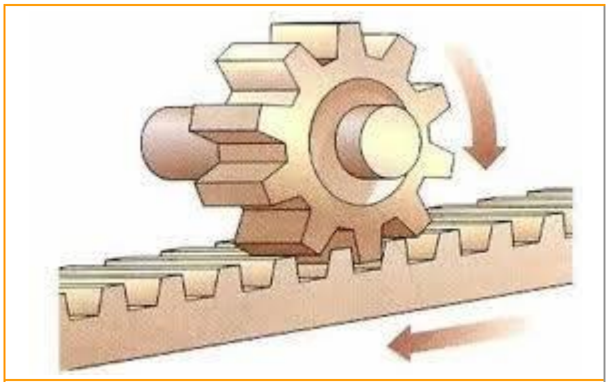
Movimiento circular

Se define como **movimiento circular** aquél cuya trayectoria es una circunferencia.

El **movimiento circular, llamado también curvilíneo,** es otro tipo de movimiento sencillo.

Estamos rodeados por objetos que describen movimientos circulares: un disco compacto durante su reproducción en el equipo de música, las manecillas de un reloj o las ruedas de una motocicleta son ejemplos de movimientos circulares; es decir, de cuerpos que se mueven describiendo una circunferencia.



El movimiento circular del piñón se transforma en movimiento lineal en la cremallera.

A veces el movimiento circular no es completo: cuando un coche o cualquier otro vehículo toma una curva realiza un movimiento circular, aunque nunca gira los 360º de la circunferencia.

La experiencia nos dice que todo aquello da vueltas tiene movimiento circular. Si lo que gira da siempre el mismo número de vueltas por segundo, decimos que posee **movimiento circular uniforme (MCU)**.

Ejemplos de cosas que se mueven con movimiento circular uniforme hay muchos:

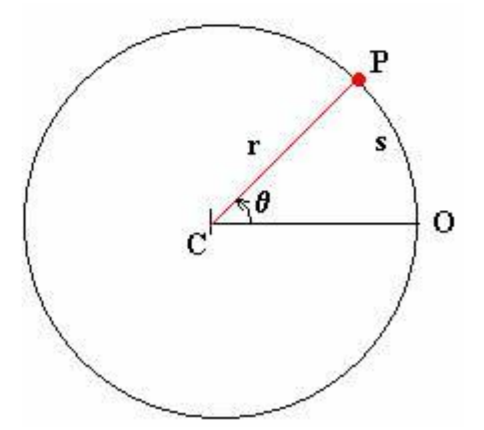
La tierra es uno de ellos. Siempre da una vuelta sobre su eje cada 24 horas. También gira alrededor del sol y da una vuelta cada 365 días. Un ventilador, un lavarropas o los viejos tocadiscos, la rueda de un auto que viaja con velocidad constante, son otros tantos ejemplos.

Pero no debemos olvidar que también hay objetos que giran con **movimiento circular variado**, ya sea acelerado o decelerado.

El movimiento circular en magnitudes angulares

La descripción de un **movimiento circular** puede hacerse bien en función de **magnitudes lineales** ignorando la forma de la trayectoria (y tendremos velocidad y aceleración tangenciales), o bien en función de **magnitudes angulares** (y tendremos velocidad y aceleración angulares). Ambas descripciones están relacionadas entre sí mediante el valor del radio de la circunferencia trayectoria.

Al trabajar con magnitudes angulares es imprescindible entender lo relativo a una unidad de medida angular conocida como **radián**.



Ángulo θ con centro en C.

El radián

Si tenemos un ángulo cualquiera y queremos saber cuánto mide, tomamos un transportador y lo medimos. Esto nos da el ángulo medido en grados. Este método viene de dividir la circunferencia en 360º, y se denomina sexagesimal.

(Para usar la calculadora en grados hay que ponerla en **DEG,** Degrees, que quiere decir grados en inglés).

El sistema de grados sexagesimales es **una** manera de medir ángulos, pero hay otros métodos, y uno de ellos es usando radianes.

Ahora veamos el asunto de medir los ángulos pero en **radianes**.

Para medir un ángulo en radianes se mide el largo del arco (s) abarcado por el ángulo θ de la figura a la izquierda. Esto se puede hacer con un centímetro, con un hilito o con lo que sea. También se mide el radio del círculo.

Para obtener el valor del ángulo (θ) en radianes usamos la fórmula:

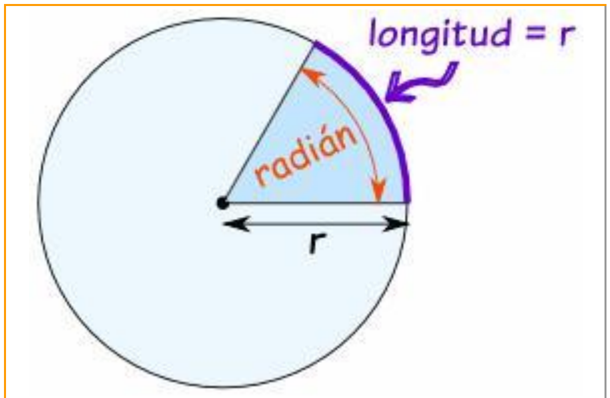
$$\theta_{(rad)} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}}$$ y tenemos el ángulo medido en radianes

Hacer la división del arco sobre radio significa ver cuántas veces entra el radio en el arco. Como el radio y el arco deben medirse en la misma unidad, el radián resulta ser **un número sin unidades**.

Esto significa que el valor del ángulo en radianes solo me indica cuántas veces entra el radio en el arco. Por ejemplo, si el ángulo θ mide 3 radianes, eso significa que el radio entra 3 veces en el arco abarcado por ese ángulo.

Su quisiéramos calcular o conocer al valor del arco, hacemos:

$$\textbf{arco} = \theta_{(rad)} \cdot \textbf{radio}$$



¿Cuántas veces entra el radio en el arco marcado?

¿A cuántos grados equivale un radián?

Pero el valor de un ángulo en radianes se puede expresar (convertir) en grados. En una **circunferencia** entera (360º) el arco entero es el **perímetro**, que es igual a 2 Pi por radio $(2\pi \cdot \mathbf{r})$. Así, a partir de la fórmula $\theta_{(rad)} = \dfrac{\textbf{arco}}{\textbf{radio}}$ es que 360° equivalen a:

$$360^{\circ} = \frac{2\pi \cdot \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi\,\textbf{rad}$$

$$\Rightarrow 1\textbf{rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{360^{\circ}}{2(3,14)} = \frac{360^{\circ}}{6,28} = 57,3^{\circ}$$

Un ángulo de un radián equivale a un ángulo de 57,3º.

Para usar la calculadora en radianes hay que ponerla en "**RAD**"

Periodo y frecuencia

La principal característica del movimiento circular uniforme es que en cada vuelta o giro completo de 360°, equivalente a un ciclo, se puede establecer un punto fijo como inicio y fin del ciclo.

En física, los ciclos son también llamados revoluciones para un determinado tiempo.

El **periodo (T)** de un movimiento circular es el tiempo que tarda una partícula o un cuerpo en realizar una vuelta completa, revolución o ciclo completo.

Por ejemplo, el periodo de rotación de la tierra es 24 horas. El periodo de rotación de la aguja grande del reloj es de 1 hora. La unidad utilizada para el periodo es el segundo o, para casos mayores, unidades mayores.

Conocida la frecuencia (en ciclos o revoluciones por segundo) se puede calcular el periodo (T) mediante la fórmula:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\mathbf{F}} \qquad\qquad \mathbf{T} = \frac{\textbf{seg}}{\textbf{ciclo}}$$

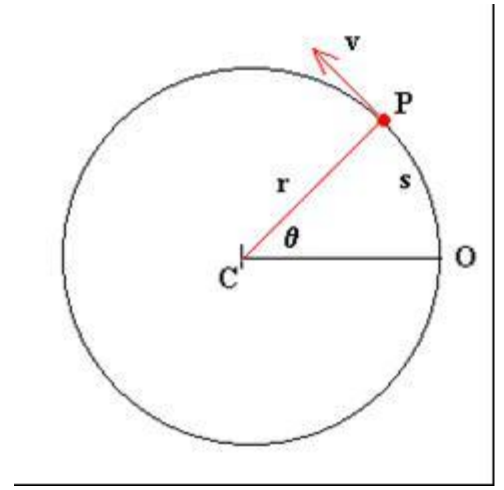
Se denomina **frecuencia** (F) de un movimiento circular al número de revoluciones, vueltas o ciclos completos durante la unidad de tiempo. La unidad utilizada para cuantificar (medir) la frecuencia de un movimiento es el **hertz (Hz)**, que indica el número de revoluciones o ciclos por cada segundo.

Para su cálculo, usamos la fórmula

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mathbf{T}} \qquad\qquad \mathbf{F} = \frac{\textbf{ciclos}}{\textbf{seg}}$$

o hertz:

(En ocasiones se usa, en vez de **hertz,** seg^{-1} o s^{-1}). Nótese que la frecuencia (F) es la inversa del periodo (T).



Imaginemos el punto rojo (P) como una piedra que gira amarrada al punto C.

Una vez situado el origen O describimos el movimiento circular mediante las siguientes magnitudes angulares.

Posición angular (θ)

Podemos imaginar, como ejemplo, que se tiene una piedra amarrada a una cuerda y la movemos en círculos de radio r. En un instante de tiempo **t** el móvil (en nuestro caso la piedra) se encuentra en el punto P. Su posición angular (lo que la piedra ha recorrido en la circunferencia) viene dada por el ángulo θ, formado por el punto P, el centro de la circunferencia C y el origen O (desde donde empezó a girar la piedra).

La velocidad angular (ω)

Cuando un objeto se mueve en una circunferencia, llevará una velocidad, ya que recorre un espacio, pero también **recorre un ángulo**.

Para tener una idea de la rapidez con que algo se está moviendo con movimiento circular, se ha definido la velocidad angular (**ω**) como el número de vueltas que da el cuerpo por unidad de tiempo.

Si un cuerpo tiene gran velocidad angular quiere decir que da muchas vueltas por segundo.

De manera sencilla: en el movimiento circular la velocidad angular está dada por la cantidad de vueltas que un cuerpo da por segundo.

Otra manera de decir lo mismo sería: en el movimiento circular la velocidad angular está dada por el ángulo recorrido (θ) dividido por unidad de tiempo. El resultado está en grados por segundo o en rad por segundo.

$$\text{velocidad angular } \omega = \frac{\Delta\theta \;\leftarrow \text{ángulo recorrido}}{\Delta t \;\leftarrow \text{tiempo empleado}}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

ω = velocidad angular en rad/seg.

θ = desplazamiento angular en rad.

t = tiempo en segundos en que se efectuó el desplazamiento angular.

La velocidad angular también se puede determinar si sabemos el tiempo que tarda en dar una vuelta completa o periodo (T):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Como $T = \frac{1}{F}$ **entonces** $\omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{F}} = 2\pi \cdot \frac{F}{1} = 2\pi F \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

Aquí debemos apuntar que una misma velocidad angular se puede expresar de varias maneras diferentes.

Por ejemplo, para las lavadoras automáticas o para los motores de los autos se usan las**revoluciones por minuto (rpm)**. También a veces se usan las **rps (revoluciones por segundo)**.

También se usan los **grados por segundo** y los **radianes por segundo**.

Es decir, hay muchas unidades diferentes de velocidad angular. Todas se usan y hay que saber pasar de una a otra, lo que se hace aplicando una regla de 3 simple.

Por ejemplo, pasar una velocidad de 60 rpm a varias unidades diferentes:

$$60\,\mathbf{rpm} = \frac{1\,\mathbf{rev}}{\mathbf{seg}} = \frac{360^{\circ}}{\mathbf{seg}} = \frac{2\pi\,\mathbf{rad}}{\mathbf{seg}}$$

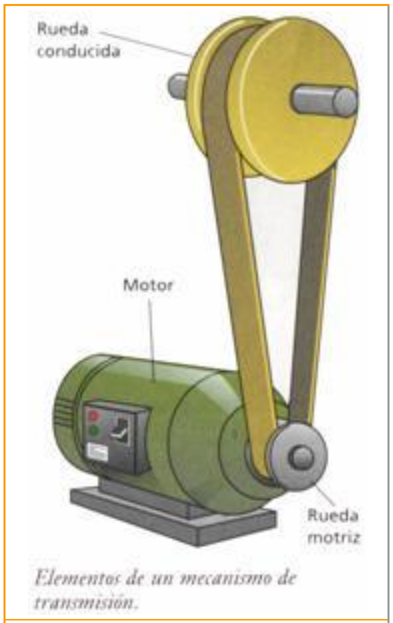
La más importante de todas las unidades de velocidad angular es **radianes por segundo**. Esta unidad es la que se usa en los problemas.

Nota importante:

Según lo anterior es correcto, entonces, decir que la velocidad angular es

$\omega = \dfrac{\mathbf{radianes}}{\mathbf{segundo}}$, pero resulta que el radián es sólo un número comparativo, por lo mismo que la palabra radián suele no ponerse y en la práctica la verdadera unidad es $\dfrac{1}{\mathbf{seg}}$, que también puede ponerse como $\dfrac{1}{\mathbf{s}}$, e incluso como $\mathbf{s}^{-1}$.

En efecto, muchas veces la velocidad angular se expresa en segundos elevado a menos uno ($\mathbf{s}^{-1}$) y para quienes no lo saben resulta incomprensible.



Trasmisión de un movimiento circular.

La velocidad tangencial (v)

Aparte de la **velocidad angular**, también es posible definir la **velocidad lineal** de un móvil que se desplaza en círculo.

Por ejemplo, imaginemos un disco que gira. Sobre el borde del disco hay un punto que da vueltas con movimiento circular uniforme.

Ese punto tiene siempre una velocidad lineal que es tangente a la trayectoria. Esa velocidad se llama **velocidad tangencial**.

Para calcular la velocidad tangencial hacemos: espacio recorrido sobre la circunferencia (o arco recorrido) dividido por el tiempo empleado, que expresamos con la fórmula:

$\mathbf{v_t} = \dfrac{\mathbf{arco}}{\mathbf{t}} = \dfrac{\theta_{(rad)} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{t}}$ pero como $\dfrac{\theta_{(rad)}}{\mathbf{t}} = \omega$ entonces $\mathbf{v_t} = \omega \cdot \mathbf{r}$ que se lee velocidad tangencial es igual a velocidad angular multiplicada por el radio.

Como la velocidad angular (ω) también se puede calcular en función del periodo (T) con la fórmula $\omega = \dfrac{2\pi}{\mathbf{T}}$ y la velocidad tangencial siempre está en función del radio, entonces la fórmula $\mathbf{v_t} = \omega \cdot \mathbf{r}$ se convierte en $\mathbf{v_t} = \dfrac{2\pi\mathbf{r}}{\mathbf{T}}$ que se lee: la velocidad tangencial es igual a 2 pi multiplicado por el radio (r) y dividido por el periodo (T).

Ver: PSU: Física; Pregunta 08_2005(2)

Además, como ω (velocidad angular) se expresa en $\dfrac{1}{\mathbf{seg}}$ y el radio se expresa en metros, las unidades de la velocidad tangencial serán metros por segundo (m/seg).

Las ruedas se mueven con movimiento circular.

La aceleración en los movimientos curvilíneos

En los movimientos curvilíneos o circulares **la dirección cambia a cada instante**. Y debemos recordar que la velocidad considerada como vector**v** podrá variar (acelerar o decelerar) cuando varíe sólo su dirección, sólo su módulo o, en el caso más general, cuando varíen ambos.

La aceleración asociada a los cambios en dirección

En razón de la aseveración anterior, y desde un punto de vista sectorial (distancia), un **movimiento circular uniforme** es también un **movimiento acelerado**, aun cuando el móvil recorra la trayectoria a ritmo constante.

La dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, va cambiando a lo largo del movimiento, y esta variación de **v** que afecta sólo a su dirección da lugar a una aceleración, llamada **aceleración centrípeta**.

Aceleración centrípeta

Cuando se estudió la aceleración en el **movimiento rectilíneo**, dijimos que ella no era más que el **cambio constante** que experimentaba la velocidad por **unidad de tiempo**. En este caso, la velocidad cambiaba únicamente en **valor numérico** (su módulo o rapidez), no así en **dirección**.

Ahora bien, cuando el móvil o la partícula realiza un **movimiento circular uniforme**, es lógico pensar que en cada punto el valor numérico de la velocidad (su módulo) es el mismo, en cambio es fácil darse cuenta de que la dirección del vector velocidad va cambiando a cada instante.

La variación de dirección del vector lineal origina una aceleración que llamaremos **aceleración centrípeta.** Esta aceleración tiene la dirección del radio y apunta siempre hacia el centro de la circunferencia.

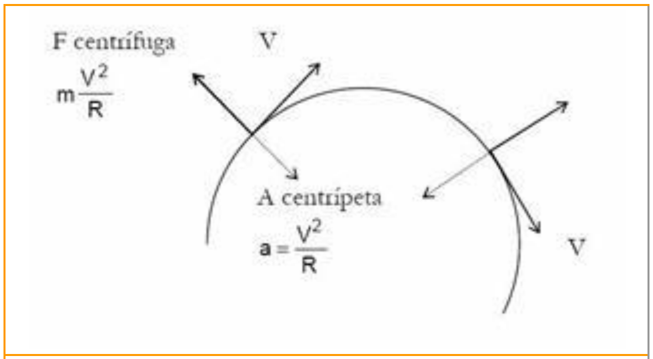
Como deberíamos saber, cuando hay un cambio en alguno de los componentes del vector velocidad tiene que haber una**aceleración**. En el caso del movimiento circular esa aceleración se llama **centrípeta**, y lo que la provoca es el cambio de dirección del vector velocidad angular.

Veamos el dibujo de la derecha:

El vector velocidad tangencial cambia de dirección y eso provoca la aparición de una aceleración que se llama aceleración centrípeta, que apunta siempre hacia el centro.

La **aceleración centrípeta** se calcula por cualquiera de las siguientes dos maneras:

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{v}^2}{\mathbf{R}} = \omega^2 \cdot \mathbf{r}$$



Aceleración centrípeta.

La aceleración asociada a los cambios en su módulo (rapidez)

Ya sabemos que un movimiento circular, aunque sea uniforme, posee la aceleración centrípeta debida a los cambios de dirección que experimenta su vector velocidad. Ahora bien, si además la velocidad del móvil varía en su magnitud (módulo) diremos que además posee **aceleración angular**.

Resumiendo: si un móvil viaja en círculo con velocidad variable, su aceleración se puede dividir en dos componentes: una aceleración de la parte radial (la aceleración centrípeta que cambia la **dirección** del vector velocidad) y una aceleración angular que cambia la **magnitud** del vector velocidad, además de una aceleración tangencial si consideramos solo su componente lineal. **(Ver:Rapidez y velocidad).**

Como corolario, podemos afirmar que un **movimiento circular uniforme** posee solo **aceleración centrípeta** y que un **movimiento circular variado** posee **aceleración centrípeta** y, además, **aceleraciones angular y tangencial**.

Aceleración angular

Tal como el movimiento lineal o rectilíneo, el movimiento circular puede ser uniforme o acelerado. La rapidez de rotación puede aumentar o disminuir bajo la influencia de un momento de torsión resultante.

La aceleración angular (α) se define como la variación de la velocidad angular con respecto al tiempo y está dada por:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

donde:

α = aceleración angular final en rad/ s^2

ω_f = velocidad angular final en rad/s

ω_i = velocidad angular inicial en rad/s

t = tiempo transcurrido en seg

Una forma más útil de la ecuación anterior es:

$\omega_f = \omega_i + \alpha t$

Aceleración tangencial

Imaginemos de nuevo un disco que gira. Sobre el borde del disco hay un punto que da vueltas con **movimiento circular acelerado**.

Ese punto tiene siempre una velocidad variada que es tangente a la trayectoria. Esa variación de velocidad se llama **aceleración tangencial**.

Es la aceleración que representa un cambio en la velocidad lineal, y se expresa con la fórmula

$$a_t = \alpha \cdot r$$

Donde

α = valor de la aceleración angular en rad/s2

r = radio de la circunferencia en metros (m)

Entonces, la aceleración tangencial es igual al producto de la aceleración angular por el radio.

Otras fórmulas usadas en el movimiento circular

Vimos que la velocidad angular (ω) es igual al ángulo recorrido dividido por el tiempo empleado. Cuando el tiempo empleado sea justo un período (T), el ángulo recorrido será 2 pi (igual a una vuelta).

Entonces podemos calcular la velocidad angular (ω) como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Pero como $T = \frac{1}{F}$, esta misma fórmula se puede poner como:

$$\omega = 2\pi \cdot F$$

Ejercicios sobre movimiento circular uniforme

Ejercicio 1)

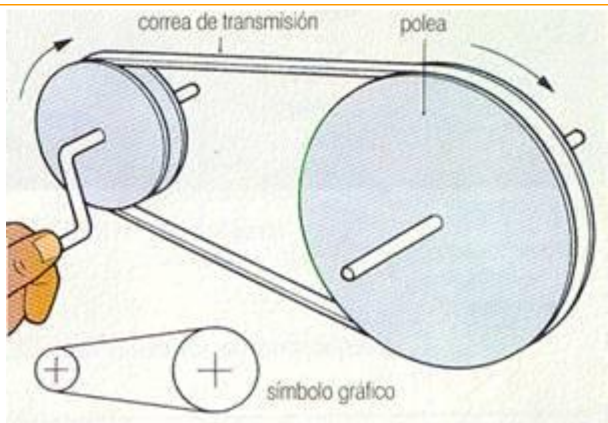
Un móvil con trayectoria circular recorrió 820° ¿Cuántos radianes son?

Desarrollo

Sabemos que 1 rad = 57,3°

Entonces $\frac{820°}{57,3°} = 14,31 \textbf{ radianes}$

Ejercicio 2)



Como en un tractor, la rueda delantera es más chica.

Un tractor tiene una rueda delantera de 30 cm de radio, mientras que el radio de la trasera es de 1 m. ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda trasera cuando la delantera ha completado 15 vueltas?

Desarrollo:

En este ejercicio la longitud (distancia, espacio) que recorre cada rueda en una vuelta corresponde al perímetro de cada una (**perímetro del círculo**), cuya fórmula es $\mathbf{P} = 2 \cdot \pi \cdot \mathbf{r}$, entonces:

$$\mathbf{P}_1 = 2 \cdot \pi \cdot 0,3\,\mathbf{m} = 1,884\,\mathbf{m}$$

$$\mathbf{P}_2 = 2 \cdot \pi \cdot 1\mathbf{m} = 6,28\,\mathbf{m}$$

Entonces, si en una vuelta la rueda delantera recorre 1,884 metro, en 15 vueltas recorrerá: 15 • 1,884 m = 28,26 m

¿Cuantas veces la rueda trasera ha tenido que girar (dar una vuelta) para recorrer esa distancia de 28,26 m?

Dividimos esa distancia por la distancia recorrida en una vuelta por la rueda trasera:

28,26 m : 6,28 m = **4,5 vueltas.**

Por lo tanto, la rueda trasera ha tenido que dar cuatro vueltas y media para recorrer la misma distancia que la delantera ha recorrido en 15 vueltas.

Ejercicios sobre el movimiento circular variado (acelerado)

Ejercicio 1)

Un automóvil, cuyo velocímetro indica en todo instante 72 km/h, recorre el perímetro de una pista circular en un minuto. Determinar el radio de la misma. Si el automóvil tiene una aceleración en algún instante, determinar su módulo, dirección y sentido.

Si la pista es circular, la velocidad que tiene el auto es la velocidad tangencial. Si da una vuelta a la pista en un minuto, significa que su periodo (T) es de un minuto.

Ahora, como $\omega = \frac{2\pi}{\mathbf{T}}$, entonces:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{6,28}{60} = 0,104\,\frac{1}{\mathbf{s}}$$ velocidad angular .

Por otro lado, la velocidad tangencial es 20 m/s (72 km/h), reemplazando en la fórmula:

$$\mathbf{v}_t = \omega \cdot \mathbf{r}$$

Tenemos

$$20\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}} = 0,104\frac{1}{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}$$

Calculamos r:

$$r = \frac{20\,\frac{m}{\cancel{s}}}{0{,}104\,\frac{1}{\cancel{s}}} = 192\,m$$

R = 192 m Radio de la pista

Ahora, aunque su velocidad (rapidez) sea constante, igual tiene aceleración centrípeta, cuyo módulo es

$$a_c = \omega^2 \cdot r = \left(0{,}104\,\frac{1}{s}\right)^2 \cdot 192\,m = 0{,}010816\,\frac{1}{s^2} \cdot 192\,m = 2{,}08\,\frac{m}{s^2}$$

Aceleración centrípeta, dirigida hacia el centro de la pista.

Ejercicio 2)

Calcular la velocidad angular y la frecuencia con que debe girar una rueda, para que los puntos situados a 50 cm de su eje estén sometidos a una aceleración que sea 500 veces la de la gravedad.

Veamos los datos:

Necesitamos que la aceleración centrípeta sea igual a 500 g:

$$a_c = 500 \cdot g$$

$$a_c = 500 \cdot 10\,\frac{m}{s^2} = 5.000\,\frac{m}{s^2}$$

La velocidad angular para la cual se cumpla esto va a ser:

$$a_c = \omega^2 \cdot r$$

$$5.000\,\frac{m}{s^2} = \omega^2 \cdot 0{,}5\,m$$

$$\omega^2 = \frac{5.000\,\frac{m}{s^2}}{0{,}5\,m}$$

$$\omega^2 = 10.000\,\frac{1}{s^2}$$

$$\omega = \sqrt{10.000\,\frac{1}{s^2}}$$

$$\omega = 100\,\frac{1}{s}$$

Ahora calculamos la frecuencia (F) a partir de

$$\omega = 2\pi \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\mathbf{F} = \frac{100\frac{1}{\mathbf{s}}}{2\pi}$$

$$\mathbf{F} = \frac{100\frac{1}{\mathbf{s}}}{6,28} = 15,92\frac{1}{\mathbf{s}}$$