U.N.S.E.

CURSO DE INGRESO

2011

CARTILLA DE MATEMÁTICA

CARRERAS:

CONTADOR PÚBLICO

LIC. EN ADMNISTRACIÓN

CURSO INTRODUCTORIO
ASIGNATURA:
MATEMÁTICA

INGRESO - 2011

Confección de la cartilla a cargo de:

Prof. Omar Lescano

Índice de contenidos:

Planificación

1ª Semana: El lenguaje matemático y los números. Operaciones y propiedades.

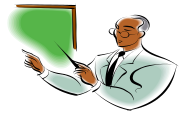
2ª Semana: Expresiones Algebraicas: Polinomios. Factorización

3ª Semana: Ecuaciones de 1º y 2º grado. Problemas

4ª Sistema de ecuaciones lineales. Problemas de aplicación.

5ª Semana: Funciones de 1º y 2º grado

Capitulo Nº 1 :El lenguaje de la matemática



El lenguaje simbólico

La matemática utiliza no solamente números, sino signos y símbolos que combinados lógicamente y bajo ciertas reglas sirven por ejemplo para traducir expresiones que pueden aparecer en un problema de índole matemático pero de aplicación cotidiana o real.

Nosotros presentaremos diferentes situaciones en donde se pongan en evidencia este tipo de lenguaje y su representación en forma simbólica.

Relación de menor: <

*La edad de Maria **es menor** que la suma de las edades de sus hermanas Carla y Lucia.*

Sin importar las edades reales de estas chicas y adoptando por ejemplo el uso de sus iniciales, traducimos:

$$M < C+L$$

Como también: $x < y + z$

claro está que en este caso habría que **definir** que significado tienen estas letras, puesto que lo escrito **no siempre** es interpretado de la misma manera por **otro lector**.
Esto se aclara explicitando:

x: edad de Maria , y: edad de carla, z: edad de Lucia

Pero esta forma simbólica no es la única.
La misma expresión dada se puede simbolizar como: $C+L > M$ y es correcta !

Ahora la relación es de **“mayor”** pero la traducción respeta la condición dada en el problema.

Volviendo al ejemplo dado al principio, si la tarea fuese al revés, es decir nos presentan
$M < C+L$

La traducción admite varias formas equivalentes a la dada en la primera oración.

Un ejemplo:

La edad de Maria no alcanza las edades de sus hermanas Carla y Lucia juntas.

Pero ojo que no siempre las oraciones dan el mismo significado.

Así es común confundir **la negación de menor** con **mayor** .

*La edad de Maria no **es mayor** que la suma de las edades de sus hermanas Carla y Lucia.*

Para esta expresión, le corresponde la siguiente notación: $M \leq C+L$

Que tiene doble interpretación: $M < C+ L$ o $M = C+L$

Las letras: a, b, c x

Escritas así solas pueden alcanzar cualquier significado matemático o no.

Pero si queremos decir que estos son número reales cualesquiera, deberemos asociarle **notación simbólica** que reduzca y aclare el lenguaje. O sea:

$a \in \Re$, $b \in \Re$, $c \in \Re$,etc. (se lee: a *es un número que está en los Números Reales*)

En la página anterior se vio un ejemplo de aplicación de la relación de **menor**.
Pero esa relación tiene un basamento teórico que es la **definición matemática** del concepto que es necesario conocer para fundamentar o profundizar otros temas.

Definición: Relación de menor dada en forma simbólica:

$$a < b \Leftrightarrow \exists\, c \in \Re^{+} \,/\, a+c = b$$

que se lee:

"Un número a es menor que otro b si existe un tercer número positivo c que sumado al primero de por resultado el segundo".

¿Y los números?

Cuando uno **aplica** una definición dada en forma simbólica, muchas veces reemplaza con **números para ejemplificar**, pero ese procedimiento lo que hace es probar esa definición en forma particular con esos números, lo que no significa que sea cierto para todos los casos, sobre todo si la definición tiene errores o restricciones.

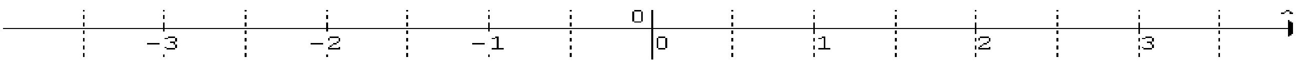
Ejemplos:

$2 < 7$ pues existe el 5 / $2+5 = 7$ $-5 < -2$ pues existe 3 / $-5+3 = -2$

$5<-10$ es falso puesto que $5 + \quad =-10$

De otra manera: a es menor que b si a esta a la izquierda de b .

Claro que para esto último se tendría que tener presente la recta numérica y tener ubicado los puntos que representen estos números



Cuidado: Cuando se dice que un número es menor cuando esta "mas cerca" del 0
2 esta mas cerca del 0 que 7, pero ¿ -5 esta mas cerca de 0 que -2 ?

Importante:

La **regla de los signos de la Suma**

Ejemplos:

-5+1 = - 4 **- 4 +10 = 6** **7 – 9 = -2** **- 3 – 5 = -8**

De diferentes signos *se* ***restan y*** *de* ***igual signo*** *se* ***suman***. *El* ***signo resultante es*** *el* ***de mayor valor absoluto.***

*(y **no** se debe aplicar **la regla** de la multiplicación como - x + , - x -, etc.)*

Reconociendo los números Reales

Los números reales **son todos los números** que se pueden representar en la recta.
Claro esta que no siempre esta representación es sencilla, pues no solamente están los negativos y positivos, sino los fraccionarios, decimales y los irracionales.
Cada tipo de número esta enmarcado dentro de un tipo de conjunto que los agrupa.
Recordemos los conjuntos numéricos dentro de los Reales:

N: Conjunto de los número Naturales.
Z: Conjunto de los números Enteros.
Q: Conjunto de los números racionales.
I: Conjunto de los números Irracionales.

R: Conjunto de los número Reales

Sin pretender explicar como se representan en la recta, daremos ejemplos de cada uno.

Irracionales:
Son los siguientes números, entre otros:

a.- Raíces no exactas**:** $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$

b.- El número de Arquímedes.π = 3.14159….relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

c.- El número de **oro** Φ = 1.618033... $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ da la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular (Primer número irracional conocido) le llaman *la proporción divina*

Racionales:
a)½ , b) -4 , c) 5,3 , d) $2\frac{3}{4}$, e) 45, f) 3,5555….. , g) 8,0 , h) 9,0056565656…..

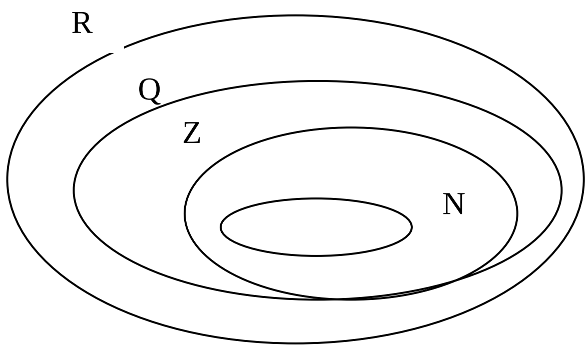
Enteros: …, -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,…..

Naturales: 1, 2 , 3 , 4 ,5 , 6 , 7,…….

Observación: - 4 es entero y también es racional. En cambio ½ es racional y no entero.
Esto ocurre porque existe una relación de **inclusión** entre los conjuntos dados.
Así es que si utilizamos un **diagrama** para representar cada tipo de conjunto numérico, se tendría el esquema siguiente:

En símbolos:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$



Actividades:

Actividad 1:

Coloca en la línea de puntos $\in$ o $\notin$ según corresponda al tipo de número.

a) 0 …..N b) -7 ……Q c) 0,9 ……Z c) $\sqrt{10}$ ……R

Actividad 2:

Coloca V(verdadero) o F(falso) según corresponda. Justifica lo F

a) 8 es un número natural por lo tanto es irracional
b) -36 es un entero, entonces -36 es racional
c) Cualquier número natural es racional también.
d) $\sqrt[3]{3}$ es un irracional, pero no es real.

Actividad 3:

Colocar < (menor), > o =, según corresponda:

a) -7…….-5
b) -4+8 …….-4+1
c) ½ ……1/3
d) -5/7 …….- 8/9
e) ½+1/4 …….1/3+1/5
f) $(-2)^2$ …….-2^2
g) $(-1)^3$ …….-1^3
h) $2,\widehat{5}$ ……… 2,5

Actividad 4:

Un alumno se lamenta de que en su clase de matemáticas han aprobado 2 de cada 3 alumnos. Su amigo le contesta que no se queje, que en su clase han aprobado 3 de cada 7. ¿Dónde hay mas desaprobados? ¿Por que?

Actividad 5:

Complete el siguiente cuadro, encontrando la solución de la ecuación y coloque el resultado en el o los casilleros de acuerdo a los conjuntos que pertenezcan.

Ecuación	N	Z	Q	R
2X + 6 = 51				
-X + 7 = 10				
2(x –1) =1				
$x^2 = 10-1$				
$\sqrt{x} = -7+3$				
$x^2 -1= 3^2$				

Operaciones con Números Reales- Propiedades

Las propiedades son enunciados que . A saber

Asociativa de la suma:

Ejemplo: -7 + 200 + (4 -100)+ 4,7 + (-3 + 1,3)

El mismo ejercicio, pero asociado en forma conveniente, resulta:

(200 – 100) +(4,7 + 1,3) +4 + (-7 -3) = 100 + 6 +4 -10

Elemento neutro para la suma: es el 0

Opuesto de un número: todo número real **a** tiene opuesto. Lo llamamos **-a**

Ejemplos: a) -5 +5 =0 b) $\sqrt{345}+(-\sqrt{345})=0$

Observación: la propiedad **cancelativa** es consecuencia de lo dado.

6+ 9 – 6 +3 = $\cancel{6}$+ 9 – $\cancel{6}$ +3 = 9 +3

Conmutativa: -6 + 5 = 5 + (-6)

Asociativa del producto:

Ejemplo: -7. 200. (4 .100). 0,07. (-3) (-1,3) = -

Elemento neutro: es el 1 (es frecuente dar **por obvio** que 1.x = x)

Inverso de un número: todo número real **a** (excepto el 0) tiene inverso multiplicativo. Lo llamamos y lo definimos como: $\mathbf{a^{-1}=1/a}$

-5 . $\frac{-1}{5}$ =1

Observación: la **simplificación y la amplificación** es consecuencia de lo dado.

Ejemplo1: 8 . $\frac{3}{4}.\frac{1}{8}$ = $\cancel{8}$. $\frac{3}{4}.\frac{1}{\cancel{8}}=\frac{3}{4}$ o, Ejemplo 2: 4 = $\frac{\sqrt{3}}{5}.4.\frac{5}{\sqrt{3}}$

Distributiva del producto con **respecto a la suma** de números reales:

a) -5.(1- 9 +3 -0,5) = -5 +(-5).(-9) +(-5).3 +(-5).(-0,5) = -5+45- 15 +2,5

b) (-6x +3).(5 – 9)=

c) $\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)=$

Conmutativa: -6 . 5 = 5.(-6) = 5(-6)

ERROR si no se coloca **( )** Pues**:** 5(-6) ≠ 5-6

Cuadro resumen de las propiedades de Números reales

Completa el cuadro colocando la forma simbólica correspondiente a los axiomas de cada operación definida, usando a, b, c y d como representación de números reales cualesquiera.

Propiedades de la suma	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de opuesto	
Conmutativa	

Propiedades del producto	Forma simbólica
Asociativa	
Existencia de Neutro	
Existencia de inverso	
Conmutativa	
Distributiva respecto de la suma	

Actividad 6:

Aplica la propiedad distributiva y esuelve en los casos que sean posibles:

a) $\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\sqrt{8}\right)=$

b) $.\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\sqrt{3}+1{,}5\right).(-3)=$

c) $(-3+10).\left(\frac{5}{6}-0{,}5\right)=$

Actividad 7:

Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left[-\frac{(-2)}{5}+\frac{-5}{3}-(-1)\right]-\left[\frac{-3}{4}-(-2)\right]$

b) $-2^2+(-3).2^3-(-3)^2-5^2=$

c) $\left[-\frac{(-2)^3}{3}+\frac{2}{3}-(-1)^2\right]-\left[\frac{-3^3}{3}-(-1)^3\right]$

Potenciación en R: Dado un número real a, que le llamaremos base y un numero natural n , al que le llamaremos exponente. definimos:

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,\ldots\ldots .a}_{\text{n veces (exponente)}}$$

Propiedades de la potenciación:

Estas propiedades se explican mejor si se entiende lo que sugieren simbólicamente, como se detallan a continuación (la igualdad no solamente es valida de izq.. a derecha):

Distributiva con respecto al producto	$(a\ b\ c)^n = a^n\ b^n\ c^n$
Distributiva con respecto al cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$
Producto de potencias de igual base	$a^n\ a^m = a^{n+m}$
Cociente de potencias de igual base	$a^n : a^m = a^{n-m}$
Potencia de otra potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$

Estas propiedades cobran importancia cuando se operan **con bases o exponentes no** numéricos.

Por ejemplo: $x \,.\, x = x^2$, $m^3\ p^3 = (mp)^3$, $\frac{x^7}{x^4} = x^3$ o $3^h \,.\, 3^{h+1} = 3^{h+2}$

Errores comunes: a) $x^2 + x^2 = x^4$ b)$(3x^2)^3 = 3\ x^6$ c) $\frac{x^4}{x^{-2}} = x^2$

Actividad 8:

Aplica propiedades de la potenciación y resuelve cuando sea posible:

a) $(- 3)^{-2}.\ (- 3)^{-3} =$

b) $2^{-5} \,.\, 2^4.\ 2^{-5} =$

c) $3^4.3^{-3}.3^{-5}$

d) $6^2 \,.\, 6^{-3} \,.\, 3^2 \,.\, 3^{-3}$

e) $2^{-14} \,.\, 2^{-3} =$

f) $2.3.4^5.4^5.6^{-3} =$

g) $6^{10} \,.\, 6^0 \,.\, 3^{-2} \,.\, 3^4$

h) $2^{-9} \,.\, 3^4 \,.\, 4^{-3} \,.\, 5^3 \,.\, 3^5 =$

i) $[\ (12\ a^4\ b^2)^{-3}] =$

j) $[\ (a\ b^{12})^2] =$

Actividad 9:

Aplica todas las propiedades de la potenciación que sean posible:

a) $[\ (ab)^{-2}\ ]^{-3} : [\ (ab)^{-3}\ ]^6 =$

b) $[\ (50a^5b)^{-4}\ ]^3 : [\ (5a^5b)^{-3}\ ]^{-7} =$

c) $[\ (\tfrac{2}{3} a^{-2}\ b^7)^{-6}\ ]^4 : [\ (\tfrac{2}{3} a^{-2}\ b^7)^2\ ]^4 =$

d) $[\ (0,4\ )^{-3}\ ]^{-7} =$

Actividad 10: Observa el ejemplo y completa: $\mathbf{a^x : a^y = a^{x-y}}$

$2^{-5} : 2^4 =$	$14^5 : 14^6 =$	$3^{-5} : 3^4 =$
$6^{-7} : 6^8 =$	$2^{-2}. 5^3 : 2^4 =$	$27^3 : 3^{-5} =$
$5^{-6} : 5^{90} =$	$6^3 . 3^4 : 2^6 =$	$3^{-3} : 5^6 . 3^{-9} =$
$2^{h+1} : 2^4 =$	$16^5 : 4^6 =$	$3^{-4} : 9^4 =$
$9^{-3} : 3^{-9} =$	$2^3 : 2^{-5} =$	$3^3 : 3^{h+1} =$

<u>Nota</u>: Recuerda lo siguiente: $\mathbf{8^2 = (2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6}$

Radicación en R: Dado un número real a y un numero natural $n > 1$.

definimos: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

Muchas definiciones matemáticas están expresadas utilizando el símbolo ⇔ (si y solo si) Que es una condición muy fuerte que tiene que cumplir los números para que sea valido. En este caso, esta definida a partir de la potenciación en R. De hecho es la inversa.

<u>Observación</u>: el número real b no existe como tal si, a es **negativo** ($a < 0$) y n **es par**

Propiedades de la radicación:

- $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n.p]{a}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad si \quad n\ es\ impar$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = |a| \quad si \quad n\ es\ par$
- $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Rightarrow a < b$

Actividad 11: Aplica propiedades de la radicación y resuelve cuando sea posible:

a) $\sqrt[5]{7^5} =$

b) $\sqrt{18}.\sqrt{8}$

c) $\sqrt{900.64} =$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{64000}}{\sqrt[3]{8000}}$

e) $\left(\sqrt{x^4 y^2}\right)^3 =$

f) $\sqrt{18}.\sqrt{2}/\sqrt{144}$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$

h) $\sqrt{25.\sqrt[3]{m^2}} =$

Potencia con exponente racional

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Dado que un radical se puede expresar a sus ves como una potencia de exponente racional, es que las propiedades de la potenciación también son válidas en este caso. Este es el fundamento (además de las propiedades de la radicación), por el cual se aplican procedimientos como:

- Simplificación de raíces de potencias : $\sqrt[3]{a^6} = a^2$
- Extracción de factores de un radical:

  Se descompone si es necesario el radicando en **factores primos** y luego se **divide** el **exponente entre el índice** si es que el primero es mayor o igual que el segundo.

  Ej.: $5.\sqrt[3]{16} = 5.\sqrt[3]{2^4} = 5.2.\sqrt[3]{2} = 10.\sqrt[3]{2}$
- Introducción de factores dentro de un radical:

  Cada factor externo al radical se introduce **multiplicando** el exponente por el índice del radical.

  Ej.: $x.\sqrt[3]{5x^2} = \sqrt[3]{x^3.5x^2} = \sqrt[3]{5x^5}$

Actividad 12: Hallar el valor de las siguientes potencias:

a) $36^{\frac{1}{2}} =$ b) $0.125^{\frac{1}{3}} =$ c) $16^{\frac{3}{2}} =$

d) $32^{-\frac{1}{4}} =$ e) $\left(\frac{121}{144}\right)^{\frac{1}{2}} =$ f) $512^{-\frac{2}{3}}$

g) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} =$ h) $1{,}728^{-\frac{1}{3}} =$ i) $0{,}0025^{-\frac{3}{2}}$

Actividad 13: Expresa en forma de potencia:

$\sqrt[5]{x}$ $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

$\left(\sqrt{x^2}\right)^5$ $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$

Actividad 14: Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18}$ b) $3\sqrt{48}$

c) $\sqrt{98a^3b^5c^2}$ d) $2\sqrt{75x^4y^3}$

e) $\frac{1}{2a}\sqrt{168a^5b^3}$ f) $\frac{6-\sqrt{54}}{3}$

Rta: del item b) $3\sqrt{48} = 3.\sqrt{2^4.3} = 3.2^2.\sqrt{3} = 12.\sqrt{3}$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

Podemos sumar y restar números irracionales solamente cuando el radical que tengamos sea el mismo en los términos. Lo explicaremos mejor mediante ejemplos:

Ejemplo 1:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

Para resolver este ejercicio bastara con sumar los números fuera de los radicales.

(O sea: 3 + 5 - 1 = 7) Con lo cual se tiene: $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Actividad 15. Resuelve

a) $5\sqrt{3} - \sqrt{12} =$

b) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2.25} =$

c) $7\sqrt{28} - \sqrt{63} + 6\sqrt{7} - \sqrt[6]{7^3} =$

d) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + \sqrt{48} =$

e) $7\sqrt{10} - \sqrt{40} + \sqrt{360} =$

f) $3\sqrt{18} - 11.\sqrt{2} + \frac{1}{5}.\sqrt{50} =$

g) $5.\sqrt[3]{128a} + 3.\sqrt[6]{4a^2} - 4.\sqrt[3]{16a} =$

h) $4.\sqrt[3]{16} - 2.\sqrt[3]{81} + 5.\sqrt[3]{8} + \frac{1}{2}.\sqrt[3]{24}$

Actividad 16 Escribe si es verdadero (v) o falso (f) según corresponda. Justifica

a) $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{6}$ …………..

b) $\sqrt{5+2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ ....

c) $\sqrt{5.2} = \sqrt{5}.\sqrt{2}$ ....

d) $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ....

e) $\sqrt{(-3)^2} = -3$...................

f) $\sqrt{(-3)^2} = 3$........................

Actividad 17:. Introducir todos los factores posibles en los siguientes radicales:

a) $2\sqrt{3\ y^2}$

b) $3x.\sqrt{3\ x^2}$

c) $0{,}5.m.\sqrt[4]{8.m^3}$

d) $x.y.\sqrt[3]{x^2.y}$

Actividad 18: Aplicar propiedades y reducir la expresión:

a. $\sqrt[3]{3.\sqrt[4]{3}} =$

b. $\sqrt[3]{125.\sqrt{32.\sqrt[3]{8}}} =$

Actividad 19: Piensa como resolver: $5\sqrt{\frac{1}{12}} + 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{27}} =$

Actividad 20: Averiguar si el resultado es racional o irracional:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{5} =$

b) $(2+\sqrt{7}) + (2-\sqrt{7}) =$

c) $\sqrt{16} + (4 - \sqrt{25}) =$

d) $(\sqrt{3} + \sqrt{3}) + (\sqrt{27} - \sqrt{3}) =$

Racionalización de denominadores:

Primer caso: El denominador es un radical único.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = . \frac{3.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

Segundo caso: El denominador es un binomio con uno o dos de sus términos irracionales cuadráticos.

Ejemplos: $\frac{2}{\sqrt{2}+3}$, $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Asi para el primer ejemplo, hacemos:

$$\frac{2}{\sqrt{2}+3} \cdot \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3} = \frac{2.(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{2.(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \frac{-2.(\sqrt{2}-3)}{7}$$

Actividad 21: Racionalice:

a) $\sqrt{\frac{8}{3}} =$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{6}} =$

c) $\frac{-1}{\sqrt{6}} =$

d) $\frac{10}{\sqrt{2}} =$

e) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} =$

f) $\frac{4xy^2}{\sqrt[3]{2xy^2}} =$

g) $\frac{11}{\sqrt{3}-5} =$

h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} =$

i) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$

Actividad 22: Resuelva aplicando propiedades de la potenciación o radicación:

a) $(-3)^{\frac{1}{3}}.(-3)^{\frac{5}{3}} =$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} =$

c) $\frac{4}{2^{\frac{3}{2}}} =$

d) $\frac{\sqrt{5}.\sqrt{2}.\sqrt{10}}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$

e) $\left(\frac{1}{2} + 2^{-1}\right)^8 + \sqrt[3]{-8} =$

f) $\sqrt{3}.\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} =$

g) $\frac{-4+\sqrt{8}}{2}$

h) $\sqrt{400.100}.0{,}01 - (2)^{2} =$

i) $\frac{3}{\sqrt{18}+\sqrt{18}}$

Logaritmo:

Sean los números reales a y b , con $a > 0$ y $b \neq 1$

Definición:

$$\boldsymbol{Log_b\, a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a}$$

Casos particulares:

si la base es 10, el logaritmo se llama decimal y se escribe, por ej. *log 8*

Si la base es e= 2,71… , el logaritmo se llama neperiano y se escribe *ln*

Propiedades:

$b > 1$ $\qquad$ $x, y \in R^+$

$$\log_b (x \,.\, y) = \log_b x + \log_b y$$
$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y \qquad \text{con } y \neq 0$$
$$\log_b x^n = n \,.\, \log_b x$$

Actividad 23: Calcular, aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_5 625 =$ $\qquad$ b) $\log_{10} \sqrt{10} =$

c) $\log_4 1/64 =$ $\qquad$ d) $\log_2 0{,}5 =$

e) $\log_{16} 8 =$ $\qquad$ f) $\log_{0{,}01} 10 =$

Actividad 24: Desarrollar, aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_2 \dfrac{(64-128)^2 . \sqrt[4]{8}}{3.512}$ $\qquad$ b) $\ln \left[\dfrac{a^2 .(b.c)^3}{\sqrt{a.}} \right]$

Actividad 25: Transforme en un único logaritmo, las expresiones siguientes:

a) $\log (2x-2) - \log 2x =$

b) $4 \ln x + 5 \ln (x+1) - 2 \ln (x-3) =$

Actividad 26: Halla el valor de x. aplica definición y propiedades:

a) $2^x = 128.64$

b) $6^{x+1} = 216.\sqrt{6}$

c) $3^{x-3} . 9 = \dfrac{81}{\sqrt{3}}$

d) $10 = 100.(0.5+i)^x$

Capitulo Nº 2 : Expresiones Algebraicas

Introducción:

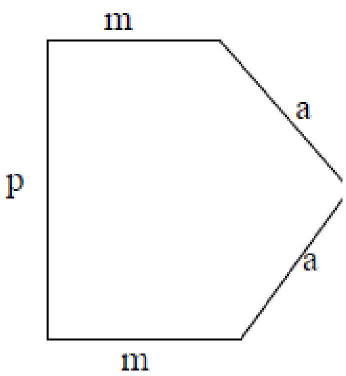
El lenguaje algebraico utiliza: símbolos, signos, números y letras , vinculadas mediante operaciones.

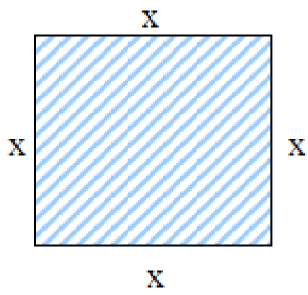
Ejemplo 1: Marca la opción correcta

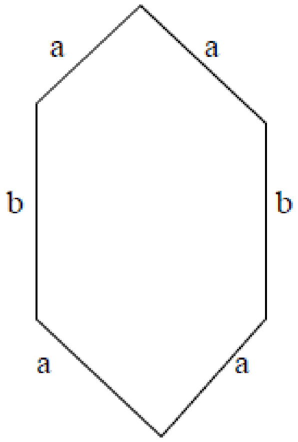
"El cubo del doble de la diferencia de p y q", se representa por:

a) $2(p^3 – q^3)$ b) $2(p – q)^3$ c)$(2p – 2q)^3$ d) $[2(p – q)]^3$ e) $3[2(p – q)]$

Ejemplo 2: Observa los siguientes gráficos y completa la línea inferior de cada gráfico determinando el perímetro:







P = ________________ ________________ P = ________________

Observando los resultados, se puede concluir que es posible operar con expresiones sin necesidad de que todo sea numérico.
Este tipo de expresiones se conocen como Expresiones Algebraicas

- **Expresiones algebraicas**: es la combinación de números y variables letras, mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las expresiones algebraicas se clasifican en:

Expresión Algebraica
- *Expresión Algebraica Racional*
  - *Expresión Algebraica Entera (I)*
  - *Expresión Algebraica Fraccionaria(II)*
- *Expresión Algebraica Irracional (III)*

- **Expresiones algebraicas racionales**: se llaman así a aquellas en que las variables están afectadas únicamente por las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. En caso de haber potencias con letras, estas van afectadas con exponentes **enteros**.

  Ejemplos:

  a) $5x^3 + \frac{1}{2}yx$ b) $\frac{y}{x^2-1}$ c) $\frac{1}{3}a^3b$ d) $5a - 6a^{-5}c$

- A su ves en este tipo distinguimos las E*xpresiones Enteras como* por ejemplo a) y c), es decir, aquellas en las que sus variables están relacionados con las operaciones de suma, resta y multiplicación, y los exponentes de las letras son enteros **positivos**.
- *Expresión Algebraica Fraccionaria*: En este caso alguna de las **variables forman** parte de un **divisor** o están en un numerador con **exponente negativo**. Ej. b) y d)

- *Expresión algebraica Irracional*: se llama así a las que algunas de sus variables está afectada por radicales o exponentes fraccionarios. Por ejemplo: $2x\sqrt{\frac{1}{y}}$

Nota: Las expresiones racionales en los que no interviene ni la suma ni la resta se Llaman ***monomios***._Por ejemplo c)

Ejercicio 1. Clasificar las siguientes expresiones. Justificar.

a) $\frac{1}{2}ab^3 - 2$ ....

b) $1+\frac{2x-3}{x-2}$ ....

c) $x^2 - 3xy + y$..

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3}x + 5x^3 + 1$..

e) $\frac{2}{5}a^2b + b^{\frac{3}{2}}$ ....

f) $\frac{1}{5}x^3 - 2x + 1$ ....

g) $\frac{7x^5}{3}$ ....

h) $\sqrt{x+2}$ ....

i) $\frac{x^3-2x^2+3}{x+2}$ ....

j) $x^2 - x + 3 - 2x^{-1}$ ....

POLINOMIOS

Denominamos polinomio en **una indeterminada** x (puede ser otra letra), a toda expresión algebraica entera con **términos** que tienen a lo sumo una letra.

Ejemplos: $A(x) = 2x^4 - 5 + 7x^6 + 3x^2 + 0x^{16} + 4x^3$

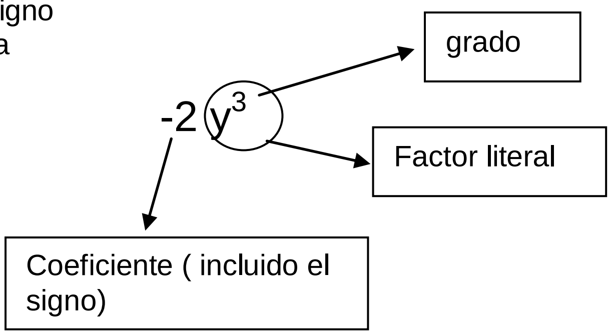
$P(y) = 4y^5 - 2y^3 + y - 1$

A los Polinomios los notaremos con : A(x), B(y) , P(x), P(y) , etc..

Todo polinomio posee términos algebraicos. Un término de un polinomio consta de:

a) coeficiente numérico: número y signo
c) factor literal: letra o indeterminada
d) grado: exponente

Ejemplo: el 2º término de P



Coeficientes: son los números que acompañan a la indeterminada

Ejemplo:

$A(x) = 2x^4 - 5 + 7x^6 + 3x^2 + 0x^{16} + 4x^3$

A (x) tiene por coeficientes: 2, -5 , 7 , 3 , 0 y 4 indeterminada: x

Entre ellos, a su vez diferenciamos dos coeficientes: el C. principal y el T. Independiente

Coeficiente principal o director: es el coeficiente del **mayor grado** del polinomio.

En los ejemplos dados: **7** para A(x) y **4** para P(y)

Término independiente: es el número real que no tiene indeterminada. Por ej. -5

Grado del polinomio: es el mayor exponente de la indeterminada con coeficiente no nulo.

Si P es un polinomio y n es el grado, lo notamos con G(P) = n

Ejemplo:

$A(x) = 2x^4 + 5 + 7x^6 + 3x^2 + 0x^{16} + 4x^3$ G(A) = 6

Pues x^6 es mayor exponente de las x (no es x^{16} pues el coeficiente es 0)

GRADO DE UNA EXPRESIÓN: Es el grado mayor de sus distintos términos y se obtiene Sumando en el caso de que hubiese más de una letra.

Ejemplos:

En la expresión: $3x^3 + 7y^5$, el grado es 5

En la expresión: $4x^2y^3 - 4b^3y^2z^7$, el grado es 12

Polinomios completos y ordenados:

Identificado el grado de un polinomio, si en los otros términos están presentes todos Los de grado **anteriores** a el , se dice que el polinomio esta completo.

Por ejemplo: $Q(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$ esta completo

$A(x) = 2x^4 - 5 + 7x^6 + 3x^2 + 4x^3$ esta incompleto

Pues el grado de A es 6 y faltan los términos de grado 5 y 1.

Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados de acuerdo a sus grados. Esto es, en forma creciente, de menor a mayor grado o decreciente de mayor a menor.

Por Ej.: $Q(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$ esta desordenado y completo

$Q(x) = x^3 - x^2 + 3x + 6$ está **ordenado** en forma **decreciente** y completo

Para **completar**, se agregan con sumas (o restas) los términos que faltan con coeficientes 0.

Por ejemplo:

$A(x) = 2x^4 + 5 + 7x^6 + 3x^2 + 0x^{16} + 4x^3$ (antes)

$A(x) = 7x^6 + \mathbf{0x^5} + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + \mathbf{0x} + 5$ (completo y ordenado en forma decr.)

Nota: El **0** es aunque no lo parezca un polinomio. Se llama polinomio nulo .

Según **la cantidad de términos**, un polinomio se denomina:

Monomio: si tiene un solo un término Por Ej.: $5x^2$

Binomio: si tiene dos términos Por Ej. : $8 + 2x$

Trinomio: si tiene tres términos Por Ej. : $4x^5 + x - 3$

Cuatrinomio: si tiene cuatro términos.

Y polinomio si tiene más de cuatro términos.

TÉRMINO SEMEJANTES:

Dos o más términos son semejantes cuando tiene la **misma parte literal y el mismo grado.**

Por ejemplo: $3x^4$, $\frac{1}{2}x^4$, $-x^4$, $0{,}45\,x^4$ son semejantes

En cambio : x^2 , $2x$, $-x^4$ no son semejantes

Actividades Propuestas

Ejercicio 1. Clasificar las siguientes expresiones. Obtener el grado de las expresiones algebraicas enteras e Indicar cual es polinomio . Justificar.

a) $\frac{1}{2}xb^3 - 2x + 4$ ....

b) $1 + \frac{2x-3}{2}$ ..

c) $x^{-3} - 2x + 5$...

d) $-4m^2n + \sqrt{m}$ ....

Ejercicio 2. traduce las siguientes expresiones algebraicas en forma coloquial:

$(2x)^3$ ……………………………………………………………………………………….

$(2x + 3)^2$ …………………………………………………………………..……..

Ejercicio 3. Señala la opción correcta

La diferencia entre el triple de x con el exceso de x sobre y, es igual al duplo de x, aumentado en y, está representado por :

a) $3x - y + x = 2(x + y)$
b) $3x - (y - x) = 2x + y$
c) $3x - x - y = 2x + 2y$
d) $3x - (x - y) = 2 (x + y)$
e) $3x - (x - y) = 2x + y$

Ejercicio 4: Propone para cada caso una expresión que cumpla con las siguientes condiciones:

a) Binomio de grado 3 ..……………..

b) Trinomio de grado 2 …………………………………..

c) Monomio de grado 5 ……….……..

d) Cuatrinomio de grado 6 ………..…………………………….

e) Polinomio completo de grado 5 ………………………………….

Ejercicio 5. Dados los siguientes polinomios:

$A(x) = 5 - x^3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x$

$B(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3/2 + x$

$P(x) = 2x^2 + 4x^3 - 0{,}25$

a) ¿Cuales son sus coeficientes principales y sus términos independientes?

b) Completar los polinomios que consideres incompletos.

c) Ordenar los polinomios que no lo estén en forma decrecientes.

Ejercicio 6:
Relacionen con una flecha cada polinomio con los datos que le correspondan:

$4x^5 - 2x^2 + x - 1$	Cuatrinomio de grado 5 y coeficiente principal 8
$3x^3 - 5x + 8x^5 + 3$	Binomio de tercer grado y coeficiente principal 2
$-x^4 + 5$	Binomio de segundo grado y coeficiente principal = -1
$-x^2 + 3$	Trinomio de segundo grado y coeficiente principal = 3
$3x^2 + 2x - 1$	Binomio de cuarto grado y coeficientes -1 y 5
$7x + 2x^3$	Cuatrinomio de grado 5 término independiente -1

Valor numérico de una expresión algebraica:

Se llama Valor numérico de una expresión, al número que se obtiene al sustituir las Diferentes indeterminadas por sus correspondientes valores numéricos dados y efectuar luego las operaciones indicadas.

Ejemplo: $x^3 y - y^2 + 2x^2$

Para x= -1 , y = 3

Reemplazando obtenemos: $(-1)^3 .3 - 3^2 + 2.(-1)^2 = -3 -9 +2 = -10$

Valor numérico de un polinomio:

Se llama Valor numérico del polinomio Q al número que se obtiene al sustituir la x por un valor numérico dado y efectuar luego las operaciones indicadas.

Ejemplo: sea $\mathbf{Q}_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ hallar Q (2)

Reemplazamos x por 2 en Q y queda:

$Q_{(2)} = 2^2 + 3.2 - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$

Ejercicio 7:
Calcula el valor numérico de $4x^3 y - 2y^2 + x - 3$ cuando: x = -1 y y = -2

Ejercicio 8: Calcular el valor numérico de P(x) para los siguientes valores:

x = -1
x = 2/3
x = -3

Siendo : $P(x) = x/2 - 3.x^4 + 4.x^2 - 5.x^3 - 2.x^2/3 + 5/2$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma (resta):

La suma (resta) de dos polinomios P(x) y Q(x) es otro polinomio que se cuyos términos se
obtienen sumando (restando) sus términos semejantes.

Por ejemplo: Sean los polinomios:

$A(x) = 7x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 0x + 5$
$Q(x) = -6x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 0x - 2$

Y se desea sumar: A(x)+ Q(x).

Una forma es colocar uno debajo del otro haciendo que coincidan los términos semejantes, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} A(x) = & 7x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 0x + 5 \\ + \ Q(x) = & \underline{\qquad\ \ - 6x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 0x - 2} \\ A(x)+Q(x) = & 7x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 0x + 3 \end{array}$$

En el caso de realizar **la resta**: A(x) – Q(x) , se cambia de signo el sustraendo:

$$\begin{array}{rl} A(x) = & 7x^6 + 0x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 0x + 5 \\ - Q(x) = & \underline{\qquad\quad 6x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 0x + 2} \\ A(x)+Q(x) = & 7x^6 + 6x^5 - x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 0x + 7 \end{array}$$

Observaciones:

- Dos polinomios son iguales si los coeficientes de los términos semejantes son iguales.
- La adición de polinomios cumple las propiedades asociativa y conmutativa.
- El polinomio neutro es el polinomio nulo (todos sus coeficientes valen 0), pues al sumarlo a cualquier polinomio, no lo cambia a este.

Ejercicio 9: Dados los siguientes polinomios:

$R(x) = 4x^3 - 2x + 3$ $\qquad$ $S(x) = -3x + 6x^2 - 1$ $\qquad$ $T(x) = 2x^2 - 5x^3 - 3$

Calculen: a) $R(x) + S(x) + T(x) =$

b) $R(x) + S(x) - T(x) =$

c) $S(x) - \{R(x) + T(x)\} =$

Producto de Polinomios:

Para multiplicar dos polinomios se multiplica término a término aplicando la propiedad distributiva, de manera que se multiplican los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos en los números y la propiedad de la potenciación en las letras: *producto de potencia de igual base*.

Por ejemplo: $3x \,.(\,4x^2\,) = 12\,x^3$ $\qquad$ $-1/2\,x^3\,.(-6x^4\,) = 3x^7$

Posteriormente, se suman los monomios semejantes.

A continuación, un ejemplo, de cómo se procede para efectuar el producto entre:

$$P(x) = 5x - 11 \quad \text{y} \quad Q\,(x) = x^2 + 2x + 4$$

$P(x)\,.\,Q(x) = (5x - 11)\,(x^2 + 2x + 4) =$

$P(x)\,.\,Q(x) = 5x^3 + 10x^2 + 20x - 11x^2 - 22x - 44$ (aplicamos la propiedad distributiva)

$P(x)\,.\,Q(x) = 5x^3 + (10 - 11)\,x^2 + (20 - 22)\,x - 44$ (agrupamos los términos semejantes)

$P(x)\,.\,Q(x) = 5x^3 - x^2 - 2x - 44$

Forma Práctica:

$$\begin{array}{rrrr}
 & & & 5x - 11 \\
\times & & & x^2 + 2x + 4 \\
\hline
 & & & 20x - 44 \\
 & & 10x^2 - 22x & \\
 & 5x^3 - 11x^2 & & \\
\hline
 & 5x^3 - x^2 & - 2x & - 44
\end{array}$$

Ejercicio 10. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 2x - 5x^2 + 4 \qquad Q(x) = 3x - x^2 \qquad S(x) = 3x^2 - 5 - 2x$

Obtener: a) P(x).Q(x) $\qquad$ b) Q(x).S(x) $\qquad$ c) S(x) .P(x)+Q(x)

La multiplicación de polinomios cumple las propiedades:

- **Asociativa**
- **Conmutativa**.
- **El polinomio neutro** es el número 1, pues multiplicando por cualquier polinomio no lo altera. Por tanto, es el elemento neutro del producto.
- Es **distributiva respecto a la adición**. Cualesquiera que sean los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, se verifica que:

$$P_{(x)} \cdot [Q_{(x)} + R_{(x)}] = P_{(x)} \cdot Q_{(x)} + P_{(x)} \cdot R_{(x)}$$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 11. Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 0,1x - 5x^2 + 7$ $Q(x) = 3x + 1 - x^2$ $S(x) = 3x^2 - 1 - 4x$

Obtener: a) P(x).Q(x) b) Q(x).S(x) c) S(x) +P(x).R(x)

Ejercicio 12- Efectuar los siguientes productos:

a) $(6x^2 + 5x – 4).(-2x) =$

b) $x^3 – 2x^2 + x – 1) .(x +2) =$

c) $(5x+1).(-5x – 1) =$

d) $(4x^2 +3x) . (4x +3x^2) =$

e) $(5 - 2x + x^3).(2x – x^2) =$

f) $(x^2 + 0,5x – 1).(x^2 – 0,5x)=$

g) $(-x^3 +3x – 1).(x^2 – x) =$

h) $(5x^2 – x^3 + 4x).(-3x + 3 – x^3)$

Ejercicio 13- Dados los polinomios:

$P(x) = 2x^3 -4x^2 + x-2$ $Q(x) = -3 x^3 +4 x^2 – x – 2$
$R(x) = x^3 -x^2$ $S(x) = 5 x^4-2 x^3 -3 x^2 -3 x -10$

Calcule:

a) P . Q + R b) Q + P.R

c) (P + Q). R d) S . (-P+ Q)

Productos especiales

Producto de la suma de dos términos por su diferencia:

Se puede demostrar el siguiente resultado:

$$\boxed{(a + b).(a - b) = a^2 - b^2}$$

Ej. $(x + 4) . (x - 4) = x^2 - 16$

Producto de un binomio por si mismo (cuadrado de un binomio):

También se puede demostrar que:

$$\boxed{(a + b).(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Ej. $(3x + 2) . (3x + 2) = 9x^2 + 12x + 4$

Ejercicio 14: Desarrollar los siguientes productos sin efectuar la multiplicación:

a) $(x+5) . (x-5) =$

b) $(2x+5) . (2x-5) =$

c) $(5xy-6).(5xy+6) =$

d) $(12 + 9x).(12 - 9x) =$

e) $(3xy-4ab) .(3xy+4ab) =$

f) $(5,32 + 4).(5,32 - 4) =$

g) $((a+4)-b).((a+4)+b)=$

Ejercicio 15: Desarrollar los siguientes cuadrados sin efectuar la multiplicación:

a) $(x + 4)^2 =$

b) $(2x - 5)^2 =$

c) $(2x + 6y)^2 =$

d) $(3x^3 - 6y^2)^2$

e) $(h^2 - \sqrt{2})^2$

f) $(4x^3 - 5x^2)^2$

g) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

h) $(2a^2 x - 3ax^4)^2$

i) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2$

- ## **División de Polinomios**:

Recordemos que para números enteros podemos realizar el algoritmo de Euclides para la división, así, si queremos dividir 11 por 4 obtenemos

Dividendo	11	4	divisor
Resto	3	2	cociente

Se verifica que 11 = 4 . 2 + 3 , y el resto es siempre menor que el divisor.
Es posible realizar la división de polinomios en forma análoga a ésta.

Sean los polinomios P(x) y Q(x) llamados dividendo y divisor, existen dos únicos polinomios C(x) y R(x) denominados cociente y resto, tales que:

P(x) = Q(x) . C(x) + R(x) y el **gr(R(x)) < gr(Q(x))** o **R(x)=0**

Consideremos el ejemplo siguiente: P(x) : Q(x)

Con $P(x) = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$
$Q(x) = x^2 + 2$

El dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente:

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 & \underline{x^2 + 0x + 2} \\
\underline{-5x^4 + 0x^3 - 10x^2} & 5x^2 + 2x - 16 \\
\quad 2x^3 - 16x^2 - 2x + 6 & \\
\quad \underline{-2x^3 + 0x^2 - 4x} & \\
\qquad -16x^2 - 6x + 6 & \\
\qquad \underline{16x^2 - 0x + 32} & \\
\qquad\qquad -6x + 38 &
\end{array}
$$

El cociente entre dos polinomios P(x) y Q(x) es posible siempre y cuando el grado del primero sea mayor o igual al grado del segundo.

- Cuando el valor del resto es igual a cero (R(x) = 0), significa que dicho polinomio es divisible por “x – a” y este valor x = a se denomina <u>cero o raíz del polinomio.</u> En ese caso se dice que P es múltiplo de Q o que Q es divisor de P.
- Un número “a” es raíz de un polinomio P(x) si P(a) = 0.

Ejercicio 15: Dados:

$P(x)=2x^3 - 4x^2 + x - 2$ $Q(x) = -3x^3 + 4x^2 - x - 2$
$R(x) = -x^2 + 2$ $S(x) = x^2 - 3x - 10$

Calcule:

a) P : R b) Q : S

c) (P + Q) : R d) (P - Q). S

Regla de Ruffini

- En los casos particulares de división donde el divisor es de la forma "x ± a", se puede obtener el cociente y el resto, mediante un método sintético siguiendo el algoritmo que a continuación se detalla con un ejemplo.

  Ejemplo:

  $P(x) : Q(x)$ con $P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$

  $Q(x) = x + 3$

Observamos que el divisor tiene la forma "x - a" con a = -3, disponemos y operamos con los coeficientes de la siguiente manera:

	2	-4	3	-5	6
-3	↓	-6	30	–99	312
	2	-10	33	–104	318 → Resto

$C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 33x - 104$

El cociente C(x) es un polinomio con coeficientes los cuatro primeros números y con indeterminada x, de grado 3 (uno menos que P).

En general el polinomio cociente es otro polinomio de la misma indeterminada con el grado n-1 del dividendo y los coeficientes son los números que se obtienen en el último renglón menos el último número, que es el Resto.

- **Teorema del Resto**: el resto de la división de un polinomio P(x) por el binomio x – a es igual al valor numérico de dicho polinomio para x = a, es decir P(a).

  Consideremos el ejemplo de la división anterior, donde aplicamos Ruffini.

$P(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$

$Q(x) = x + 3$

$P(-3) = 2(-3)^4 - 4(-3)^3 + 3(-3)^2 - 5(-3) + 6 = 162 + 108 + 27 + 15 + 6 = 318$

Ejercicio 16:

Halle el cociente y el resto. Cuando sea posible aplique regla de Ruffini.

a) $(5x^4 - 2x^3 + 13x + 4) : (x^2 + 2x - 3)$

b) $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 2) : (2x - 3)$

c) $(x^5 - 2x^2 - 3x^4 - x + 3) : (x + 1)$

d) $(9x^3 - x + 1) : (3x + 2)$

e) $\left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4\right) : (x - 2)$

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 17: Dados:

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ $Q(x) = x + 4$

$R(x) = x - 3$ $S(x) = 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 3x - 10$

Calcule:

b) P : R b) S : Q c) (P + S) : R

Ejercicio 18: En los siguientes casos indique si es exacta la división de P por (x – a).
En los casos afirmativos exprese el dividendo como producto de polinomios.

a) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 2$ $x - 1$

b) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 2$ $x + 2$

c) $P(x) = 3x^4 - 5x^3 - 2x + 4$ $x - 1$

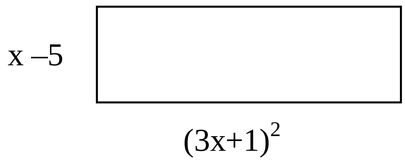
d) $P(x) = x^2 - 4$ $x - 2$

Ejercicio 19: Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

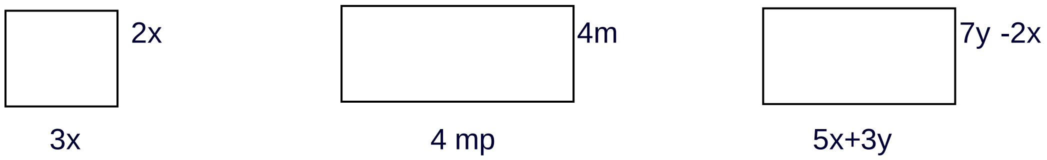
a) $3x.(x^2 + 2x + 1) - 4x^2.(2x^2 - 3x - 2) =$

b) $-6x^3 + x^2.(-4x + 5) + 6x^2.(x - 4) =$

Ejercicio 20: Determinar el área de la figura siguiente:



Ejercicio 21: Calcula el perímetro de cada rectángulo encontrando su expresión algebraica.
Luego clasifica según su número de términos, antes de reducir términos semejantes



Ejercicio 22: Determina sin realizar el cociente si P(x) es múltiplo de Q(x)

a) $P(x) = 3 - 5x + x^4$, $Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$, $Q(x) = x + 1$

c) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x - 2$

Ejercicio 23: Si $P(x) = 2.x^4 - h.x + 2$ y $Q(x) = x + 1$,
calcular **h** para que P(x) sea divisible por Q(x).

Transformación en producto de polinomios - Factoreo

Factorizar un polinomio es descomponerlo como producto de factores primos.

- **Casos particulares de factorización**

I) Factor común; *tipo:* $a.c + a.d = a.(c + d)$

Ejemplo: $2x^3y - xy^2 + 3x^2 y = x y (2x^2 - y + 3x)$

II) Factor común por grupos; *tipo:* $a c + bc + ad + bd = c (a + b) + d (a + b) =$
$= (a+b)(c+d)$

Ejemplo: $2ax - 4bx + ay - 2by = 2x (a-2b) + y (a-2b) = (a-2b)(2x+y)$

Observación: se puede comenzar a asociar de otra forma.

III) Trinomio cuadrado perfecto; *tipo:* $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Ejemplo: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

IV) Cuatrinomio cubo perfecto; *tipo:* $a^3+3a^2b + 3ab^2+b^3 = (a+b)^3$.

Ejemplo: $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = (2x-5)^3$

V) Diferencia de cuadrados; *tipo :* $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$

Ejemplo: $4x^2 - 25 = (2x+5).(2x-5)$

Ejercicio 24: Extraer factor común en las siguientes expresiones:

- $3x + 12 =$
- $0,7y - 2,1y^2 =$
- $15hy + 30h^2 + 10h =$
- $49x^2y + 21x =$
- $4u^2v^2 - 12uv^2 + 60uv^3 =$
- $12abc^2 - 4bc + 6ab^2c =$
- $5axy^4 - 6ax^4y + 7a^2xy =$
- $13 - 26hk - 39uv =$
- $x^2y - x^4y^2 + ax^6y^6 + x^3y =$
- $15ap^2 - 30a^2p^2 + 5p^4 =$
- $100m^2 - 200mn + 300mn^2 =$
- $250x^2 - 1000x^6y =$
- $(x - 2)a + (x - 2)b$
- $5.(x - 8) + y.(-x + 8) =$
- $2.\left(\frac{1}{3}x - 4\right) - 5.\left(-4 + 3^{-1}x\right) + \left(\frac{-1}{3}x + 4\right)$

Ejercicio 25: Factoriza las siguientes expresiones aplicando factor común:

a) $125.a^4.b^5.c^5 - 45.a^5.b^3.c^4.x^3 + 5.a^3.b^2.c^4 - 300.a^4.b^2.c^8.x =$

b) $3.a^2.x^3.y + 4.a^5.x^2.y^3 - 6.a^4.x^6 - 10.a.x^4$

c) $3.m^6.p^4.q^2 - 3.m^7.p^3.q.x + 3.m^4.p^2.q - 6.m^5.p^4.q.x^2.y =$

Ejercicio 26: Factoriza las siguientes expresiones por grupos:

a) $12mx - 10x - 42m+35 =$

b) $a^2.y + a.b^2 - a.x.y - b^2.x$

c) $2.a.x + 2.b.x + 5.a - a.y - b.y + 5.b$

d) $10.a.m^2.x.z - 15.m^2.x.z + 10.a.x - 15.b.x - 8.a.m^2.y.z + 12.b.m^2.y.z - 8.a.y + 12.b.y$

Ejercicio 27: Determinar cuáles de los trinomios son cuadrados perfectos y, cuando sea posible, descomponerlos:

a) $x^2 + 2x + 19 + 6x^4 + x^2$

b) $4y^2 - 4y + 1$

c) $16u^2 + 16u + 4$

d) $9m^2 – 18m + 9$

e) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

Ejercicio 28: Factorizar aplicando suma o diferencia de potencias de igual grado:

a) $27 + y^3$

b) $x^5 + 32$

c) $a^4 - b^4.c^4$

d) $a^{10} - x^5$

e) $x^6 - y^6$

f) $x^6 + y^{12}$

g) $a^7 - 128.x^7$

h) $8m^3 - 27y^6$

Ejercicio 29: Factorizar las siguientes expresiones:

a) $3a^2 - 3b^2 =$

b) $36x^2 – 25y^2 =$

c) $x^2 + 16x + 64 =$

d) $5.x^5 - 10.x.y + 5.y^2 =$

e) $3.x^9.y^7 - 12.x^7.y^9 =$

f) $81 – 49 x^8 =$

g) $4x^2 + 20x + 25 =$

(h) $22a^2b^2 – 42c^2$

Capitulo Nº 3 : Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad que sólo se verifica para unos valores reales de una variable, generalmente llamada x.

Resolver una ecuación consiste en hallar los valores de la variable que hacen cierta la igualdad.

Si estamos frente a un polinomio P(x), al igualar la expresión a 0, estamos planteando una ecuación: P(x) =0

Así en esos casos, resolver una ecuación polinómica es encontrar los **ceros o raíces** de P(x); es decir, los valores de x, que anulan el polinomio.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Si , en particular, P(x) es un polinomio de primer grado, entonces tenemos una ecuación polinómica de primer grado en la variable x. El ejemplo dado, se muestra las propiedades que se ponen en juego para resolverlo:

$2x + 40 = 0$

- Teniendo en cuenta que $x \in R$, ahora la resolvemos, aplicando sucesivamente las propiedades de las operaciones en R , agregando números en forma conveniente.

$2x + 40 = 0$	
$2x + 40+(-40) = 0 + (-40)$	prop.uniforme
$2x +[40 +(-40)] = 0 +(-40)$	prop. asociativa de la +
$2x + 0 = 0 +(-40)$	Prop. del opuesto de la +
$2x = - 40$	Elemento neutro de la +
$1/2.(2x) = 1/2.(-40)$	prop. uniforme
$(1/2.2).x = 1/2.(-40)$	prop. asociativa de la multiplicación
$1.x = 1/2.(-40)$	prop. del inverso multiplicativo
$x = 1/2.(-40)$	Neutro del producto
$x = -20$	

En algunas ecuaciones sintetizaremos el procedimiento en **forma práctica** "despejando" x.

Importante:

- Hay expresiones que parecen ecuaciones pero en realidad son **identidades**, pues al intentar resolverlas al final queda una igualdad que es valida para infinitas soluciones reales y no únicamente x= 0 (como algunos concluyen).

  Ejemplo: $4 + 3x -8 = x – 4 +2x$
  $3x – x – 2x = -4 – 4 +8$ o $\cancel{3x} – \cancel{x} – \cancel{2x} = \cancel{-4} – \cancel{4} +\cancel{8}$
  $0x = 0$ $0 =0$
  (por aplicación de la propiedad cancelativa)

  Asi, si x= 80 se cumple, 0.80 = 0

- No siempre una ecuación de primer grado tiene solución real, a pesar de resolverla bien.

  Ejemplo: $5x + 7 = 2x -8 + 3x$

  Pues: $5x – 2x – 3x = -8 – 7$
  $0x = -15$ ¡Absurdo! Pues $0 \neq -15$

Existen Problemas que se pueden plantear mediante una ecuación para luego resolverla.

El " problema" de estos Problemas es la INTERPRETACION que cada persona realiza y no siempre **son equivalentes**. Para minimizar estos inconvenientes, hay que identificar las operaciones presentes, las veces que se invoca a las incógnitas y por supuesto la igualdad. Hay **términos** lingüísticos que dan pistas sobre que **operación** esta en juego y si hay mas de una, la conveniencia de usar paréntesis u otro símbolo para incluirlas o separarlas

Ejemplos:

1) Si al doble de un número desconocido se le disminuye 3 se obtiene el mismo número aumentado en 6.¿Cuál es el número?

Rta correcta: 2x – 3 = x + 6 o 2x – 3 = 6 +x o x + 6 = 2x – 3

Rta incorrecta: $x^2 - 3 = 3 + 6$ (el doble ≠ el cuadrado de …
(cuando se invoca de nuevo el número no se refiere al 3)

2) Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Rta correcta: P= x +35 H= 5 + x
x + 35 = 3.(x+5)

Rta incorrectas: 3.x + 35 = x+5 o 3(x+35) = x+5

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) 8x-3 = 2x+1

2) $\sqrt[3]{x} - 4 = -1$

3) 6(x-4) = x+10

4) (2y-2) = 2(3y-1)

5) $\dfrac{2-7x}{2x-7} = 6$

6) (6p-2).p = (2p-1).3p+$\dfrac{1}{10}$

7) $\dfrac{2}{3}(9-6x) = (3x+6)^2 - 9x^2$

8) $\dfrac{x+1}{6} - \dfrac{x+3}{4} = -1^2$

9) $\dfrac{1}{2}(x-3) - \dfrac{3(x-1)}{4} = \dfrac{1}{2} + x$

10) $\dfrac{3x-1}{2} = \dfrac{1-x}{8} - \dfrac{5(2-x)}{6}$

11) $\dfrac{4x}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x+2} - 2$

12) $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = 2$

Importante:
la traducción del lenguaje no siempre es directa de acuerdo a la expresión coloquial
Veamos el siguiente ejemplo:

Si el número de latas de la marca A es igual a 3/2 el número de latas de la marca B, y éste, a su vez, es igual a dos veces el número de latas de la marca C.

Rta $x = 3/2\ y$ pero al plantear: $2y = z$,se comete un **error !**

Rta correcta: $x = 3/2\ y$ $y = 2z$

Ejercicio 2:

En un negocio de electrodomésticos se hace un 5% de descuento por pago en efectivo. También se puede pagar con tarjeta de crédito, con un recargo del 12% sobre el precio de lista, en 3 cuotas de igual valor. Completen la lista de precios:

Articulo	**Precio de lista**	**Pago en efectivo**	**Pago con tarjeta**
Heladera	**$ 1900**		
Lavarropas		**$2200**	
DVD HD			**$1300,60**

Ejercicio 3:

Plantea y resuelve los siguientes problemas:

a) Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

b) En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

c) Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.

d) Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 l de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la gasolina que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le queda. Se pide:

  a) Litros de gasolina que tenía en el depósito.
  b) Litros consumidos en cada etapa.

f) En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

g) La dos cifras de un número son consecutivas. La mayor es la de las decenas y la menor la de las unidades. El número es igual a seis veces la suma de las cifras. ¿Cuál es el número?

h) Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad de la padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

Sistemas de ecuaciones de primer grado

Situación problemática:

*La ecuación de demanda de cierto producto es **p** + 2**x** = 25 y la ecuación de oferta es **p** - 3**x** = 5 , en donde **p** es el precio y **x** la cantidad demandada o suministrada, según sea el caso. Calcular los valores de **x** y de **p** en el punto de equilibrio de mercado.*

Este tipo de problemas se lo plantea utilizando un sistema de dos ecuaciones lineales en las incógnitas p y x : Es decir :

Planteo:

$$\begin{cases} p + 2x = 25 \\ p - 3x = 5 \end{cases} .$$

En general : Dados dos expresiones algebraicas enteras de indeterminadas x , y

El conjunto de dos ecuaciones de primer grado en las variables x,y se llama sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y se expresa usando la siguiente notación::

$$\begin{cases} a_{12}x + a_{12}y \quad = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y \quad = b_2 \end{cases}$$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Existen diversos métodos para resolver un sistema. A partir de un ejemplo, los vemos:

- **Sustitución** : sea el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{x} = 3 - 2y \qquad (\mathrm{I})$$

(despejamos una variable cualquiera de una de las ecuaciones)

.**sustituimos** la expresión para x en la segunda ecuación: 2.(3 - 2y) - y = 1

Queda determinada una ecuación de primer grado con una incógnita **y** .La resolvemos:

6 - 4y - y = 1

- 5y = -5 $\Rightarrow$ y = $\frac{-5}{-5}$ $\Rightarrow$ **y = 1**

- Reemplazamos el valor de **y** en (1) : x = 3 -2.1 $\Rightarrow$ **x = 1**

- **Igualación**: trabajamos en el mismo sistema:

  - Despejamos x en ambas ecuaciones : x = 3 - 2y (I)

  x = $\frac{1+y}{2}$ (II)

  - **Igualamo**s las expresiones para x: 3 - 2y = $\frac{1+y}{2}$ y la resolvemos

2. (3 - 2y) = 1 + y

6 - 4y = 1 + y

- 4y - 1y = 1 - 6

- 5y = -5 $\Rightarrow$ y = $\frac{-5}{-5}$ $\Rightarrow$ y = 1

Reemplazamos el valor de y en (1) y en (2): x = 3 - 2.1 $\Rightarrow$ **x = 1**

- **Determinantes**

Dados 4 números reales a,b,c y d:: dispuestos en forma cuadrada, denominamos determinante de orden 2 , (lo notamos con D) al número real que se obtiene de aplicar:

D = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = $ad - bc$ Ejemplo: $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ = -3.4- (-2).1= -12 +2 = -10

<u>Método de Determinantes</u>:

Se aplica cuando Determinante de los **coeficientes** de **las incógnitas**, es **no nulo**.

Se procede de la siguiente forma: El valor de cada incógnita es una fracción que tiene por denominador el determinante de los coeficientes de las incógnitas y por numerador el determinante que se obtiene al reemplazar en el anterior la columna de los coeficientes de la incógnita que se calcula por los términos independientes:

En el ejemplo : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ Aplicamos el procedimiento y calculamos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3-2}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-6}{-1-4} = \frac{-5}{-5} = 1$$

Ejercicio 3: Plantear y Resolver:

1. La suma de dos números es 28 y su diferencia 6. Calcular esos números.

2. En una clase hay 28 alumnos. El número de chicos excede en 8 al número de chicas. ¿Cuántos alumnos de cada sexo hay?

3- Dos hermanos poseen juntos $ 615. Si al primero le regalan $ 105, duplicaría lo que tiene el otro. ¿Cuánto dinero tiene cada hermano?

4. En una reunión hay 35 personas entre hombres y mujeres. Se hizo una colecta aportando cada mujer $300 y cada hombre, $500. Se consiguió colectar $11.900 ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres había en ese reunión?

5. En un teatro hay 500 butacas entre plateas y pullman. En un día de función a sala llena, se recaudaron $ 22000. Si los precios de cada butaca en platea y pullman son respectivamente $ 50 y $ 30, ¿cuántas butacas de cada clase hay en ese teatro?

6-. Miguel tiene un total de $20.000 depositado en dos Bancos diferentes. Uno paga un interés simple del 6% anual y el otro una tasa de interés simple del 8% anual. Si Miguel gano en concepto de intereses un total de $1440 durante un solo año ¿Cuánto dinero tiene depositado en cada institución?

7-. La docena de bananas cuesta la mitad de los que cuesta el kg de tomate. Compré dos docenas de bananas y 3 kg de tomates y pagué $ 48. ¿Puedes calcular cuánto pagué por el kg de tomate y cuánto por las dos docenas de bananas?

8- Por un par de zapatos pagué el triple de lo que pagué por una corbata.; y por los dos artículos pagué un total de $ 1.200 ¿Cuánto pagué por cada artículo?

Ecuaciones de segundo grado

Se llama ecuación de 2do grado en una variable x a la expresión:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \text{siendo } a \neq 0$$

donde:

$a\,x^2$ es el término cuadrático o de segundo grado,
$b\,x$ es el término lineal o de primer grado y
c es el término independiente.

Ecuación completa: la ecuación es completa si contiene los tres términos citados.
Ejs.

$$5\,x^2 - 2\,x - 3 = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 6 = 0$$

Ecuación Incompleta: Cuando falta el término lineal y/o el término independiente

$b = 0 \Rightarrow a\,x^2 + c = 0$ Ej: $25\,x^2 + 4 = 0$
$c = 0 \Rightarrow a\,x^2 + bx = 0$ Ej: $2\,x^2 - 8x = 0$
$b = c = 0 \Rightarrow a\,x^2 = 0$ Ej: $10\,x^2 = 0$

Ecuación normalizada (Reducida o canónica):
Cuando el coeficiente principal es 1. Por ejemplo: $x^2 - 5x + 3$

Resolución de Ecuaciones Completas de 2º grado

- Resolver una ecuación de 2º grado significa encontrar **dos** valores de x que anulan la ecuación dada. Recordemos que estos valores se llaman **raíces** o **ceros** de la ecuación.
- Según el tipo de ecuación cuadrática, se pueden aplicar distintos procedimientos:

a) Aplicando la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a}$

Ejemplo: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Donde: $a = 3$; $b = -5$; $c = 1$. Reemplazando:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{5+1}{6} = 1 \text{ o } x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Ecuaciones cuadráticas incompletas:

Ejemplo 1 : $2x^2 - 50 = 0$

Despejamos x : $x^2 = \dfrac{50}{2}$

$x = \pm\sqrt{25}$;

$x_1 = -5$ y $x_2 = 5$

Ejemplo 2 : $2x^2 - x = 0$

extraemos factor común x::

$x\,.(2x - 1) = 0$ y analizamos

$x_1 = 0$ o $2x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2$

c) Por descomposición en factores:

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$, se puede escribir en la forma: $(x-3).(x-2) = 0$,
aplicando el algoritmo de Ruffini.

Ejercicio 4:
Hallar las raíces de las siguientes ecuaciones aplicando al menos una de las formas dadas:

a) $4x^2 + 9x + 2 = 0$

b) $2x^2 = 9x$

c) $(x+5).(x+2) = 40$

d) $21x^2 + 100 = -5$

e) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = -16$

- **Carácter de las raíces**

Se llama **discriminante** (lo notamos con Δ) al radicando de la fórmula general.

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,.c$$

Suponiendo que a, b, c sean números reales, las raíces de una ecuación de segundo grado pueden ser:

i) Reales y distintas: Si $b^2 - 4\,a.c > 0$

ii) Reales e iguales: Si $b^2 - 4\,a.c = 0$

iii) Complejas conjugadas Si $b^2 - 4\,a.c < 0$

Ejercicio 5:

Indica el número de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado sin resolverlas

a) $x^2-8x+12=0$

b) $2x^2-x+4=0$

c) $4t^2-12t = -9$

Ejercicio 6:

Calcula el valor de c para que la ecuación $x^2 - 8x + c = 0$ tenga dos soluciones iguales

- **<u>Propiedades de las raíces</u>**

I) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ II) $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Ejercicio 7:

a)Sabiendo que el producto de las dos raíces de una ecuación es 8 y la suma 6, escribe la ecuación de segundo grado

b) Sabiendo que la suma de dos números es igual a $-\frac{1}{3}$ y el producto $\frac{5}{3}$, obtener dichos números.

Ejercicio 8: Resolver:

a) $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}$

b) $\frac{2x+3}{4x-1}=\frac{3x-2}{3x+2}$

Ejercicio 9:
La ecuación cuadrática que tiene como maíces a $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ es:
(seleccione la /s respuestas correctas):

a) $x^2 + 1$ b) $x^2 + x = 0$ *c)* $x - x^2 = 0$ *d)* $x^2 + x - 1 = 0$
e) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 10:

Plantea la ecuación correspondiente a cada uno de los problemas siguientes y resuelve:

a) Hallar dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 156.

b) Hallar dos números impares consecutivos cuyo producto sea 195.

c) Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 728.

d) Si del cuadrado de un número se resta 54 se obtiene el triple del número. ¿Cuál es el número?

e) Si el cuadrado de un número se agrega ¼ se obtiene el mismo número. ¿Cuál es este número?

f) Un número excede a otro en 4 unidades. Si el producto de ambos es 285, ¿cuáles son los números?

Capitulo Nº 4 : Funciones de 1º y 2º grado

Introducción:
En muchas situaciones cotidianas en donde se relacionan variables, se toman como modelos las funciones matemáticas pues estas permiten describir esas relaciones en forma aproximada (aunque a veces precisa).

Ejemplos:
a) El valor del consumo mensual de agua potable que depende del número de m^3 consumidos en el mes;
b) El valor de un departamento que depende del número de m^2 construidos;
c) El costo de una llamada telefónica que depende de su duración;
d) El costo de transportar una encomienda que depende de su peso;

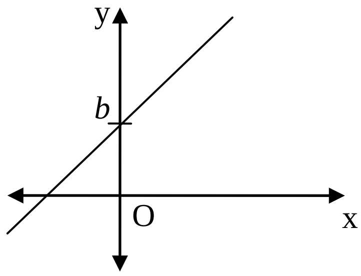
En este capitulo se presentaran dos tipos de funciones: las de 1º y las de 2º grado.

Funciones de primer grado- Ecuación de la recta

Las funciones polinómicas de primer grado son funciones del tipo

$$f(x) = mx + b$$

donde:
x: variable independiente y los parámetros son:
m es la pendiente y ***b*** es la ordenada en el origen.



Su representación gráfica es una recta.

Estas funciones **son continuas** en toda la recta real,
crecientes si $m > 0$ (positiva) o decrecientes, si $m < 0$ (negativa).

Otra forma de expresar una función lineal de una variable x es la siguiente:

$y = mx + b$, que se conoce como ecuación de la recta en el plano xy.

Formas de representar una funcion de 1º grado:

Consideremos la siguiente situación: Un remis tiene la siguiente tarifa de oferta:

$1 la bajada de bandera (precio fijo) mas $3 por cada km recorrido.

Situación que la podemos modelizar (sin llegar a ser algo estrictamente real) proponiendo la fórmula siguiente: $y = 3x + 1$

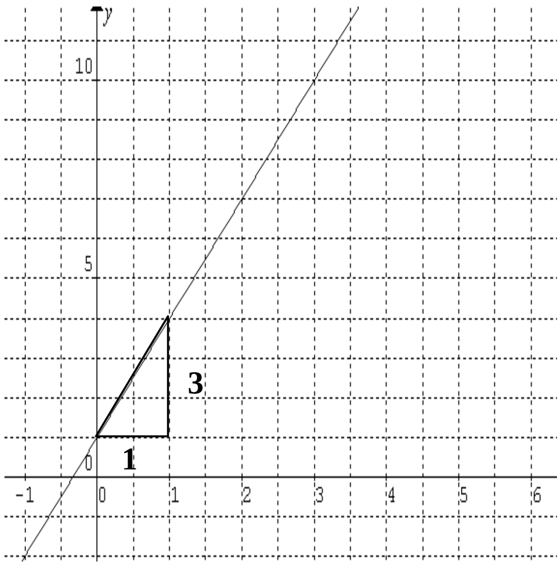
O mediante una tabla de valores que tenga algunos de los **pares de puntos** que pertenecerán a la recta. Se completa colocando valores arbitrarios para x, (pero en forma conveniente) y operando con c/u de ellos de acuerdo al ejemplo dado.
Por ejemplo:

x	f(x)
0	1
1	4
2	7
5	16

También se puede graficar directamente utilizando sus parámetros, de la siguiente forma:
Dado el mismo ejemplo: $y = 3x + 1$

1º) Marcamos la ordenada al origen **1** en y .

2º) A partir de este punto y sabiendo que la pendiente es $3 = \frac{3}{1}$, construimos un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3 como se indica en la gráfica de la figura siguiente:



En la función $f(x) = mx + n$ se pueden presentar casos particulares:

- Si b= 0, la función se denomina **función lineal** o de proporcionalidad directa. Su gráfica pasa por el origen de coordenadas. Estas funciones relacionan dos variables **directamente proporcionales**.
- Si $m = 0$, decimos que la **función** es **constante** y su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto (0, *n*).

Ecuación de la recta que pasa por un punto:

Para saber si un punto (par ordenado de números reales) P_0 pertenece o no a la recta dada, se debe reemplazar dichos valores de x_0 ,y_0 en la fórmula y se debe obtener una igualdad. Si es verdadera, pertenece, caso contrario no.

Otra forma, es reemplazar $P_0(x_0 , y_0)$ en la siguiente ecuación: $y = m.(x - x_0) + y_0$
Mediante distribuciones y reducciones se debe llegar a la misma ecuación dada.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

Dos puntos determinan una recta como reza el ***axioma****.* Es decir dados los puntos $P_1(x_1 , y_1)$ y $P_2(x_2 , y_2)$ es posible trazar una recta y también obtener su pendiente m Mediante el cociente de las diferencias de las coordenadas de y sobe las de x. O sea

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y su ecuación está dada por: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1) + y_1$

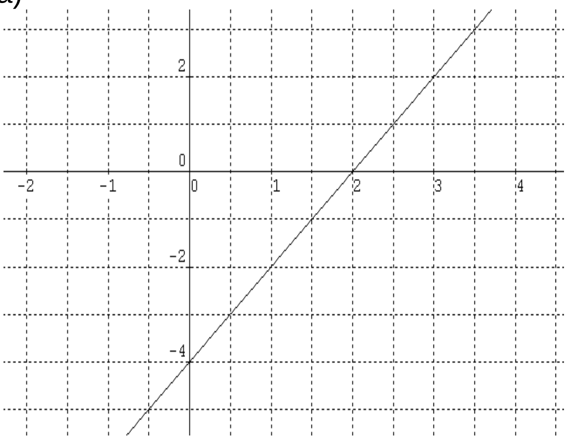
Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1: Escribe la ecuación principal de la recta de modo que m y b sean respectivamente:

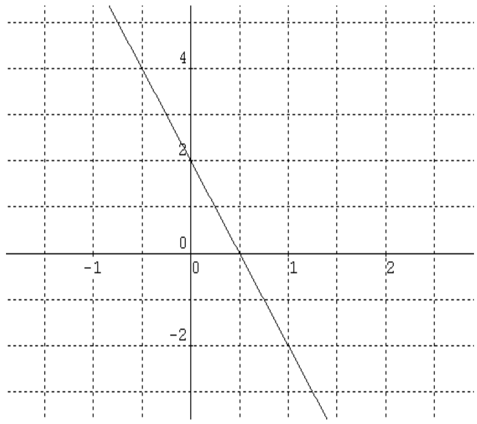
a) -4 y 6 c) 0 y -1 d) 3 y -3 e) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$

Ejercicio 2: Indique cuál de los siguientes gráficos corresponde a: $y = -4x + 2$

a)



b)



Ejercicio 3: Determina la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes ecuaciones:

a) $y = 3x$
b) $y = x + 5$
c) $2x - y = = 4$
d) $y = -x$
e) $2x + 3y - 3 = 0$
f) $2y - x = -6$
g) $y = -4$

Ejercicio 4: Determina si el punto dado pertenece a la ecuación de recta indicada:

a) $(-4, 2)$; $y = -2x - 6$
b) $(1, 3)$; $y = x - 4$
c) $(-2, 0)$; $x + 3y + 2 = 0$
d) $(1/2, -2)$; $2x + y + 1 = 0$

Ejercicio 5: Determina la ecuación general de la recta que pasa por:

a) $(4, 7)$ y tiene pendiente 5
b) $(1, -5)$ y tiene pendiente -3
c) $(-2, -5)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$
d) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ y tiene pendiente $\frac{-1}{4}$

Ejercicio 6: Determina la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $(2, 1)$ y $(3, 2)$ b) $(-2, 6)$ y $(5, -8)$

c) $(-1, -4)$ y $(2, 8)$ d) $\left(\frac{-1}{2}, 2\right)$ y $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

Función Cuadrática o de 2º grado

Es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, donde a, b y c son números reales.

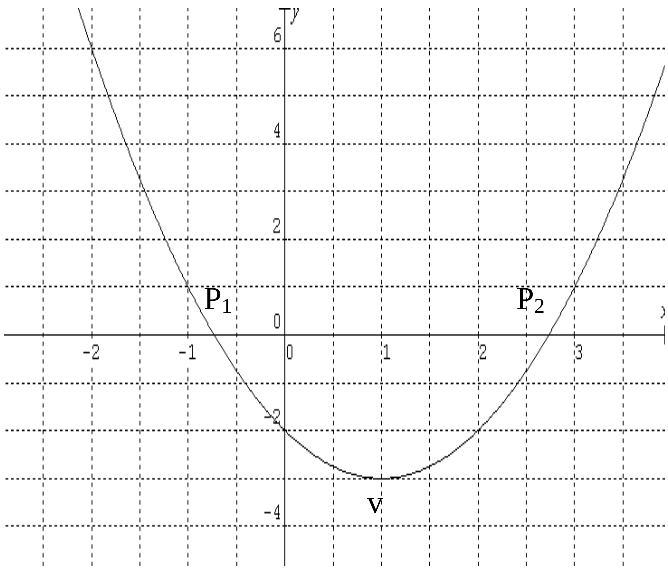
Una función cuadrática es una curva llamada **parábola**, cuyas características son:

- Si $a > 0$ es cóncava hacia arriba y admite un mínimo.
- Si $a < 0$ es cóncava hacia abajo y admite un máximo.
- Vértice: v(α, β) Puntos de la curva donde la función alcanza el máximo o el mínimo.
  Donde α, β, se obtienen aplicando: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ y $\beta = f(\alpha)$
- Eje de simetría: x = α.
- Intersección con el eje y: P(0,c)
- Intersecciones con el eje x (si es que existen *) : Son los puntos $P_1(x_1, 0)$ y $P_2(x_2,0)$ que se obtienen resolviendo la ecuación de 2º grado: y=0

Ejemplo: $y = x^2 - 2x - 2$

donde $a = 1$, v (1,-3) , el eje de simetría es $x = 1$ y la curva intersecta al eje OX en los puntos:

$P_1(1+\sqrt{3}, 0)$ y $P_2(1-\sqrt{3}, 0)$ (valores obtenidos si se resuelve la ecuación: $x^2 - 2x - 2 = 0$)



* **Observación**: La existencia de raíces reales depende del valor del discriminante $b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática. Así es que se pueden presentar tres casos:

- $b^2 - 4ac > 0$: Existen las raíces y son puntos distintos de la parábola, que cortan al eje OX
- $b^2 - 4ac = 0$: Existen pero son iguales. Ese valor representa **una** coordenada del vértice.
- $b^2 - 4ac<0$: **No existen** las raíces reales, ya que ambas **son complejas**, esto significa que la parábola **no corta** al eje X.

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7: Dadas las siguientes funciones cuadráticas:

b) $y = -x^2 + x + 2$

c) $y = x^2 - 2x + 3$

d) $y = x^2 - 1$

e) $y = x^2 - 4x + 4$

f) $y = x^2 - 9$

g) $y = x^2 - 2x + 1$

h) $y = x^2 + 4$

Caracterice cada una de las funciones, determinando:

I- Vértice de la parábola
II- Concavidad y Eje de simetría.
III- Raíces de la parábola (en caso de ser posible).

Ejercicio 8: Grafique:

a) $y = 2x^2 - 3x + 6$

b) $y = x^2 + 2x + 1$

c) $y = -x^2 + 4x - 3$

Ejercicio 9: Halla el vértice y la ecuación del eje de simetría de las siguientes parábolas:

a) $y = (x - 2)^2 + 1$

b) $y = 2(x - 1)^2 - 3$ *(graficar)*

c) $y = 3(x+1)^2 - 2$

d) $y = -3(x - 4)^2 - 2$ *(graficar)*

e) $y = x^2 - 7x - 18$

f) $y = 3x^2 + 12x - 5$

Ejercicio 10:

Indica, sin dibujarlas, en cuantos puntos cortan al eje de abscisas las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 5x + 3$

b) $y = 2x^2 - 5x + 4$

c) $y = x^2 - 2x + 4$

d) $y = -x^2 - x + 3$

☞Simbolos y notaciones matemáticas con sus significados

$\in$: *" pertenece a " o " perteneciente a"*
$\notin$: *"no pertenece " o "no perteneciente a"*
$\Rightarrow$: *"implica , entonces"*
$\Leftrightarrow$: *" implica doblemente" o "si y sólo si"*
$\neq$: *" distinto de"*
$\wedge$: *" y"*
$>$: *"mayor que"*
$\geq$: *"mayor igual que"*
$<$: *"menor que"*
$\leq$: *"menor e igual que"*
$X > 0$: *" x es positivo"*
$X < 0$: *"x es negativo"*
$\exists\ x$ /: *" existe por lo menos un"*
$\forall x$: *"para todo"*
$\subseteq$: *"es subconjunto de"; "está incluido en"; "está contenido en "; "es parte de"*
$\subset$: *"es subconjunto estricto de"; "es subconjunto propio de"; "está incluido estrictamente"; "está incluido propiamente dicho"*
$\supseteq$: *"contiene a"*
$\supset$: *"contiene estrictamente a"*
Σ : *"sumatoria "*