

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

por Jorge José Osés Recio

Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes – Bogotá – Colombia - 2004

Cuando se estudió la solución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se analizó el signo del discriminante $b^2 - 4ac$ y su relación con las soluciones. Si el discriminante era negativo se dijo que la ecuación no tenía raíces reales sino que las raíces eran imaginarias o complejas. Vamos ahora a estudiar los *números complejos* que nos darán la idea completa de la solución de la ecuación de segundo grado y una extensión de los conjuntos numéricos. Realizaremos lo que se llama la definición axiomática del conjunto de los números complejos.

Sección 1

Definición y operaciones en el conjunto de los números complejos.

Definición. Llamamos *conjunto de los números complejos* y lo denotamos con la letra \mathbb{C} al conjunto de los pares de números reales (a, b) en el cual definimos las siguientes operaciones:

Suma. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicación. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

En el número complejo (a, b) llamaremos a a la *parte real* y a b la *parte imaginaria*. Note que la suma y producto de pares no está definida en \mathbb{R}^2 .

Dos propiedades que cumplen los pares de números reales y que se mantienen para los complejos son:

Igualdad. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Multiplicación por un escalar. $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

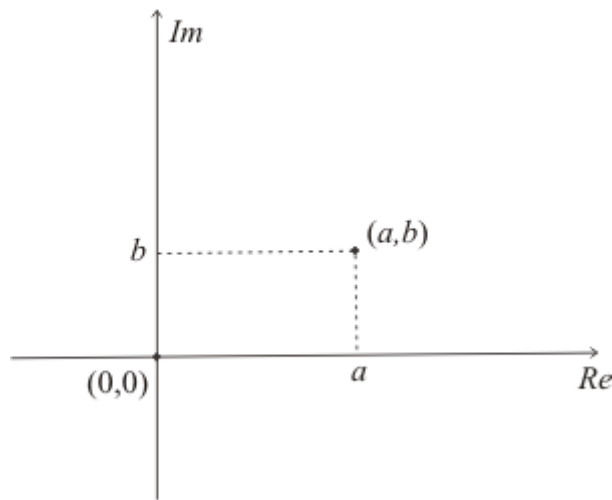
Ejemplo. Dados $(2, 1)$ y $(0, -3)$, hallar:

a) $(2, 1) + (0, -3) = (2 + 0, 1 + (-3)) = (2, -2)$

b) $(2, 1)(0, -3) = (2(0) - 1(-3), 2(-3) + 1(0)) = (3, -6)$

c) $(2, 1)(0, -3) - 2(-1, 1) = (3, -6) + (2, -2) = (5, -8)$

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos mediante el plano \mathbb{R}^2 (Gráfica 1) En esta representación se le dice *eje real (Re)* al eje de las x y *eje imaginario (Im)* al eje de las y .



Gráfica 1: Representación del número complejo (a, b) .

Podemos considerar que los números reales están contenidos en los números complejos puesto que en el plano \mathbb{R}^2 el número complejo $(a, 0)$ coincide con el número real a . De este modo tenemos $a = (a, 0)$ cuando $a \in \mathbb{R}$. Los números complejos de la forma $(0, b)$ son llamados *imaginarios puros*.

Vamos a demostrar la propiedad de la multiplicación por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Para eso escribimos el número real α en la forma $(\alpha, 0)$ y aplicamos la definición de multiplicación:

$$\alpha(a, b) = (\alpha, 0)(a, b) = (\alpha a - 0b, \alpha b + 0a) = (\alpha a, \alpha b).$$

Denotaremos el número complejo $(0, 1)$ con la letra i y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Es fácil demostrar que $i^2 = -1$.

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0(0) - 1(1), 0(1) + 1(0)) = (-1, 0) = -1$$

Ahora estamos en condiciones de resolver la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm i$$

Forma binómica de un número complejo

Sea $z = (a, b)$ un número complejo. Entonces podemos escribirlo en la forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Pero como $(1, 0) = 1$ y $(0, 1) = i$, entonces $(a, b) = a + bi$. En este caso $a + bi$ se llama *forma binómica o binomia* del número complejo.

Suma y multiplicación de números complejos en la forma binómica

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, puesto que a, b, c, d son todos números reales.

$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$ porque $i^2=-1$.

Ahora observe que los resultados son los mismos que las definiciones de suma y producto dados al inicio; por lo que la realización de las operaciones de suma y multiplicación con números complejos se puede realizar en la forma de pares o en la forma binómica, con la ventaja a favor de la forma binómica que se trabaja con las reglas del álgebra y no es necesario memorizar nada nuevo.

Ejemplo. Si $z_1=(3,2)$ y $z_2=(4,-1)$, halle z_1+z_2 y z_1z_2 .

$$z_1+z_2=(3,2)+(4,-1)=(3+2i)+(4-i)=7+i$$

$$z_1z_2=(3,2)(4,-1)=(3+2i)(4-i)=12-3i+8i-2i^2=(12+2)+(-3+8)i=14+5i$$

Conjugado de un número complejo

Si $z=x+yi$ es un número complejo llamaremos *conjugado del número z* , al número $\bar{z}=x-yi$, es decir, al número complejo que tiene la misma parte real que z pero la parte imaginaria de signo opuesto.

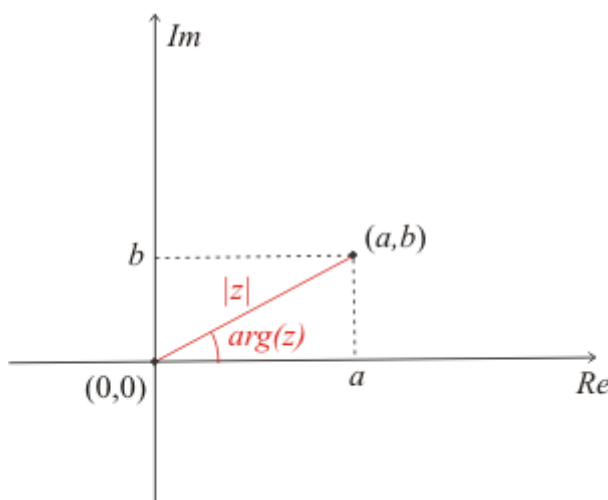
Ejemplo. Si $z=3+2i$, entonces $\bar{z}=3-2i$ y si $z=3-2i$, entonces $\bar{z}=3+2i$.

Módulo y argumento de un número complejo

Sea $z=(a,b)=a+bi$ un número complejo cualquiera. Llamaremos *módulo* del número complejo z , al número real dado por $\sqrt{a^2+b^2}$ y lo denotaremos por $|z|$. El módulo se interpreta como la distancia al origen del número z (*Gráfica 2*).

Por otra parte, llamaremos *argumento* del número complejo $z=a+bi$, al ángulo comprendido entre el eje x y el radio vector que determina a $|z|$. El argumento de z se denota por $\arg(z)$ y se calcula mediante la expresión:

$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$



Gráfica 2: Módulo y argumento de un número complejo.

Propiedad: $z\bar{z} = |z|^2$

Demostración:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - y^2i^2 = \\ &= (a^2 + b^2) + (-ab + ab)i = a^2 + b^2 + 0i = a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

División de números complejos

La división de números complejos se realiza mediante la multiplicación y división por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{|z_2|^2}$$

Ejemplo. Dados $z_1 = 2-3i$ y $z_2 = -1+2i$, halle: (a) \bar{z}_2 y (b) $\frac{z_1}{z_2}$.

(a) Como $z_2 = -1+2i$ entonces $\bar{z}_2 = -1-2i$

(b) Para hallar $\frac{z_1}{z_2}$ multiplicamos y dividimos por el conjugado \bar{z}_2 .

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2-3i}{-1+2i} = \frac{2-3i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(2-3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} \\ &= \frac{-2-4i+3i+6i^2}{(-1)^2+(2)^2} = \frac{-8-i}{5} = -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

Raíces complejas de la ecuación de segundo grado

Si el discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es negativo, debe sustituirse el signo negativo por i^2 y de esa forma se obtienen las raíces complejas de la ecuación.

Ejemplo. Resolver la ecuación $x^2-2x+6=0$.

Aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Se puede ver que el discriminante es -20 lo cual puede escribirse como $20i^2$. Por lo tanto:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 1 \pm \sqrt{5}i$$

Así, las raíces complejas de la ecuación son: $x_1 = 1 - \sqrt{5}i$ y $x_2 = 1 + \sqrt{5}i$.

Ejercicios de la Sección 1.

1) Dados los números complejos $z = (3, 2)$ y $w = (-1, -4)$, halle:

(a) $z + w$, (b) z^w , (c) $3z - 4w$, (d) $(-1, 0)w$, (e) $(0, -2)z$.

2) Muestre que $(0, 0)$ es el elemento neutro para la suma de números complejos.

3) Muestre que $(1, 0)$ es el elemento neutro para la multiplicación de números complejos.

4) Calcule:

(a) i^3 , (b) i^4 , (c) i^5 , (d) $\frac{1}{i}$, (e) $\frac{1}{i^2}$.

5) Calcule:

(a) i^{4n} , (b) i^{4n+1} , (c) i^{4n+2} , (d) i^{4n+3} .

6) Dado el número complejo (x, y) halle el par (u, v) tal que $(x, y)(u, v) = (1, 0)$. Al par se le llama inverso multiplicativo de (x, y) . Concluya que el par (u, v) es único y que el $(0, 0)$ no tiene inverso multiplicativo.

7) Verifique que $\overline{\bar{z}} = z$.

8) Verifique que \overline{uv} y $u\bar{v}$ son conjugados.

9) Calcule:

(a) $\frac{3+3i}{2-4i}$, (b) $\frac{1-3i}{-2-2i}$.

10) Resuelva la ecuación $(-2+i)z = 3+i$.

11) Halle z tal que $(2+i)(1+i) = 2+zi$.

12) Calcule y represente en el plano complejo los números $z = x + yi$, tales que:

(a) $|z| = 5$, (b) $|z| \leq 5$.

13) Calcule y represente en el plano complejo los números $z = x + yi$ tales que:

(a) $|z-2| \leq 5$, (b) $|z-i| \leq |z+i|$, (c) $z + \bar{z} = |z|^2$.

14) Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 3 = 0$.

15) Resuelva la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x + 5 = 0$.

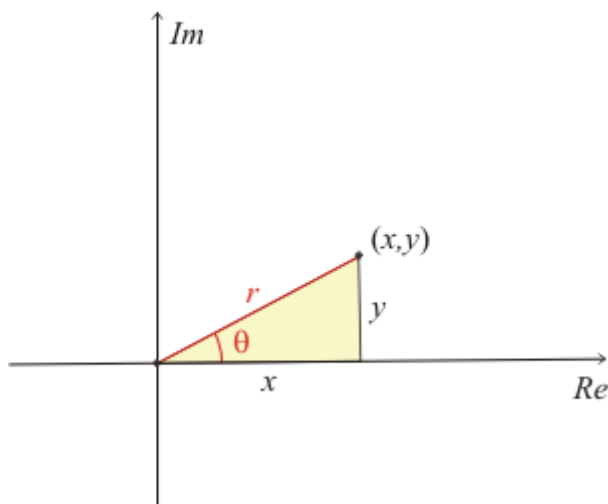
16) Resuelva la ecuación cuadrática $x^2 + 3x + 8 = 0$.

17) Resuelva la ecuación $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$.

Sección 2

Forma trigonométrica o polar de un número complejo

La forma trigonométrica de un número complejo se establece observando el triángulo amarillo de la *Figura 3*:



Gráfica 3: Forma trigonométrica de un número complejo.

En este caso se tiene que $r = |z| = |(x, y)|$ y que $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Luego:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Ésta es la llamada *forma trigonométrica o polar* del número complejo, la cual está en términos del módulo y el argumento. Se denota comúnmente por $z = r \operatorname{cis} \theta$.

Ejemplo: Halle la forma trigonométrica de $z = 1 - i$.

$$\text{Hallemos } r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ y } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Note que θ está en el cuarto cuadrante. Por lo tanto:

$$z = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Sean $u = r \operatorname{cis} \alpha$ y $v = s \operatorname{cis} \beta$, entonces $uv = (rs) \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$. En otros términos:

$$uv = (rs)(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

Demostración:

$$\begin{aligned} uv &= r \operatorname{cis} \alpha \cdot s \operatorname{cis} \beta \\ &= (rs)(\operatorname{cis} \alpha \operatorname{cis} \beta) \\ &= (rs)(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (rs)(\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta) \\ &= (rs)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\ &= (rs)(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \\ &= (rs) \operatorname{cis}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la multiplicación de dos números complejos en su forma trigonométrica da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

Ejemplo. Sea $u = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $v = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 3 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Entonces $uv = 6 \operatorname{cis}(0) = 6(\cos(0) + i \sin(0)) = 6$

Fórmula de Moivre

Empleando el resultado del *Ejercicio 3b* de esta sección, $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$, y tomando $r = 1$, tenemos:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Esta expresión es la llamada *fórmula de Moivre*.

Forma exponencial de un número complejo

Vamos a asumir que se siguen cumpliendo, como en los números reales, los conceptos de función, derivadas, series, etc. Vamos a demostrar la *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Empleemos el desarrollo en serie de potencias de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, suponiendo que sea válido para cuando la variable x es un número complejo z .

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Si tomamos $z = i\theta$, nos queda:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + i\frac{\theta}{1!} + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Agrupando tendremos:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) + i \left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)$$

Estos son los desarrollos de $\cos\theta$ y $\sin\theta$ respectivamente. Así que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Sea $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento. Entonces mediante el empleo de la fórmula de Euler se obtiene:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r e^{i\theta}.$$

Esta expresión es la llamada *forma exponencial* del número complejo. Note que la forma exponencial es equivalente a la trigonométrica pues dependen de los mismos elementos: módulo y argumento del número complejo z . Esta forma es muy cómoda pues podemos efectuar la multiplicación, división y potenciación empleando las leyes del álgebra.

Multiplicación y división de números complejos en su forma exponencial

Sean $u = r e^{i\alpha}$ y $v = s e^{i\beta}$. Entonces:

$$uv = r e^{i\alpha} s e^{i\beta} = (rs) e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{r e^{i\alpha}}{s e^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s} \right) e^{i(\alpha-\beta)}$$

Ejemplo: Sea $u = 6 e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $v = 3 e^{i\frac{\pi}{4}}$. Entonces $uv = 18 e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$ y $\frac{u}{v} = 2 e^{i(0)} = 2$.

Ejercicios de la Sección 2.

1) Represente:

- (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-3 + 3i$.
- (b) en la forma binómica el número complejo $2(\cos\pi - i\sin\pi)$.

2) Represente:

- (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-2 - 2i$.

(b) en la forma binómica el número complejo $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

3) Multiplicando el mismo número complejo n veces, efectúe y emplee identidades trigonométricas para comprobar que si

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

, ...,

$$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

entonces

$$(a) z_1^2 = r_1^2(\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1))$$

$$(b) z_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$$

$$(c) z_1 z_2 \dots z_n = (r_1 r_2 \dots r_n) \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n).$$

Extienda el resultado a las potencias enteras negativas.

4) Calcule:

$$(a) (-1 - i\sqrt{3})^9, (b) \frac{1}{(2 + 2i)^7}$$

5) Dados $u = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ y $v = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, emplee la forma exponencial para hallar:

$$(a) uv, (b) u/v.$$

6) Dados $u = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ y $v = 2 - i\sqrt{3}$, emplee la forma exponencial para hallar:

$$(a) uv, (b) u/v.$$

$$7) \text{ Halle } \frac{(\sqrt{3} + i)^4}{(-1 + i\sqrt{3})^6}.$$

$$8) \text{ Halle } \frac{(1 + i)^{84}}{(-1 - i)^9}$$

Sección 3

Raíces n -ésimas de un número complejo

En la forma binómica de un número complejo la representación es única, mientras que en la forma trigonométrica o exponencial un mismo número complejo tiene infinitas representaciones diferentes, $z = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Para cada valor de k habrá una representación diferente del número complejo z .

Definamos la radicación como la operación inversa de la potenciación, esto es:

$$z = \sqrt[n]{w} \Leftrightarrow z^n = w.$$

Supóngase que $w = r e^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ y que $z = s e^{i\phi}$ un número complejo de módulo s y argumento ϕ . Entonces $z^n = w$ equivale a:

$$z^n = s^n e^{in\phi} = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta + 2k\pi)} = w.$$

De esta manera:

(1) $s^n = r$

(2) $n\phi = \theta + 2k\pi$

Por lo tanto, $z = s e^{i\phi}$ donde $s = \sqrt[n]{r}$ y $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, con $k = 1, 2, \dots, n$.

Estas son las fórmulas para hallar las n raíces n -ésimas de cualquier número complejo. Compruebe que para todo otro valor de k , con $k \in \mathbb{Z}$, se obtienen las mismas n raíces que para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Ejemplo. Hallar $\sqrt{1+i}$.

$1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Por lo tanto $s = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ y $\phi = \frac{\pi/4 + 2k\pi}{2}$, con $k = 0, 1$. Entonces:

Para $k = 0$, tenemos $z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Para $k = 1$, tenemos $z_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

El logaritmo de un número complejo

Al igual que para los reales, vamos a definir el logaritmo de un número complejo como la operación inversa de la exponencial, esto es:

$$z = \log w \Leftrightarrow e^z = w.$$

Supóngase que $w = r e^{i\theta}$ es un número complejo de módulo r y argumento θ , entonces:

$$e^z = r e^{i(\theta + 2k\pi)} = w \Leftrightarrow z = \ln r + i(\theta + 2k\pi).$$

Ejemplo. Sea $1 = 1e^{i(0)}$. Por tanto $\log(1) = \ln(1) + i(2k\pi) = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios de la Sección 3

- 1) Halle las raíces cuadradas de -1 y verifique que son i y $-i$.
- 2) Halle las raíces cúbicas de 1 .
- 3) Halle las raíces cúbicas de -1 .
- 4) Halle las raíces cuadradas del número $1 + \sqrt{3}i$ y expréselas en la forma binómica.
- 5) Halle las raíces cúbicas del número $-1 - i\sqrt{3}$ y expréselas en la forma binómica.
- 6) Halle las raíces cuadradas de $-2 - 2i$ y represéntelas en el plano complejo.
- 7) Muestre que $\log(-1) = \pi i$.
- 8) Halle:
(a) $\log(e)$, (b) $\log(i)$, (c) $\log(-ei)$.
- 9) Muestre que $\log(1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} i$.

Respuestas

Sección 1

1) a) (2, -2), b) (5, -14), c) (13, 22), d) (1, 4), e) (4, -6)

$$6) (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$9) a) \frac{-3 + 9i}{10}$$

$$11) 3 + i$$

13) a) $(x-2)^2 + y^2 \leq 25$, círculo de radio 5 centrado en (2, 0) y su interior.

$$15) -1 \pm \frac{1}{2}i$$

$$17) \pm 2i, \pm 3i$$

Sección 2

$$1) a) 3\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5) a) 2, b) i$$

$$7) \frac{1}{4}e^{-\frac{10}{3}i}$$

Sección 3

$$3) \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$5) 2e^{\frac{4}{9}\pi}, 2e^{\frac{10}{9}\pi}, 2e^{\frac{16}{9}\pi}$$

$$8) a) 1 + 2k\pi i, c) 1 - \frac{\pi}{2}i$$

Tomado de <http://temasmaticos.uniandes.edu.co>