Factorización

La factorización es la otra parte de la historia de los productos notables.

Esto es, ambas cosas se refieren a las mismas fórmulas, pero en los productos notables se nos daba una operación que debíamos realizar y encontrar el resultado.

Ahora, en la factorización se nos entrega el resultado y debemos encontrar cuál era la operación que se realizó, es decir, tenemos que expresarlo como si apenas se fuera a desarrollar el producto notable.

Definición 1

Factorización
Las reglas básicas para factorizar son:

i. *Ley distributiva o factor común* $a\,b + a\,c = a\,(b + c)$

ii. *Trinomio cuadrado perfecto* $x^2 \pm 2\,a\,x + a^2 = (x \pm a)^2$

iii. *Trinomio cuadrado no perfecto* $x^2 + (a + b)\,x + a\,b = (x + a)(x + b)$

iv. *Diferencia de cuadrados* $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

v. *Suma o diferencia de dos cubos* $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp a\,x + a^2)$

El hecho de reconocer cada uno de los casos de factorización nos ayudará a simplificar expresiones a lo largo de todos los cursos de matemáticas que vienen más adelante.

En realidad, puedes ver que para cada caso de factorización hay un caso correspondiente en los productos notables, de manera que con que memorices una fórmula, es suficiente para ambos temas.

Ejemplo 1

Factoriza:
$$2\,x^2 + 5\,x$$

- En este caso debemos utilizar la ley distributiva.
- Para esto identificamos el factor que se repite en todos los términos y lo escribimos a la izquierda.
- Luego escribimos dentro de un paréntesis todos los términos que no se repiten...
- Aquí se repite la x:
$$2\,x^2 + 5\,x = x\,(2\,x + 5)$$
- De manea que si multiplicamos obtenemos de nuevo: $2\,x^2 + 5\,x$.

En este primer ejemplo solamente teníamos un factor común. En algunos otros casos tendremos dos o más, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Factoriza:
$$12\,x^3 + 8\,x^2 - 20\,x$$

- Lo primero que debemos observar es que todos los coeficientes de los términos del trinomio se pueden dividir exactamente entre 4.

- Esto nos sugiere que factoricemos al número 4.
- Pero también podemos factorizar la literal x, porque aparece en todos los términos.
- Entonces, aplicando la ley distributiva obtenemos:

$$12\,x^3 + 8\,x^2 - 20\,x = 4\,x\left(3\,x^2 + 2\,x - 5\right)$$

- Para verificar que el resultado es correcto, puedes multiplicar y debes obtener el trinomio de la izquierda de la igualdad.

Ejemplo 3

Factoriza:

$$3\,x^3 + 21\,x^4 b + 18\,x^5 - 9\,x^6$$

- En este ejemplo tenemos que todos los coeficientes son divisibles por 3.
- Así que vamos a factorizar a este número.
- Además, podemos factorizar, no solamente al número x, sino a x^3:

$$3\,x^3 + 21\,x^4 b + 18\,x^5 - 9\,x^6 = 3\,x^3 \cdot \left(1 + 7\,x\,b + 6\,x^2 - 3\,x^3\right)$$

- Puedes verificar que la factorización es correcta realizando la multiplicación que queda indicada.

El primer paso que debes realizar cuando vas a factorizar una expresión es verificar si puedes aplicar la ley distributiva.

Ejemplo 4

Factoriza

$$x^2 + 12\,x + 36$$

- En este caso vamos a ver si se trata de un trinomio cuadrado perfecto...
- Para eso, primero sacamos la mitad del coeficiente del término que contiene x, también conocido como el término lineal.
- La mitad de 12 es: 6
- Ahora calculamos el cuadrado de este número: $6^2 = 36$.
- Como este resultado coincide con el término independiente (el que no contiene a x) del trinomio que nos dieron, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces,

$$x^2 + 12\,x + 36 = (x+6)^2$$

- Para verificar que el resultado es correcto, podemos desarrollar el binomio al cuadrado.

Ejemplo 5

Factoriza:

$$m^4 - 6\,m^2 + 9$$

- En este caso no tenemos un polinomio cuadrático, sino de grado cuatro.
- Sin embargo, podemos transformarlo a un trinomio cuadrado si utilizamos la siguiente sustitución: $x = m^2$.
- Porque al aplicar las leyes de los exponentes obtenemos: $x^2 = m^4$, y al sustituir en el trinomio que nos dieron nos queda:
$$m^4 - 6\,m^2 + 9 = x^2 - 6\,x + 9$$
- Ahora sí, tenemos un trinomio cuadrado.
- Vamos a ver si es un trinomio cuadrado perfecto: para eso sacamos la mitad del coeficiente del término lineal ($-6/2 = -3$) y lo elevamos al cuadrado (9).
- Como obtuvimos 9, y este es el valor del término independiente, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces, se trata del caso (*ii*) de factorización:
$$x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2$$
- Pero nuestro ejercicio no incluía a la literal x. Nosotros decidimos incluirla para simplificar el problema.
- Así que lo único que falta es hacer la sustitución: $x = m^2$,
$$m^4 - 6\,m^2 + 9 = x^2 - 6\,x + 9 = (x - 3)^2 = \left(m^2 - 3\right)^2$$
- El resultado es: $m^4 - 6\,m^2 + 9 = \left(m^2 - 3\right)^2$

Observa que en el ejemplo anterior todas las literales tenían exponente par. Por eso es fácil hacer la transformación del polinomio de grado cuatro a uno de grado dos.

No siempre vamos a tener coeficiente igual a uno en el término cuadrático. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos:

Factoriza:
$$4\,x^2 - 20\,x + 25$$
Ejemplo 6

- En este caso es más sencillo empezar calculando la raíz cuadrada de los términos cuadrático e independiente:
$$\sqrt{4\,x^2} = 2\,x \qquad \text{y} \qquad \sqrt{25} = 5$$
- Nosotros sabemos por el producto notable de elevar un binomio al cuadrado que:
$$(x - a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$$
- Entonces, el coeficiente del término lineal es igual al doble del producto de los términos independiente y cuadrático.
- Podemos comparar este producto con el término lineal del polinomio que nos dieron a factorizar:
$$-2 \cdot (2\,x) \cdot (5) = -20\,x$$

- Como coinciden, se trata de un trinomio cuadrado perfecto, y su factorización queda:

$$4\,x^2 - 20\,x + 25 = (2\,x - 5)^2$$

- Debes tener cuidado, porque muchos estudiantes olvidan multiplicar por la raíz del coeficiente del término cuadrático (el 2 de $2\,x$) cuando están verificando que el término lineal sea $-2\,a\,x$.

Ya sabes que no todos los trinomios cuadrados son perfectos. Cuando tenemos un trinomio cuadrado es una buena idea empezar la factorización verificando si se trata o no de uno perfecto. Si no es un trinomio cuadrado perfecto, tenemos que usar otro truco.

Ejemplo 7

Factoriza

$$x^2 + 12\,x + 35$$

- En este caso, cuando saquemos la mitad de 12 y lo elevemos al cuadrado, no obtendremos 35.
- Esto nos indica que se trata de un trinomio cuadrado **no** perfecto.
- En este caso tenemos un producto de binomios con término común.
- Así que buscaremos dos números que sumados den 12 y multiplicados sean igual a 35.
- Para facilitarte el trabajo, empieza siempre buscando dos números que multiplicados sean el término independiente, en este caso, 35, porque hay menos soluciones que buscar dos números sumados dén 12.
- Esos números son 5 y 7. Con lo que obtenemos:

$$x^2 + 12\,x + 35 = (x + 5)(x + 7)$$

lo cual podemos comprobar desarrollando el producto conjugado que quedó indicado.

De hecho, la ecuación: $m + n = 12$ tiene un número infinito de soluciones.

Ejemplo 8

Factoriza:

$$x^2 - 4\,x - 21$$

- Es muy evidente que no se trata de un cuadrado perfecto por dos cosas:
  i. El término independiente es negativo, y si fuera un cuadrado perfecto debería ser positivo.
  ii. El cuadrado de -2 no es igual a -21.
- Entonces, debemos encontrar dos números que sumados den -4 y multiplicados den -21
- Observa que el coeficiente del término lineal es igual a -4.
- Ya sabemos que este coeficiente es igual a la suma de los números que buscamos, por lo que se deduce que el mayor de los dos números es negativo.
- Además, el término independiente es negativo, lo que nos indica que los números que buscamos tienen signos contrarios, porque menos por menos es más.

- Empezamos buscando números que multiplicados den 21.
- Solamente tenemos dos pares de candidatos: (1,21) y (3,7).
- Sabemos que el mayor de los dos será negativo y el otro positivo.
- La solución es 3, -7, porque

$$\begin{aligned} 3+(-7) &= -4 \qquad \text{y} \\ (3)(-7) &= -21 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización que buscábamos es:

$$x^2 - 4\,x - 21 = (x+3)(x-7)$$

Factoriza:

$$4\,x^2 + 10\,x + 4$$

Ejemplo 9

- Observa que el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.
- En este caso debemos primero calcular la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$\sqrt{4\,x^2} = 2\,x$$

- Ahora vamos a escribir la factorización que deseamos encontrar:

$$(2\,x+m)(2\,x+n)$$

- Si multiplicamos obtenemos:

$$(2\,x+m)(2\,x+n) = 4\,x^2 + 2\,x\,(m+n) + m\cdot n$$

- Entonces necesitamos encontrar dos números m, n que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 2\,(m+n) &= 10, \text{ y} \\ m\cdot n &= 4 \end{aligned}$$

- La primera condición implica que $m+n=5$.
- La segunda condición nos limita a usar solamente alguno de los siguienes casos: $(2,2)$ ó $(1,4)$.
- Porque $2\times 2 = 4$ y $1\times 4 = 4$
- La solución que satisface las condiciones del problema es: $(1,4)$, porque $1+4=5$.
- Entonces, la factorización que buscamos es:

$$4\,x^2 + 10\,x + 4 = (2\,x+1)(2\,x+4)$$

Ahora estudiaremos otro caso de factorización: la diferencia de cuadrados, que al factorizarse se convierte en un producto conjugado.

Ejemplo 10

Factoriza:

$$x^2 - 81$$

- Este caso de la factorización es el más sencillo, porque la fórmula nos dice:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

- Observa que basta encontrar la raíz cuadrada de cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados y escribir, a partir de estas raíces, el producto conjugado.
- En nuestro ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= x \\ \sqrt{81} &= 9 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización queda:

$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

Una forma más de justificar el mismo resultado puede hacerse con el caso (*iii*) de factorización.

Para esto buscamos dos números que sumados den cero (el coeficiente del término lineal) y multiplicados den -81.

Es obvio que para la suma sea cero, los números deben ser iguales y con signo opuesto. Para que su producto sea -81, necesitamos que los números sean $\sqrt{81}$ y $-\sqrt{81}$, que son precisamente 9 y -9.

Como puedes ver, si suponemos que se trata de un producto de binomios con término común, de cualquier forma debes llegar al resultado correcto.

Ejemplo 11

Factoriza:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10}$$

- Este caso de factorización es muy sencillo.
- Simplemente debemos calcular la raíz cuadrada de cada uno de los términos y utilizarlos para escribir un producto conjugado:

$$\begin{aligned} \sqrt{16\,x^4} &= 4\,x^2 \\ \sqrt{36\,y^{10}} &= 6\,y^5 \end{aligned}$$

- Al escribir el producto conjugado obtenemos la factorización:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = (4\,x^2 + 6\,y^5)(4\,x^2 - 6\,y^5)$$

- Puedes verificar que el resultado es correcto realizando la multiplicación.

Observa que pudimos haber transformado la diferencia de cuadrados con las siguientes sustituciones: $m = 4\,x^2$, $n = 6\,y^5$, y obtener:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = m^2 - n^2$$

Al factorizar obtenemos:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

y al sustituir los valores definidos de m y n nos da:

$$16\,x^4 - 36\,y^{10} = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (4\,x^2 + 6\,y^5)(4\,x^2 - 6\,y^5)$$

Esto muestra que estamos utilizando el producto notable, pero para un caso más general.

Factoriza:

$$\frac{25\,x^6}{81} - \frac{9}{m^4}$$

Ejemplo 12

- En este caso tenemos una diferencia de cuadrados, porque:

$$\left(\frac{5\,x^3}{9}\right)^2 = \frac{25\,x^6}{81}$$

y

$$\left(\frac{3}{m^2}\right)^2 = \frac{9}{m^4}$$

- Entonces, de acuerdo con la fórmula, tenemos:

$$\frac{25\,x^6}{81} - \frac{9}{m^4} = \left(\frac{5\,x^3}{9} + \frac{3}{m^2}\right)\left(\frac{5\,x^3}{9} - \frac{3}{m^2}\right)$$

Factoriza:

$$8\,x^3 - 27\,y^{12}$$

Ejemplo 13

- Aquí tenemos el caso más laborioso, pero igual de sencillo: se trata de una diferencia de cubos.
- Primero sacamos la raíz cúbica de cada término:

$$\sqrt[3]{8\,x^3} = 2\,x \qquad \text{porque} \qquad (2\,x)^3 = 8\,x^3$$

y

$$\sqrt[3]{27\,y^{12}} = 3\,y^4 \qquad \text{porque} \qquad \left(3\,y^4\right)^3 = 27\,y^{12}$$

- Ahora sustituimos de acuerdo a la fórmula:

$$\begin{aligned}
x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + a\,x + a^2) \\
8\,x^3 - 27\,y^{12} &= (2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 \\
(2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 &= \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left((2\,x)^2 + \left(3\,y^4\right)(2\,x) + \left(3\,y^4\right)^2\right) \\
&= \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right)
\end{aligned}$$

- En conclusión:
$$8\,x^3 - 27\,y^{12} = \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right)$$

Para que puedas identificar rápidamente qué caso de factorización debes utilizar trata de ver qué estructura tiene el polinomio que deseas factorizar.

Utiliza los procedimientos que se explican en los ejemplos, dependiendo de la estructura de cada polinomio.

No todos los polinomios se pueden factorizar. Por ejemplo, $x^2 + 1$ no se puede factorizar, a pesar de que parece sencillo.

Cuando un polinomio no se pueda factorizar, es decir, no se pueda expresar como el producto de otros polinomios lineales (de grado 1) o cuadráticos (de grado 2), diremos que es un polinomio primo.

En caso de que sí sea posible factorizarlo, diremos que ese polinomio es compuesto.

En la lista de ejercicios se incluyen solamente polinomios compuestos para que practiques la factorización y adquieras destreza en este procedimiento tan importante en matemáticas.

Créditos

Albert Einstein	Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar.

Edición: Efraín Soto Apolinar.

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar.

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar.

Productor general: Efraín Soto Apolinar.

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: 22 de agosto de 2010.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

Profr. Efraín Soto Apolinar.

efrain@aprendematematicas.org.mx