

UNIDAD 6

Factorización

Es el proceso inverso de la multiplicación por medio del cual una expresión algebraica racional entera es presentada como el producto de dos o más factores algebraicos.

FACTOR O DIVISOR. Un polinomio no constante de otro cuando lo divide exactamente, por lo cual también es llamado divisor.

FACTOR PRIMO RACIONAL. Llamamos así a aquel polinomio que no se puede descomponer en otros factores racionales dentro del mismo campo.

Ejemplo:

El proceso:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad ; \quad \text{es una multiplicación}$$

En cambio el proceso:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \quad ; \quad \text{es una factorización}$$

Donde: $(x+a), (x+b)$ son factores primos

Métodos de factorización

I. MÉTODO DE FACTOR COMÚN - AGRUPACIÓN

Factor Común Monomio

Consiste en extraer la parte que se repite en todos los términos para lo cual se extrae la expresión repetida elevada a su menor exponente. Ejemplo:

Factorizar: $E = 7x^5y^5 - 2x^3y^3 + x^2y^2$

El factor común monomio será x^2y^2 . Ahora dividiremos cada uno de los términos entre dicho factor común, para lo que queda en el polinomio. Luego de dicho proceso se tendrá:

$$E = x^2y^2(7x^3y^3 - 2xy + 1)$$

Factores primos

$$\text{Factores primos: } \begin{cases} x \\ y \\ x^3y^3 - 2xy + 1 \end{cases}$$

ÁLGEBRA

Factor común polinomio

Se usa este método cuando el polinomio posee un factor común de 2 o más términos. Por lo general, se encuentra luego de agrupar términos y bajo los siguientes criterios:

- **De acuerdo al número de términos**
Ejm: Si el polinomio tiene 8 términos podemos agrupar de 2 en 2 ó de 4 en 4.

- **De acuerdo a los coeficientes de los términos**
Ejm: Factorizar:

$$E = x^{12} + x^8y^4 + x^4y^8 + y^{12}$$

Como no hay factor común monomio podemos agrupar los 4 términos de 2 en 2 y en forma ordenada.

En cada uno de los grupos:

$$E = x^8(x^4 + y^4) + y^8(x^4 + y^4)$$

Factor Común Polinomio (x^4+y^4) . Ahora dividimos cada agrupación entre el factor común polinomio.

$$E = \frac{(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)}{\begin{matrix} \swarrow \text{Factor Primo} \\ \searrow \text{Factor Primo} \end{matrix}}$$

Los factores primos no se pueden descomponer en nuevos factores, tienen un único divisor que es si mismo. Esta expresión tendrá dos factores primos.

II. MÉTODO DE LAS IDENTIDADES

Aplicación de identidades notables para estructuras conocidas.

Recordemos los siguientes:

A) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (T.C.P.)

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

Observación

El trinomio o cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado, se caracteriza porque el doble del producto de la raíz de dos de sus términos es igual al tercer término.

Todo trinomio cuadrado perfecto se transforma en binomio al cuadrado.

Ejemplo:

$$\begin{matrix} 16x^2 + 40xy^3 + 25y^6 = \underbrace{(4x + 5y^3)^2}_{\text{Binomial cuadrado}} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (4x)^2 + 2(4x)5y^3 + (5y^3)^2 \end{matrix}$$

Luego, es T.C.P.

B) DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Ejemplo 1

Factorizar: $x^4 - 4b^2$

Solución

Se tiene: $(x^2)^2 - (2b)^2 = (x^2 + 2b)(x^2 - 2b)$

Ejemplo 2

Factorizar: $x^2 + 2xy + y^2 - z^6$

Solución

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^6 \rightarrow (x + y)^2 - (z^3)^2 \\ = (x + y + z^3)(x + y - z^3)$$

C) SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS:

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$$

Ejemplo:

Factorizar: $27x^3 - 8$

Solución: $(3x)^3 - 2^3 = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

III. ASPA SIMPLE

Se utiliza para factorizar expresiones trinomias o aquellas que adopten esa forma:

$$Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

Ejemplo:

Factorizar: $a^2 + b^2 + 3a + 3b + 2ab - 28$

$$(a+b)^2 + 3(a+b) - 28 \\ \begin{matrix} a+b & & 7 \\ & \uparrow & \\ a+b & & -4 \end{matrix}$$

Luego: $a^2 + b^2 + 3a + 3b + 2ab - 28 = (a+b+7)(a+b-4)$

IV. ASPA DOBLE

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Ejemplo 1:

Factorizar:

$$20x^2 + 22yx + 6y^2 - 33x - 17y + 7 \\ \begin{matrix} 5x & & 3y & & -7 \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 4x & & 2y & & -1 \end{matrix}$$

ÁLGEBRA

La expresión factorizada es:

$$(5x + 3y - 7)(4x + 2y - 1)$$

Ejemplo 2:

Factorizar:

$$6x^2 + 23xy + 20y^2 + 13xz + 22yz + 6z^2$$

La expresión factorizada es:

$$(3x + 4y + 2z)(2x + 5y + 3z)$$

V. ASPA DOBLE ESPECIAL

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E_*$$

REGLA

1. Se descompone el término de mayor grado y el término independiente. Se calcula la suma del producto en aspa.
2. A la suma obtenida se le agrega la expresión que haga falta para ver el término central. La expresión agregada es la que se descompone para comprobar los otros términos del polinomio.

Ejemplo:

Factorizar:

$$P(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - x - 15$$

$$(4x^2) - (-2x^2) = 6x^2$$

$$\therefore P(x) = (x^2 + 3x - 5)(x^2 + 2x + 3)$$

VI. MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMIOS

Con este método se busca uno o más factores binomios primos.

CONSIDERACIONES:

1. Si $P(x_0) = 0$, entonces $(x-x_0)$ es un factor primo de $P(x)$.
2. Los demás factores se encuentran al efectuar: $\frac{P(x)}{x-x_0}$
3. Los valores que anulan a $P(x)$; se pueden encontrar:

$$\text{Posibles ceros} = x_0 = \frac{\text{Divisores T. indep. de } P(x)}{\text{Divisores Coef. Principal de } P(x)}$$

Ejemplo:

Factorizar:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\text{Posibles ceros} = \pm \frac{\text{Divisores } 6}{\text{Divisor de } 1}$$

$$\text{Posibles ceros} = \pm \{1, 2, 3, 6\}$$

Probando con uno de ellos: para $x = 1$ por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -6 & 1 & -6 & \\ 1 & \downarrow & & & & \\ & 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

R = 0 lo que significa que $x = 1$ es un cero, luego un factor es $(x-1)$.

Entonces:

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$$

$$x \quad -3$$

$$x \quad -2$$

$$\therefore P(x) = (x-1)(x-3)(x-2)$$

ÁLGEBRA

PROBLEMAS

1. Factorizar e indicar la suma de los coeficientes de uno de sus factores primos.

$$x^6 - x^4 + 2x^2 - 1$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Factorizar e indicar un factor primo.

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad + 2bc$$

- a) $(a+b+c-d)$ b) $(a-b-c-d)$
c) $(a-b-c+d)$ d) $(a+b+c+d)$
e) $(a-b+c+d)$

3. Hallar un factor primo al factorizar:

$$abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$$

- a) $ax+b$ b) $ax-b$ c) $b-ax$
d) $bx-a$ e) $x+a$

4. Factorizar e indicar la suma de los coeficientes de los factores primos.

$$3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$$

- a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

5. Factorizar y hallar un factor primo.

$$F(x) = x^4 - 4x^2 - 12x - 5$$

- a) $x-1$ b) $x+1$ c) $x-2$
d) $x+2$ e) $x-3$

6. Factorizar e indicar la suma de los coeficientes de un factor primo.

$$(x - y)m + 2m + (y - x)n - zn$$

- a) 1 b) -1 c) 2 d) -3 e) 4

7. Factorizar e indicar la suma de los coeficientes del factor primo cuadrático

$$x^5 + x + 1$$

- a) 3 b) 1 c) 0 d) 4 e) 5

8. Factorizar e indicar el número de factores primos.

$$F(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$$

- a) 3 b) 1 c) 0 d) 4 e) 5

9. Uno de los factores de:

$$x^6 - x^2 - 8x - 16$$

- a) x^3-4 b) x^3-2x+4 c) x^2+2x+4
d) x^3-x-4 e) x^3-x+4

10. Uno de los factores de:

$$x^4 + 2x^2 + 9$$

- a) x^2-3 b) x^2-2x+3 c) $x+1$
d) x^2+3 e) x^2-2x-3

11. Factorizar e indicar la suma de sus factores primos.

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

- a) 3 b) -1 c) 4 d) 2 e) -2

12. Factorizar e indicar el término independiente de uno de sus factores primos.

$$F(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. Señale un factor primo

$$x(x-2) + y(y-2) + 2xy + 1$$

- a) $x-y+1$ b) $x+y-1$ c) $x+y+1$
d) $x-y-1$ e) $x-1$

14. Factorizar e indicar la suma de los términos independientes de los factores primos.

$$x^5 + x^4 + 2x^3 - 1$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

ÁLGEBRA

15. Factorizar e indicar el término independiente de un factor primo.

$$M = -a^2 - b^2 + c^2 + 2a - 2b + 2c + 2ab$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

16. Factorizar

$$x^2 - m^2 + 2xz + z^2$$

Calcular uno de sus términos de sus factores primos.

- a) 3x b) x c) 2z d) xz e) m

17. Factorizar e indicar el producto de los términos independientes de los factores primos.

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x - 15$$

- a) 14 b) -12 c) -14 d) 15 e) -15

18. Factorizar e indicar un factor primo.

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

- a) x + 2 b) x - 4 c) x - 3

- d) x + 3 e) x + 5

19. Factorizar e indicar el producto de los términos de uno de sus factores primos

$$16x^4 + 31x^2 + 25$$

- a) 60x³ b) 30x³ c) 20x³

- d) 10x³ e) 40x³

CLAVES

1a	2a	3a	4a	5b	6c	7a
8a	9d	10b	11d	12	13b	14a
15b	16e	17c	18d	19a		