5. ROTACION; CINEMATICA Y DINAMICA

Los movimientos curvilíneos se dan en el plano o en el espacio, son, por tanto, movimientos bi o incluso tridimensionales. Ello hace que para expresar la posición sea necesario especificar algo más que un sólo número. Así, para definir la posición de un avión en pleno vuelo se requieren tres números o coordenadas que indiquen la latitud, la longitud geográfica y la altitud respectivamente. Los dos primeros establecen la posición del punto sobre el globo terrestre y el segundo informa sobre la altura a que se encuentra sobre la vertical trazada sobre el punto determinado por las dos primeras coordenadas. En el caso más sencillo de que la trayectoria sea una curva contenida en un plano, serán suficientes dos coordenadas para definir la posición.

Del mismo modo que en los movimientos rectilíneos o unidimensionales el origen *0* representa el punto fijo, que se toma como referencia, en los movimientos planos o bidimensionales el sistema de referencia queda representado por un conjunto de dos ejes perpendiculares *X e Y* y la posición del punto móvil *P* respecto de dicho sistema vendrá dada por sus correspondientes coordenadas *x* e *y*, es decir, *P(x,y).* En estos movimientos más complejos el desplazamiento se puede medir por el segmento que une los puntos inicial V y final y su cálculo se efectúa a partir de los valores de sus coordenadas.

Cinemática en el movimiento circular:

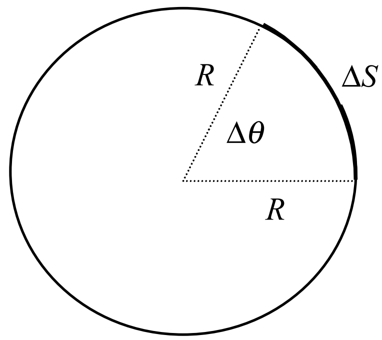
La descripción de los movimientos rectilíneos uniformes y uniformemente acelerados puede extenderse a movimientos de trayectoria no rectilíneo, si no se tienen en cuenta aquellos aspectos del movimiento relacionados con el cambio de orientación que sufre el móvil al desplazarse a lo largo de una trayectoria curvilínea.

Por tanto, un movimiento circular uniforme o uniformemente acelerado, se puede estudiar recurriendo a las relaciones, deducidas en el capítulo 2 en el estudio de los movimientos rectilíneos. Sin embargo, la posibilidad de describir el desplazamiento del punto móvil mediante el ángulo barrido por uno de los radios, abre un nuevo camino para su estudio, exclusivo de los movimientos circulares, empleando magnitudes angulares y no magnitudes lineales, es decir, utilizando magnitudes referidas a ángulos y no a la línea trayectoria.

Magnitudes lineales y magnitudes angulares

La magnitud fundamental es el ángulo barrido por el radio que une el punto móvil con el centro de la trayectoria circular, ángulo que se expresa en radianes ($[rad]$). Un radian es la unidad SI de medida de ángulo plano y se define como el ángulo central (con vértice en el centro de una circunferencia) cuyo arco correspondiente tiene una longitud igual al radio. Dado que la longitud de la circunferencia es igual a 2π veces el valor del radio, el ángulo central completo medirá.

A partir de la definición del radian, se puede establecer una relación entre la longitud del arco, que en términos cinemáticos coincide con el espacio, y el ángulo θ. Así, expresar el ángulo θ en radianes equivale a decir cuántas veces el radio *R* está contenido en la porción de arco S correspondiente, lo que en términos matemáticos se expresa en la forma:



$$\Delta S = \Delta\theta \cdot R \tag{5.1}$$

Para describir un movimiento circular se elige la opción angular, es decir, en términos de variación del ángulo θ con el tiempo. Se hace necesario entonces, introducir otras magnitudes angulares que desempeñen el mismo papel que la velocidad y la aceleración en la descripción lineal. Así se define la velocidad angular media como el cociente entre el ángulo barrido y el tiempo empleado, es decir:

$$\langle \varpi \rangle = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}_0}{t - 0} \; . \tag{5.2}$$

El valor instantáneo, o referido a un instante, al igual que en la cinemática lineal viene dado por:

$$\varpi = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \varpi \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} \; . \tag{5.3}$$

De acuerdo con su definición, la unidad de ω en el SI será el $\left[\frac{rad}{s}\right]$.

Dado que la velocidad angular ϖ puede variar con el tiempo, es necesario introducir una magnitud que dé idea de la rapidez con la que dicha variación tiene lugar; esto es, lo que se entiende por aceleración angular. Esta es dada por:

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta\varpi}{\Delta t} = \frac{\varpi - \varpi_0}{t - 0} \; , \tag{5.4}$$

y el valor instantáneo,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \alpha \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varpi}{\Delta t} \; . \tag{5.5}$$

Las unidades para α en el SI, de acuerdo con su definición es $\left[\frac{rad/s}{s}\right] = \left[\frac{rad}{s^2}\right]$.

Dado que todo movimiento circular puede describirse, bien en función de magnitudes lineales, bien en función de magnitudes angulares, ambas descripciones equivalentes están relacionadas entre sí. La relación fundamental viene dada por la ecuación (5.1). Dividiendo esta por el intervalo de tiempo Δt resulta:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\cdot R \text{, es decir:}$$

$$\langle V\rangle = \langle\omega\rangle R \,.$$

Con respecto a sus valores instantáneos, es decir, rapidez V y rapidez angular ω instantáneas, se tiene:

$$V = \omega\cdot R \,. \tag{5.6}$$

Tomando la variación de ecuación (5.6) y dividiéndola por el intervalo de tiempo Δt se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\cdot R \text{, es decir:}$$

$$\langle a\rangle = \langle\alpha\rangle R \,.$$

Con respecto a sus valores instantáneos, es decir, aceleración lineal a y aceleración angular α, se tiene

$$a = \alpha\cdot R \,. \tag{5.7}$$

Por otro lado se verifica que el número de vueltas que ha dado una partícula en un movimiento circular es dado por:

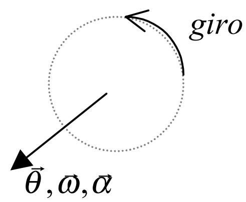
$$n(vueltas) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}\,,$$

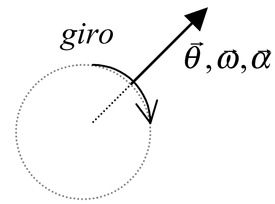
de modo que:

$$n(vueltas) = \frac{\Delta S/R}{2\pi} = \frac{\Delta S}{2\pi R}\,.$$

Observación:

El carácter vectorial de las cantidades angulares $\vec{\theta},\varpi$ y α va en términos de definir el eje de rotación en la cual gira la partícula en el movimiento circular. Para definir de manera única estos vectores se utiliza por convención la “regla de la mano derecha. Así, por ejemplo, si el movimiento es en el plano del papel con la partícula girando en sentido horario, los vectores $\vec{\theta},\varpi$ y α apuntan hacia adentro del papel y cuando la partícula gira en sentido antihorario, estos vectores apuntan hacia fuera.





Movimiento circular uniforme (M.C.U.):

Este tipo de movimiento significa que al ser circular es de radio constante y uniforme se refiere a que es con velocidad angular ϖ constante. De esta forma como $\langle\varpi\rangle = \varpi = \Delta\theta/\Delta t$,

$\Delta\vec{\theta} = \varpi\Delta t$, es decir:

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\varpi}\cdot t\,. \tag{5.8}$$

Por otro lado, como el movimiento es uniforme, es posible definir las cantidades período (T) y frecuencia (ν). El período de revolución o simplemente el período se define como el tiempo que demora la partícula en dar una vuelta completa y la frecuencia como el número de vueltas que realiza la partícula en la unidad de tiempo. Usando ecuación (5.8) $\Delta\theta = 2\pi$ para $t = T$, es decir:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5.9}$$

En el sistema SI, las unidades de período son el segundo $[s]$ y las de frecuencia, $\left[\frac{vueltas}{s}\right] = \left[\frac{revoluciones}{s}\right] = \left[\frac{ciclos}{s}\right]$, unidad que se denomina $[Hertz] = [Hz]$. Por ejemplo, una frecuencia de $50[Hz]$ significa que la partícula describe 50 vueltas en un segundo y por lo tanto, su período es $T = 0{,}02[s]$

Movimiento circular uniformemente acelerado (M.C.U.A.):

Este movimiento significa de radio constante y con aceleración angular constante. De esta forma como la aceleración angular media coincide con la instantánea,

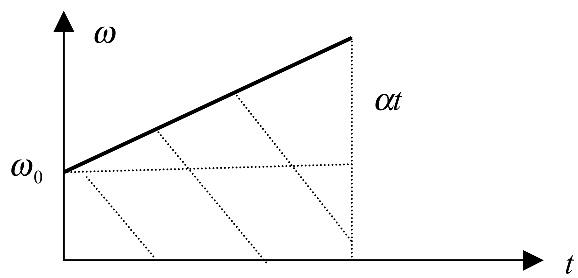
$$\langle\alpha\rangle = \alpha = \frac{\Delta\varpi}{\Delta t} = constante,$$

es decir,

$$\Delta\varpi = \alpha \cdot \Delta t \ ,$$

$$\varpi = \varpi_0 + \alpha \cdot \Delta t. \tag{5.10}$$

Por otro lado, como la gráfica de (5.10) es una línea recta y el área bajo la curva debe dar el Debe dar el desplazamiento $\Delta\vec{\theta} = \vec{\theta} - \vec{\theta}_0$, y el área es $\omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} t \cdot \alpha t$:



$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 . \tag{5.11}$$

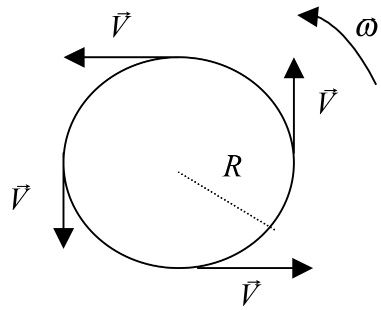
Desarrollando el producto punto de (5.10) consigo mismo, encontramos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \bullet \Delta\vec{\theta} \ ,$$

donde, al igual que en el movimiento rectilíneo, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta\theta$ cuando se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado y $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha \cdot \Delta\theta$, para uno desacelerado.

La velocidad en el movimiento circular:

En los movimientos curvilíneos la dirección tanto del vector velocidad y aceleración cambian en el tiempo. Eso significa que la velocidad y aceleración considerada como vector $\vec{V}$ y $\vec{a}$ podrán variar cuando varíen sólo su dirección, su módulo o, en el caso más general, cuando varíen ambos.
En un M.C.U. como ϖ es constante (magnitud, dirección y sentido), significa que de ecuación (5.6) también lo es su rapidez V. Por otro lado, como el vector velocidad es tangente a la trayectoria, en dicho movimiento tal vector será tangente a la circunferencia y de tamaño constante en todo instante, es decir,



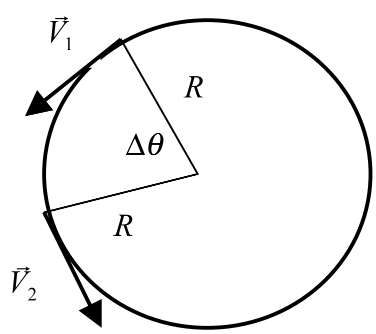
$$\left|\vec{V}\right| = V = \omega \cdot R = constante.$$

La aceleración en el movimiento circular:

La aceleración asociada a los cambios en dirección

Un movimiento circular uniforme es un movimiento acelerado, aun cuando el móvil recorra la trayectoria a ritmo constante, es decir con *rapidez* V *constante*. La dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, va cambiando a lo largo del movimiento, y esta variación que afecta sólo a su dirección da lugar a una aceleración.

Considere una partícula en un movimiento circular uniforme con rapidez V. Considere que tal partícula se mueve desde la posición (1) a la (2) en un intervalo de tiempo Δt. El ángulo descrito por el radio vector será $\Delta\theta$.

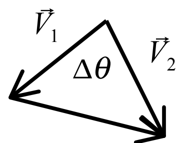


$$\left|\vec{V}\right|_1 = \left|\vec{V}_2\right| = V.$$

i. Cálculo del tiempo que demora la partícula en ir de (1) a (2):

Como $\Delta S = V \cdot \Delta t, \Delta t = \dfrac{R\Delta\theta}{V}$.

ii. Cálculo de la variación de velocidad: Construyendo un triángulo de velocidades;



$$\Delta \vec{V} = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Y usando el teorema del coseno, es decir:

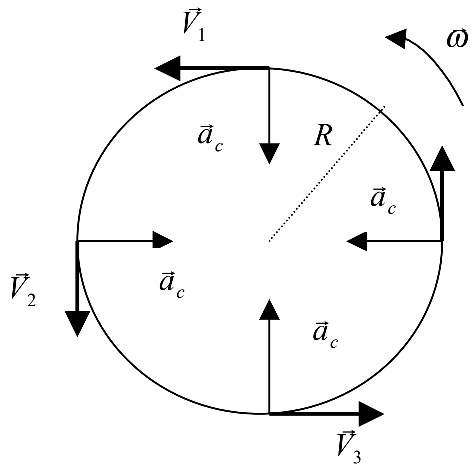
$\Delta V = \sqrt{V^2 + V^2 - 2V^2 \cos(\Delta\theta)} = \sqrt{2}V\sqrt{1-\cos(\Delta\theta)}$, la aceleración media es dada por:

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \sqrt{2}\left(\frac{V^2}{R}\right)\left(\frac{\sqrt{1-\cos\Delta\theta}}{\Delta\theta}\right)$$

Recordando que para encontrar la aceleración instantánea solo hay que hacer que el intervalo de tiempo tienda a cero o equivalentemente el ángulo $\Delta\theta$ tienda a cero, se obtiene para a:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\langle a \rangle = \lim_{\Delta\theta \to 0}\langle a \rangle = \lim_{\Delta\theta \to 0}\sqrt{2}\left(\frac{V^2}{R}\right)\left(\frac{\sqrt{1-\cos\Delta\theta}}{\Delta\theta}\right) = \frac{V^2}{R}. \qquad (5.12)$$

Es decir, la aceleración en un movimiento circular uniforme tiene una magnitud igual a $\frac{V^2}{R}$. Gráficamente se advierte que cuándo $\Delta\theta \to 0$, el vector $\Delta\vec{V}$ está dirigido hacia el centro de la trayectoria. Por este motivo, al término $\frac{V^2}{R}$ se le denomina aceleración centrípeta a_c, que significa dirigida hacia el centro y da idea de la rapidez con la que cambia la dirección del movimiento.



$$\left|\vec{V}_1\right| = \left|\vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_3\right| = \left|V_4\right| = V = \omega \cdot R = constante.$$

$$\left|a_c\right| = \frac{V^2}{R} = constante.$$

La aceleración asociada a los cambios en magnitud:

Además de variar en dirección, el vector $\vec{V}$ puede variar también en módulo en el movimiento circular. La aceleración asociada a tal variación recibe el nombre de aceleración tangencial ($\vec{a}_t$), porque es tangente a la trayectoria. Es el único tipo de aceleración presente en los movimientos rectilíneos y coincide en módulo con la aceleración que se considera en el estudio puramente escalar del movimiento circular.

La aceleración total

La aceleración total en un movimiento circular es, entonces, un vector que puede considerarse como la suma de dos componentes. Una, la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$, que es perpendicular a la trayectoria, y da idea de la rapidez con la que el móvil cambia de orientación; la otra, la aceleración tangencial $\vec{a}_t$ que es tangente a la trayectoria y representa la rapidez con la que varía en módulo el vector velocidad. Si la primera componente no es nula, eso significa que el movimiento es circular; si la segunda tampoco la es quiere decir que el movimiento no es uniforme.

Dinámica en el movimiento circular:

Fuerza centrípeta, tangencial y total

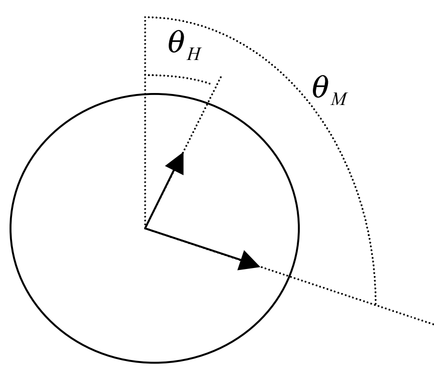
Si en un movimiento circular, ya sea este uniforme o uniformemente acelerado, existe aceleración, de la segunda ley de Newton se tendrá una fuerza. Para el caso del M.C.U. como la única aceleración presente es la centrípeta, esta aceleración multiplicada por la masa de la partícula nos da la fuerza asociada, denominada fuerza centrípeta ($\vec{F}_c$). Al igual que $\vec{a}_c$, esta fuerza apunta hacia el centro de la circunferencia.

Para el caso del M.C.U.A. como además de la aceleración centrípeta está presente la aceleración tangencial, la fuerza asociada a tal aceleración será la fuerza tangencial $(\vec{F}_t)$, igual a la multiplicación de la masa de la partícula por $\vec{a}_t$. Al igual que $\vec{a}_t$, esta fuerza apunta en la dirección tangente a la circunferencia. De este modo, en tal movimiento la fuerza resultante o total sobre la partícula será la suma vectorial de $\vec{F}_c$ y $\vec{F}_t$.

Ejemplos:

1. En un reloj análogo horario y minutero coinciden a las 12:00:00 [hr]. ¿A que hora minutero y horario formarán un ángulo de 90º?.

Solución:



Usando la ecuación (5.8) puesto que los movimiento del horario y minutero son circulares uniformes, encontramos para la posición angular del horario:

$$\theta_H = \theta_{0H} + \omega_H t \, . \tag{1}$$

Análogamente para el minutero se tiene:

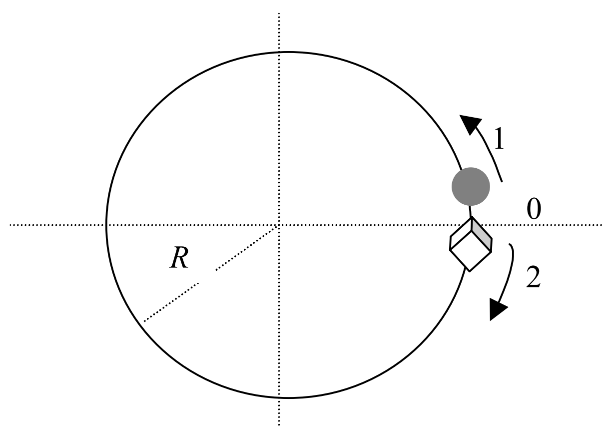
$$\theta_M = \theta_{0M} + \omega_M t \, . \tag{2}$$

Como $\omega_H = \frac{2\pi}{T_H}, \omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ donde $T_H = 12[hr]$ y $T_M = 1[hr]$ y bajo la condición que estos formen un ángulo de 90º, es decir, $\theta_M - \theta_H = \frac{\pi}{2}$, de (1) y (2) sustituyendo $\theta_{0H} = \theta_{0M} = 0$, se encuentra para t:

$$t = \frac{\pi}{2(\omega_M - \omega_H)} = \frac{3}{11}[hr], \tag{3}$$

es decir, en t= 16,36[min]. Por lo tanto forman 90º a las 12:16:22 [hr]

2. Dos partículas describen movimientos circulares de radio R= 1 [m], como lo muestra la figura. El (1) parte de 0 con rapidez angular $\omega = 10[rad/s]$ constante en sentido antihorario y el segundo parte del reposo del mismo punto en sentido horario con aceleración tangencial constante de $2[m/s^2]$. Determine cuando y donde se cruzan ambas partículas.



Como el cuerpo (1) se mueve con M.C.U., la posición angular de este será:

$$\theta_1 = 0 + \omega_1 \cdot t\,. \tag{1}$$

El cuerpo (2) posee una aceleración tangencial constante y por lo tanto, se trata de un M.C.U.A. Debido que $a_t = \alpha \cdot R = 2[m/s^2], \alpha = 2[rad/s^2]$. Por otro lado, como parte del reposo, $\omega_0 = 0$. Reemplazando en ecuación (5.11) en la cual $\theta_{02} = 0,$ y la aceleración angular negativa, pues el sentido de (2) es opuesto al del cuerpo (1):

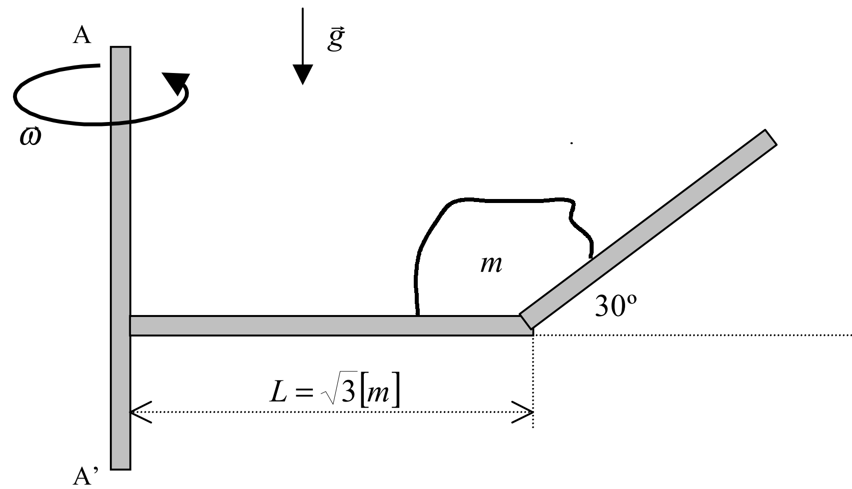
$$\theta_2 = \pi + 0 \cdot t - \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2. \qquad (2)$$

En el encuentro las posiciones angulares (1) y (2) son iguales. De este modo igualando tales ecuaciones se encuentra:

$10 \cdot t = \pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$, es decir, $t^2 + 10t - \pi = 0$ cuya solución física es:

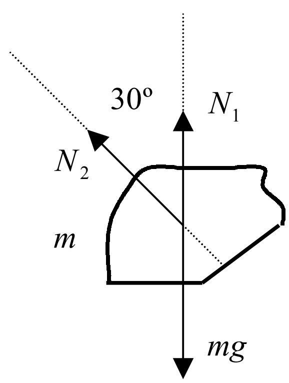
$t = 0{,}305[s]$. Reemplazando este valor de t en ecuación (1) 0 (2), se obtiene para el encuentro: $\theta_{encuentro} = 3{,}05[rad] = 174{,}75^{o}$.

3. ¿Con qué rapidez angular ω constante debe girar el brazo con respecto al eje AA', para que el bulto ejerza sobre la superficie horizontal una fuerza igual a un tercio de su peso ?.



Solución:

D.C.L. (bulto):



N_1 es la fuerza normal que ejerce la superficie horizontal sobre el bulto, con valor $(1/3)mg$. N_2 es la fuerza normal que ejerce la superficie inclinada sobre la masa m y mg su peso. Las fuerzas deben ser descompuestas // y $\perp$ al movimiento. Como la aceleración va hacia el centro (aceleración centrípeta), las fuerzas que originan tal aceleración serán radiales, es decir, $\sum F_{//} = ma_c = m\left(\frac{V^2}{R}\right)$. Lo perpendicular a lo radial es la vertical, y como no hay aceleración en esa dirección, $\sum F_{\perp} = 0$. Note además que L es el radio de la circunferencia descrita por la masa m .

$$\sum F_{//} = \sum F_{radiales} : N_2 \operatorname{sen}(30^\circ) = m\left(\frac{V^2}{L}\right) \tag{1}$$

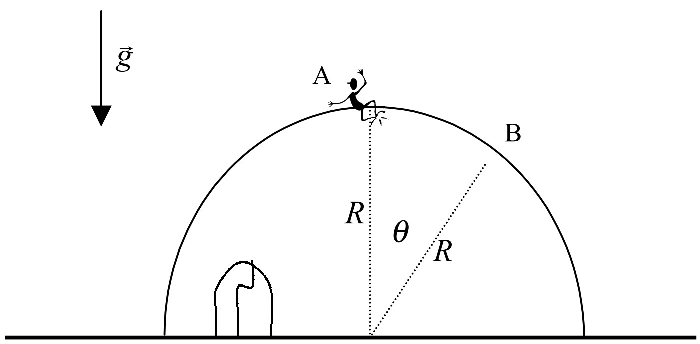
$$\sum F_{\perp} : N_1 + N_2 \cos(30^\circ) - mg = 0. \tag{2}$$

De ecuación (2), reemplazando el valor de N_1 y despejando N_2 resulta:

$$N_2 = \left(\frac{4}{3 \cdot \sqrt{3}}\right) mg \,. \tag{3}$$

Reemplazando (3) en ecuación (1): $V = \sqrt{\frac{2g}{3}} = 2{,}56\left[\frac{m}{s}\right]$. Como $\omega = V/L = 1{,}48\left[\frac{rad}{s}\right]$.

4. Un esquimal de masa m descansa en el punto mas alto de un iglú. Si comienza a bajar por el, determine el ángulo θ en la cual el esquimal se separa del iglú.



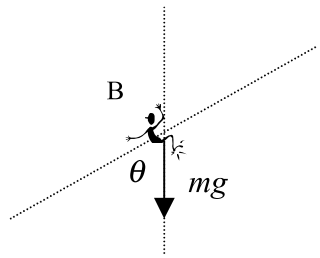
Solución:
Puesto que entre el iglú y el esquimal no existe rozamiento, la energía mecánica se conserva, es decir:

$$E_A = E_B$$
$$K_A + U_A = K_B + U_B \,.$$

Como el esquimal parte del reposo en A y considerando el nivel h=0 en la base del iglú, la ecuación anterior queda:

$$mgR = \frac{1}{2} m V_B^2 + mgR\cos(\theta)\,. \tag{1}$$

Para despejar el ángulo θ de la ecuación anterior nos falta hallar cuánto es V_B e introducir la condición que en este punto el esquimal se separa del iglú. Como el esquimal describe un movimiento circular de radio R y cuando se separa del iglú la fuerza normal que ejerce el iglú sobre el esquimal es cero; en el punto B:



En el movimiento circular en B:

$$\sum F_{//} : mg\cos(\theta) = m\left(\frac{V_B^2}{R}\right). \qquad (2)$$

Combinando (1) y (2) resulta $\cos(\theta) = 2/3$, es decir, $\theta = 48{,}19^{\circ}$ independiente del radio R del iglú y de la masa del esquimal.

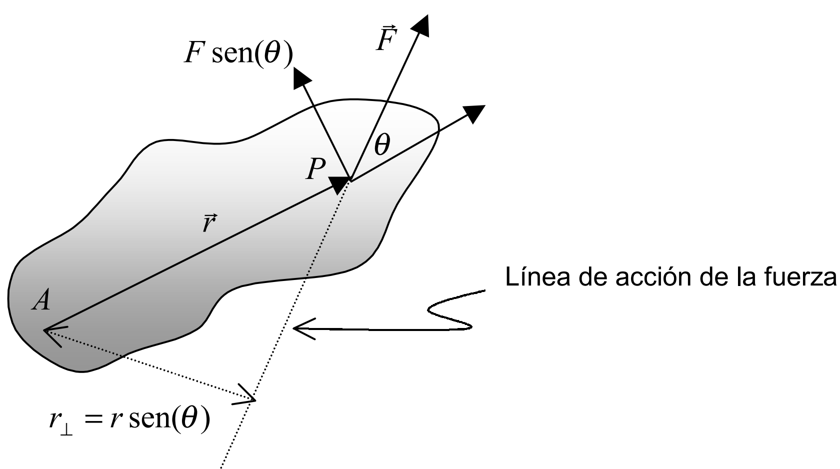
Variables rotacionales:

La ecuación fundamental de la dinámica de traslación es la 2ª ley $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, es decir, la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo o sistema origina una aceleración lineal $\vec{a}$. Por otro lado, si un cuerpo o sistema está rotando en un movimiento circular acelerado, la pregunta es ahora, ¿quién origina la aceleración angular α?, ¿Cuáles son las variables rotacionales que hacen las veces de $\vec{F}$ y m en dinámica de rotación?.

Si se desea dar aceleración angular a una varilla que puede girar libremente en torno a un eje que pasa por un extremo, se debe aplicar una fuerza $\vec{F}$. La aceleración angular obtenida dependerá de tal varilla, pero además, de la fuerza $\vec{F}$, de su dirección y sentido y en que punto se aplica esta. Por ejemplo, si la fuerza pasa por el eje de rotación, la varilla no rotará. El mismo resultado se obtiene cuando la fuerza aplicada va en la dirección de tal varilla. Por consiguiente se debe encontrar una cantidad que pueda considerarse como la causa de la aceleración angular y que esté relacionada de manera adecuada con la fuerza aplicada, su dirección y sentido y además del punto en la cual se aplica. Tal cantidad se denomina torque, o momento de una fuerza y es el concepto análogo rotacional de una fuerza para dinámica de traslación.

Considere un cuerpo o sistema el cual puede rotar libremente con respecto a un eje que pasa por el punto A. Sea P el punto en la cual se aplica una fuerza $\vec{F}$ y $\vec{r}$ el vector de posición de la fuerza, tomando como origen el eje de rotación. El momento $\vec{M}$ de la fuerza $\vec{F}$, con respecto al origen A se define el producto vectorial entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$, es decir:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (5.12)$$



El momento es una cantidad vectorial, donde su magnitud está dada por:

$$M = rF\,\mathrm{sen}(\theta). \qquad (5.13)$$

θ es el ángulo más pequeño que forman $\vec{r}$ con $\vec{F}$. Su dirección es normal al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y su sentido está dado por la regla de la mano derecha. Para el diagrama representado en la figura, tal sentido es el de un vector que sale de dicho plano. Esto significa que con la mano derecha, como el dedo pulgar apunta para afuera y los dedos quedan en sentido antihorario, el cuerpo rotará en tal sentido..

Por otro lado, note que el momento M puede ser escrito como:

$$M = r\left(F\,\mathrm{sen}(\theta)\right), \tag{5.14}$$

o bien como:

$$M = F\left(r\,\mathrm{sen}(\theta)\right), \tag{5.15}$$

las cuales son equivalentes a (5.13). Como de la figura, $F\,\mathrm{sen}(\theta) = F_{\perp}$ es la componente de $\vec{F}$ perpendicular a $\vec{r}$, se concluye que solamente dicha componente realiza torque. Analizando (5.15), $r\,\mathrm{sen}(\theta) = r_{\perp}$ es la componente del vector $\vec{r}$ que cae perpendicular a la fuerza, llamada *brazo de palanca*. De este modo, *momento* es la multiplicación de la fuerza por la distancia, pero ambas *perpendiculares*. En el primer caso se descompone la fuerza, en la segunda la distancia.

Observaciones:

- Note que para una distancia r dada, el momento será mayor en la medida que la componente $F_{\perp}$ lo sea, y para una fuerza F dada, el momento será mayor cuándo $r_{\perp}$ lo sea.
- Cuándo r y F son perpendiculares entre si, estas cantidades coinciden con $r_{\perp}$ y $F_{\perp}$ respectivamente.

Energía cinética de rotación y momento de inercia(inercia rotacional):

Cada partícula de un cuerpo en un movimiento de rotación tiene velocidad y por lo tanto energía cinética. Una partícula de masa m rotando con rapidez angular ω , donde $V = \omega r$ y describiendo una circunferencia de radio r, tendrá una energía cinética $K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m(\omega r)^2$. La energía total del cuerpo corresponde a la suma de las energías cinéticas de todas las partículas. Así siendo $m_1, m_2, m_3, \ldots$ las masa de las partículas que constituyen el cuerpo y $r_1, r_2, r_3, \ldots$ los radios de las circunferencias descritas por estas, la energía cinética total del cuerpo que gira puede ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 .$$

La cantidad $\sum_i m_i r_i^2$, es la suma de los productos de las masas de las partículas por los cuadrado de los radios que describen las partículas. Esta cantidad se designa por la letra I, es decir:

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \tag{5.16}$$

llamada momento de inercia o inercia rotacional del cuerpo, con respecto al eje de rotación considerado. Tal cantidad depende del eje de rotación considerado y de la manera de cómo esté distribuida la masa en el cuerpo. De esta forma la expresión para la energía cinética en un movimiento de rotación pura es dado por:

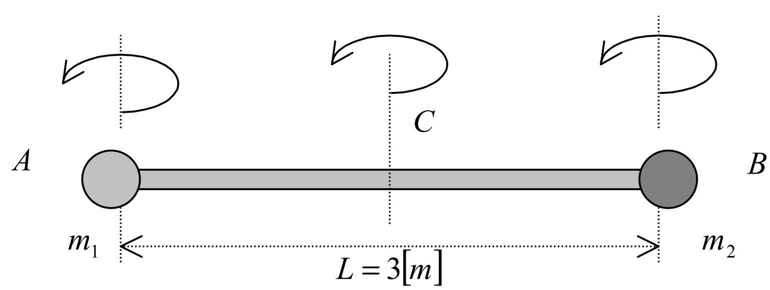
$$K = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{5.17}$$

De esta última expresión note la semejanza con la ecuación correspondiente para la traslación. La velocidad lineal V va a angular ω y la masa M del cuerpo a su momento de inercia I. Por tal motivo, el momento de inercia representa la “masa” en un movimiento de rotación, o mejor dicho una masa o redistribución geométrica de esta en la rotación.

Ejemplo:

Considere un sistema formado por dos partículas puntuales de masas $m_1 = 2[kg]$, $m_2 = 4[Kg]$ y una varilla de largo $L = 3[m]$ de masa despreciable. Si el sistema puede rotar con una rapidez angular $\omega = 5[rad/s]$, determine la energía cinética del sistema cuando:

a. Rota con respecto a un eje que pasa por la partícula 1.
b. Rota con respecto a un eje que pasa por la partícula 2.
c. Rota con respecto a un eje que pasa por el centro de la varilla.



Solución:

a. Cuando el sistema rota con respecto a un eje que pasa por la partícula 1 (eje A), el momento de inercia será:

$$I_A = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3^2 = 27[kg \cdot m^2].$$

De esta forma: $K_A = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 27 \cdot 5^2 = 337{,}5[J]$.

b. Cuando el sistema rota con respecto a un eje que pasa por la partícula 2(eje B), el momento de inercia será:

$$I_B = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 0^2 = 18\left[kg \cdot m^2\right].$$

De esta forma: $K_B = \frac{1}{2} I_B \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 5^2 = 225{,}0[J]$.

c. Cuando el sistema rota con respecto a un eje que pasa por el centro de la varilla (eje C), el momento de inercia será:

$$I_C = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 = 2 \cdot (1{,}5)^2 + 4 \cdot (1{,}5)^2 = 13{,}5\left[kg \cdot m^2\right].$$

De esta forma: $K_C = \frac{1}{2} I_C \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 13{,}5 \cdot 5^2 = 168{,}75[J]$.

Para un cuerpo que no está compuesto de masas puntuales, es decir en las cuales estas se puedan identificar, matemáticamente el proceso de suma anteriormente vista se transforma en una integral. La tabla que a continuación se presenta, contiene los momentos de inercia de cuerpos sólidos comunes con respecto a diversos ejes. Cada uno de estos resultados puede ser deducido fácilmente, después de un curso de cálculo integral, y la masa de estos se a designado con la letra M.