ;\ x_1y_2+y_1x_2)$$

Ejemplo:

Sea $\quad z_1=(2\,;3)\ ;\ z_2=(4\,;5)$

Entonces $\quad z_1+z_2=(2+4\ ;3+5)=(6\,;8)$

$z_1\,.\,z_2=(2.4-3.5\ ;\ 2.5+3.4)$

$z_1\,.\,z_2=(-7\,;22)$

Debe observarse que la adición de números complejos; es la misma operación de adición en V_2 (álgebra vectorial bidimensional); la operación de multiplicación se distingue en $\mathbb{C}$ y V_2; en los números complejos la multiplicación origina otro número complejo; en cambio la multiplicación de dos vectores origina un escalar; además la diferencia es que un vector tiene dirección; en cambio un número complejo no tiene dirección alguna.

IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS

Dados $z_1 = (x_1 ; y_1)$; $z_2 = (x_2 ; y_2)$

$$\boxed{z_1 = z_2 \text{ si y sólo si } x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = (4 ; y+1) \wedge z_2 = (x-3 ; 5-y)$

Calcular $x+y$ si $z_1 = z_2$

Resolución:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow 4 = x-3 \wedge y+1=5-y$$

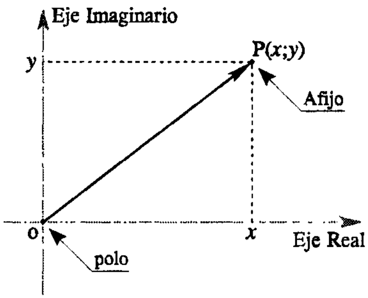
De ahí $x = 7 \wedge y = 2$

$\therefore x + y = 9$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA (Plano de Gauss)

La representación se realiza en un plano, al cual lo llamaremos plano complejo donde el eje "**x**" representa al eje de la parte real y el eje "**y**" al de los imaginarios; a dicho plano se le denomina "plano de Gauss".

Sea $z = (x ; y)$; $x > 0$; $y > 0$



Donde $\overrightarrow{OP}$ es el radio vector del complejo $z = (x;y)$

Definición: El conjunto $\mathbb{C}$; junto con las operaciones de adición y multiplicación definidas anteriormente y las propiedades a mencionar forman el cuerpo de los números complejos.

PROPIEDADES: $\forall z_1 ; z_2 ; z_3 \in \mathbb{C}$

A_1 : $z_1+z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la adición)

A_2 : $z_1+z_2 = z_2+z_1$ (Ley conmutativa para la adición)

A_3 : $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ (Ley asociativa para la adición)

A_4 : Existe un único ($\exists!$) elemento z_0 de la forma $(0 ; 0)$ tal que $z+z_0= z$ $\forall$ complejo z (existencia del elemento neutro aditivo).

A_5 : Existe un único elemento $-z \in \mathbb{C}$ / $z+(-z) = z_0=(0 ; 0)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (existencia del elemento inverso aditivo)

M_1 : $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ (Ley de clausura o cerradura para la multiplicación)

M_2 : $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (Ley conmutativa para la multiplicación).

M_3 : $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ (Ley asociativa para la multiplicación)

M_4 : Existe un único ($\exists!$) $z' \in \mathbb{C}$ de la forma $z'=(1 ; 0)$ tal que $z . z' = z$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (existencia del elemento neutro multiplicativo).

M_5 : Existe un único elemento $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z . z^{-1} = z^{-1} . z = (1 ; 0)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ y $z \neq (0 : 0)$ (existencia del elemento inverso multiplicativo).

D : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (ley distributiva)

La demostración de estas propiedades se hacen en base a los axiomas de los números reales (ver capítulo de números reales). Demostraremos únicamente A_3 y M_2 las demás quedan como ejercicio de rutina para el lector.

Demostración de A_3

Sean $z_1=(x_1;y_1)$; $z_2=(x_2;y_2)$; $z_3=(x_3;y_3)$

tal que $\{x_1;x_2;x_3;y_1;y_2;y_3\}\subset\mathbb{R}$

entonces $(z_1+z_2)+z_3=(x_1+x_2;y_1+y_2)+(x_3;y_3)$
$=(x_1+x_2+x_3;y_1+y_2+y_3)$

También $z_1+(z_2+z_3)=(x_1;y_1)+(x_2+x_3;y_2+y_3)$
$=(x_1+x_2+x_3\ ;\ y_1+y_2+y_3)$

Se observa $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Demostración de M_2

Sean

$z_1=(x_1;y_1)$; $z_2=(x_2;y_2)$; $\{x_1;y_1;x_2;y_2\}\subset\mathbb{R}$

entonces

$z_1z_2=(x_1;y_1)(x_2;y_2)=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+y_1x_2)$

también $z_2z_1=(x_2;y_2)(x_1;y_1)$
$=(x_2x_1-y_2y_1\ ;\ x_2y_1+y_2x_1)$
$=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+y_1x_2)$
(propiedad conmutativa de números reales)
$=z_1z_2$

$\therefore\quad z_2z_1=z_1z_2$

Definición: El sistema de los números complejos representa una ampliación del sistema de los números reales; bajo ciertas condiciones, con este fin veamos los puntos situados en el eje de abscisas; o sea los puntos de la forma (a ; 0); poniendo en correspondencia al punto (a ; 0) el número real **a**; obtenemos evidentemente una correspondencia biunívoca entre el conjunto considerado de puntos y el conjunto de todos los números reales. Como aplicación de las operaciones definidas en $\mathbb{C}$ tenemos:

$$(a;0)+(b;0)=(a+b;0)$$
$$(a;0)(b;0)=(ab;0)$$

O sea los puntos (a;0) se multiplican entre sí igual que los números reales correspondientes; por lo tanto dichos números no se diferencian en nada por sus propiedades algebraicas de los números reales representados ordinariamente por puntos de una recta; por lo tanto concluimos:

$$\boxed{(a;0)\equiv a \quad ó \quad (a;0)=a}$$

Ejemplo:

Al par (12 ; 0) le corresponde el número real 12

Es decir (12 ; 0) = 12 ; análogamente citamos algunos ejemplos:

- $(4;0)=4$
- $(a+b;0)=a+b$
- $(1;0)=1$ (unidad real)

TEOREMA

$\forall r\in\mathbb{R}$; $z=(x;y)$

$\{x;y\}\subset\mathbb{R}$; se cumple $rz=(rx\ ;\ ry)$

Prueba

$rz=r(x;y)$
$=(r;0)(x;y)$; efectuando la multiplicación
$=(rx-oy\ ;\ ox+ry)=(rx;ry)$
$\therefore\ rz=(rx;ry)$

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan de extraer una raíz de índice par a un número real negativo.

Así por ejemplo

$$\sqrt{-1}\ ;\sqrt{-12}\ ;\ \sqrt[4]{-5}\ ;\ \sqrt[2n]{-16}$$

Donde $n\in\mathbb{N}$

De todos éstos el más importante es $\sqrt{-1}$; al cual denominaremos unidad imaginaria, cuya notación universal es $\boxed{i=\sqrt{-1}}$

Aplicación:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16(-1)}=\sqrt{16}\sqrt{-1}=4i$$
$$\sqrt{-5}=\sqrt{5(-1)}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}\,i$$

UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo (0 ; 1) es la unidad imaginaria; tiene la particular notación $i = (0 ; 1)$

TEOREMA

$$i^2 = -1 \quad ; \quad i = (0 ; 1)$$

Prueba

$$\begin{aligned} i^2 &= (0 ; 1)(0 ; 1) = (0-1 ; 0+0) \\ &= (-1 ; 0) \quad = -1 \\ \therefore\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

TEOREMA

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (0 ; y) = yi$$

Prueba

$$\begin{aligned} yi &= (y ; 0)(0;1) \\ &= (0-0 ; y+0) = (0;y) \\ \therefore\ (0 ; y) &= yi \end{aligned}$$

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Estudiaremos el comportamiento del número i^n; $\forall\ n \in \mathbb{Z}$; teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$i^0 = 1 \quad ; \quad i^1 = i$$

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 . i = -i \\ i^4 &= i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 . i = i \\ i^6 &= i^4 . i^2 = -1 \\ i^7 &= i^4 . i^3 = -i \\ i^8 &= i^4 . i^4 = 1 \\ i^9 &= i^8 . i = i \\ i^{10} &= i^8 . i^2 = -1 \\ i^{11} &= i^8 . i^3 = -i \\ i^{12} &= i^8 . i^4 = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se observa que las potencias enteras de **i** se repiten cada cuatro veces y sólo toman uno de los cuatro valores $i ; -1 ; -i ; 1$; esto merece una especial atención.

PROPIEDADES

Se observa principalmente que:

$$i^4 = 1 \ ; \ i^8 = 1 \ ; \ i^{12} = 1 \ ; \ \text{etc.}$$

Esto implica que la unidad imaginaria elevado a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

Por lo tanto $\quad i^{\overset{\circ}{4}} = 1$

En general $\quad \boxed{i^{\pm\overset{\circ}{4}} = 1}$

Luego deducimos que

$$i^{\overset{\circ}{4}+1} = i \quad ; \quad i^{\overset{\circ}{4}+2} = -1 \quad ; \quad i^{\overset{\circ}{4}+3} = -i$$

Generalizando

$$i^{\overset{\circ}{4}+k} = i^k \quad ; \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

1. $i^{22} = i^{\overset{\circ}{4}+2} = -1$

2. $i^{43} = i^{\overset{\circ}{4}+3} = -i$

3. $i^{81} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$

Luego se deduce

$$i^{-(\overset{\circ}{4}-k)} = i^k \quad ; \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

TEOREMA

$$i^{-k} = (-1)^k i^k \quad ; \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 1

Calcular $i^{4683} + i^{527}$

Resolución:

Se observa que

$$4683 = \overset{\circ}{4}+3$$

$$-527 = -(\overset{\circ}{4}-1) = \overset{\circ}{4}+1$$

$$\Rightarrow i^{4683} + i^{527} = i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}+1} = -i + i = 0$$

Ejemplo 2

Reducir $S = i^{48} + i^{17} + i^{9}$

Resolución:

$$i^{48} = (-1)^{48} i^{48} = 1$$
$$i^{17} = (-1)^{17} i^{17} = -i$$

Luego $S = 1 - i + i \quad \therefore S = 1$

PROPIEDADES:

I. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

II. $i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0 \ ; \ \forall k \in Z$

III. $i^{k} + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = 0 \ ; \ \forall k \in Z$

NOTA: (Por propiedades aritméticas)

1. $2^n = \overset{\circ}{4} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ n > 2$
2. $(\overset{\circ}{4}+r)^n = \overset{\circ}{4} + r^n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall r \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

1. Calcular $i^{2^{2^{2^2}}}$

   Resolución:

   $$i^{2^{2^{2^2}}} = i^{\overset{\circ}{4}} = 1$$

2. Hallar el valor de $z_1 = i^{5^{5^{5^5}}}$

   Resolución:

   Se observa que

   $$5^{5^{5^5}} = \overset{\circ}{4} + 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$$

3. Determinar $z_2 = i^{3^{3^{3^3}}}$

   Resolución:

   $$3^{3^{3^3}} = (\overset{\circ}{4} - 1)^{3^{3^3}} = \overset{\circ}{4} - 1 = \overset{\circ}{4} + 3$$

   $$\Rightarrow z_2 = i^{\overset{\circ}{4}+3} = i$$

4. Simplificar

   $W = i^{2!} + i^{3!} + i^{4!} + \ldots + i^{120!}$

   Resolución:

   El factorial de **n** siempre es múltiplo de cuatro $\forall n > 4$

   Entonces

   $$W = \underbrace{i^2 + i^6}_{-2} + \underbrace{i^{\overset{\circ}{4}} + i^{\overset{\circ}{4}} + \ldots + i^{\overset{\circ}{4}}}_{117}$$

   $W = -2 + 117 = 115 \quad \therefore W = 115$

FORMA CARTESIANA O BINÓMICA DE UN COMPLEJO

TEOREMA

Todo número complejo z de la forma $z = (x\,;y)$ es posible escribirlo como $z = x + yi$

Demostración:

Sea $z = (x\,;y) \ ; \ x\,;y \in \mathbb{R}$

Pero $z = (x;y) = (x;0) + (0;y)$

Por definición $(x;0) = x$

Por teorema $(0;y) = yi$

$$\therefore \boxed{z = (x,y) = x + yi}$$

Ejemplo:

Representar en forma binómica o cartesiana cada uno de los siguientes números complejos dados por sus componentes.

$$z_1 = (4;5) = 4+5i$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{3};-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2}i$$

$$z_2 = (\sqrt{3};\ 6) = \sqrt{3} + 6i$$

$$z_4 = (0;-5) = -5i$$

TIPOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Luego de algunas definiciones necesarias tenemos los tipos de complejos:

1. **Complejo Real o Puramente Real.**- Es aquel número complejo que carece de la parte imaginaria; es decir su parte imaginaria es cero.
   Notación:
   $$\boxed{z = (x;0) = x \;;\; \forall x \in \mathbb{R}}$$

2. **Complejo Imaginario Puro.**- Es aquel número complejo que carece de la parte real; es decir su parte real es cero; además su parte imaginaria siempre es diferente de cero.
   Notación:
   $$\boxed{z = (0;y) = y\mathrm{i} \;;\; \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

3. **Complejo Nulo.**- Es aquel número complejo que presenta la parte real e imaginaria igual al número cero; es decir las dos componentes son nulas.
   Notación:
   $$\boxed{z = (0;0)}$$

DEFINICIONES

1. Dado el complejo $z = (x;y) = x+y\mathrm{i}$ se define el conjugado de z denotado por $\overline{z}$; tal que
   $$\boxed{\overline{z} = (x;\ -y) = x - y\mathrm{i}}$$
2. Dado el complejo $z = (x;y) = x+y\mathrm{i}$ se define el opuesto de z denotado por z^* ; tal que:
   $$\boxed{z^* = (-x;\ -y) = -x - y\mathrm{i}}$$

Ejemplo 1

Sea $\qquad z = (4;-5)$

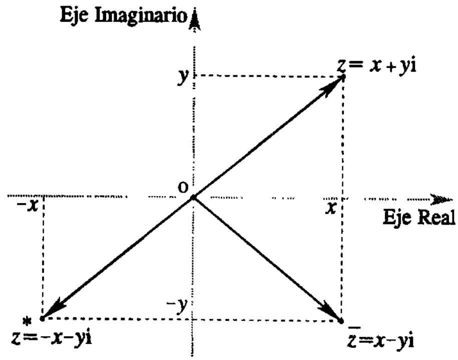
$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{z} = (4;5) \\ z^* = (-4;5) \end{cases}$$

Ejemplo 2

Sea $\qquad w = 10+12\mathrm{i}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{w} = 10 - 12\mathrm{i} \\ w^* = -10 - 12\mathrm{i} \end{cases}$$

Representación Geométrica de $z = (x;y)$, de su conjugado y su opuesto.



PROPIEDADES: $z\,;z_1\,;z_2 \in \mathbb{C}$

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ es complejo real
2. $\overline{\overline{z}} = z$
3. $\overline{z} = -z = z^* \Leftrightarrow z$ es complejo imaginario puro
4. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
5. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
6. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
7. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
8. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\;;\; \forall z_2 \neq (0;0)$
9. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$
10. $\overline{(\sqrt[n]{z})} = \sqrt[n]{\overline{z}} \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$

OPERACIONES EN LA FORMA BINÓMICA O CARTESIANA

Sean los números $z_1 = a+bi \wedge z_2 = c+di$, se definen las siguientes operaciones:

Adición de números complejos

Dados los números complejos : z_1, z_2 se tiene: $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di)$

$$\therefore \quad \boxed{z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i}$$

Ejemplo:

Sean

$$z_1 = 3+6i \wedge z_2 = -4+7i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (3-4)+(6+7)i$$

$$\therefore z_1 + z_2 = -1 + 13i$$

Sustracción de números complejos

Dados los complejos z_1, z_2 entonces

$$\boxed{z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 6 + 2i \quad \wedge \quad z_2 = -3 + 7i$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (6 + 2i) + (3 - 7i) = 9 - 5i$$

$$\therefore z_1 - z_2 = 9 - 5i$$

Multiplicación de números complejos

Dados los números complejos z_1, z_2 se tiene

$$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac+adi+bci+bdi^2) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

$$\therefore \quad \boxed{z_1 z_2 = (ac-bd) + (bc+ad)i}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - 5i$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (3 + 2i)(2 - 5i) = 6 - 15i + 4i + 10$$

Luego $z_1 z_2 = 16 - 11i$

NOTA:

Si recordamos la definición rigurosa de la multiplicación de dos complejos como par ordenado, tenemos:

$$z_1 z_2 = (a;b)(c;d) = (ac-bd ; ad+bc)$$

y lo expresamos en forma binómica

$$z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Llegamos al mismo resultado, es decir la definición es buena.

Ejemplo:

Realizar las operaciones indicadas y hallar:

$$z = (1+i)(1+3i)(3-i)$$

Resolución:

Como la multiplicación de números complejos tiene la propiedad asociativa no interesa el orden en que se empiece a multiplicar los factores.

Luego se tiene

$$z = (1+i)(1+3i)(3-i)$$

$$z = (1+i)(3-i+9i-3i^2) = \underbrace{(1+i)(6+8i)}$$

$$z = 6 + 8i + 6i + 8i^2 = -2+14i$$

$$\therefore z = -2 + 14i$$

División de números complejos

Sean los números complejos z_1, z_2 para efectuar la división $\frac{z_1}{z_2}$ habrá que multiplicar a z_1 y z_2 por $\overline{z_2}$ con lo cual se obtiene

$$z_1 = a+bi \quad , \quad z_2 = c+di$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

Ejemplo 1

Efectuar $z=\left[\dfrac{5+3i}{2-i}\right]\left[\dfrac{2+i}{5-3i}\right]$

Resolución:

En este caso podemos ordenar en forma conveniente, entonces

$$z=\left(\frac{5+3i}{5-3i}\right)\left(\frac{2+i}{2-i}\right)$$

$$=\left(\frac{(5+3i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}\right)\left(\frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)$$

$$=\left(\frac{16+30i}{34}\right)\left(\frac{3+4i}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{8+15i}{17}\right)\left(\frac{3+4i}{5}\right)=\frac{-36+77i}{85}$$

$$\therefore\ z=-\frac{36}{85}+\frac{77}{85}i$$

Ejemplo 2

Efectuar $W=\dfrac{i}{(1-3i)(i-3)}$

Efectuando en el denominador, tenemos

$$W=\frac{i}{i-3-3i^2+9i}=\frac{i}{10i}=\frac{1}{10}$$

$$\therefore\ W=\frac{1}{10}$$

POTENCIACIÓN

La potenciación en forma binómica tiene muchas limitaciones; por ello se utiliza cuando las potencias son pequeñas.

Ejemplo:

Efectuar

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(2i)^2=-4$

$(1-i)^2=1-2i+i^2=\ \ 2i$

$(1-i)^4=[(1+i)^2]^2=(-2i)^2=-4$

Se observa $\boxed{(1+i)^4=(1-i)^4=-4}$

Ejemplo

Reducir

$$W=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^9$$

Resolución:

Efectuando por separado

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i\quad;$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{2i}{2}=-i$$

Reemplazando tenemos

$W=(i)^5+(-i)^9=i-i=0$

$\therefore\ W=0$

Resultados importantes:

$(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$

$(1+i)^3=2i(1+i)$; $(1-i)^3=-2i(1\ \ i)$

$(1+i)^4=-4$; $(1-i)^4=-4$

$\boxed{\dfrac{1+i}{1-i}=i}$; $\boxed{\dfrac{1-i}{1+i}=-i}$

RADICACIÓN EN $\mathbb{C}$

En la forma binómica, sólo estudiaremos la raíz cuadrada; en forma general lo estudiaremos más adelante.

DEFINICIÓN

La raíz cuadrada de un número complejo z es un número complejo **w** tal que $w^2=z$.

En base a la raíz cuadrada de números reales positivos, probaremos que la raíz cuadrada de un número complejo siempre existe.

> **TEOREMA**
>
> Dado $z \in \mathbb{C}$, $\exists\ w \in \mathbb{C}$, tal que: $w^2 = z$

Demostración:

Dado: $z = x + yi$; $z \neq 0$

Debemos hallar: $w = a+bi$, tal que $w^2 = z$

Esta última condición plantea la igualdad

$(a+bi)^2 = x+yi$

Efectuando y ordenando el primer miembro: $a^2-b^2+2abi = x+yi$

Igualando las partes reales e imaginarias se tiene

el sistema $\begin{cases} a^2-b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}$

Reemplazando $b=\dfrac{y}{2a}$ en la primera ecuación

$$a^2-\frac{y^2}{4a^2}=x$$

Lo que se convierte en $4a^4-4xa^2-y^2=0$

Resolviendo para a^2 se tiene:

$$a^2=\frac{x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

pero $a^2 \geq 0$; entonces se debe tomar

$$a^2=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \text{............ (i)}$$

En forma análoga se obtiene

$$b^2=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2} \text{........... (ii)}$$

Nos interesa los valores de a y b

$$a=\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} \;;\; b=\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

Pero $2ab = y$

entonces, se tendrá lo siguiente

Si: $y>0 \Rightarrow a \wedge b$ tienen el mismo signo

Si: $y<0 \Rightarrow a \wedge b$ tienen signos diferentes

Por lo tanto

$$\boxed{W=\pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+(*)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\,i\right)}$$

donde $(*)$ es el signo de "y"

Ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada de $6-8i$

Resolución:

Aplicando la fórmula anterior

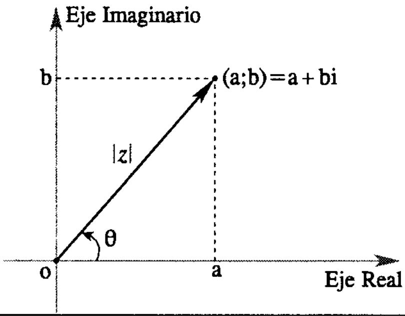
$$\sqrt{6-8i}=\pm\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2+8^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-6+\sqrt{6^2+8^2}}{2}}\,i\right)$$

$$=\pm(2\sqrt{2}-\sqrt{2}i) = \pm\sqrt{2}(2-i)$$

$$\therefore\ \sqrt{6-8i}=\pm\sqrt{2}(2-i)$$

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado $z=a+bi$; el módulo o valor absoluto de z es un número real no negativo denotado por $|z|$; tal que $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



> **NOTA:** Geométricamente, el módulo nos representa la magnitud del radio vector del complejo z de origen (0;0) y extremo final el afijo de z.

Ejemplo:

Hallar los módulos de los siguientes complejos

1. $z_1 = 5 + 4i$
2. $z_2 = 1 - i$
3. $z_3 = -5$
4. $z_4 = -6i$
5. $z_5 = -3 - 4i$

Resolución:

1. $|z_1| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$
2. $|z_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
3. $|z_3| = \sqrt{(-5)^2+0^2} = 5$
4. $|z_4| = \sqrt{0^2+(-6)^2} = 6$
5. $|z_5| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$

> **NOTA:** $\forall\ a\ ;\ b \in \mathbb{R}$
> $z = a \Rightarrow |z| = |a|$
> $z = bi \Rightarrow |z| = |b|$

PROPIEDADES

De la definición de módulo se desprende las siguientes propiedades; sean z ; z_1 ; $z_2 \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0;0)$
2. $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$
3. $|z|^2 = z\,.\,\bar{z}$
4. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$; $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\forall z_2 \neq (0;0)$
7. $|z^n| = |z|^n$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$
8. $\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$
9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
10. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Demostraremos algunas de las propiedades:

5. $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$

$= (z_1\,\bar{z}_1)(z_2\,.\,\bar{z}_2) = |z_1|^2\,|z_2|^2$

Quitando exponentes se tiene

$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

7. $z^n = \underbrace{z\,.\,z\,.\,z\,.\,.....\,z}_{n\ \text{veces}}$

(Def. de exponente natural)

Tomando módulo $|z^n| = |z\,.\,z\,.\,z\,.\,.....\,z|$, usando la propiedad 5

$|z^n| = |z|\ |z|\ |z|\ ....\ |z|$; n veces

$\therefore\ |z^n| = |z|^n$

9. $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$

pero

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \wedge \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1\bar{z}_2|$

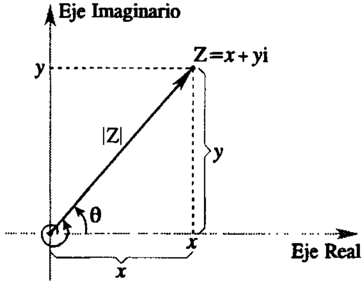
Entonces

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2 \le |z_1|^2+2|z_1||\bar{z}_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

luego $|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2$; quitando exponentes se tiene $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea z=a+bi un número complejo diferente del nulo.
Es decir $|z| \neq 0$



De la figura $x=|z|\mathrm{Cos}\theta$; $y=|z|\mathrm{Sen}\theta$

Donde $\mathrm{Tg}\theta=\dfrac{y}{x}$;

Entonces $z=x+yi=|z|\mathrm{Cos}\theta+|z|\mathrm{Sen}\theta i$

$$\boxed{\therefore\ z=|z|(\mathrm{Cos}\theta+i\mathrm{Sen}\theta)}$$

Es la representación trigonométrica o polar de un complejo; donde al ángulo θ se le denomina el argumento de z denotado por **Arg(z)**; es decir

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z)=\theta}$$

Se observa que θ puede tomar infinitos valores como

$\theta_1=\theta$; $\theta_2=\theta+2\pi$; $\theta_3=\theta+4\pi$

para evitar este problema se da la siguiente definición :

Argumento principal de un número complejo

De todos los valores de θ; elegimos aquel que se encuentra en el intervalo $[0;2\pi>$; es decir $0\le\theta<2\pi$; a dicho θ se le denomina argumento principal, cuya notación es:

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z)=\theta}$$

Conociendo el argumento principal de z denotado por **Arg(z)** podemos generar otros cuya notación es

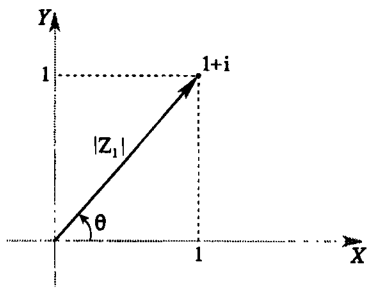
$$\boxed{\arg(z)=\mathrm{Arg}(z)+2k\pi}$$

K = 0 ; ± 1 ; ±2 ; ±3 ; ...

NOTA:

1. Al argumento de **z, Arg(z)**, también se le denomina amplitud.
2. El argumento es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.

Ejemplo 1



Hallar la forma polar o trigonométrica de $z_1=1+i$

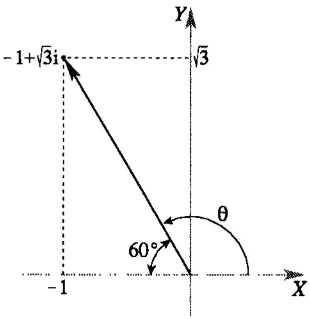
Resolución:

$|z_1|=\sqrt{2}$

$\mathrm{Tg}\theta=\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow \theta=45°$

Luego $z_1 = 1+i = \sqrt{2}(\text{Cos}45°+i\text{Sen}45°)$

Ejemplo 2



Si $z = -1 + \sqrt{3}i$

Entonces

$$|z| = 2$$

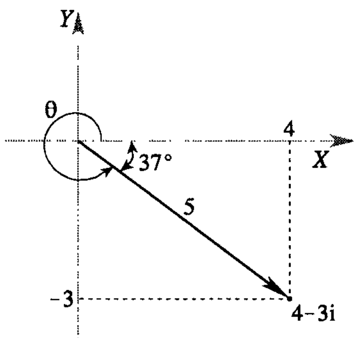
$$\text{Tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta = 120°$$

Luego

$$z = -1+\sqrt{3}i = 2(\text{Cos}120°+i\text{Sen}120°)$$

> **NOTA:** Para calcular el argumento principal de z se debe observar en qué cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos a partir de $\text{Tg}\,\theta = \frac{b}{a}$

Ejemplo 3



Representar en forma polar $z_1 = 4 - 3i$

Se observa que $\theta \in IV$

$$|z_1| = 5$$

$$\text{Tg}\theta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \theta = 323°$$

Luego $z_1 = 4-3i = 5(\text{Cos}323°+i\text{Sen}323°)$

> **NOTA:** También se puede definir el argumento principal en el intervalo $<-\pi;\pi]$, es decir, $-\pi<\theta\leq\pi$; por ello no debe ser extraño si consideramos en algunos problemas.

TEOREMA

Dados los números complejos no nulos

$z = |z|(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)$

$w = |w|(\text{Cos}\alpha+i\text{Sen}\alpha)$

Se verifican

1. $zw = |z|\,|w|(\text{Cos}(\theta+\alpha)+\text{Sen}(\theta+\alpha))$
2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\text{Cos}(\theta-\alpha)+i\text{Sen}(\theta-\alpha))$

Demostración

1. $zw = |z|.|w|(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)(\text{Cos}\alpha+i\text{Sen}\alpha)$

$$= |z|\,|w|\,[(\text{Cos}\theta\text{Cos}\alpha\ \ \text{Sen}\theta\text{Sen}\alpha) + i(\text{Cos}\theta\text{Sen}\alpha+\text{Sen}\theta\text{Cos}\alpha)]$$

$$= |z|\,|w|\,[\text{Cos}(\theta+\alpha) + i\text{Sen}(\theta+\alpha)]$$

2. $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}.\frac{\text{Cos}\,\theta+i\text{Sen}\,\theta}{\text{Cos}\,\alpha+i\text{Sen}\,\alpha}$

$$= \frac{|z|}{|w|}\ \frac{(\text{Cos}\theta+i\text{Sen}\theta)\mathbf{(Cos\alpha-iSen\alpha)}}{(\text{Cos}\alpha+i\text{Sen}\alpha)\mathbf{(Cos\alpha-iSen\alpha)}}$$

$$= \frac{|a|}{|w|}\left[\frac{(\cos\theta\cos\alpha - i\text{sen}\alpha\cos\theta}{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha} + \frac{i\text{sen}\theta\cos\alpha - i^2\text{sen}\theta\text{sen}\alpha)}{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{|z|}{|w|}[(\cos\theta\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\theta)]$$

$$= \frac{|z|}{|w|}[\operatorname{Cos}(\theta-\alpha)+i\operatorname{Sen}(\theta-\alpha)]$$

CONCLUSIÓN:

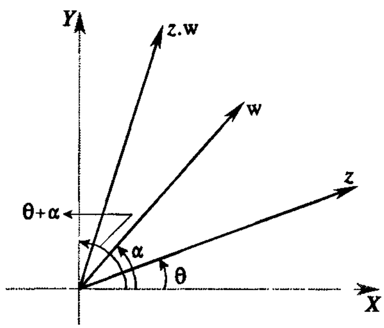
1. Para multiplicar complejos en la forma polar se multiplica los módulos y se suma los argumentos.

$$\boxed{\arg(z\,.\,w) = \arg(z)+\arg(w)}$$

2. Para dividir complejo en la forma polar se dividen los módulos y se resta los argumentos.

$$\boxed{\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z)-\arg(w)}$$

Gráficamente para (1):



Ejemplo:

Dados $z = -3+\sqrt{3}i$; $w = 1+i$

Hallar $z.w$; $\dfrac{z}{w}$ y representar gráficamente.

Resolución:

$$|z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$\operatorname{Arg}(z) = 5\pi/6$$

Entonces $z = 2\sqrt{3}(\operatorname{Cos}5\pi/6 + i\operatorname{Sen}5\pi/6)$

También $|w| = \sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}(w) = \pi/4$

Entonces $w = \sqrt{2}(\operatorname{Cos}\pi/4 + i\operatorname{Sen}\pi/4)$

Como nos piden el producto y el cociente; de z, w; hallaremos los argumentos:

$$\operatorname{Arg}(z.w) = \frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

Luego

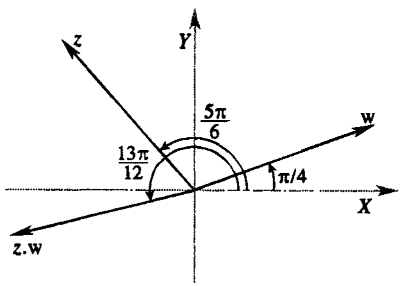
$$z.w = 2\sqrt{3}.\sqrt{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{13\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{13\pi}{12}\right)$$

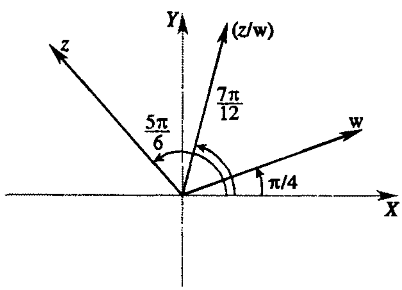
$$= 2\sqrt{6}\left(\operatorname{Cos}\frac{13\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{Cos}\frac{7\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{6}\left(\operatorname{Cos}\frac{7\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{7\pi}{12}\right)$$

Graficando los argumentos de $z.w$ y $\dfrac{z}{w}$





TEOREMA (de De Moivre)

Dados $z=|z|(\mathrm{Cos}\theta+i\mathrm{Sen}\theta)$; $z \neq (0\,;0) \wedge n \in \mathbb{N}$;

se tiene $z^n=|z|^n(\mathrm{Cos}n\theta + i\mathrm{Sen}n\theta)$

Corolario:
$\arg(z^n) = n\arg(z)$; $n \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1

Hallar el argumento de $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i} \cdot \dfrac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}$

Resolución:

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{(1+\sqrt{3}i)^3}{2i}\right) + \arg\left(\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}\right)$$

$$\arg(z) = 3\arg(1+\sqrt{3}i) - \arg(2i) + 5\arg(1+i) - 2\arg(\sqrt{3}+i)$$

$$\arg(z) = 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right) + 5\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{17\pi}{12}$$

$$\therefore\ \arg(z) = \frac{17\pi}{12}$$

Ejemplo 2

Demostrar $\quad \mathrm{Sen}2\theta = 2\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\theta$

$\quad \mathrm{Cos}2\theta = \mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta$

Demostración:

Sabemos

$(\mathrm{Cos}\theta+i\mathrm{Sen}\theta)^2 = \mathrm{Cos}2\theta+i\mathrm{Sen}2\theta$ ....

..... (Por T. de De Moivre)

Efectuando en el primer miembro

$$\underbrace{\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta} + \underbrace{2\mathrm{sen}\theta\cos\theta i} = \cos 2\theta + \underline{i\mathrm{sen}2\theta}$$

Igualando las partes real e imaginaria tenemos

$$\mathrm{Cos}2\theta = \mathrm{Cos}^2\theta - \mathrm{Sen}^2\theta$$
$$\mathrm{Sen}2\theta = 2\mathrm{Sen}\theta\mathrm{Cos}\theta$$

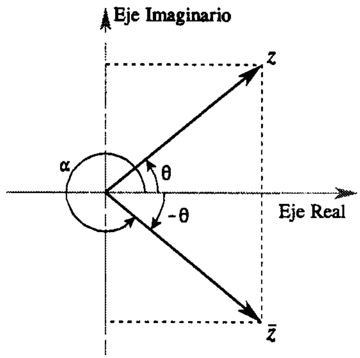
Ejemplo 3:

Sea $z = |z|(\mathrm{Cos}\theta + i\mathrm{Sen}\theta)$

Hallar el argumento de su conjugada.

Resolución:

Representando z geométricamente



De la figura $\alpha = 2\pi-\theta \Rightarrow \mathrm{Arg}(\bar{z}) = 2\pi-\theta$

También podemos considerar $(-\theta)$

Entonces $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\theta$

Ejemplo 4

Reducir $z = (1+\sqrt{3}i)^{30} + (1-\sqrt{3}i)^{30}$

Resolución:

$$1+\sqrt{3}i = 2(\mathrm{Cos}60° + i\mathrm{Sen}60°)$$
$$1-\sqrt{3}i = 2(\mathrm{Cos}(-60°) + i\mathrm{Sen}(-60°))$$
$$= 2(\mathrm{Cos}60° - i\mathrm{Sen}60°)$$

Luego

$$z = \left[2\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} + i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{30} + \left[2\left(\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} - i\mathrm{Sen}\frac{\pi}{3}\right)\right]^{30}$$

$$z = \left[2^{30}\left(\mathrm{Cos}30\frac{\pi}{3} + i\mathrm{Sen}30\frac{\pi}{3}\right)\right] + \left[2^{30}\left(\mathrm{Cos}30\frac{\pi}{3} - i\mathrm{Sen}30\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = 2^{30}(\mathrm{Cos}10\pi + i\mathrm{Sen}10\pi) + 2^{30}(\mathrm{Cos}10\pi - i\mathrm{Sen}10\pi)$$
$$= 2^{30}(2\mathrm{Cos}10\pi)$$
$$= 2^{31}$$

$$\therefore\ z = 2^{31}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

TEOREMA DE EULER

$$e^{i\theta} = \text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta$$

Donde: e es la base del logaritmo neperiano
θ argumento en radianes ; $i = (0;1)$

La demostración la realizaremos en el siguiente tomo; ya que todavía no tenemos elementos necesarios.
Entonces tenemos una nueva representación para el complejo.

$$z = |z|(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta) = |z|e^{i\theta}$$

$$\boxed{\therefore\ z = |z|\,e^{i\theta}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Ejemplo 1
Representar en forma exponencial al complejo $z = 4+4\sqrt{3}i$
Resolución:

$$z = 4+4\sqrt{3}i = 8(\text{Cos}\pi/3 + i\text{Sen}\pi/3) = 8e^{i\pi/3}$$

$$\therefore\ z = 8e^{i\pi/3}$$

NOTA:
Conociendo el complejo $z = |z|e^{i\theta}$; podemos hallar la representación exponencial de su conjugado sólo reemplazando θ por (−θ).

$$\bar{z} = |z|e^{i(-\theta)}$$

Ejemplo 2
Sabiendo que $z = x+yi$
Hallar el módulo y el argumento de e^z
Resolución:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\text{Cos}y + i\text{Sen}y)$$

$$\therefore\ |e^z| = e^x \ ;\ \text{Arg}(e^z) = y$$

NOTA: $e^x > 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo 3
Calcular i^i ; $i = \sqrt{-1}$

Resolución:
Partimos expresando en forma polar el complejo

$$i = 0+i = (1)\left(\text{Cos}\frac{\pi}{2} + i\text{Sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Luego $i = \text{Cos}\frac{\pi}{2} + i\text{Sen}\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$

Se pide $i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{\frac{\pi}{2}i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$\therefore\ i^i = e^{\pi/2}$$

NOTA:
Del teorema de Euler se tiene

$$e^{i\theta} = \text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$e^{i(-\theta)} = \text{Cos}\theta - i\text{Sen}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Al sumar (I) y (II) se obtiene $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\text{Cos}\theta$

de donde $\text{Cos}\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ..... (*)

Al restar (I)−(II) se obtiene

$$\text{Sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \ldots\ldots (**)$$

Si en dichas fórmulas reemplazamos θ por z; obtenemos algo más general

$$\boxed{\text{Cos}z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ ;\ z \in \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\text{Sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ;\ z \in \mathbb{C}}$$

REPRESENTACIÓN CIS

Es usada para representar en forma abreviada a un complejo en su forma polar. Así

$$\boxed{z = |z|\ (\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta) = |z|\ \text{Cis}\theta}$$

Ejemplos:

$$z_1 = 2(\text{Cos}12° + i\text{Sen}12°) = 2\text{Cis}12°$$

$$z_2 = 2(\text{Cos}(\theta+2k\pi) + i\text{Sen}(\theta+2k\pi))$$

$$= 2\text{Cis}(\theta+2k\pi)$$

TEOREMA DE DE MOIVRE

Sea el número complejo: $z = |z| e^{i\theta}$;
se cumple:

Forma exponencial:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

Forma polar:

$$z^n = |z|^n(\mathrm{Cos}\, n\theta + i\mathrm{Sen}\, n\theta)$$

Representación CIS

$$z^n = |z|^n \mathrm{Cis}(n\theta)$$

Forma fasorial

$$z^n = |z|^n \underline{|n\theta}$$

$$\forall\ n \in Z$$

Demostración:

La demostración queda a cargo del lector.

Ejemplo

Efectuar

$$z = \frac{\sqrt{2}(\mathrm{Cos}13^\circ + i\mathrm{Sen}13^\circ)\left[2\sqrt{2}(\mathrm{Cos}67^\circ + i\mathrm{Sen}67^\circ)\right]}{4[\mathrm{Cos}16^\circ + i\mathrm{Sen}16^\circ][\mathrm{Cos}19^\circ + i\mathrm{Sen}19^\circ]}$$

Resolución:

Representando fasorialmente

$$z = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\,\underline{|13^\circ} \cdot 2\cancel{\sqrt{2}}\,\underline{|67^\circ}}{\cancel{4}\,\underline{|16^\circ} \cdot \underline{|49^\circ}} = \frac{\underline{|13 + 67^\circ}}{\underline{|16^\circ + 19}} = \frac{\underline{|80^\circ}}{\underline{|35}} = \underline{|45^\circ}$$

Luego

$$z = \mathrm{Cos}45^\circ + i\mathrm{Sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore\quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

RAÍZ N-ÉSIMA - RAÍCES DE LA UNIDAD

El problema de obtener una raíz n-ésima de cualquier número real o complejo se resuelve satisfactoriamente con la teoría de números complejos.

Definición:

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}-\{1\}$, se llama raíz n-ésima de z a un número $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^n = z$

> **TEOREMA**
>
> Para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}-\{1\}$; existen n raíces (n-ésimas) de z

Demostración:

Sea $z=|z|e^{i\theta} = |z|(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta)$

Deseamos calcular

$w=|w|e^{i\alpha} = |w|(\cos\alpha+i\,\text{sen}\alpha)$, tal que $w^n = z$

Es decir

$$\left[|w|e^{i\alpha}\right]^n = |z|e^{i\theta} \Rightarrow |w|^n e^{in\alpha} = |z|e^{i\theta}$$

Equivalentemente

$$|w|^n(\text{Cos}\,n\alpha + i\text{Sen}\,n\alpha) = |z|(\text{Cos}\,\theta + i\text{Sen}\,\theta)$$

Igualando partes real e imaginaria

$|w|^n = |z| \ \wedge \ [\text{Cos}n\alpha = \text{Cos}\theta \text{Sen}n\alpha = \text{Sen}\theta]$

De donde obtenemos

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ y } n\alpha=\theta+2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta+2k\pi}{n} ; \quad k \in Z$$

Luego las raíces n-ésimas son

$$W_K = \sqrt[n]{|z|}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\text{Sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\ \text{Cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) ;$$

$k = 0 \ ; \ \pm 1 \ ; \ \pm 2 \ ; \ \pm 3 \ ; .....$

Estas raíces no son todas distintas pues

$$W_n = W_0 ; W_{n+1} = W_1 ..... W_{n+j} = W_j$$

Es decir $W_{n+j} = W_j ..... \forall_j = 0; \pm 1; \pm 2;; .....$

Luego las raíces n-ésimas distintas son

$$\boxed{W_0 ; W_1 ; W_2 ; ..... ; W_{n-1}}$$

Por ello cuando se resuelve un problema de raíz enésima es suficiente tomar los valores de

$k = 0; 1; 2; 3; ..... (n-1)$

Ejemplo 1

Hallar las tres raíces cúbicas de 8i

Resolución:

Sea $z = 8i = 0 + 8i = 8\text{Cis}(\pi/2)$

$$\Rightarrow z^{1/3} = \sqrt[3]{8}.\text{Cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) = 2\,\text{Cis}\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)$$

Donde $K = 0 ; 1 ; 2$

Si $K=0$; $z_0 = 2\,\text{Cis}\,\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+i$

$\Rightarrow z_0 = \sqrt{3}+i$

Si $K=1$; $z_1 = 2\text{Cis}\pi/6 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$\Rightarrow z_1 = -\sqrt{3}+i$

Si $K=2$; $z_2 = 2\text{Cis}3\pi/2 = 2(-i) = -2i$

$\Rightarrow z_2 = -2i$

$\therefore$ Las raíces cúbicas de 8i son los siguientes valores $\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}+i$; $-2i$

Ejemplo 2

Hallar las tres raíces cúbicas de $z = 1+i$

Resolución:

$$z = 1+i \begin{cases} \text{Arg}(z) = \pi/4 \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1+i = \sqrt{2}(\text{Cos}\pi/4 + i\text{Sen}\pi/4)$$

Luego las raíces cúbicas de $z=1+i$ son

$$W_K=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left[\operatorname{Cos}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+\operatorname{Sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$K = 0;\ 1;\ 2$

para $K=0$;

$$W_0=\sqrt[6]{2}\left(\operatorname{Cos}\frac{\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=\sqrt[6]{2}\,(\operatorname{Cos}15^\circ+i\operatorname{Sen}15^\circ)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

para $K=1$;

$$W_1=\sqrt[6]{2}\,[\operatorname{Cos}(15^\circ+120^\circ)+i\operatorname{Sen}(15^\circ+120^\circ)]$$

$$=\sqrt[6]{2}\,(\operatorname{Cos}135^\circ+i\operatorname{Sen}135^\circ)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

para $K=2$;

$$W_2=\sqrt[6]{2}\,[\operatorname{Cos}(15^\circ+240^\circ)+i\operatorname{Sen}(15^\circ+240^\circ)]$$

$$=\sqrt[6]{2}\,(\operatorname{Cos}255^\circ+i\operatorname{Sen}255^\circ)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,i\right)$$

Por lo tanto las 3 raíces cúbicas son

$$\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\right);$$

$$\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,i\right)$$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

Sea el complejo $z=1$

Como se desea calcular la raíz cúbica; entonces lo expresamos en forma polar

$$z=1=1+0i=\operatorname{Cos}0^\circ+i\operatorname{Sen}0^\circ$$

Luego la raíz cúbica es

$$z_K=\operatorname{Cos}\left(\frac{0^\circ+2k\pi}{3}\right)+i\operatorname{Sen}\left(\frac{0^\circ+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\operatorname{Cos}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\operatorname{Sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Donde $K = 0;\ 1;\ 2$

Para $K=0$

$$z_o=\operatorname{Cos}0^\circ+i\operatorname{Sen}0^\circ=1$$

Para: $K=1$:

$$z_1=\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{Sen}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Para: $K=2$:

$$z_2=\operatorname{Cos}\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{Sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

CONCLUSIÓN:

Las raíces cúbicas de la unidad real son:

$$1\ ;\ \underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{\text{conjugados}}$$

Donde si asumimos por w al número $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

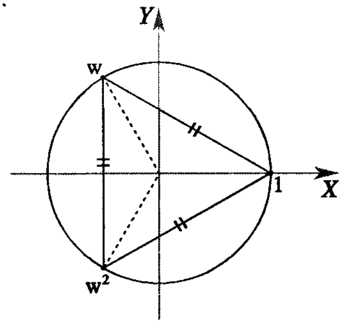
Las raíces cúbicas de 1 son: $1, w, w^2$ es decir

$$\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=w^2\end{cases}$$

NOTA: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Se observa que las tres raíces cúbicas de la unidad tienen el mismo módulo; por lo tanto sus afijos estarán en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo. En este caso el módulo es igual a la unidad.



En la figura se observa que los afijos de 1; w; w^2 son los vértices de un triángulo equilátero.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

1. Sabemos que w es una raíz cúbica de unidad; entonces se cumple $w^3 = 1$
   Luego podemos afirmar

$$\boxed{w^{3K} = 1 \quad ó \quad w^{\pm 3K} = 1 \ ; \ \forall K \in \mathbb{N}}$$

   Entonces

$$\boxed{w^{3K+r} = w^r \ ; r \in \mathbb{Z}}$$

   Luego

$$w^{3K+1} = w \quad ; \quad w^{3K+2} = w^2$$

2. Si sumamos las tres raíces cúbicas 1; w; w^2; tenemos

$$1 + w + w^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

$$\Rightarrow 1 + w + w^2 = 0$$

CONCLUSIÓN:

$\forall$ k ; r $\in \mathbb{Z}$

I. $w^3 = 1$

II. $w^{3k} = 1$; $w^{3k+1} = w$; $w^{3k+2} = w^2$

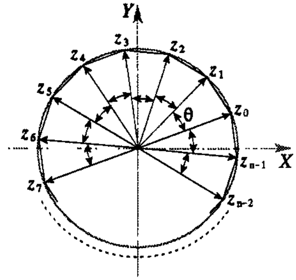
III. $w^{3k+r} = w^r$

IV. $1 + w + w^2 = 0$

TEOREMA

Los afijos de las raíces n-ésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados.

Sean: z_o ; z_1 ; z_2 ; z_3 ; ..... ; z_{n-1} ; las n-raíces (n-ésimas) de z.



Del gráfico se observa: $\theta = \left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Luego el área del polígono regular de n lados es:

$$S = \frac{n|z_o|^2}{2} \cdot \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \mu^2$$

Donde z_o es una de las raíces (n-esimal) de z

También se cumple:

I. $z_0^n = z_1^n = z_2^n = ... = z_{n-1}^n = z$

II. $z_o + z_1 + z_2 + ... + z_{n-1} = 0$

IMPORTANTE:

Las raíces n-ésimas de la unidad tienen propiedades importantes que merecen especial atención.

Si w_1 ; w son las raíces n-ésimas de la unidad; entonces $w_1 w$ es también raíz n-ésima de la unidad en particular w; w^2; w^3; .....

Son raíces enésimas de la unidad

Si $w^{n-1} \neq 1$; se dice que w es ***una raíz primitiva*** de la unidad.

$$w_1 = \text{Cos}\frac{2\pi}{n} + i\text{Sen}\frac{2\pi}{n} \ ;$$

Existen otras raíces primitivas; las cuales son

$$W_k = \text{Cos}\frac{2k\pi}{n} + i\text{Sen}\frac{2k\pi}{n} \ ;$$

k < n y **k** es coprimo con **n**

Ejemplo 1
Las raíces cuadradas de la unidad real son 1; - 1; donde - 1 es raíz primitiva.

Ejemplo 2
Las raíces cúbicas de la unidad real son

$$1 \; ; \; w \; ; \; w^2$$

$$w = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; w^2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \; ;$$

Donde w ; w^2 son raíces primitivas.

Ejemplo 3 *(para el lector)*
Probar que i ; -i son las raíces cuartas primitivas de la unidad real.

Ejemplo 4
Dado $z = 2$, hallar

a. $(z^{1/6})^3$

b. $(z^3)^{1/6}$

Resolución:

a. $z = 2 = 2(\text{Cis}0°)$

$$\Rightarrow z^{1/6} = \sqrt[6]{2}\ \text{Cis}\left(\frac{0°+2k\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\ \text{Cis}\frac{k\pi}{3} \; ; \; k = 0;1;2; \ldots\ldots 5$$

Para $k=0$; $z_0 = \sqrt[6]{2}$

Para $k=1$; $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=2$; $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=3$; $z_3 = \sqrt[6]{2}$

Para $k=4$; $z_4 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Para $k=5$; $z_5 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Pero se desea calcular $(z^{1/6})^3$ elevamos al cubo cada una de las raíces:

$$z_0^3 = \sqrt{2} \qquad ; \qquad z_1^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_2^3 = \sqrt{2} \qquad \qquad z_3^3 = -\sqrt{2}$$

$$z_4^3 = \sqrt{2} \qquad \qquad z_5^3 = -\sqrt{2}$$

Como se observa, se repiten los valores, los cuales deben ser considerados una sola vez.

$$\therefore\ (z^{1/6})^3 = \pm\sqrt{2}\ .$$

b. $z = 2 = 2\text{Cis}0° \Rightarrow z^3 = 8 = 8\text{Cis}0°$

Luego

$$(z^3)^{1/6} = \sqrt[6]{8}\ \text{Cis}\left(\frac{0°+2k\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \text{Cis}\frac{k\pi}{3} \; ; \; k = 0; 1; 2; \ldots\ldots 5$$

Si

$k=0$; $z_0 = \sqrt{2}$

$k=1$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=2$; $z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=3$; $z_3 = -\sqrt{2}$

$k=4$; $z_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$k=5$; $z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\boxed{\therefore\ (z^{1/6})^3 \neq (z^3)^{1/6}}$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Sea el complejo $z=1+i$

Calcular z^{12}

Resolución:

Del dato $z = 1+i$

Realizando la sentencia solicitada

$$\begin{aligned} z^{12} &= (1+i)^{12} \\ &= [(1+i)^2]^6 \\ &= [1+2i+i^2]^6 \quad ; \quad i^2 = -1 \\ &= (2i)^6 = 2^6 i^6 = 64(-1) = -64 \end{aligned}$$

$\therefore\ z^{12} = -64$

Problema 2

Calcular el valor más simple de

$$N = \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3} \quad \text{donde } i=(0;1)$$

Resolución:

> **NOTA:** $(1+i)^2 = 2i$

En la expresión multiplicando por (i) al numerador y denominador tenemos:

$$N = \frac{(1+i)^2\ (1+3i)}{i-3} = \frac{2i(1+3i)(i)}{(i-3)i} = \frac{2(i-3)}{i-3} = 2$$

$\therefore\ N = 2$

Problema 3

Simplificar la expresión

$$\frac{(a^2+ab+a)i-a-b-1}{(a+b+1)i} \quad ; \quad a+b \neq -1$$

Resolución:

Agrupando la parte real y la parte imaginaria

$$z = \frac{a(a+b+1)i-(a+b+1)}{(a+b+1)i}$$

Simplificando tenemos

$$z = \frac{ai-1}{i} = \frac{(ai-1)i}{i^2} = \frac{ai^2-i}{-1} = i+a$$

$\therefore\ z = a+i$

Problema 4

Efectuar

$$W = \cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}}}$$

Resolución:

Recordar

$$\frac{1-i}{1+i} = -i$$

Entonces

$$W = \cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}}} \begin{array}{l} \to -i \\ \to -i \\ \to -i \\ \to -i \\ \to -i \end{array}$$

$\therefore\ W = -i$

Problema 5

Si **k** es un entero no negativo; calcular el valor de $\left[\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right]^{4k+6}$.

Resolución:

Dato $k \in \mathbb{Z}_0^+$

Entonces

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+6} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2k+3} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{2k+3} = i^{2k+3}$$

$$= (i^2)^{k+1}.\,i = (-1)^{k+1}\,i$$

$\therefore$ El equivalente de la expresión es: $(-1)^{k+1}\,i$

Problema 6

Encontrar un valor de

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

Resolución:

Partimos calculando un valor de $\sqrt[5]{i}$; para ello sabemos que $i^5 = i \Rightarrow$ un valor de $\sqrt[5]{i} = i$ pues $i^5=i$

Además $(1+i)^2 = 2i$; sustituyendo en la expresión

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}} = \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+i}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{2i}}} = \sqrt{2\sqrt{i-(1+i)}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{-1}} = \sqrt{2i} = 1+i$$

$\therefore$ Un valor es: $1 + i$

Problema 7

Hallar los números complejos z que satisfacen

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 1$$

Resolución:

Sea $z = a+bi$; reemplazando en la igualdad

$$\left|\frac{1+a+bi}{1-a-bi}\right| = 1$$

$\Rightarrow |1+a+bi| = |1-a-bi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1+a)^2+b^2} = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

$\Leftrightarrow (1+a)^2+b^2 = (1-a)^2+b^2$

$\Leftrightarrow 1+2a+a^2 = 1-2a+a^2$

$\Leftrightarrow 4a=0 \Leftrightarrow a=0$

Luego $z = a+bi = 0+bi = bi$

$\therefore$ Los números complejos que satisfacen son todos los imaginarios puros y el nulo.

Problema 8

Calcular los valores de $x ; y$ reales que verifican la siguiente igualdad de complejos

$$\frac{xi}{1+yi} = \frac{3x+4i}{x+3y}$$

Resolución:

Efectuando tenemos

$(xi)(x+3y) = (1+yi)(3x+4i)$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\underbrace{0}+\underbrace{(x^2+3xy)}i = \underbrace{(3x-4y)}+\underbrace{(4+3xy)}i$$

$\Rightarrow 3x-4y = 0 \ \wedge \ x^2+3xy = 4+3xy$

$\Rightarrow 3x = 4y \ \wedge \ x^2 = 4$

De $x^2=4$ se obtiene $x = \pm 2$

Reemplazando los valores de x en $(3x = 4y)$ se obtiene $y=\pm 3/2$

$\therefore x= \pm 2 \ \wedge \ y = \pm 3/2$

Problema 9

$$\text{Si } A = \frac{\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{3}-\frac{a}{3i}\right)(i+3+a)}{\left(-1+\frac{1}{9}+\frac{2}{3i}\right)+\frac{a^2}{9}}$$

donde $i = \sqrt{-1}$; calcular $A^4 + 1$

Resolución:

Se observa la unidad imaginaria en el denominador; por ello utilizamos la equivalencia

$$\frac{1}{i} = -i \ \ldots\ldots.. \ (I)$$

Entonces

$$A = \frac{\left(-i+\frac{1}{3}+\frac{a}{3}i\right)(i+3+a)}{-\frac{8}{9}-\frac{2}{3}i+\frac{a^2}{9}}$$

$$A = \frac{\frac{i}{3}(a-3-i)(a+3+i)}{\frac{1}{9}(a^2-8-6i)}$$

Efectuando en el numerador

$$A=\frac{3i\left((a^2-8)-6i\right)}{(a^2-8)-6i}=3i$$

$$\therefore\ A^4+1=(3i)^4+1=82$$

Problema 10

Hallar z tal que

a. Sea conjugado con su cuadrado

b. Sea conjugado con su inversa

Resolución:

a. De la condición del problema $z^2=\bar{z}$

Sea $z=a+bi \Rightarrow (a+bi)^2=a-bi$

$$\Rightarrow \underline{(a^2-b^2)}+\underline{2ab}i=\underline{a}-\underline{b}i$$

$$\underbrace{a^2-b^2=a}_{(I)} \quad \wedge \quad \underbrace{2ab=b}_{(II)}$$

De (II) se obtiene $b=0 \vee a=-\dfrac{1}{2}$

Para $b=0$ en (I)

$a^2=a \Leftrightarrow a(a-1)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee a=1$

Luego

$$z_1=0+0i=0 \quad \vee \quad z_2=1+0i=1$$

Para $a=-\dfrac{1}{2}$ en (I)

$$\frac{1}{4}-b^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \wedge \quad z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Conclusión: Existen cuatro números complejos que verifican la igualdad y ellos son:

$$z_1=0 \quad ; \quad z_2=1$$

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b. Condición del problema

$$\bar{z}=\frac{1}{z} \quad \text{..... (I)}$$

Si $\bar{z}=\dfrac{1}{z} \Rightarrow z.\bar{z}=1$

$\Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

Conclusión: Dicha condición se verifica $\forall z\in\mathbb{C}$ de módulo igual a la unidad.

Problema 11

Hallar el valor de w si

$$W=\frac{\mathbb{I}m\left(\dfrac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathbb{I}m\left(\dfrac{w_2}{w_1+w_2}\right)}{\mathbb{R}e\left(\dfrac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathbb{R}e\left(\dfrac{w_2}{w_1+w_2}\right)}$$

$$\forall w_1 \neq -w_2 \quad ; \quad w_1 \ , \ w_2 \in \mathbb{C}$$

Resolución:

Para resolver este problema se plantea el siguiente análisis :

Sea $z_1=a+bi \wedge z_2=c+di$

$\Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$

Luego

$$\mathbb{R}e(z_1+z_2)=a+c=\mathbb{R}e(z_1)+\mathbb{R}e(z_2)$$

$$\mathbb{I}m(z_1+z_2)=b+d=\mathbb{I}m(z_1)+\mathbb{I}m(z_2)$$

En el problema

$$\underbrace{\frac{w_1+w_2}{w_1+w_2}}=\frac{w_1}{w_1+w_2}+\frac{w_2}{w_1+w_2}$$

$$1+0i=\frac{w_1}{w_1+w_2}+\frac{w_2}{w_1+w_2}$$

Entonces

$$\mathbb{R}e\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathbb{R}e\left(\frac{w_2}{w_1+w_2}\right)=1\ ;$$

$$\mathbb{I}m\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)+\mathbb{I}m\left(\frac{w_1}{w_1+w_2}\right)=0$$

$$\therefore \quad w=0$$

Problema 12

Simplificar

$$z = \left[\left[\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{i}\right]^{2}\right]^{i^3}$$

Resolución:

Efectuando la potencia de potencia tenemos

$$z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2i^4} = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2}$$

$$\Rightarrow \quad z = \left[\frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right]^2 = \left(\frac{5+5i}{5}\right)^2 = (1+i)^2 = 2i$$

$$\therefore \quad z = 2i$$

Problema 13

Calcular $\mathbb{R}e\left(e^{iz^n}\right)$

si $z = \text{Cos}\phi + i\,\text{Sen}\phi \ \wedge \ n \in \mathbb{Z}$

Resolución:

Por la fórmula de Moivre

$$z^n = \text{Cos}n\phi + i\,\text{Sen}n\phi$$

Luego

$$e^{iz^n} = e^{i(\text{Cos}n\phi + i\text{Sen}n\phi)} = e^{i\text{Cos}n\phi \ \text{Sen}n\phi}$$

$$= e^{\text{Sen}n\phi} \,.\, e^{i\text{Cos}n\phi}$$

$$= e^{\text{Sen}n\phi}\left[\text{Cos}(\text{Cos}n\phi) + i\text{Sen}(\text{Cos}n\phi)\right]$$

$$\therefore \ \mathbb{R}e\left(e^{iz^n}\right) = e^{-\text{Sen}n\phi}\left[\text{Cos}\left(\text{Cos}n\phi\right)\right]$$

Problema 14

Sea $z = i$; hallar : a) $\left(z^{1/2}\right)^3$

b) $\left(z^3\right)^{1/2}$

Resolución:

a) Al complejo z lo representamos en forma exponencial

$$|z| = 1 \ \wedge \ \text{Arg}(z) = \pi/2$$

$$\Rightarrow \quad z = i = e^{i\pi/2}$$

Luego $z^{1/2} = e^{i\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\right)}$

Donde $K = 0 \ ; \ 1$

Para $K = 0$: $z_1 = e^{i\pi/4}$

Para $K = 1$: $z_2 = e^{i5\pi/4}$

Luego $z_1^3 = e^{i3\pi/4}$; $z_2^3 = e^{i15\pi/4} = e^{i7\pi/4}$

b) Para el lector.

Problema 15

Determine aquel número "**n**" entero positivo múltiplo de cuatro que verifica la igualdad :

$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots\ldots + ni^n = 64 - 64i$, tal que $i = (0\,;1)$

Resolución:

De la condición

$$\underbrace{i + 2i^3 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots\ldots + ni^n}_{m} = 64(1-i)$$

$$\Rightarrow \ m = i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + ni^n \ \ldots\ldots\ldots \ (I)$$

Multiplicando por i

$$im = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + 4i^5 + \ldots + ni^{n+1} \ \ldots\ldots \ (II)$$

Luego (I)-(II)

$$(1-i)m = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots\ldots + i^n}_{0} - ni^{n+1}$$

Como $n = \overset{\circ}{4}$

Tenemos $(1-i)m = -ni \ \Rightarrow \ m = \dfrac{-ni}{1-i}$

Reemplazando el valor de m en la condición

$$\frac{-ni}{1-i} = 64(1-i) \ \Rightarrow \ -ni = 64(1-i)^2$$

$$\Rightarrow \ -ni = 64(-2i) \Rightarrow -ni = -128i$$

$$\therefore \ n = 128$$

Problema 16

Los números complejos z y w tienen argumentos que varían de 0 a 2π radianes y además verifican las relaciones

$|w| = |z|$; $z + \bar{z} = \sqrt{2}$; $iz = \bar{z}$

$\arg(z) - \arg(w) = 5\pi/3$

Calcular $E = \mathbb{I}m(z) + \mathbb{R}e(w)$

Resolución:

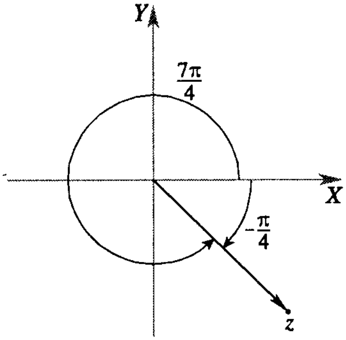
Sea $z=|z|e^{i\theta}$ $\Rightarrow$ $\bar{z}=|z|e^{\ i\theta}$;

Reemplazando en $iz=\bar{z}$ se tiene

$$i|z|e^{i\theta} = |z|e^{\ i\theta} \ ; \ |z|\neq 0$$

$\Rightarrow e^{\ 2i\theta}=e^{i\pi/2} \Leftrightarrow -2\theta=\pi/2$

$\Rightarrow \theta=-\pi/4$



Pero $\qquad \theta\in[0\,;2\pi>$

$\qquad \Rightarrow \theta = 7\pi/4$

$\therefore$ Arg(z) = $7\pi/4$

Luego calculamos el módulo de z a partir de

$$z+\bar{z}=\sqrt{2}$$

$|z|(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\sqrt{2}$

$|z|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta+\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta))=\sqrt{2}$

$|z|2\operatorname{Cos}\theta=\sqrt{2}$; reemplaza el valor de θ

$2|z|\operatorname{Cos}(7\pi/4)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2|z|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2} \Rightarrow |z|=1$

Luego $\quad z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Entonces se concluye que $|w|=1$, ya que $|z|=|w|$

Cálculo de arg de w:

Dato $\quad \arg(z)-\arg(w)=5\pi/3$

Reemplazando el valor de arg(z)

$$\arg(w)=\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{12}$$

$\Rightarrow w=|w|e^{i\frac{\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\Rightarrow w=\operatorname{Cos}\frac{\pi}{12}+i\operatorname{Sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i$

$$\therefore\ E=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Problema 17

Hallar el mayor número de dos cifras que verifica

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2} \quad ; \quad i=\sqrt{-1}$$

Resolución:

Expresándolo en forma polar a las bases

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\operatorname{Cos}\frac{\pi}{6}+i\operatorname{Sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}=\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3}+i\operatorname{Sen}\frac{\pi}{3}$$

$$=\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) \quad \forall\, k\in Z$$

Entonces

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^n=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$\operatorname{Cis}\left(n\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{Cis}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$$

$$\Rightarrow n\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow n=2+12k$$

$$\therefore\ n_{mayor}=98$$

Problema 18

Sabiendo que z_1 y z_2 representan un número real y un imaginario puro respectivamente. donde

$$z_1=\frac{a+b+2i}{a-b-3i}=k \quad ; \quad z_2=\frac{a+(b+8)i}{a-bi}=mi$$

Calcular a-b

Resolución:

$$1)\ \ (a+b)+2i=(a-b)k-3ki$$

Efectuando tenemos

$$2)\ \ a+(b+8)i=bm+ami$$

De las igualdades se tiene

$$\text{De } 1\begin{cases} a+b=(a-b)k \ \ldots\ldots\ldots \ (I) \\ 3k=-2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (II) \end{cases}$$

$$\text{De } 2\begin{cases} a=bm \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (III) \\ (b+8)=am \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (IV) \end{cases}$$

De (II) $k=-2/3$

En (I) $(a+b)=-\dfrac{2}{3}(a-b)$

$$\Leftrightarrow b=-5a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (V)$$

De (II) y (IV)

$$\frac{a}{b+8}=\frac{b}{a} \ ; \ m\neq 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (VI)$$

$$\frac{a}{-5a+8}=\frac{-5a}{a} \Leftrightarrow a\neq 0 \ \wedge \ a=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \ b=-\frac{25}{3}$$

$$\therefore \ a-b=\frac{30}{3}=10$$

Si $a=0 \Rightarrow z_2$ no resulta ser imaginario puro

$$\therefore a\neq 0$$

Problema 19

Hallar el argumento principal del complejo z; donde

$$z=\frac{\left[1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{\vdots}}}}\right]}{\left[1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{1+i+\cfrac{1}{1-i+\cfrac{1}{\vdots}}}}\right]}$$

Resolución:

Hacemos $z=z_1\div z_2$

$$\Rightarrow \quad z_1=1-i+\frac{1}{z_2} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (I)$$

$$z_2=1+i+\frac{1}{z_1} \ \ldots\ldots\ldots \ (II)$$

$$\text{En (I)} \ \ z_1-\frac{1}{z_2}=1-i \Leftrightarrow \frac{z_1z_2-1}{z_2}=1-i. \ \ldots\ldots \ (III)$$

$$\text{En (II)} \ \ z_2-\frac{1}{z_1}=1+i \Leftrightarrow \frac{z_1z_2-1}{z_1}=1+i \ \ \ldots\ldots \ (IV)$$

$$(III)\div(IV) \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{1+i}=-i \quad \Rightarrow \quad z=\frac{z_1}{z_2}=-i$$

$$\therefore \ \arg(z)=\frac{3\pi}{2}$$

Problema 20

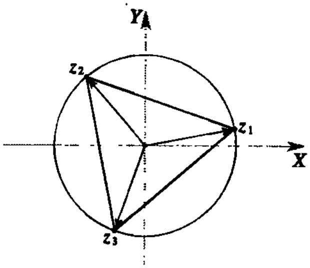
Si z_1 ; z_2 ; z_3 son tales que sus afijos forman un triángulo equilátero y además son las raíces cúbicas de un número complejo.

Calcular

$$E=\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$$

Resolución:

Como los afijos de z_1 ; z_2 ; z_3 al ser unidos forman un triángulo equilátero y tienen el mismo módulo, entonces se encuentran en el borde de una circunferencia de radio igual al módulo, como se indica en la figura.



De la figura se deduce que

$z_1+z_2+z_3 = 0$ (ver la radicación de complejos)

$\Rightarrow\ z_1^2+z_2^2+z_3^2 = -2\left(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3\right)$

$$\therefore\ E = -\frac{1}{2}$$

Problema 21

Hallar el área del polígono regular formado al unir los afijos de las raíces cuartas del complejo

$$z = \sqrt{72-2\sqrt{3}} + \sqrt{72+2\sqrt{3}}\,i \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

Resolución:

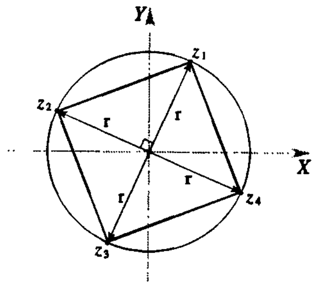
Sea z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4 las raíces cuartas de z; entonces

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt[4]{|z|} \quad ..... \ (\alpha)$$

Pero $|z| = \sqrt{\sqrt{72-2\sqrt{3}}^{\,2} + \sqrt{72+2\sqrt{3}}^{\,2}} = 12$

$$\Rightarrow\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt[4]{12}$$

Además los afijos de z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4 se encuentran en la circunferencia de centro $C=(0;0)$ $\wedge$ $r=\sqrt[4]{12}$



De la fig. el diámetro del cuadrado es $2r = 2\sqrt[4]{12}$

Por geometría el área del cuadrado

$$S_T = \left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt[4]{12}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{3}\mu^2$$

Problema 22

Si ϕ es una raíz séptima compleja de la unidad real; calcular el valor de M.

$M = \phi^6+\phi^{14}+\phi^{22}+\phi^{30}+.....48$ sumandos

Resolución:

Como ϕ es la raíz séptima de la unidad entonces se tiene que $\phi^7 = 1$; $\phi \neq 1$

$\Rightarrow\ \phi^7-1 = 0$

$\Leftrightarrow\ (\phi-1)(\phi^6+\phi^5+\phi^4+\phi^3+\phi^2+\phi+1)=0$

Pero $\phi \neq 1$

$$\Rightarrow\ \phi^6+\phi^5+\phi^4+\phi^3+\phi^2+\phi+1=0 \quad ..... \ ....(I)$$

Entonces

$$M = \underbrace{\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0}$$

$$+\underbrace{\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0}$$

$$\underbrace{+\phi^6+1+\phi+\phi^2+\phi^3+\phi^4+\phi^5}_{0} - \phi^5 = -\phi^5$$

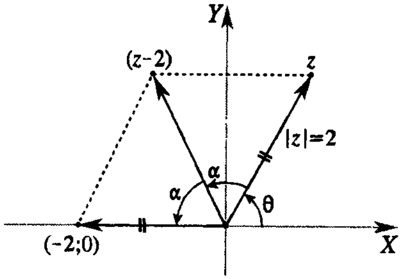
$$\therefore\ M = -\phi^5$$

Problema 23

Dado el complejo z de módulo 2 y argumento $\theta \in \langle 0;\pi \rangle$. Hallar el argumento principal de $z-2$.

Resolución:

Se trata de un problema geométrico; por ello lo ubicamos en el plano gausseano



Se observa $\operatorname{Arg}(z-2) = \theta+\alpha$

Además $2\alpha+\theta = \pi \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi-\theta}{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(z-2) = \theta+\frac{\pi-\theta}{2}=\frac{\theta+\pi}{2}$$

$$\therefore \operatorname{Arg}(z-2)=\frac{\theta+\pi}{2}$$

Problema 24

Siendo

$x = a+b$

$y = aw + bw^2$

$z = aw^2+bw$; $ab\neq 0$

Calcular $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{ab}$, si $w^3=1$

Resolución:

De las condiciones

$x^2 = a^2+b^2+2ab$

$y^2 = a^2w^2+b^2w^4+2abw^3 = a^2w^2+b^2w+2ab$

$z^2 = a^2w^4+b^2w^2+2abw^3 = a^2w+b^2w^2+2ab$

Entonces

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\underbrace{(1+w+w^2)}_{0} + b^2\underbrace{(1+w+w^2)}_{0} + 6ab$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 6ab$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{ab}=\frac{6ab}{ab}=6$$

Problema 25

Si el complejo z se define como:

$$z=\frac{\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha+i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}}-i\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha-i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}}}{\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha+i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}}+i\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha-i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}}}$$

tal que $\alpha \in \mathrm{IC}$; hallar $\operatorname{Re}(z)$

Resolución:

Hacemos

$a=\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha+i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}} \Rightarrow a^2 = \operatorname{Sen}\alpha + i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}$

$b=\sqrt{\operatorname{Sen}\alpha-i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}} \Rightarrow b^2 = \operatorname{Sen}\alpha - i\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}$

Además $\operatorname{Cos}\alpha>0$; $\operatorname{Sen}\alpha>0$; luego

Reemplazando en z tenemos

$$z=\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}$$

Pero $a^2-b^2 = 2\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}\,i$; $a^2+b^2 = 2\operatorname{Sen}\alpha$

$$ab = \sqrt{\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}\alpha}$$

Regresando a las variables originales

$$z=\frac{\left[2\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}-2\sqrt{\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}\alpha}\right]i}{2\operatorname{Sen}\alpha}$$

$$z=\frac{\left[\sqrt{\operatorname{Cos}\alpha}-\sqrt{\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}\alpha}\right]i}{\operatorname{Sen}\alpha}$$

El complejo z es imaginario puro

$$\therefore \operatorname{Re}(z) = 0$$

Problema 26

Siendo z un complejo cuyo argumento es θ que verifica

$\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right)^2+\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2=1$ donde $\bar{z}$ es el conjugado de z.

Calcular $H = \operatorname{Tg}\theta + \operatorname{Ctg}\theta$

Además $\theta \in \left\langle \dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$

Resolución:

Sea $z=|z|e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z}=|z|e^{i\theta}$

Reemplazando en la condición

$$\left[\frac{|z|e^{i\theta}}{|z|e^{-i\theta}}\right]^2+\left[\frac{|z|e^{-i\theta}}{|z|e^{i\theta}}\right]^2=1$$

$$\Rightarrow e^{i4\theta}+e^{i4\theta}=1$$

Expresando en forma polar

$\text{Cos}4\theta+i\text{Sen}4\theta+\text{Cos}4\theta-i\text{Sen}4\theta=1$

$\Rightarrow 2\text{Cos}4\theta=1$

$\text{Cos}4\theta=½$

$4\theta=60° \vee 4\theta=300°$

$\theta=15° \vee \theta=75°$

Pero $\theta \in \left\langle\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\rangle$

Entonces nos quedamos con $\theta=75°$

Luego $H=\text{Ctg}\theta+\text{Tg}\theta=\frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}+\frac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}=4$

$\therefore\ H=4$

Problema 27

Dado

$z=-1+\sqrt{3}i$; hallar "w" tal que $|z+w|=|z|=|w|$

Resolución:

$|z|=|-1+\sqrt{3}i|=2$

Luego en la condición

$|z+w|^2=4$; $|z|=|w|=2$

$(z+w)(\overline{z+w})=4$

$(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=4$

Efectuando

$z.\overline{z}+z.\overline{w}+w.\overline{z}+w.\overline{w}=4$

$|z|^2+z.\overline{w}+w.\overline{z}+|w|^2=4$

$\Rightarrow\ z.\overline{w}+w.\overline{z}+4=0$

Multiplicando por wz

$z^2|w|^2+w^2|z|^2+4wz=0$;

pero $|z|^2=|w|^2=4$

$\Rightarrow w^2+zw+z^2=0$

$$w=\frac{-z\pm\sqrt{3}iz}{2}=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)z$$

Reemplazando el valor de z

$$w=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)$$

$$w(+)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)=-1-\sqrt{3}i$$

$$w(-)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+\sqrt{3}i)=2$$

Problema 28

Hallar la forma cartesiana del siguiente complejo

$$W=\frac{(\text{Cos}12°+i\text{Sen}12°)^4\left[\sqrt{2}(\text{Cos}8°+i\text{Sen}8°)\right]^{11}}{(\text{Cos}6°+i\text{Sen}6°)^{11}(\text{Sen}80°+i\text{Cos}80°)}$$

Resolución:

* $(\text{Cos}12°+i\text{Sen}12°)^4=\text{Cos}48°+i\text{Sen}48°$
* $[\sqrt{2}(\text{Cos}8°+i\text{Sen}8°)]^{11}=\sqrt{2}^{11}(\text{Cos}88°+i\text{Sen}88°)$
* $(\text{Cos}6°+i\text{Sen}6°)^{11}=\text{Cos}66°+i\text{Sen}66°$
* $\text{Sen}80°+i\text{Cos}80°=\text{Cos}10°+i\text{Sen}10°$

Luego tenemos

$$w=\frac{\text{Cis}48°.\sqrt{2}^{11}\text{Cis}88°}{\text{Cis}66°.\text{Cis}10°}=\frac{\sqrt{2}^{11}.\text{Cis}(136°)}{\text{Cis}(76°)}$$

$$=32\sqrt{2}.\text{Cis}60°$$

$$=32\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)$$

$$\therefore\ W=16\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i)$$

Problema 29

Simplificar y representar fasorialmente

$$H=\left(\frac{1+\text{Sen}\theta+i\text{Cos}\theta}{1+\text{Sen}\theta-i\text{Cos}\theta}\right)^n\ ;\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

Además $i=(0;1)$

Resolución:
Recordando la división de complejos; multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador

$$H=\left[\left(\frac{1+Sen\theta+iCos\theta}{1+Sen\theta-iCos\theta}\right)\left(\frac{1+Sen\theta+iCos\theta}{1+Sen\theta+iCos\theta}\right)\right]^n$$

$$H=\left[\frac{(1+Sen\theta)^2+2i(1+Sen\theta)Cos\theta+i^2Cos^2\theta}{(1+Sen\theta)^2-i^2Cos^2\theta}\right]^n$$

$$H=\left[\frac{2Sen\theta(1+Sen\theta)+2i(1+Sen\theta)Cos\theta}{2(1+Sen\theta)}\right]^n$$

$\forall\ Sen\theta\neq -1$

$= (Sen\theta + iCos\theta)^n$

$$=\left(Cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+iSen\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^n$$

$= Cosn(\pi/2-\theta) + iSenn(\pi/2-\theta)$

$$=Cis\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

$$\therefore H = Cis\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

Problema 30

Hallar el valor más simple de

$$A=\underbrace{(1+w)^2(1+w^2)^2(1+w^4)^4(1+w^5)^5(1+w^6)^6(1+w^8)^8\ldots}_{2n\ \text{paréntesis}}$$

Además $w^3 = 1$

Resolución:

$$\text{Como}\quad w^3=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+w+w^2=0 \\ w^{3k+r}=w^r \\ 1+w=-w^2 \\ 1+w^2=-w \end{cases}$$

Reemplazando obtenemos

$$A=\underbrace{(1+w^2)^2(-w)^3(1+w)^4(1+w^2)^5(1+w)^6(1+w^2)^7\ldots}_{2n\ \text{paréntesis}}$$

$$=(-w^2)^2(-w)^3(-w^2)^4(-w)^5(-w^2)^6(-w)^7\ldots$$

$$=w^4(-w^3)(w^8)(-w^5)(w^{12})(-w^7)\ldots\ldots$$

Agrupando convenientemente

$$=\underline{w(-1)}\ \underline{(w^2)(-w^2)}\ \underline{(1)(-w)}\ \ldots$$

Se tiene

$$\underbrace{(-w)(-w)(-w)\ldots\ldots}_{(n\ \text{veces})}=(-w)^n$$

$$\therefore\ A=(-w)^n$$

Problema 31

Si $w\neq\pm1$; es una raíz n-ésima de la unidad, calcular

$$S = w+w^3+w^5+\ldots\ldots+w^{2n-1}$$

Resolución:

Dato $S = w+w^3+w^5+\ldots\ldots+w^{2n-1}$

Multiplicando por w obtenemos

$$S = w^2+w^4+w^6+\ldots\ldots w^{2n}$$

Entonces

$$(1+w)S = w+w^2+w^3+w^4+\ldots\ldots w^{2n}$$

$$(1+w)S = w(1+w+w^2+w^3+\ldots\ldots+w^{2n-1})$$

$$(1+w)S = w\left(\frac{1-w^{2n}}{1-w}\right)$$

Pero $w^n=1 \Rightarrow w^{2n}=1$

Reemplazando se obtiene $S = 0$

Problema 32

Expresar cada ecuación en términos de las coordenadas conjugadas.

a) $3x+2y = 5$

b) $x^2+y^2 = 16$

Resolución:

a) Sea $z = x+yi \Rightarrow \bar{z} = x-yi$

De donde $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $3x+2y=5$

$$3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=5$$

Efectuando se tiene

$$(3i+2)z+(3i-2)\bar{z}=10i$$

b) De (a) $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Reemplazando en $x^2+y^2=16$

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2=16$$

Simplificando se tiene $z\,.\,\bar{z}=16$

Otra forma: de la condición

$x^2+y^2=16$ .... (*)

Factorizando el 1° miembro

$$(x+yi)(x-yi)=16$$

Como $z=x+yi \wedge \bar{z}=x-yi$

Tendríamos $z\,.\,\bar{z}=16$

Problema 33

Dado una familia de números complejos que cumplen

$$4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15\ ;$$

seleccionar aquel que tenga mayor argumento principal e indicar su módulo. Tal que z se encuentra en el primer cuadrante.

Resolución:

$$4(z-3)(\bar{z}-3)=|z|^2+15$$

$$\Rightarrow 4(z-3)\overline{(z-3)}=|z|^2+15$$

$$\Rightarrow 4|z-3|^2=|z|^2+15$$

Luego haciendo $z=x+yi$

$$4|x+yi-3|^2=|x+yi|^2+15$$

$$\Rightarrow 4[(x-3)^2+y^2]=x^2+y^2+15$$

Efectuando operaciones

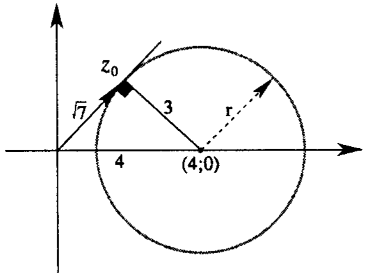
$$x^2+y^2-8x+7=0$$

completando cuadrados

$$x^2-8x+16+y^2=9$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+y^2=3^2$$

Se observa que tenemos una circunferencia de centro $C_o=(4;0)$ y radio $r=3$



De la figura se observa que z_0 es el complejo que tiene mayor argumento en el primer cuadrante

$$\therefore\ |z|=\sqrt{7}$$

Problema 34

Representar gráficamente el conjunto de valores de z tal que

$$\left|\frac{z-2}{z+2}\right|\leq 3$$

Resolución

Sea $z=x+yi$

Reemplazando en el dato

$$\left|\frac{x-2+yi}{x+2+yi}\right|\leq 3$$

$$\Rightarrow |(x-2)+yi|\leq 3|(x+2)+yi|$$

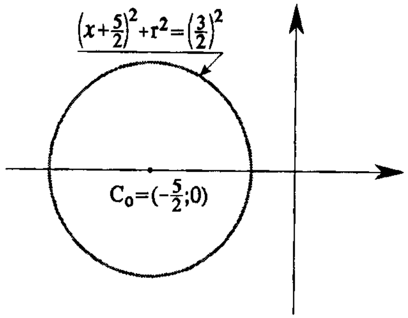
$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}\leq 3\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+y^2\leq 9\,[(x+2)^2+y^2]$$

Efectuando operaciones y completando cuadrados

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+y^2\geq\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Graficando se tiene



Problema 35

Dados $r \in \mathbb{R}$; $a_j \in \mathbb{R}$

tal que $j = 0; 1; 2; \ldots\ldots ; (n-1)$ $\wedge$

$$a_0r^ne^{in\theta}+ a_1r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}+\ldots+a_{n-1}re^{i\theta} +a_n=0$$

Calcular

$$E = a_0 r^n e^{-in\theta}+a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta}+\ldots+a_{n-1} re^{-i\theta}+ a_n$$

Resolución

Tenemos

$$a_0r^ne^{in\theta}+a_1r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}+\ldots+a_{n-1}re^{i\theta}+a_n=0$$

Tomando conjugado miembro a miembro:

$$\overline{a_0r^ne^{in\theta}}+\overline{a_1r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}}+\ldots+\overline{a_{n-1}r^{i\theta}}+\overline{a_n}=\overline{0}$$

$$a_0 r^n e^{-in\theta} + a_1 r^{n-1} e^{-i(n-1)\theta} + \ldots\ldots$$
$$+ a_{n-1} r e^{-i\theta}+a_n = 0$$

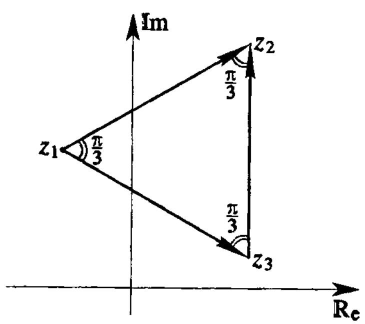
$$\therefore \quad E = 0$$

Problema 36

Si $z_1 ; z_2 ; z_3 \in \mathbb{C}$; representan los vértices de un triángulo equilátero. Probar que

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Resolución



De la figura se observa que

$$z_2-z_1 = e^{i\pi/3}(z_3-z_1)$$
$$z_1-z_3 = e^{i\pi/3}(z_2-z_3)$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}$$

Efectuando

$$z_1^2+ z_2^2+ z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Problema 37

Simplificar; sabiendo $m = \overset{\circ}{8}$

$$J=\frac{\left(\frac{m}{2^{m-1}}\right)i}{\left(i^{-1}\text{sen}\frac{\pi}{m}\right)\left(i^{-2}\text{sen}\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\left(i^{-(m-1)}.\text{sen}2(m-1)\frac{\pi}{m}\right)}$$

Resolución

La expresión es equivalente a

$$\frac{i.i^2.i^3\ldots.i^{m-1}.\left(\frac{m}{2^{m-1}}\right)i}{\left(\text{Sen}\frac{\pi}{m}.\text{Sen}\frac{2\pi}{m}.\text{Sen}\frac{3\pi}{m}\ldots.\text{Sen}2(m-1)\frac{\pi}{m}\right)}$$

Luego simplificando por partes

1) En el numerador; llamándole $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = i^{(m-1)m/2}.i.\frac{m}{2^{m-1}}$$

Como **m** es múltiplo de 8; entonces $\frac{(m-1)m}{2}$ es múltiplo de 4.

$$\Rightarrow \mathbb{N} = i^{\overset{\circ}{4}}.i.\frac{m}{2^{m-1}}=\frac{m}{2^{m-1}}i$$

2) En el denominador; llamándole D

$$D = \text{Sen}\frac{\pi}{m}.\text{Sen}2\frac{\pi}{m}\ldots\text{Sen}2(m-1)\frac{\pi}{m}$$

Para efecto partimos de la ecuación

$z^m - 1 = 0$; cuyas raíces son

$1\ ;\ e^{i\frac{2\pi}{m}}\ ;e^{i\frac{4\pi}{m}}\ ;\ldots\ e^{i2(m-1)\pi/m}$

Pero

$z^m - 1 = (z-1)(z^{m-1}+z^{m-2}+\ldots\ldots+z+1)$

$\Rightarrow z^{m-1}+z^{m-2}+\ldots\ldots+z+1 = (z-e^{i2\pi/m})$

$(z-e^{i4\pi/m})(z-e^{i6\pi/m})\ldots\ (z-e^{i2(m-1)\pi/m})$

Si $z=1$; se tiene

$m=(1-e^{i2\pi/m})\ (1-e^{i4\pi/m})\ldots(1-e^{i2(m-1)\pi/m})$

tomando conjugado

$\overline{m}=(1-e^{-i2\pi/m})(1-e^{-i4\pi/m})\ldots(1-e^{-i2(m-1)\pi/m})$

$m=(1-e^{-i2\pi/m})(1-e^{-i4\pi/m})\ldots(1-e^{-i2(m-1)\pi/m})$

Multiplicando miembro a miembro

$m^2=2(1-\text{Cos}\ 2\pi/m)\ .\ 2(1-\text{Cos}4\pi/m)$
$\ldots\ 2(1-\text{Cos}\ 2(m-1)\pi/m)$

$\Rightarrow m^2=2^{m-1}(1-\text{Cos}\ 2\pi/m)\ .(1-\text{Cos}4\pi/m)$
$\ldots\ (1-\text{Cos}\ 2(m-1)\pi/m)$

$\Rightarrow m^2= 2^{m-1}.2.\text{Sen}^2\pi/m\ .\ 2\ \text{Sen}^2 2\pi/m$
$.\ 2\cdot\text{Sen}^2 3\pi/m\ldots 2\text{Sen}^2(m-1)\pi/m$

$\Rightarrow m^2= 2^{m-1}.2^{m-1}.\ \text{Sen}^2\pi/m\ .\ \text{Sen}^2 2\pi/m.$
$\text{Sen}^2 3\pi/m\ldots\text{Sen}^2(m-1)\pi/m$

Extrayendo raíz cuadrada y ordenando

$\text{Sen}\ \pi/m\ .\ \text{Sen}2\pi/m\ .\ \text{Sen}3\pi/m\ldots$

$$\text{Sen}(m-1)\pi/m=\frac{m}{2^{m-1}}$$

$$\Rightarrow D=\frac{m}{2^{m-1}}$$

Luego reemplazando

$$J=\frac{\frac{m}{2^{m-1}}i}{\frac{m}{2^{m-1}}}=i \qquad \therefore J=i$$

Problema 38

Dados

$$r_3=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\text{Cos}(\theta_1-\theta_2)}$$

tal que $Z_n = r_ne^{i\theta n}$

$$\theta_3=\text{Arctg}\left(\frac{r_1\text{Sen}\theta_1+r_2\text{Sen}\theta_2}{r_1\text{Cos}\theta_1+r_2\text{Cos}\theta_2}\right)$$

Calcular $\dfrac{r_3e^{i\theta_3}}{r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}}$

Resolución

$z_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\text{Cos}\theta_1+i\text{Sen}\ \theta_1)$

$z_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\text{Cos}\theta_2+i\text{Sen}\ \theta_2)$

$\Rightarrow z_1+z_2 = (r_1\text{Cos}\theta_1+r_2\text{Cos}\theta_2)+$
$i(r_1\text{Sen}\theta_1+r_2\text{Sen}\theta_2)$

Luego

I) $|z_1+z_2|=\sqrt{(r_1\text{Cos}\theta_1+r_2\text{Cos}\theta_2)^2+(r_1\text{Sen}\theta_1+r_2\text{Sen}\theta_2)^2}$

$=\sqrt{r_1^2\text{Cos}^2\theta_1+2r_1r_2\text{Cos}\theta_1\text{Cos}\theta_2+r_2^2\text{Cos}^2\theta_2+r_1^2\text{Sen}^2\theta_1+2r_1r_2\text{Sen}\theta_1\text{Sen}\theta_2+r_2^2\text{Sen}^2\theta_2}$

Simplificando

$=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2(\text{Cos}\theta_1\text{Cos}\theta_2+\text{Sen}\theta_1\text{Sen}\theta_2)}$

$=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\text{Cos}(\theta_1-\theta_2)}$ .... (α)

Entonces $|z_1+z_2|=r_3$

II) $\arg(z_1+z_2)=\text{arctg}\left(\dfrac{r_1\text{Sen}\theta_1+r_2\text{Sen}\theta_2}{r_1\text{Cos}\theta_1+r_2\text{Cos}\theta_2}\right)$

$\Rightarrow \arg(z_1+z_2)=\theta_3$

De (I) y (II) tenemos $r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}=r_3e^{i\theta_3}$

$$\frac{r_3e^{i\theta_3}}{r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}}=1$$

Problemas Propuestos

1. Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones indicadas.

I. $(4+6i)+(3-2i)$
II. $(5-3i)-(-3+i)$
III. $(-2+2i)-(-2-i)$
IV. $(4-3i)+(-6-9i)$
Donde $i = \sqrt{-1}$

2. Escribir los siguientes números complejos en forma polar.

I. $4 + 4i$
II. $3 - \sqrt[3]{3}i$
III. $-12 - 12i$
IV. $\sqrt{3}i$
V. $12 - 5i$
VI. $-4i$

Donde: $i = (0;1)$

3. Escribir los números complejos siguientes en la forma cartesiana.

I. $\sqrt{2}(\text{Cos}45° + i\text{Sen}45°)$
II. $12(\text{Cos}135° - i\text{Sen}135°)$
III. $4(\text{Cos}180° + i\text{Sen}180°)$
IV. $5\sqrt{3}\,\underline{|210°}$
V. $18\text{Cis}(75°)$

4. Efectuar las operaciones indicadas, expresando los resultados en forma binómica.

I. $[16(\text{Cos}15°+i\text{Sen}15°)][2(\text{Cos}75° + i\text{Sen}75°)]$
II. $4\text{Cis}13°\text{Cis}(27)2\text{Cis}20°$
III. $5\underline{|16°} \,.\, 2\underline{|19°} \,.\, \underline{|25°}$
IV. $\dfrac{12(\text{Cos}16°+i\text{Sen}16°)}{3(\text{Cos}44°+i\text{Sen}44°)[2(\text{Cos}62°+i\text{Sen}62°)]}$

5. Hallar algebraica y gráficamente el producto y cociente de:

I. $(-2+2\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}-2i)$
II. $\dfrac{4-4i}{\sqrt{3}-i}$

6. Hallar las potencias indicadas de los números complejos siguientes; expresando los resultados en forma cartesiana.

I. $2(\text{Cos}15°+i\text{Sen}15°)^6$
II. $[4(\text{Cos}20°+i\text{Sen}20°)]^3$
III. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}i\right)^{10}$

7. Hallar todas las raíces indicadas y representar gráficamente.

I. $(\text{Cos}135°+i\text{Sen}135°)^{1/2}$
II. $[32(\text{Cos}200°+i\text{Sen}200°)]^{1/5}$
III. $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$
IV. $\sqrt[5]{2-2\sqrt{3}i}$

8. Calcular :

I. $(1+2i)^6$
II. $(2+i)^7+(2-i)^7$
III. $(1+2i)^5-(1-2i)^5$

9. Dada la igualdad
$(1+2i)x+(3-5i)y = 1-3i$, además $\{x;y\} \subset \mathbb{R}$
Hallar "x" e "y"

A) $x=1$; $y=4$
B) $x=-1$; $y=4$
C) $x=-\dfrac{4}{11}$; $y=\dfrac{5}{11}$
D) $x=\dfrac{11}{4}$; $y=\dfrac{11}{5}$
E) $x=\dfrac{4}{11}$; $y=\dfrac{5}{11}$

10. Si $i = (0;1)$

Hallar el valor de

$$E = \frac{x^4+4}{(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) -1 E) 3

11. Dados $z_1 = (a;b)$; $z_2 = c+di$ donde $\{a;b;c;d\} \subset \mathbb{R}$; además $i = \sqrt{-1}$. Averiguar ¿cuáles deben ser las condiciones para que el cociente $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ sea imaginario puro ?

A) $bc = ad$ B) $ac+bd = 0$
C) $a+b = c+d$
D) $ab = cd$ E) $bd = ac$

12. Calcular el valor de $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$;

donde "n" es un entero positivo.

A) -2 B) $2i^n$ C) $-2i^{n+1}$
D) -2i E) $2i^{n+1}$

13. Efectuando

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{30}}$$

se obtiene:

A) 1 B) -1 C) i
D) -i E) $\frac{1}{2}$

14. Sea $W = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Hallar $E = \frac{(a+b)(a+bw)(a+bw^2)}{(aw^2+bw)(bw^2+aw)}$

A) $\frac{a}{b}$ B) a-b C) $\frac{a+b}{a-b}$
D) a^3-b3 E) a+b

15. Si $\sqrt{a+bi} = \pm(\alpha+\beta i)$

¿A qué es igual $\sqrt{-a-bi}$?

A) $\alpha-\beta i$ B) $\alpha+\beta i$ C) $-\beta+\alpha i$
D) $\beta-\alpha i$ E) $\pm(-\beta+\alpha i)$

16. Si $x+yi = (s+ti)^n$; $n \in \mathbb{Z} \wedge \{x;y;s;t\} \subset \mathbb{R}$

Calcular el valor de $\left(\frac{(s^2+t^2)^n}{x^2+y^2}\right)$

A) 1 B) 0 C) n
D) 3 E) 2

17. Si z y z' son dos números complejos; $u = \sqrt{z.z'}$. Hallar:

$$\frac{\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|}{|z|+|z'|}$$

A) 4 B) 1 C) 16
D) 2 E) 8

18. Si como resultado de efectuar una cantidad finita de operaciones racionales (o sea sumar, restar, multiplicar y dividir) con los números x_1 ; x_2 ; x_3 ; ..... ; x_n resulta el número u.

Calcular el valor de efectuar las mismas operaciones con los números conjugados

$\overline{x_1}$; $\overline{x_2}$; $\overline{x_3}$; ..... ; $\overline{x_n}$

Observación: u^* es opuesto de u

A) $\overline{u}$ B) u^* C) u

D) $u.\overline{u}$ E) $\overline{u}.u^*$

19. Si $\phi(a+1)=a\phi(a)$; $\phi(1)=1$

determinar

$\zeta = i^{\phi(1)} + i^{\phi(2)} + i^{\phi(3)} + ... + i^{\phi(n+12)}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$

A) n+7+i B) n+7-2i C) n+5-2i

D) n+6+2i E) n+8-2i

20. Evaluar

$\phi = i + 2i^2 + 5i^5 + 8i^8 + ... + (3n-1)i^{3n-1}$

siendo $i=(0;1) \wedge n=\overset{\circ}{4}$

A) $\frac{1}{2}(n+1)i$

B) $\frac{1}{2}(n-1)i$

C) $\frac{1}{2}[(2-3n)+3ni]$

D) $\frac{1}{2}[3n+(2-3n)i]$

E) $\frac{1}{2}[(-3n+(3n-2)i]$

21. Sabiendo que

$$\sigma = \mathrm{Cos}12° - i\mathrm{Sen}12°$$

Hallar el valor de $M = \sigma^{15} + \dfrac{1}{\sigma^{15}}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1

D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

22. Calcular un valor de

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i}}}}}}$$

A) -i B) i C) 1-i

D) 1 E) 1+i

23. Si $|z+w| = |z-w|$

$\forall z$; $w \in C$; hallar $\mathbb{R}e(z\overline{w})$

A) 1 B) 0 C) -1

D) 2 E) -2

24. Si $w \neq 1$ es una n-raíz de la unidad, calcular la suma

$$S = 1 + 4w + 9w^2 + ... + n^2w^{n-1}$$

A) $\dfrac{-n}{(w-1)^2}$

B) $\dfrac{n^2(1-w)}{2n(1+w)}$

C) $\dfrac{2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$

D) $\dfrac{-2n+n^2(1-w)}{(1-w)^2}$

E) $\dfrac{n+(1-w)n^2}{w}$

25. Si $w \neq 1$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $h \in \mathbb{N}$; coprimo con n; calcular
$S = 1 + w^h + w^{2h} + w^{3h} + ... + w^{(n-1)h}$

A) 1 B) 0 C) w^h
D) w^{nh} E) w^{h+1}

26. Determinar si es falso o verdadero las siguientes proposiciones respecto al número complejo :

$$Z = (1-\sqrt{3})^8 (1-\sqrt{2})^3 e^{\pi/4} e^{5+\frac{\pi}{3}i}$$

I. $z = (1-\sqrt{3})^8 (1-\sqrt{2})^3$

II. Su argumento principal es $\dfrac{4\pi}{3}$

III. Su argumento es $7\pi/12$

IV. Su argumento es $16\pi/3$

A) FVFF B) VVFF C) FFVV
D) VVVV E) FFFV

27. El módulo del cuadrado del producto de un número complejo z por su conjugada es igual a 16 y éste valor coincide con el radio de la circunferencia con centro en el origen, sabiendo que una de sus raíces de orden cuatro de un número complejo w se encuentra sobre ésta y además una de sus raíces tiene como argumento el valor de $\pi/12$ radianes. Indicar el valor principal de la raíz de orden 3 de dicho número complejo w.

A) $\sqrt[3]{16}$ B) $\sqrt[3]{16}\,\text{cis}\pi/3$

C) $\sqrt[3]{16}\,\text{cis}\pi/6$

D) $\sqrt[3]{16}\,\text{cis}\pi/9$ E) $\sqrt[3]{16}\,\text{cis}\pi$

28. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que cumple
$|z + z_0| \leq a$; donde: $z_0 = (a;a)$; $a \in \mathbb{R}^+$.
Calcular el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x = -3a$ sea mínima.

A) $\left(\dfrac{33}{2}\right)^\circ$ B) $\left(\dfrac{37}{2}\right)^\circ$ C) $45°$

D) $\left(\dfrac{127}{2}\right)^\circ$ E) $\left(\dfrac{413}{2}\right)^\circ$

29. Siendo α y β dos raíces cúbicas de $(-i)$, calcular el valor de la expresión

$$L = \frac{(i+\alpha)^{123} + (i+\beta)^{234} + (\alpha+\beta)^{345}}{\alpha+\beta-i}$$

Además α, β son diferentes de i

A) i B) $\dfrac{1}{2}$ C) -1

D) $\dfrac{1}{2}i$ E) $-\dfrac{1}{2}i$

30. Dado un complejo z; tal que
$\mathbb{R}e(z) \neq \text{Im}(z) \wedge \text{Arg}(z) \neq k\pi/2$; $k \in \mathbb{Z}$.
Calcular el resultado de efectuar

$$\frac{2\bar{z}^2 + |z|^2}{z^2 + 2|z|^2}$$

sabiendo que es un número imaginario puro.

A) i B) $-i$ C) 2
D) -2 E) A ó B

31. Reducir el siguiente número complejo:

$$Z = \frac{\sqrt{3+2a} + i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}} - \frac{\sqrt{3-2a} + i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a} - i\sqrt{3+2a}} \; ; \; \frac{-3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

A) $\frac{2a}{3}$ B) $-\frac{2a}{3}$ C) $\frac{a}{3}$

D) $\frac{4a}{3}$ E) $-\frac{4a}{3}$

32. Hallar el argumento del complejo

$$Z = i^{w}$$

siendo "w" una raíz cúbica no real de la unidad.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{3\pi}{2}$ E) π

33. Una de las raíces de orden 4 de un número complejo de módulo 16; tiene argumento igual a $7\pi/12$. Indicar la raíz correspondiente al mayor argumento positivo.

A) $2cis(19\pi/12)$ B) $2cis(3\pi/2)$
C) $2cis(13\pi/2)$
D) $2cis(17\pi/12)$ E) $4cis(3\pi/2)$

34. De todos los complejos "**z**" que cumplan:

$$|z+3| = 2 \quad ; \ 0 < \arg(z) < 2\pi$$

Seleccionar el que tenga mayor y menor argumento y dar como respuesta la suma de sus partes imaginarias.

A) 4 B) 0 C) -2
D) 2 E) -4

35. Si

$$J = \left[\frac{1+\sqrt[n]{1}}{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right]^{np} \ ; k = 1; 2; \ldots$$

Calcular J

A) 1 B) $\left|\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right|$ C) $\cos\frac{k\pi}{n}$

D) np E) 2

36. Dado

$$f(x+yi) = \frac{x+i}{1-yi} \quad ; \ \{x; y\} \subset \mathbb{R}$$

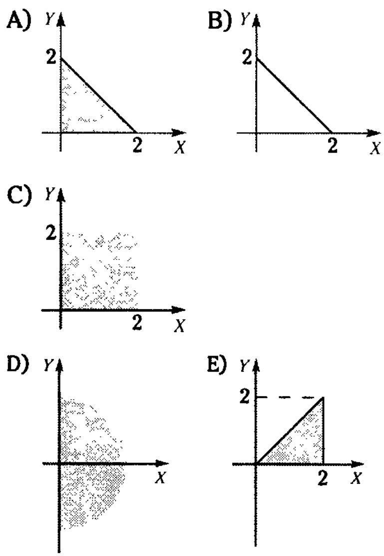
Señalar un valor de $f(\sqrt{i})$

Además $i^2 = -1$

A) i B) -1 C) 0
D) $e^{\pi/2}$ E) 3i

37. Determinar la gráfica de

$$H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |\mathbb{R}e(z) + Im(z)| \le 2 \wedge 0 \le \arg(z) \le \pi/2\}$$



38. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

I. $\forall z \neq 0 ; \left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg(z)|$

II. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
$\forall z_1 ; z_2 \in \mathbb{C}$

III. $|e^{ix^2}| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

A) FFV B) VVV C) VFV
D) FVV E) VVF

39. Un número complejo y su conjugado son tales que $z . \bar{z} + 2z = 12 + 4i$
$\arg(z) \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$. Calcular $|z|$

A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{5}$

40. Indicar el lugar geométrico para $z_1 ; z_2 ; z \in \mathbb{C}$ tal que :

$$\arg\left\{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right\} = 0$$

A) es una circunferencia
B) es una elipse
C) es una hipérbole
D) es una recta
E) es una parábola

41. Si los complejos $z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4$ son las vértices del cuadrilátero ABCD. Dicho cuadrilátero es un paralelogramo si :

A) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$
B) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$
C) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$
D) $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$
C) $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_i^3 = 0$

42. Simplificar

$$\frac{(\text{Cos}\theta_1;\text{Sen}\theta_1)(\text{Cos}\theta_2;\text{Sen}\theta_2)....(\text{Cos}\theta_n;\text{Sen}\theta_n)}{[\text{Cos}(\theta_1+\theta_2+....+\theta_n);\text{Sen}(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n)]}$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) $\text{Cos}^n\theta_n + \text{Sen}^n\theta_n i$ E) i

43. Dados: $p \ m \in \mathbb{R}$; Reducir

$$e^{2mi\text{Ctg}^{-1}p}\left\{\frac{pi + 1}{pi - 1}\right\}^m$$

A) 0 B) -1 C) 1
D) m E) p.m

44. Si $m \in \mathbb{Z}^+ \wedge m \geq 2$, hallar el valor de

$$\left(i\text{Ctg}\frac{\pi}{2m}.\text{Ctg}\frac{2\pi}{2m}.\text{Ctg}\frac{3\pi}{2m}...\text{Ctg}\frac{(m-1)\pi}{2m}\right)^2$$

A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 0

45. Demostrar

I. $\mathbb{R}e\{z_1z_2\} = \mathbb{R}e\{z_1\}\mathbb{R}e\{z_2\} - \mathbb{I}m\{z_1\}\mathbb{I}m\{z_2\}$
II. $\mathbb{I}m\{z_1z_2\} = \mathbb{R}e\{z_1\}\text{Im}\{z_2\} + \mathbb{I}m\{z_1\}\text{Re}\{z_2\}$
tal que $z_1 ; z_2 \in \mathbb{C}$

46. Si los puntos P_1 y P_2 son los afijos de $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$ tal que : $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$; entonces :

A) (z_1/z_2) es un imaginario puro
B) $z_1.z_2$ es un imaginario puro
C) $z_1.z_2$ es complejo $\mathbb{R}$
D) $m\sphericalangle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$
E) A $\vee$ D

1	*	14	E	27	D	40	D
2	*	15	E	28	E	41	D
3	*	16	A	29	E	42	B
4	*	17	B	30	E	43	C
5	*	18	A	31	D	44	D
6	*	19	D	32	C	45	*
7	*	20	D	33	A	46	E
8	*	21	D	34	B	47	D
9	C	22	E	35	A	48	B
10	B	23	B	36	A	49	B
11	B	24	B	37	A	50	*
12	C	25	D	38	B	51	B
13	A	26	A	39	C	52	C

* Demostraciones y sub preguntas

Claves