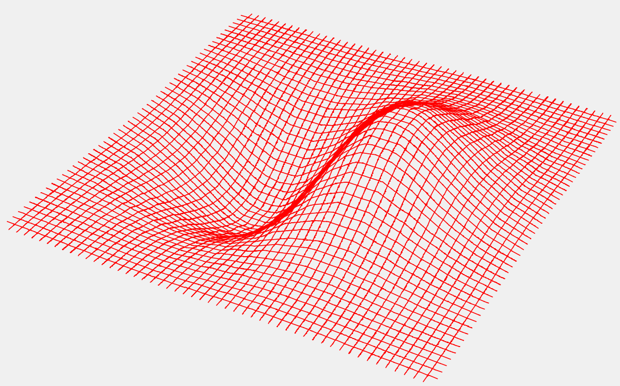
MathCon

The Mathematics Firm

Factorización



José de Jesús Ángel Ángel, ©2010.

Contenido

1

Introducción

Este documento tiene por objetivo dar algunas técnicas usadas para factorizar expresiones algebraicas. Por lo tanto es necesario primero dar a conocer los elementos y la notación más comúnmente usadas en el manejo de las expresiones algebraicas.

1.1. Notación

Conjuntos de números:

1. Números naturales: es el siguiente conjunto
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$
2. Números enteros: es el siguiente conjunto
$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$
3. Números racionales: es el siguiente conjunto
$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$
   a) Todos los números racionales tienen una expansión decimal finita o periódica.
      $a.1)$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$
      $a.2)$ $\frac{1}{7} = 0{,}142857$
      $a.3)$ $\frac{1}{11} = 0{,}090909, ..$
   b) Si un número tiene una expansión decimal infinita y no periódica, entonces no es racional.
4. Números irracionales ($\mathbb{I}$): son aquellos que no son racionales, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, e, ..

5. Números reales: es el siguiente conjunto

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \bigcup \mathbb{I}$$

Operaciones entre números, los números reales cumplen siempre las siguientes propiedades:

1. La suma es conmutativa, $a + b = b + a$.
2. La suma es asociativa, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Existe un número llamado cero o neutro aditivo, tal que $a + 0 = a$.
4. Para todo número a existe su inverso aditivo $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.
5. El producto es conmutativo, $a \cdot b = b \cdot a$.
6. El producto es asociativo, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
7. Existe un número llamado uno o neutro multiplicativo, tal que $a \cdot 1 = a$.
8. Para todo número $a \neq 0$ existe su inverso multiplicativo $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

9. La ley distributiva del producto respecto a la suma:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Note que el producto entre constantes o variables se denota con un punto $a \cdot b$ ó simplemente se omite el punto ab.

Términos algebraicos usados:

1. Una constante es un número que no cambia de valor y se denota generalmente con alguna de las primeras letras del abecedario, como $a, b, c, ..$
2. Una variable representa un número que cambia de valor y se denota generalmente con las últimas letras del abecedario, como $..., x, y, z$
3. Una combinación de constantes y variables con la operación producto y división se llama término, por ejemplo $2a, 3b, 2abx, 4xyz, \frac{2}{a}, \frac{3ax}{bz}..$
4. Una combinación de términos con la operación suma y resta se llama expresión, por ejemplo,$a + b, 3ax - 2z, ...$

2
Factor común

En los siguientes ejercicios se usará la ley de la distributividad del producto respecto a la suma

$$a(b+c) = ab + ac$$

Pasar del lado izquierdo al derecho de la igualdad se dice:

"se distribuye a"

Pasar del lado derecho al izquierdo de la igualdad se dice:

"se factoriza a"

2.1. Ejercicios: factor común

Ahora procedemos a efectuar ejemplos con un factor común.

1. Encontrar un factor común en $2a+4$

Paso 1 Buscamos el factor común de $2a$ y 4.
Como el factor común de $2a$ y 4 es 2, procedemos a factorizarlo:

$$\begin{aligned} 2a+4 &= 2\cdot a + 2\cdot 2 \\ &= 2(a+2), \end{aligned}$$

2. Encontrar un factor común en $3b+6$

Paso 1 Buscamos el factor común de $3b$ y 6.
Como el factor común de $3b$ y 6 es 3, procedemos a factorizarlo:

$$\begin{aligned} 3b+6 &= 3\cdot b+3\cdot 2 \\ &= 3(b+2) \end{aligned}$$

3. **Encontrar un factor común en $a+a^2$**

Paso 1 Buscamos el factor común de a y a^2.
Como el factor común de a y a^2 es a, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} a+a^2 &= a\cdot 1+a\cdot a \\ &= a(1+a) \end{aligned}$$

4. **Encontrar un factor común en b^2+b^3**

Paso 1 Buscamos el factor común de b^2 y b^3.
Como el factor común de b^2 y b^3 es b^2, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} b^2+b^3 &= b^2\cdot 1+b^2\cdot b \\ &= b^2(1+b) \end{aligned}$$

5. **Encontrar un factor común en $3a+4a^2+5a^3$**

Paso 1 Buscamos el factor común de $3a$, $4a^2$ y $5a^3$.
Como el factor común de $3a$, $4a^2$ y $5a^3$ es a, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 3a+4a^2+5a^3 &= (a\cdot 3)+(a\cdot 4a)+(a\cdot 5a^2) \\ &= a(3+4a+5a^2) \end{aligned}$$

6. **Encontrar un factor común en $5x^3+2x-3x^2$**

Paso 1 Buscamos el factor común de $5x^3$, $2x$ y $3x^2$.
Como el factor común de $5x^3$, $2x$ y $3x^2$ es x, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 5x^3+2x-3x^2 &= (x\cdot 5x^2)+(x\cdot 2)-(x\cdot 3x) \\ &= x(5x^2+2-3x) \end{aligned}$$

7. **Encontrar un factor común en $2a^3-4a+6a^2$**

5

Paso 1 Buscamos el factor común de $2a^3$, $4a$ y $6a^2$.
Como el factor común de $2a^3$, $4a$ y $6a^2$ es $2a$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 2a^3 - 4a + 6a^2 &= (2a \cdot a^2) - (2a \cdot 2) + (2a \cdot 3a) \\ &= 2a(a^2 - 2 + 3a) \end{aligned}$$

8. Encontrar un factor común en $4b - 12b^2 + 8b^3$

Paso 1 Buscamos el factor común de $4b$, $12b^2$ y $8b^3$.
Como el factor común de $4b$, $12b^2$ y $8b^3$ es $4b$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 4b - 12b^2 + 8b^3 &= (4b \cdot 1) - (4b \cdot 3b) + (4b \cdot 2b^2) \\ &= 4b(1 - 3b + 2b^2) \end{aligned}$$

9. Encontrar un factor común en $5m^2 + 10m^3 - 15m^5$

Paso 1 Buscamos el factor común de $5m^2$, $10m^3$ y $15m^5$.
Como el factor común de $5m^2$, $10m^3$ y $15m^5$ es $5m^2$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 5m^2 + 10m^3 - 15m^5 &= (5m^2 \cdot 1) + (5m^2 \cdot 2m) - (5m^2 \cdot 3m^3) \\ &= 5m^2(1 + 2m - 3m^3) \end{aligned}$$

10. Encontrar un factor común en $2a^3b + 4a^5c - 6a^2d$

Paso 1 Buscamos el factor común de $2a^3b$, $4a^5c$ y $6a^2d$.
Como el factor común de $2a^3b$, $4a^{5c}$ y $6a^2d$ es $2a^2$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 2a^3b + 4a^5c - 6a^2d &= (2a^2 \cdot ab) + (2a^2 \cdot 2a^3c) - (2a^2 \cdot 3d) \\ &= 2a^2(ab + 2a^3c - 3d) \end{aligned}$$

11. Encontrar un factor común en $8x^2y - 12xy^2$

Paso 1 Buscamos el factor común de $8x^2y$ y $12xy^2$.
Como el factor común de $8x^2y$ y $12xy^2$ es $4xy$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 8x^2y - 12xy^2 &= (4xy \cdot 2x) - (4xy \cdot 3y) \\ &= 4xy(2x - 3y) \end{aligned}$$

12. Encontrar un factor común en $20x^3y^2 + 25x^2y^3$

Paso 1 Buscamos el factor común de $20x^3y^2$ y $25x^2y^3$.
Como el factor común de $20x^3y^2$ y $25x^2y^3$ es $5x^2y^2$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 20x^3y^2 + 25x^2y^3 &= (5x^2y^2 \cdot 4x) + (5x^2y^2 \cdot 5y) \\ &= 5x^2y^2(4x + 5y) \end{aligned}$$

13. Encontrar un factor común en $3x^2yz^3 + 6xy^2z^2$

Paso 1 Buscamos el factor común de $3x^2yz^3$ y $6xy^2z^2$.
Como el factor común de $3x^2yz^3$ y $6xy^2z^2$ es $3xyz^2$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 3x^2yz^3 + 6xy^2z^2 &= (3xyz^2 \cdot xz) + (3xyz^2 \cdot 2y) \\ &= 3xyz^2(xz + 2y) \end{aligned}$$

14. Encontrar un factor común en $14a^2b^2c - 21ab^3c^2$

Paso 1 Buscamos el factor común de $14a^2b^2c$ y $21ab^3c^2$.
Como el factor común de $14a^2b^2c$ y $21ab^3c^2$ es $7ab^2c$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 14a^2b^2c - 21ab^3c^2 &= (7ab^2c \cdot 2a) - (7ab^2c \cdot 3bc) \\ &= 7ab^2c(2a - 3bc) \end{aligned}$$

15. Encontrar un factor común en $10a^4b^5x^3 + 35a^2b^7x^2$

Paso 1 Buscamos el factor común de $10a^4b^5x^3$ y $35a^2b^7x^2$.
Como el factor común de $10a^4b^5x^3$ y $35a^2b^7x^2$ es $5a^2b^5x^2$,
procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 10a^4b^5x^3 + 35a^2b^7x^2 &= (5a^2b^5x^2 \cdot 2a^2x) + (5a^2b^5x^2 \cdot 7b^2) \\ &= 5a^2b^5x^2(2a^2x + 7b^2) \end{aligned}$$

16. Encontrar un factor común en $45ax^3by + 9a^2xb^3y$

Paso 1 Buscamos el factor común de $45ax^3by$ y $9a^2xb^3y$.
Como el factor común de $45ax^3by$ y $9a^2xb^3y$ es $9axby$,
procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 45ax^3by + 9a^2xb^3y &= (9axby \cdot 5x^2) + (9axby \cdot ab^2) \\ &= 9axby(5x^2 + ab^2) \end{aligned}$$

17. Encontrar un factor común en $12ab + 3abc + 6bcd$

Paso 1 Buscamos el factor común de $12ab$, $3abc$ y $6bcd$.
Como el factor común de $12ab$, $3abc$ y $6bcd$ es $3b$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 12ab + 3abc + 6bcd &= (3b \cdot 4a) + (3b \cdot ac) + (3b \cdot 2cd) \\ &= 3b(4a + ac + 2cd) \end{aligned}$$

18. Encontrar un factor común en $15ab^2 - 25a^3b + 30a^3b^2c$

Paso 1 Buscamos el factor común de $15ab^2$, $25a^3b$ y $30a^3b^2c$.
Como el factor común de $15ab^2$, $25a^3b$ y $30a^3b^2c$ es $5ab$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 15ab^2 - 25a^3b + 30a^3b^2c &= (5ab \cdot 3b) - (5ab \cdot 5a^2) + (5ab \cdot 6a^2bc) \\ &= 5ab(3b - 5a^2 + 6a^2bc) \end{aligned}$$

19. Encontrar un factor común en $45a^5b^3x^6y^2 + 15a^2b^3x^3yd$

Paso 1 Buscamos el factor común de $45a^5b^3x^6y^2$ y $15a^2b^3x^3yd$.
Como el factor común de $45a^5b^3x^6y^2$ y $15a^2b^3x^3yd$ es $15a^2b^3x^3y$, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 45a^5b^3x^6y^2 + 15a^2b^3x^3yd &= (15a^2b^3x^3y \cdot 3a^3x^3y) + (15a^2b^3x^3y \cdot d) \\ &= 15a^2b^3x^3y(3a^3x^3y + d) \end{aligned}$$

20. Encontrar un factor común en $35a^2bc^5y^2 - 21a^2bc^3y + 49ab^2c^3y^3m$

Paso 1 Buscamos el factor común de $35a^2bc^5y^2$, $21a^2bc^3y$ y $49ab^2c^3y^3m$.
Como el factor común de $35a^2bc^5y^2$, $21a^2bc^3y$ y $49ab^2c^3y^3m$ es abc^3y, procedemos a factorizarlo.

$$\begin{aligned} 35a^2bc^5y^2 - 21a^2bc^3y + 49ab^2c^3y^3m &= (7abc^3y \cdot 5ac^2y) - (7abc^3y \cdot 3a) \\ &\quad +(7abc^3y \cdot 7by^2m) \\ &= 7abc^3y(5ac^2y - 3a + 7by^2m) \end{aligned}$$

3

Un binomio como factor común

En esta serie de problemas, debemos factorizar un binomio, que sin embargo sigue la misma idea que los anteriores problemas, es decir, se aplica la ley $a(b+c) = ab + ac$.

3.1. Ejercicios: binomio como factor común

1. Factorizar $x(m+n) + y(m+n)$

Paso 1 Buscamos el factor común de $x(m+n)$ y $y(m+n)$,
como el factor común de $x(m+n)$ y $y(m+n)$ es $(m+n)$, podemos factorizarlo.

$$x(m+n) + y(m+n) = (m+n)(x+y).$$

2. Factorizar $a(x-y) + b(x-y)$

Paso 1 Buscamos el factor común de $a(x-y)$ y $b(x-y)$,
como el factor común de $a(x-y)$ y $b(x-y)$ es $(x-y)$,podemos factorizarlo.

$$a(x-y) + b(x-y) = (x-y)(a+b).$$

3. Factorizar $r(m+n) - s(m+n)$

Paso 1 Buscamos el factor común de $r(m+n)$ y $s(m+n)$,
como el factor común de $r(m+n)$ y $s(m+n)$ es $(m+n)$, podemos factorizarlo.

$$r(m+n) - s(m+n) = (m+n)(r-s).$$

4. **Factorizar $x(a+b)+a+b$**

Paso 1 Asociamos los términos:

$$x(a+b)+a+b \quad = x(a+b)+(a+b)$$

Paso 2 Buscamos el factor común de $x(a+b)$ y $(a+b)$,
como el factor común es $(a+b)$, entonces:

$$\begin{aligned} x(a+b)+a+b &= x\cdot(a+b)+1\cdot(a+b) \\ &= (a+b)(x+1). \end{aligned}$$

5. **Factorizar $x(a+b)-a-b$**

Paso 1 Factorizamos a -1 de $-a-b$:

$$x(a+b)-a-b \quad = x(a+b)-(a+b)$$

Paso 2 Buscamos el factor común de $x(a+b)$ y $(a+b)$,
como el factor común es $(a+b)$, entonces:

$$\begin{aligned} x(a+b)-a-b &= x\cdot(a+b)-1\cdot(a+b) \\ &= (a+b)(x-1). \end{aligned}$$

6. **Factorizar $a(c-d)+xc-xd$**

Paso 1 Factorizamos a x de $xc-xd$:

$$a(c-d)+xc-xd \quad = a(c-d)+x(c-d)$$

Paso 2 Buscamos el factor común de $a(c-d)$ y $x(c-d)$,
como el factor común es $(c-d)$, entonces:

$$\begin{aligned} a(c-d)+xc-xd &= a\cdot(c-d)+x\cdot(c-d) \\ &= (c-d)(a+x). \end{aligned}$$

7. **Factorizar $a(m+2n)+bm+2bn$**

Paso 1 Factorizamos a b de $bm+2bn$:

$$a(m+2n)+bm+2bn = a(m+2n)+b(m+2n)$$

Paso 2 Localizamos el factor común $(m+2n)$, entonces:

$$\begin{aligned} a(m+2n)+bm+2bn &= a\cdot(m+2n)+b\cdot(m+2n) \\ &= (m+2n)(a+b). \end{aligned}$$

8. **Factorizar $x(3a+1)+6a+2$**

Paso 1 Factorizamos a 2 de $6a+2$:

$$x(3a+1)+6a+2 = x(3a+1)+2(3a+1)$$

Paso 2 Localizamos el factor común $(3a+1)$, entonces:

$$\begin{aligned} x(3a+1)+6a+2 &= x\cdot(3a+1)+2\cdot(3a+1) \\ &= (3a+1)(x+2). \end{aligned}$$

9. **Factorizar $m(4x-1)+12x-3$**

Paso 1 Factorizamos a 3 de $12x-3$:

$$m(4x-1)+12x-3 = m(4x-1)+3(4x-1)$$

Paso 2 Localizamos el factor común $(4x-1)$, entonces:

$$\begin{aligned} m(4x-1)+3(4x-1) &= m\cdot(4x-1)+3\cdot(4x-1) \\ &= (4x-1)(m+3). \end{aligned}$$

10. **Factorizar $y(5x-2)-15x+6$**

Paso 1 Factorizamos a 3 de $15x+6$:

$$y(5x-2)-15x+6 = y(5x-2)-3(5x+2)$$

Paso 2 Localizamos factor común $(5x+2)$, entonces:

$$\begin{aligned} y(5x-2)-15x+6 &= y\cdot(5x-2)-3\cdot(5x+2) \\ &= (5x+2)(y-3). \end{aligned}$$

4

Factorización completa

En esta serie de problemas, debemos de aplicar los dos tipos de factorización anteriores.

4.1. Ejercicios: factorización completa

Factorizar $ax + bx - ay - by$

$$\begin{aligned} ax + bx - ay - by &= x(a+b) - ay - by && \text{Factorizamos a } x \\ &= x(a+b) - y(a+b) && \text{Factorizamos a } y \\ &= (a+b)(x-y) && \text{Factorizamos a } (a+b) \end{aligned}$$

Factorizar $2xy + y - 6x - 3$

$$\begin{aligned} 2xy + y - 6x - 3 &= y(2x+1) - 6x - 3 && \text{Factorizamos a } y \\ &= y(2x+1) - 3(2x+1) && \text{Factorizamos a } 3 \\ &= (2x+1)(y-3) && \text{Factorizamos a } (2x+1) \end{aligned}$$

Factorizar $3mn + 15n - 4m - 20$

$$\begin{aligned} 3mn + 15n - 4m - 20 &= 3n(m+5) - 4m - 20 && \text{Factorizamos a } 3n \\ &= 3n(m+5) - 4(m+5) && \text{Factorizamos a } 4 \\ &= (m+5)(3n-4) && \text{Factorizamos a } (m+5) \end{aligned}$$

Factorizar $2a^2 + 6a - 3ab - 9b$

$$\begin{aligned} 2a^2 + 6a - 3ab - 9b &= 2a(a+3) - 3ab - 9b && \text{Factorizamos a } 2a \\ &= 2a(a+3) - 3b(a+3) && \text{Factorizamos a } 3b \\ &= (a+3)(2a-3b) && \text{Factorizamos a } (a+3) \end{aligned}$$

Factorizar $x + y^2 - 3mx - 3my^2$

12

$$\begin{aligned} x+y^2-3mx-3my^2 &= x-3mx+y^2-3my^2 && \text{Conmutamos}\\ &= x(1-3m)+y^2-3my^2 && \text{Factorizamos a } x\\ &= x(1-3m)+y^2(1-3m) && \text{Factorizamos a } y^2\\ &= (1-3m)(x+y^2) && \text{Factorizamos a } (1-3m) \end{aligned}$$

Factorizar $6ab+15a+4b+10$

$$\begin{aligned} 6ab+15a+4b+10 &= 3a(2b+5)+4b+10 && \text{Factorizamos a } 3a\\ &= 3a(2b+5)+2(2b+5) && \text{Factorizamos a } 2\\ &= (2b+5)(3a+2) && \text{Factorizamos a } (2b+5) \end{aligned}$$

8. Factorizar $12mn+8m+3n+2$

$$\begin{aligned} 12mn+8m+3n+2 &= 4m(3n+2)+3n+2 && \text{Factorizamos a } 4m\\ &= (3n+2)(4m+1) && \text{Factorizamos a } (3n+2) \end{aligned}$$

9. Factorizar $4+15xy+5x+12y$

$$\begin{aligned} 4+15xy+5x+12y &= 15xy+5x+12y+4 && \text{Conmutamos}\\ &= 5x(3y+1)+12y+4 && \text{Factorizamos a } 5x\\ &= 5x(3y+1)+4(3y+1) && \text{Factorizamos a } 4\\ &= (3y+1)(5x+4) && \text{Factorizamos a } (3y+1) \end{aligned}$$

10. Factorizar $-6y-9+15x+10xy$

$$\begin{aligned} -6y-9+15x+10xy &= -3(2y+3)+15x+10xy && \text{Factorizamos a } -3\\ &= -3(2y+3)+5x(3+2y) && \text{Factorizamos a } 5x\\ &= (2y+3)(5x-3) && \text{Factorizamos a } (2y+3) \end{aligned}$$

11. Factorizar $3ab-9a-b+3$

$$\begin{aligned} 3ab-9a-b+3 &= 3a(b-3)-b+3 && \text{Factorizamos a } 3a\\ &= 3a(b-3)-1(b-3) && \text{Factorizamos a } -1\\ &= (b-3)(3a-1) && \text{Factorizamos a } (b-3) \end{aligned}$$

5

Diferencia de cuadrados

En esta serie de problemas, aplicaremos la fórmula de diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Esta fórmula puede ser fácilmente comprobada al realizar la operación $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

5.1. Ejercicios: diferencia de cuadrados

1. Factorizar $a^2 - b^2$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \text{Aplicando la diferencia de cuadrados}$$

2. Factorizar $x^2 - y^2$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \quad \text{Aplicando la diferencia de cuadrados}$$

3. Factorizar $4a^2 - 9$

$$\begin{aligned} 4a^2 - 9 &= (2a)^2 - (3)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (2a+3)(2a-3) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

4. Factorizar $9b^2 - 16$

$$\begin{aligned} 9b^2 - 16 &= (3b)^2 - (4)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (3b+4)(3b-4) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

5. Factorizar $16a^4 - 9b^6$

$$\begin{aligned} 16a^4 - 9b^6 &= (4a^2)^2 - (3b^3)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (4a^2+3b^3)(4a^2-3b^3) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

6. **Factorizar $25x^2y^4 - 4z^6$**

$$\begin{aligned} 25x^2y^4 - 4z^6 &= (5xy^2)^2 - (2z^3)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (5xy^2 + 2z^3)(5xy^2 - 2z^3) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

7. **Factorizar $49x^2b^4 - 225$**

$$\begin{aligned} 49x^2b^4 - 225 &= (7xb^2)^2 - (15)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (7xb^2 + 15)(7xb^2 - 15) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

8. **Factorizar $\frac{1}{4}a^4 - b^6$**

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^4 - b^6 &= (\frac{1}{2}a^2)^2 - (b^3)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (\frac{1}{2}a^2 + b^3)(\frac{1}{2}a^2 - b^3) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

9. **Factorizar $\frac{4}{49}a^4b^6 - \frac{1}{16}$**

$$\begin{aligned} \frac{4}{49}a^4b^6 - \frac{1}{16} &= (\frac{2}{7}a^2b^3)^2 - (\frac{1}{4})^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (\frac{2}{7}a^2b^3 + \frac{1}{4})(\frac{2}{7}a^2b^3 - \frac{1}{4}) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

10. **Factorizar $\frac{9}{16}x^2y^4 - \frac{25}{36}a^6$**

$$\begin{aligned} \frac{9}{16}x^2y^4 - \frac{25}{36}a^6 &= (\frac{3}{4}xy^2)^2 - (\frac{5}{6}a^3)^2 && \text{Re-escribiendo} \\ &= (\frac{3}{4}xy^2 + \frac{5}{6}a^3)(\frac{3}{4}xy^2 - \frac{5}{6}a^3) && \text{Aplicando la diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

15

6

Trinomio cuadrado perfecto

En esta serie de problemas, aplicaremos la regla de un trinomio cuadrado perfecto. Se sabe que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces el lado izquierdo de la igualdad se llama trinomio cuadrado perfecto, ya que se puede escribir como un cuadrado de una suma. Cada ves que detectemos un trinomio cuadrado perfecto podemos aplicar esta igualdad. Para detectar si un trinomio es cuadrado perfecto, hay que tomar un término, ver que es un cuadrado (a^2), obtener la raíz (a), verificar si esta raíz (a) esta en otro término $(2ab)$, en tal caso verificar solo si la mitad de al cuadrado de la parte restante $(2b)$, es precisamente el tercer término(b^2).

6.1. Ejercicios: trinomio cuadrado perfecto

1. Factorizar $x^2 - 2xy + y^2$

    a) x^2 es el cuadrado de x.

    b) $2xy$ es el término donde aparece x.

    c) $2y$ es la parte restante a x del término anterior.

    d) y es la mitad de esa parte restante.

    e) y^2 es el cuadrado de esa mitad.

    f) y^2 es en efecto, el tercer término del trinomio.

    Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

    $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ El “-” es debido al signo en $-2xy$

2. **Factorizar $x^2 + 4x + 4$**

   a) x^2 es el cuadrado de x.
   b) $4x$ es el término donde aparece x.
   c) 4 es la parte restante a x del término anterior.
   d) 2 es la mitad de esa parte restante.
   e) $2^2 = 4$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) 4 es en efecto, el tercer término del trinomio.

   Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.
   $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ El "+" es debido al signo en $+4x$

3. **Factorizar $y^4 - 8y^2 + 16$**

   a) y^4 es el cuadrado de y^2.
   b) $8y^2$ es el término donde aparece y^2.
   c) 8 es la parte restante a y^2 del término anterior.
   d) 4 es la mitad de esa parte restante.
   e) $4^2 = 16$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) 16 es en efecto, el tercer término del trinomio.

   Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.
   $y^2 - 8y^2 + 16 = (y^2 + 4)^2$ El "-" es debido al signo en $-8y^2$

4. **Factorizar $4x^2 + 12x + 9$**

   a) $4x^2$ es el cuadrado de $2x$.
   b) $12x = 6 \cdot 2x$ es el término donde aparece $2x$.
   c) 6 es la parte restante a $2x$ del paso anterior.
   d) 3 es la mitad de esa parte restante.
   e) $3^2 = 9$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) 9 es en efecto, el tercer término del trinomio.

   Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.
   $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 9)^2$ El "+" es debido al signo en $12x$

5. **Factorizar $9y^2 - 24y + 16$**

   a) $9y^2$ es el cuadrado de $3y$.
   b) $24y = 4 \cdot 3y$ es el término donde aparece $3y$.
   c) 4 es la parte restante a $3y$ del paso anterior.
   d) 2 es la mitad de esa parte restante.
   e) $4^2 = 16$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) 16 es en efecto, el tercer término del trinomio.

   Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

   $9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$ El "-" es debido al signo en $-24y$

6. **Factorizar $4x^4 + 20x^2 + 25$**

   a) $4x^4$ es el cuadrado de $2x^2$.
   b) $20x^2 = 10 \cdot 2x^2$ es el término donde aparece $2x^2$.
   c) 10 es la parte restante a $2x^2$ del paso anterior.
   d) 5 es la mitad de esa parte restante.
   e) $5^2 = 25$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) 25 es en efecto, el tercer término del trinomio.

   Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

   $4x^4 + 20x^2 + 25 = (2x^2 + 5)^2$ El "+" es debido al signo en $20x^2$

7. **Factorizar $16a^4 - 24a^2b + 9b^2$**

   a) $16a^4$ es el cuadrado de $4a^2$.
   b) $24a^2b = 6 \cdot 4a^2b$ es el término donde aparece $4a^2$.
   c) $6b$ es la parte restante a $4a^2$ del paso anterior.
   d) $3b$ es la mitad de esa parte restante.
   e) $(3b)^2 = 9b^2$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) $9b^2$ es en efecto, el tercer término del trinomio.

18

Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

$16a^4 - 24a^2b + 9b^2 \quad = \quad (4a^2 - 3b)^2$ El "-" es debido al signo en $-24a^2b$

8. Factorizar $4a^4 - 20a^2b^3 + 25b^6$

   a) $4a^4$ es el cuadrado de $2a^2$.
   b) $20a^2b^3 = 10 \cdot 2a^2b^3$ es el término donde aparece $2a^2$.
   c) $10b^3$ es la parte restante a $2a^2$ del paso anterior.
   d) $5b^3$ es la mitad de esa parte restante.
   e) $(5b^3)^2 = 25b^6$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) $25b^6$ es en efecto, el tercer término del trinomio.

Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

$4a^4 - 20a^2b^3 + 25b^6 \quad = \quad (2a^2 - 5b^3)^2$ El "-" es debido al signo en $-24a^2b$

9. Factorizar $\frac{9x^2}{4} + 2xy + \frac{4y^2}{9}$

   a) $\frac{9x^2}{4}$ es el cuadrado de $\frac{3x}{2}$.
   b) $2xy = \frac{3x}{2}\frac{4}{3}y$ es el término donde aparece $\frac{3x}{2}$.
   c) $\frac{4}{3}y$ es la parte restante a $\frac{3x}{2}$ del paso anterior.
   d) $\frac{2}{3}y$ es la mitad de esa parte restante.
   e) $(\frac{2}{3}y)^2 = \frac{4y^2}{9}$ es el cuadrado de esa mitad.
   f) $\frac{4y^2}{9}$ es en efecto, el tercer término del trinomio.

Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

$\frac{9x^2}{4} + 2xy + \frac{4y^2}{9} \quad = \quad (\frac{3x}{2} + \frac{2}{3}y)^2$ El "+" es debido al signo en $+2xy$

19

10. **Factorizar $\frac{4a^2}{9} - \frac{4ab}{5} + \frac{9b^2}{25}$**

a) $\frac{4a^2}{9}$ es el cuadrado de $\frac{2a}{3}$.

b) $\frac{4ab}{5} = \frac{6b}{5}\frac{2a}{3}$ es el término donde aparece $\frac{2a}{3}$.

c) $\frac{6b}{5}$ es la parte restante a $\frac{2a}{3}$ del paso anterior.

d) $\frac{3b}{5}$ es la mitad de esa parte restante.

e) $(\frac{3b}{5})^2 = \frac{9b^2}{25}$ es el cuadrado de esa mitad.

f) $\frac{9b^2}{25}$ es en efecto, el tercer del trinomio.

Por lo tanto el trinomio es cuadrado perfecto.

$$\frac{4a^2}{9} - \frac{4ab}{5} + \frac{9b^2}{25} = (\frac{2a}{3} - \frac{3b}{5})^2$$ El "-" es debido al signo en $-\frac{4ab}{5}$

7

Factorización de trinomios

Algunos trinomios pueden ser factorizados por simple inspección de sus elementos. Si observamos que $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$. Entonces, si podemos encontrar números a, b tales que su suma sea el coeficiente de x y su producto sea el tercer término de un trinomio de la forma $x^2 + (a+b)x + ab$, podemos aplicar la anterior observación para factorizar el trinomio.

7.1. Ejercicios: factorización de trinomios

1. Factorizar $x^2 + 4x + 3$

   a) 3 y 1 suman 4,

   b) 3 por 1 da 3,

   c) Por lo tanto $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$.

2. Factorizar $x^2 - 4x + 3$

   a) -3 y -1 suman -4,

   b) -3 por -1 da 3,

   c) Por lo tanto $x^2 + 4x + 3 = (x-3)(x-1)$.

3. Factorizar $x^2 + 3x - 10$

   a) 5 y -2 suman 3,

b) 5 por -2 da -10,

c) Por lo tanto $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$.

4. Factorizar $x^2 - 2x - 8$

a) 4 y -2 suman -2,

b) 4 por -2 da -8,

c) Por lo tanto $x^2 - 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

5. Factorizar $x^2 + x - 20$

a) 5 y -4 suman 1,

b) 5 por -4 da -20,

c) Por lo tanto $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$.

6. Factorizar $x^2 - x - 12$

a) -4 y 3 suman -1,

b) -4 por 3 da -12,

c) Por lo tanto $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$.

7. Factorizar $x^2 + 7x + 6$

a) 6 y 1 suman 7,

b) 6 por 1 da 6,

c) Por lo tanto $x^2 + 7x + 6 = (x + 6)(x + 1)$.

8. Factorizar $x^2 - 2x - 24$

a) -6 y 4 suman -2,

b) -6 por 4 da -24,

c) Por lo tanto $x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$.

9. Factorizar $x^2 - 9x + 8$

   a) -8 y -1 suman -9,
   b) -8 por -1 da -8,
   c) Por lo tanto $x^2 - 9x + 8 = (x - 8)(x - 1)$.

10. Factorizar $x^2 - 4x - 21$

    a) -7 y 3 suman -4,
    b) -7 por 3 da -21,
    c) Por lo tanto $x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$.

11. Factorizar $a^2 + 5a + 6$

    a) 3 y 2 suman 5,
    b) 3 por 2 da 6,
    c) Por lo tanto $a^2 + 5a + 6 = (a + 3)(a + 2)$.

12. Factorizar $b^2 - 7b + 12$

    a) -4 y -3 suman -7,
    b) -4 por -3 da 12,
    c) Por lo tanto $b^2 - 7b + 12 = (b - 4)(b - 3)$.

13. Factorizar $c^2 - 4c + 3$

    a) -3 y -1 suman -4,
    b) -3 por -1 da 3,
    c) Por lo tanto $c^2 - 4c + 3 = (c - 3)(c - 1)$.

14. Factorizar $x^4 + 8x^2 + 7$

a) 7 y 1 suman 8,

b) 7 por 1 da 7,

c) Por lo tanto $x^4 + 8x^2 + 7 = (x^2 + 7)(x^2 + 1)$.

15. Factorizar $x^4 - 8x^2 + 15$

a) -5 y -3 suman -8,

b) -5 por -3 da 15,

c) Por lo tanto $x^4 - 8x^2 + 15 = (x^2 - 5)(x^2 - 3)$.

16. Factorizar $a^6 - 7a^3 + 10$

a) -5 y -2 suman -7,

b) -5 por -2 da 10,

c) Por lo tanto $a^6 - 7a^3 + 10 = (a^3 - 5)(a^3 - 2)$.

17. Factorizar $x^2 - 2x - 35$

a) -7 y 5 suman -2,

b) -7 por 5 da 35,

c) Por lo tanto $x^2 - 2x - 35 = (x - 7)(x + 5)$.

18. Factorizar $x^2 + 3x - 54$

a) 9 y -6 suman 3,

b) 9 por -6 da -54.

c) Por lo tanto $x^2 + 3x - 54 = (x + 9)(x - 6)$.

19. Factorizar $x^2 - 20x + 75$

a) -5 y -15 suman -20,

b) -5 por -15 da 75,

c) Por lo tanto $x^2 - 20x + 75 = (x - 5)(x - 15)$.

20. Factorizar $x^2 - 12x - 64$

a) -16 y 4 suman -12,

b) -16 por 4 da 64,

c) Por lo tanto $x^2 - 12x - 64 = (x - 16)(x + 4)$.

21. Factorizar $x^2 - 16x + 48$

a) -12 y -4 suman -16,

b) -12 por -4 da 48,

c) Por lo tanto $x^2 - 16x + 48 = (x - 12)(x - 4)$.

22. Factorizar $x^2 - 8x - 20$

a) -10 y 2 suman -8,

b) -10 por 2 da -20,

c) Por lo tanto $x^2 - 8x - 20 = (x - 8)(x - 20)$.

23. Factorizar $x^2 - 16x - 36$

a) -18 y 2 suman -16,

b) -18 por 2 da -36,

c) Por lo tanto $x^2 - 16x - 36 = (x - 18)(x + 2)$.

24. Factorizar $x^2 - 25x + 100$

a) -5 y -20 suman -25,

b) -5 por -20 da 100,

c) Por lo tanto $x^2 - 25x + 100 = (x - 5)(x - 20)$.

25. Factorizar $x^2 - 24x + 80$

a) -4 y -20 suman -24,

b) -4 por -20 da 80,

c) Por lo tanto $x^2 - 24x + 80 = (x - 4)(x - 20)$.

MathCon

The Mathematics Firm

www.math.com.mx
José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2010