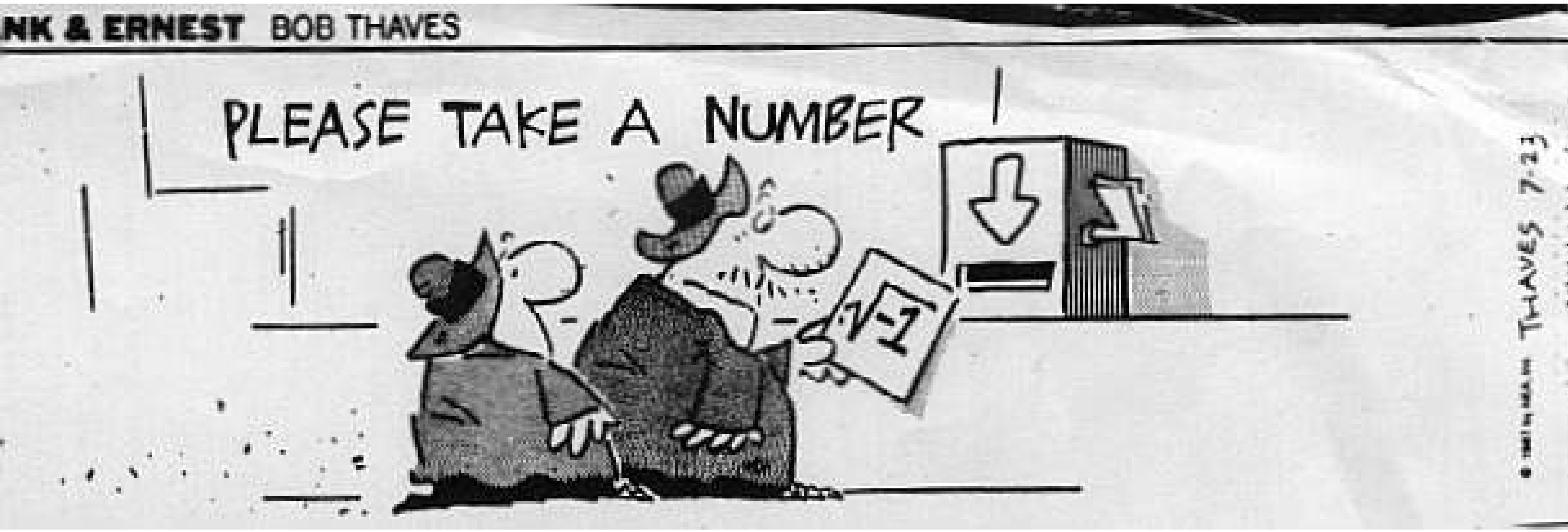
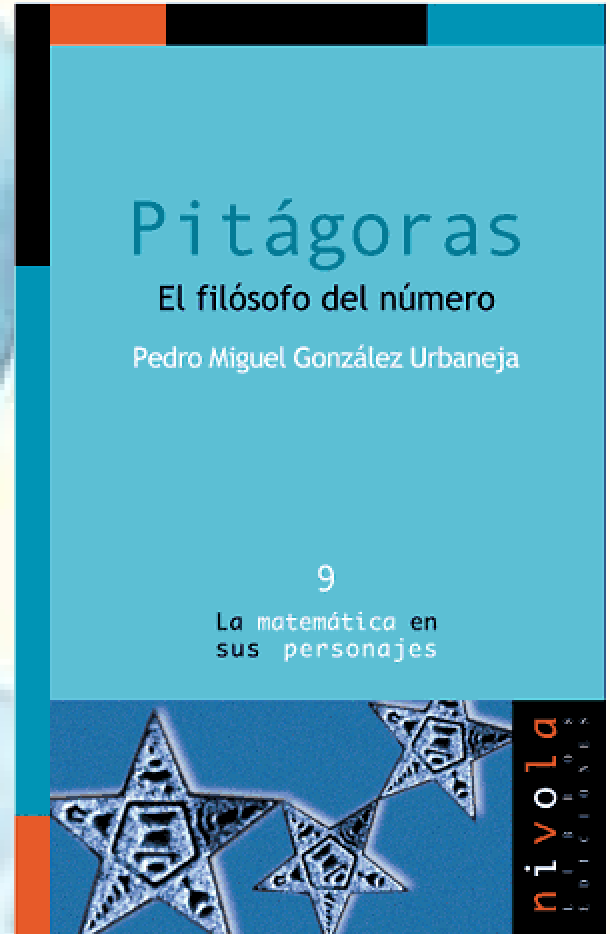
1. Números complejos



Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.
(God created the integers, everything else is made by humans.)
Leopold Kronecker (1823–1891)

"Pitágoras es probablemente el matemático más conocido, pero también es célebre en el ámbito más general de la historia de la cultura. Su figura es una de las más apasionantes e interesantes de la historia del pensamiento. Racionalista y místico, filósofo y teólogo, matemático y experimentador, hombre de carne y hueso y personaje mítico; Pitágoras es el inductor de una parte considerable de los elementos culturales que han ido conformando la tradición del pensamiento occidental".



Pedro Miguel González Urbaneja

Pitágoras de Samos (siglo VI a.C.)

"La matemática como ciencia teórica es un invento pitagórico".

Contemporáneo de Buda, de Confucio y de Lao-Tse, los fundadores de las principales religiones orientales. Se ha llegado a dudar de su existencia.

Mathema: "lo que se enseña".
Filosofía: "amor a la sabiduría".
La Tierra era una esfera.
El lucero del alba y el de la tarde
era el mismo astro: Venus.
Números pares e impares.
Introdujo en Grecia las medidas y pesos.
La clave para comprender el orden del
universo estaba en los números.

La escuela pitagórica

Pitágoras huyó de Samos debido al dictador Polícrates, y fundó en el sur de Italia, en Crotona, una escuela donde enseñaba su filosofía matemática.

En ella, los discípulos (hombres y mujeres, de cualquier raza, religión o estrato social. La primera mujer científica: Teano) de primer grado, llamados “akusmáticos” (escuchantes) aprendían la doctrina durante 5 años, en los que no se les permitía ver a Pitágoras.

Los más aptos pasaban al segundo grado, donde adquirían conocimientos más profundos. Ya podían hablar con Pitágoras, y se les llamaba “matemáticos” (conocedores).

La secta pitagórica

Tocar el agua cuando truene. Nunca ponerse un anillo. Nunca mear hacia el sol. Vegetariano estricto. Pero: nunca comer habas (al parecer Pitágoras las aborrecía). Transmigración de las almas (Metempsicosis *vs.* cristianismo).

Cuando los crotonenses vieron que todos los cargos políticos estaban ocupados por pitagóricos, arremetieron contra la escuela y la quemaron. Pitágoras, en ropa interior, salió huyendo...

Cosmos: universo ordenado y accesible al intelecto. La armonía del universo.

Todo es número.

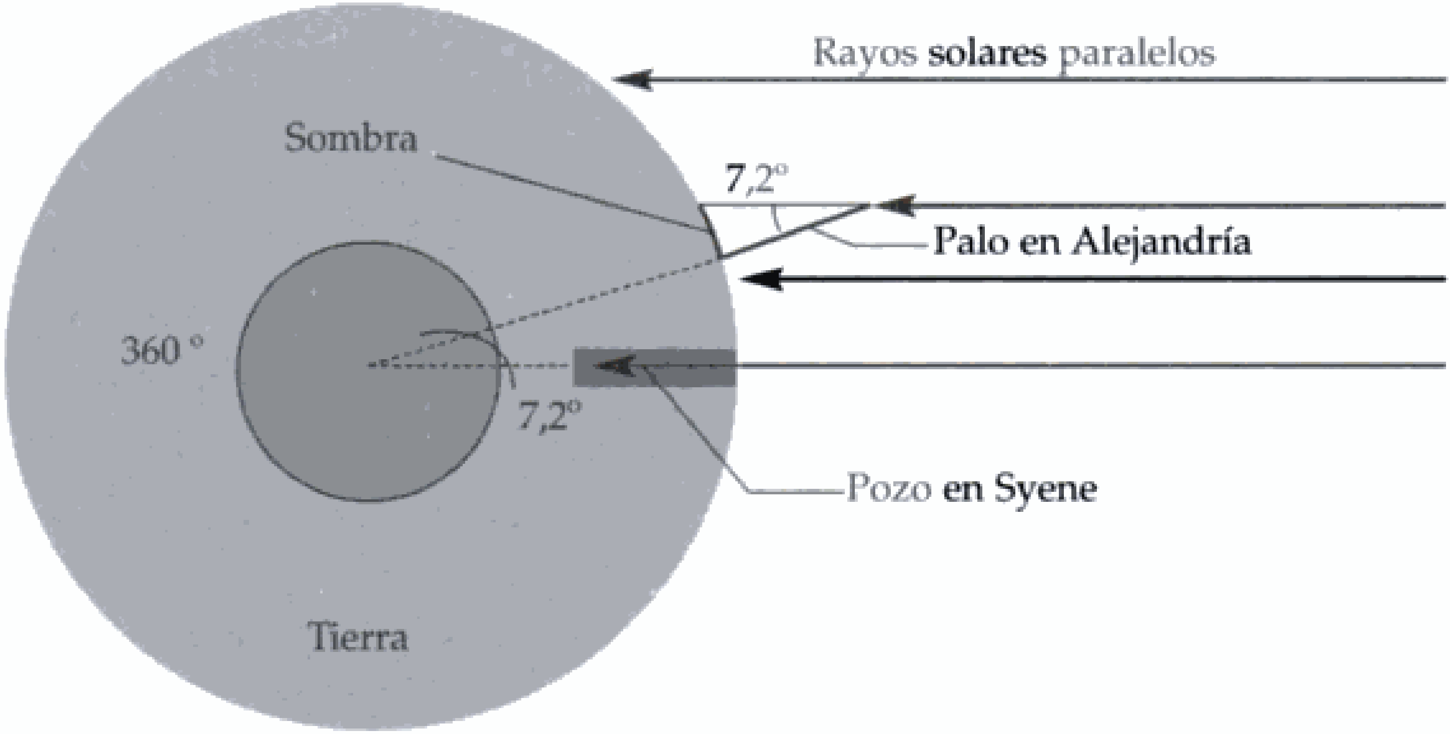


Figura 1 Eratóstenes utilizó la sombra proyectada por un palo en Alejandría para calcular la circunferencia de la Tierra. Llevó a cabo un experimento durante el solsticio de verano, momento en que la Tierra estaba más inclinada y en que las ciudades que se encontraban en el trópico de Cáncer estaban más cerca del Sol. Esto significa que, en estas ciudades, a las doce del mediodía, el Sol estaba directamente encima. Por razones de claridad, las distancias de este y de otros diagramas no han sido dibujadas a escala. Asimismo, los ángulos pueden haber sido exagerados.

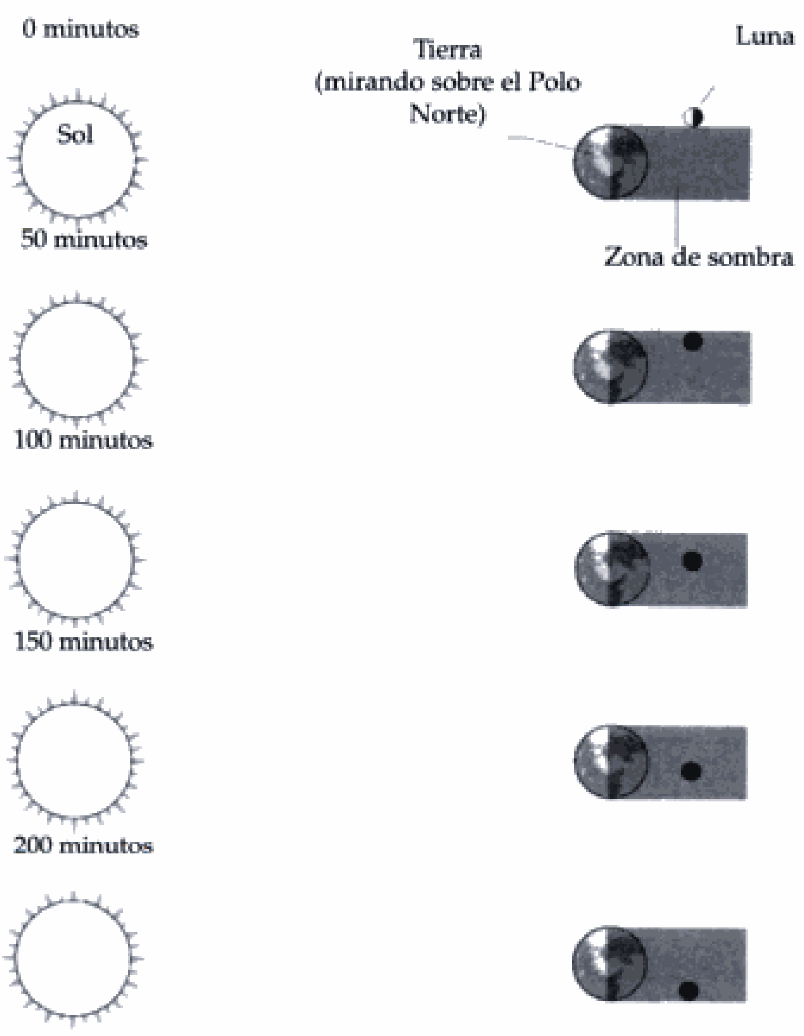
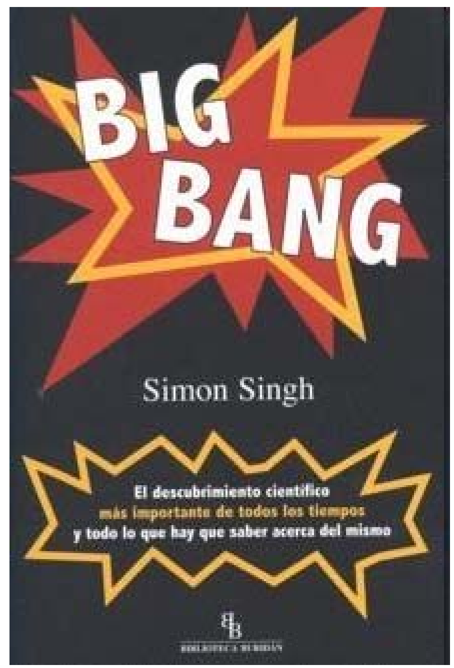


Figura 2 Los tamaños relativos de la Tierra y la Luna pueden calcularse observando el paso de la Luna por la sombra de la Tierra durante un eclipse lunar. La Tierra y la Luna están muy lejos del Sol comparando esta distancia con la que separa a la Tierra de la Luna, de modo que la sombra de la Tierra es más o menos del tamaño de la propia Tierra.

El dibujo muestra el paso de la Luna por la sombra de la Tierra. En este eclipse particular –cuando la Luna pasa aproximadamente por el centro de la sombra de la Tierra– la Luna tarda 50 minutos en ir desde el punto en que toca a la sombra hasta quedar completamente cubierta, o sea, que 50 minutos es una indicación del diámetro de la propia Luna. El tiempo necesario para que la parte frontal de la Luna cruce toda la Tierra es de 200 minutos, que es una indicación del diámetro de la Tierra. El diámetro de la Tierra, por consiguiente, es aproximadamente cuatro veces mayor que el de la Luna.



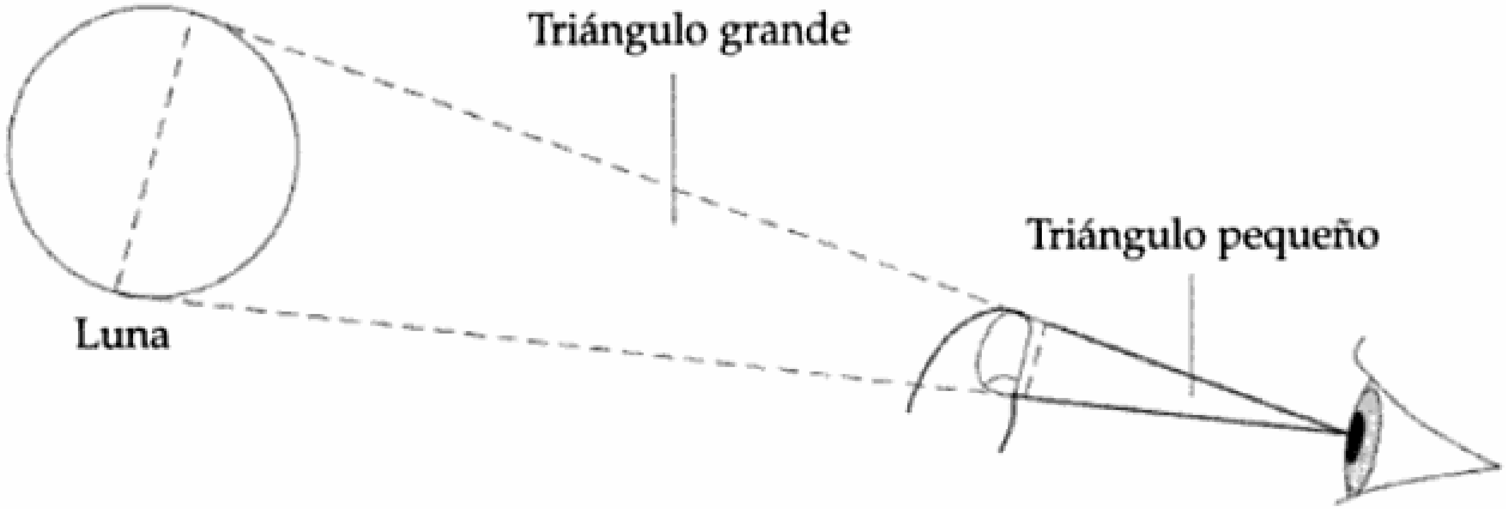


Figura 3 Una vez calculado el tamaño de la Luna, es relativamente fácil calcular a qué distancia se encuentra. Primero, se observará que es posible tapar la Luna con una uña extendiendo el brazo. Por tanto, es evidente que la proporción entre la altura de una uña y la longitud de un brazo es aproximadamente igual a la proporción entre el diámetro de la Luna y su distancia a la Tierra. La longitud de un brazo es aproximadamente cien veces mayor que la de una uña, así que la distancia a la que se encuentra la Luna es más o menos cien veces su diámetro.

Figura 4 Aristarco demostró que era posible calcular la distancia a la que se encuentra el Sol usando el hecho de que la Tierra, la Luna y el Sol forman un triángulo rectángulo cuando la Luna está en su fase media. En este momento midió el ángulo que se muestra en el dibujo. Conociendo la distancia Tierra-Luna un simple cálculo trigonométrico permite determinar la distancia Tierra-Sol.

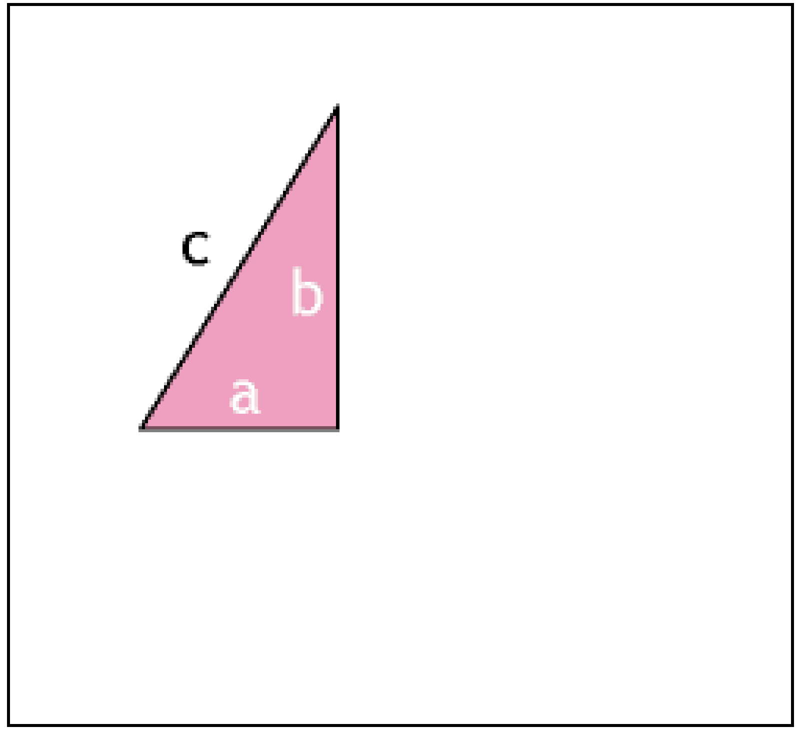
"Todo es número"

"Boscone alchemico", de **Tobia Ravà**, un pintor italiano heredero de la antigua escuela pitagórica, filtrada a través de la tradición hebrea de la Gematría, donde "todo es número". Su obra plasma ese pensamiento en imágenes. www.tobiarava.com/


THE
MATRIX

"*No es digno de llamarse hombre aquel que desconoce que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado.*" *Sophie Germain*

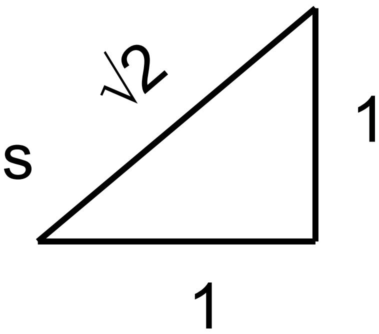
Sonidos de la ciencia:
Programa 47:
La armonía de los mundos



Los pitagóricos pensaban que todo podía representarse por razones de números enteros. Cuando Hipaso de Metaponto demostró que $\sqrt{2}$ no era expresable como cociente de enteros, y rompió la regla de silencio de la secta, revelando al mundo la existencia de estos nuevos números...

Números irracionales

Todo número racional puede escribirse como *n/m*, donde *n* y *m* son enteros sin factores en común.



<u>Demostración (1).</u> ¿Es $\sqrt{2}$ racional? Supongamos que sí:

$\sqrt{2} = n/m$. Elevando al cuadrado: $2 = n^2/m^2$ y $n^2 = 2m^2$.

De modo que n^2 es un entero par $\Rightarrow$ ***n* es par**.

Entonces podemos escribir: $n = 2p$. Así $2m^2 = 4p^2$; $m^2 = 2p^2$.

Y de nuevo como m^2 es un entero par $\Rightarrow$ ***m* es par**.

¡Contradicción! (Reducción al absurdo) $\Rightarrow$
Nuestra suposición inicial es incorrecta $\Rightarrow$
$\sqrt{2}$ no puede escribirse como una fracción de enteros.

Estética matemática

Compara la demostración anterior, con la siguiente:

Demostración (2). ¿Es $\sqrt{2}$ racional? Supongamos que sí:

$\sqrt{2} = n/m$. Elevando al cuadrado: $2 = n^2/m^2$ y $n^2 = 2m^2$.

Todo entero puede descomponerse como un producto único de números primos. Así en n^2 intervienen cierta colección de primos idénticos en parejas (está elevado al cuadrado).
Idem para m^2.

Pero, en $2m^2$ hay un *2* "desemparejado" $\Rightarrow$ ¡Contradicción! $\Rightarrow$
Nuestra suposición inicial es incorrecta $\Rightarrow$
$\sqrt{2}$ no puede escribirse como una fracción de enteros.

"No me cabe duda alguna de que 9 de cada 10 matemáticos profesionales dirían que la demostración (?) les causa mayor deleite estético."
The Mathematical Experience*, P.J. Davis y R. Hersh*

¿Puede ser racional un número irracional elevado a un número irracional?

(Test de sensibilidad a la elegancia matemática)

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

Es racional

o

Es irracional $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2$

¡Hemos conseguido contestar la pregunta sin ni siquiera saber si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional!

Por cierto, no fue hasta 1930 que se demostró que $2^{\sqrt{2}}$ es irracional y trascendental.

Un **número complejo** *z* es un par ordenado de números reales *x* e *y*, escrito como:

$$z = (x,y)$$ (William R. Hamilton)

(Notación en componentes o coordenadas cartesianas).

x se llama la **parte real** de *z*: $\boldsymbol{Re}(\mathbf{z}) := x$

y se llama la **parte imaginaria** de *z*: $\boldsymbol{Im}(\mathbf{z}) := y$

El conjunto de números complejos, se denota por C:

$$C := \{(x,y) : x, y \in \Re\}$$

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son iguales:

$$(x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ sii } x_1 = x_2\,,\ y_1 = y_2$$

(0,1) se llama la **unidad imaginaria** y se denota por:

$$\boxed{i = (0,1)}$$

(Los ingenieros eléctricos a menudo usan "j" para evitar confusiones con el símbolo "i", que asocian a la intensidad eléctrica).

Un número complejo $z = (x,y)$ se escribe comúnmente como (*notación algebraica o binómica, "afijo" en textos de antaño*):

$$\boxed{z = x + i\,y}$$

Si $x = 0$ $(z = i\,y)$, entonces z se dice que es un **imaginario puro**. Si y = 0 $(z = x)$, entonces z se comporta como un **número real**.

Suma y producto de números complejos

Sean:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

Parte real   Parte imaginaria

"En la facultad teníamos un profesor cojo al que llamábamos el complejo. Tenía una pierna real y otra imaginaria."
Memorias de un estudiante de matemáticas

Suma

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

Producto

$$\boxed{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

Ejemplos:

(1) $$i^2 = (0+i)(0+i) = (0-1) + i(0+0) = -1$$

De modo que podemos sustituir siempre:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

(2) Esto nos permite una manera práctica de operar. Por ejemplo:

$$(4-5i)(2+3i) = [4 \cdot 2 + (-5i) \cdot 3i] + [4 \cdot 3i + (-5i) \cdot 2]$$
$$= (8+15) + i(12-10) = 23 + 2i$$

La resta y la división se definen como operaciones inversas de la suma y la multiplicación respectivamente

Resta (operación inversa a la suma)

$z_1 - z_2 = z$ ¿Qué es z ? $z + z_2 = z_1$

$$\boxed{z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

División (operación inversa al producto)

$\dfrac{z_1}{z_2} = z$ ¿Qué es z ? Es un número complejo tal que:
$z\, z_2 = z_1$, siempre que $z_2 \neq 0$.

Ejercicio: demostrar que es cierto.

$$\boxed{z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

Ejemplo:

Sean $z_1=18 + 3i \qquad z_2 = -7 + 2i$

Calcular:

$$Re(z_1) = 18, \qquad Re(z_2) = -7$$

$$Im(z_1) = 3, \qquad Im(z_2) = 2$$

$$z_1+z_2 = 11 + 5i, \qquad z_1-z_2 = 25+i$$

$$z_1z_2 = (18+3i)(-7+2i) = -132 + 15i$$

Complejo conjugado

El **complejo conjugado** $\bar{z}$ de un número complejo $z = x + i\,y$ se define como:

$$\boxed{\bar{z} = x - iy}$$

$\left(\textit{También se suele denotar como}: z^{*} \right)$

Es sencillo demostrar que:

$$\bar{\bar{z}} = z \qquad z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Por ejemplo: $\quad \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy = z$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$

$$= (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) = (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)$$

$$= \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)} =$$

$$(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1) =$$

$$(x_1-iy_1)(x_2-iy_2) = \overline{z}_1\overline{z}_2$$

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \mathrm{Re}(z)$$

Observemos que:

$$\boxed{z\,\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2}$$

En la práctica, obtenemos el cociente de dos números complejos z_1 / z_2 multiplicando el numerador y denominador de por el complejo conjugado de z_2.

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\,\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \\ &\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}}$$

Ejemplos:

(1) Sean de nuevo: $z_1 = 18 + 3i \qquad z_2 = -7 + 2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(18+3i)(-7\text{-}2i)}{7^2+2^2} = \frac{-120\text{-}57i}{53}$$

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (18\text{-}3i)(-7\text{-}2i) = -132\text{-}15i = \overline{z_1 z_2}$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{(18+3i)(-7+2i)}{7^2+2^2} = \frac{-120+57i}{53} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

(2) $$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\times\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

A pesar de la sencillez del conjugado y sus propiedades, nos permite demostrar fácilmente cosas como esta:

Sea la ecuación: $\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n = 0 \quad \alpha_i \in \boldsymbol{C}.$

Si p es una raíz de la ecuación, entonces $\overline{p}$ es raíz de la ecuación:

$$\overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_1} z + \ldots + \overline{\alpha_n} z^n = 0$$

Y en particular, si $\alpha_i \in \Re$, $i = 1,\ldots,n$, p y $\overline{p}$ son raíces de la misma ecuación, y obtenemos el conocido teorema que nos dice que: las raíces no reales de la ecuación anterior con coeficientes reales, aparecen en parejas de raíces conjugadas.

Un número es trascendente (o trascendental) si no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales). En este sentido, número trascendente es antónimo de número algebraico (Wikipedia).

• *Raíces cuadradas* (método algebraico):
Si $z = x + \mathrm{i}\, y$, queremos hallar todos los $w = u + \mathrm{i}\, v \in \mathbf{C}$ tales que $w^2 = z$:

$$
\begin{aligned}
w^2 = z \iff & u^2 - v^2 + 2\,\mathrm{i}\, u\, v = x + \mathrm{i}\, y \\
\iff & \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ \quad 2\, u\, v = y \end{cases} \\
\implies & x^2 + y^2 = (u^2 + v^2)^2 \implies u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\implies & u^2 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \quad v^2 = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2}) \\
\implies & w = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} + \mathrm{i}\ \mathrm{sig}\, y \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}} \right), & y \neq 0 \\ \pm\sqrt{x}, & y = 0,\ \ x \geq 0 \\ \pm i \sqrt{-x}, & y = 0,\ \ x < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Las raíces cuadradas de un número complejo $z \neq 0$ son *dos* números complejos distintos (de signos opuestos). Las raíces cuadradas de z son *reales* si y sólo si $z \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, e **imaginarias puras** si y sólo si $z \in \mathbf{R}^-$.

Ejemplo 1.3. Las raíces cuadradas de $3 - 4\,i$ son

$$
\pm \left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \mathrm{i} \sqrt{\frac{2}{2}} \right) = \pm(2 - i).
$$

2.- Obtener en forma binómica.

a) $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

b) $\dfrac{(3+5i)}{(2-i)}$

c) $\dfrac{(1+i^3)}{(1+i)^3}$

Sol.:

a) $z = -1 - i$

b) $z = 1/5 + (13/5)i$

c) $z = -1/2$

4.- Hallar dos complejos que tengan igual parte imaginaria, cuya suma y cuyo cociente sean imaginarios puros.

Sol.: $z_1 = y + iy$

$z_2 = -y + iy, \; y \in \Re$

Demuestra el teorema del binomio para números complejos:

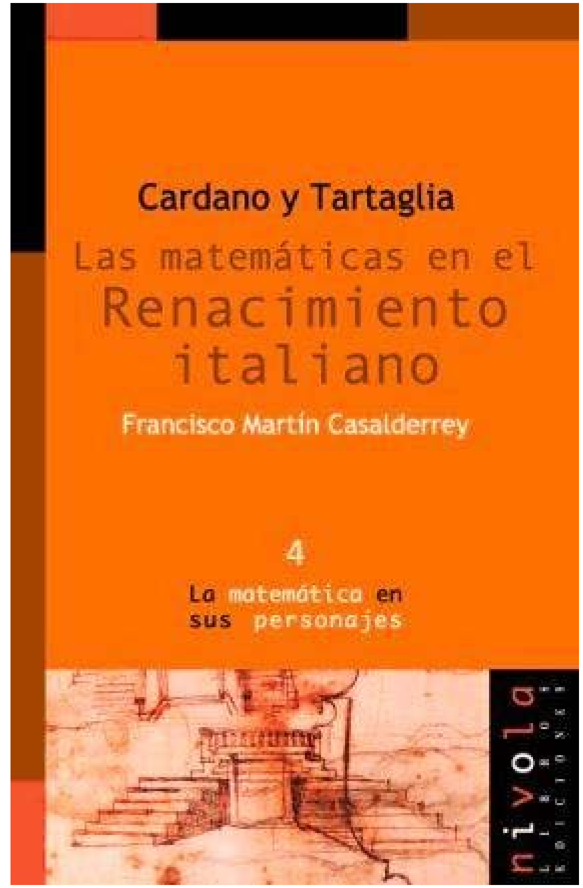
$$(z_0 + z_1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z_0^{n-i} z_1^{i}$$

donde n es un entero positivo.
Sugerencia: Usa inducción.

La aventura de la ecuación cúbica

"Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano". Francisco Martín Casalderrey, editorial Nivola

"El desarrollo económico y comercial en la Italia del siglo XII creó necesidades formativas nuevas. Junto con la seda y las especias se importan el sistema de numeración hindú, el álgebra árabe y las obras matemáticas de la antigua Grecia. Las escuelas de ábaco difunden estos nuevos conocimientos formando a comerciantes y artesanos.



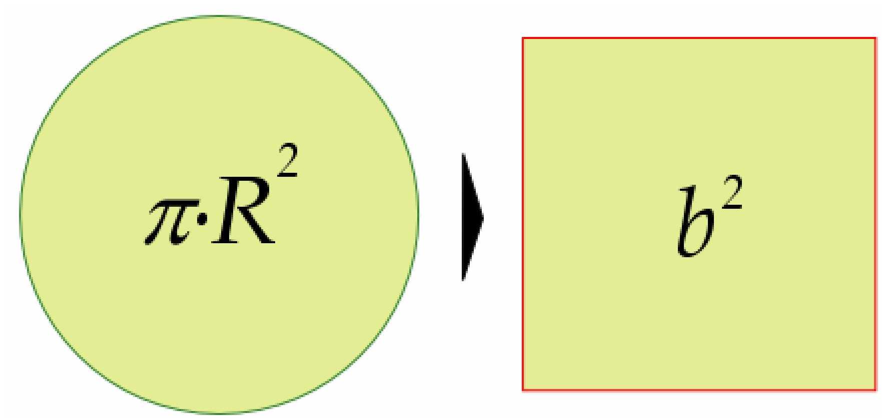
Al comenzar el siglo XVI se empiezan a dar las condiciones para que las matemáticas avancen. Del Ferro y Tartaglia resuelven **la ecuación de tercer grado**, Ferrari la de cuarto y Cardano publica ambas soluciones en medio de una gran polémica.

Todos los protagonistas de esta historia son hombres del Renacimiento, polémicos, ávidos de saber y llenos de ideas."

Francisco Martín Casalderrey

La tragicomedia del nacimiento de los números complejos

Luca Pacioli había comparado la dificultad de la resolución de la ecuación de tercer grado con el viejo problema de **la cuadratura del círculo**.



Luca Pacioli **(1445 - 1517)**

"El círculo y el cuadrado sobre estas líneas presentan la misma área aunque no existe un método geométrico que permita pasar de la figura de la izquierda a la de la derecha." (Wikipedia)

Resolver la ecuación de tercer grado se había convertido en un desafío intelectual digno de los mejores matemáticos de la época.

La Universidad de Bolonia, fundada en 1088, es la más antigua de Europa.

Escipione del Ferro (1465-1526) fue el primero en encontrar (1505-1515) una solución general para la ecuación cúbica del tipo (¿Marciano?) :

"Incógnitas y cubos igual a números"

$$x^3 + px = q \qquad p, q \in \Re$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

¿Por qué la incógnita es la x?

Los árabes llamaban a la incógnita **shay** (cosa). En muchas traducciones se escribía latinizada como **xay** y de ahí, al abreviar, quedó **x**. En Italia, **shay** se tradujo como **cosa** y a los que resolvían ecuaciones se les llamó **cosistas**, quienes escribían la **x** como **co**.

En 1496 se convirtió en uno de los 5 titulares de la cátedra de matemáticas. Aunque diversas fuentes lo describen como un gran algebrista, no han sobrevivido originales de su obra.

Mantener los hallazgos matemáticos en secreto fue común hasta el siglo XVIII. Del Ferro, poco antes de morir, reveló el secreto a su yerno (para asegurar su sucesión en su cátedra) y a su alumno **Antonio María del Fiore**, un matemático mediocre.

En el siglo XVI cualquier matemático o erudito podía ser desafiado a una **disputa** públicamente. Muchas veces había una apuesta de por medio... Estaba en juego la **reputación**, la conservación de su puesto de trabajo en la universidad e incluso el incremento de su salario.

Scipione del Ferro, profesor de la Universidad de Bolonia, descubrió, hacia 1505, la fórmula que aún hoy se emplea para solucionar una ecuación de tercer grado, pero no comunicó a nadie su descubrimiento, sin duda para usarlo en las disputas públicas y así ganar fama. Sólo en su lecho de muerte informa de su fórmula a su yerno Annibale della Nave y a su alumno Antonio María del Fiore.

(www.lolitabrain.com)

Buscando ese crédito, del Fiore desafió en 1535 al matemático **Niccolò Tartaglia.** Tartaglia era su apodo (tartamudo) a causa de un sablazo que recibió en la boca con 12 años a manos de un soldado francés. Fue dado por muerto, pero gracias al tesón de su madre y a "*un perro que le lamió las heridas*" (¿?¡!) logró sobrevivir. Siempre llevó barba para ocultar su rostro desfigurado.

Tartaglia procedía de una familia muy pobre: "Tuvo que abandonar sus estudios de lectura y escritura del alfabeto al llegar a la letra *k* porque la familia se quedó sin dinero para pagar al tutor." (*La ecuación jamás resuelta*, Mario Livio).

Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557)

Tartaglia alcanzó reputación en Venecia al resolver algunos problemas para los ingenieros del Arsenal veneciano (45º). Su fama llegó a oídos de del Fiore que, pertrechado con "su secreto", lo retó...

La noche del 12 de febrero de 1535 en Venecia, **Tartaglia** se enfrentaba a la lista de 30 problemas de su rival **Antonio María del Fiore**.

Al cabo de 8 días debía consignar las soluciones ante notario...

Del Fiore perdió estrepitosamente: no pudo resolver ninguno de los 30 problemas que le propuso Tartaglia. Sin embargo Tartaglia fue capaz de redescubrir la fórmula extraterrestre de del Ferro.

Tartaglia se convirtió en una celebridad matemática.

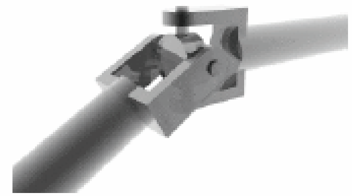
Tentado por la *fórmula mágica*, Del Fiore reta a Tartaglia, reputado matemático veneciano, a una disputa pública en la que cada uno debe solucionar los problemas que le propone el otro. Del Fiore, conocedor del valor de su fórmula, propone a Tartaglia problemas que sólo se pueden resolver con una ecuación de tercer grado. Tartaglia la encuentra el 12 de febrero de 1535, y derrota públicamente a Del Fiore.

El resultado de la contienda se extendió como la pólvora por toda Italia y llegó a oídos de **Gerolamo Cardano** (1501-1576). Cardano fue un personaje singular. Como estudiante se sustento gracias al juego: cartas, dados, ajedrez... usando los que fueron primeros rudimentos de la teoría de la probabilidad (*Liber de ludo aleae*).

Gerolamo Cardano
(1501-1576)

Cardano ganó muchos debates, y a pesar de sus modales rudos y vocingleros, a mediados de siglo se había convertido en uno de los médicos más famosos de Europa.

En esa época estaba redactando su segundo libro y encontró sumamente atractiva la idea de incluir la fórmula para la ec. de tercer grado. Trató en vano de deducirla, y decidió convencer a Tartaglia para que le revelara su secreto.



CARDAN JOINT

"Juro ante ti por los Santos Evangenlios y por mi fe de caballero, no solo no publicar jamás tus descubrimientos si me los revelas, sino que también prometo y comprometo mi fe como verdadero cristiano que los escribiré en clave para que después de mi muerte nadie pueda comprenderlos." (25 de marzo de 1539, versión de Tartaglia).

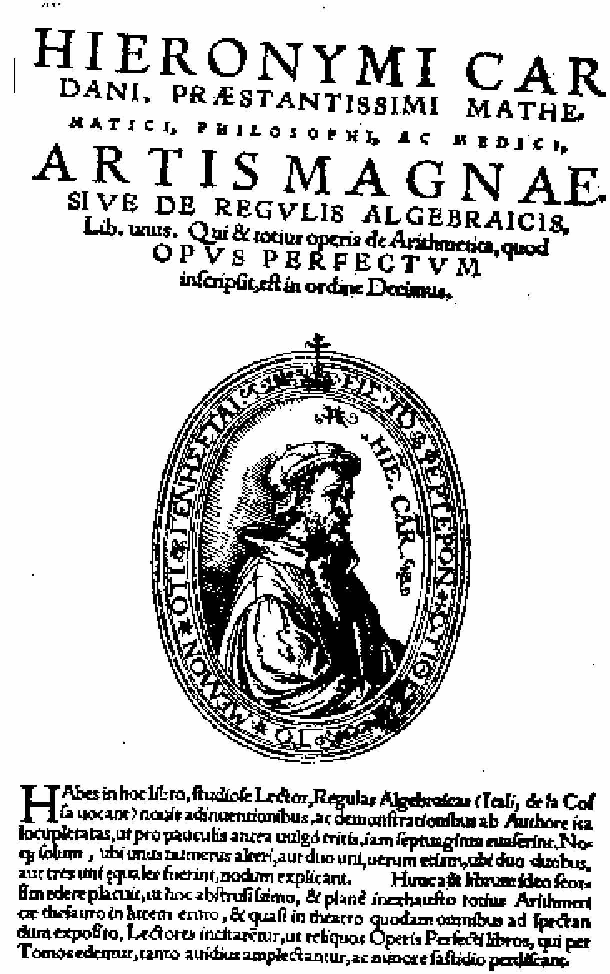
The poem in which he revealed the secret of solving the cubic to Cardan:

When the cube and the things together
Are equal to some discrete number, [1]
Find two other numbers differing in this one.
Then you will keep this as a habit
That their product shall always be equal
Exactly to the cube of a third of the things. [2]
The remainder then as a general rule
Of their cube roots subtracted
Will be equal to your principal thing.[3]

[1] [Solve $x^3 + cx = d$]
[2] [Find u, v such that $u - v = d$ and $uv = (c/3)^3$]
[3] [Then $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$]

Cardano, famosísimo matemático y doctor del norte de Italia, al saber que Tartaglia ha descubierto la fórmula, le pide que se la cuente en un encuentro, el 25 de marzo de 1539. Cardano, en un solemne juramento, se compromete a no hacer públicos sus descubrimientos, con lo que Tartaglia accede, comunicándole su método operativo en un poema. Estaba presente también el joven de 17 años, Ludovico Ferrari, ayudante de Cardano, nuestro sexto protagonista.

Cardano generalizó la solución de Tartaglia y su alumno **Ludovico Ferrari** (1522 - 1565) en 1540 encontró solución para ecs. de cuarto grado. En 1542 Cardano y Ferrari consiguieron permiso para rebuscar entre los papeles de del Ferro, donde ¡encontraron la famosa fórmula! Puesto que Tartaglia no había sido el primer descubridor, podían publicarla.



HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI, ARTIS MAGNAE SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

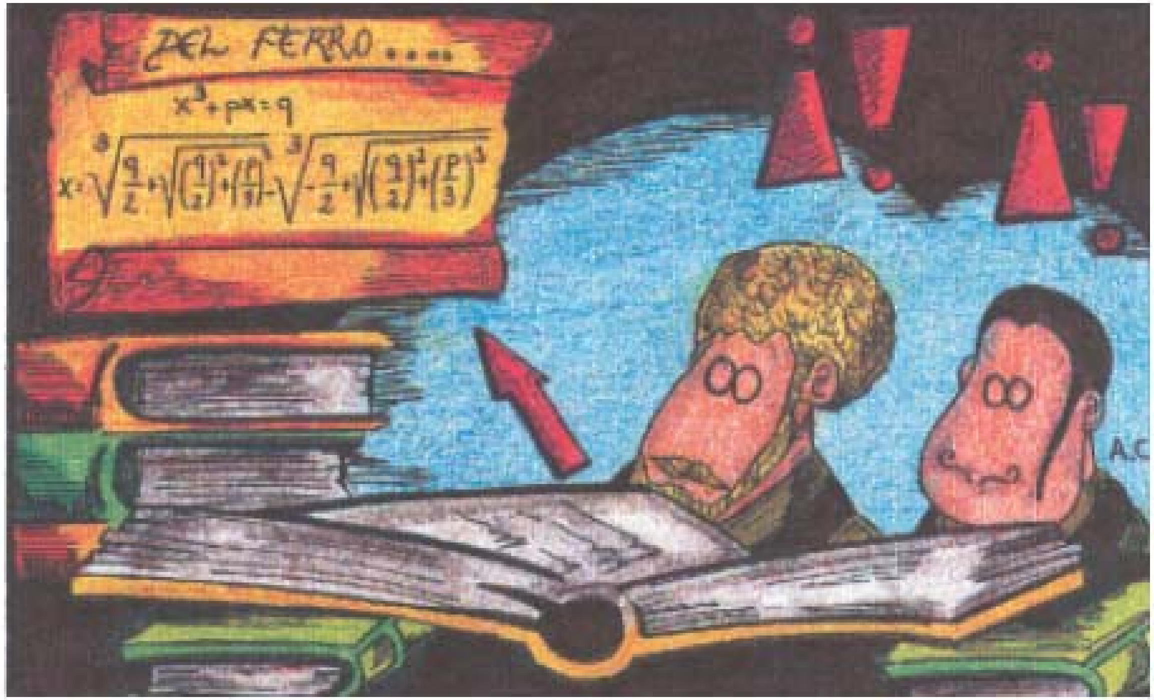
Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa vocant) novis adinventionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgò tritis, iam septuaginta evaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, verum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto avidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

<u>*Ars Magna (1545):*</u> Considerada como la fecha de nacimiento de los números complejos y el principio del álgebra moderna. Resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado.

$$\boxed{5 \pm \sqrt{-15}}$$

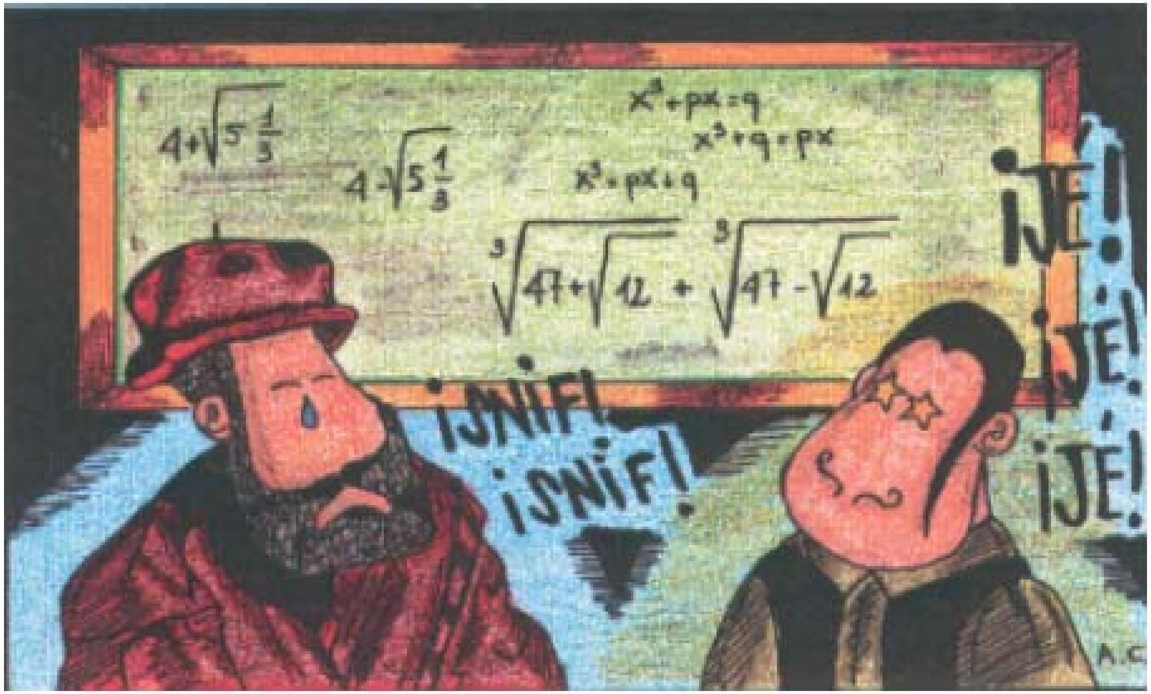
"Divide 10 en dos partes, de modo que una por la otra den 40." x(10-x)=40".

Solución "intrigante" o cantidades "sofísticas".



Cardano y Ferrari estudiaron la fórmula pero la mantuvieron en secreto. En 1542, casi en actitud detectivesca, deciden visitar a Annibale della Nave y, revisando los papeles de Del Ferro, encuentran ¡la fórmula que Tartaglia había descubierto! Cardano podría publicar en su 'Ars Magna' la importantísima fórmula sin faltar al juramento hecho a Tartaglia. Así lo hizo, escribiendo

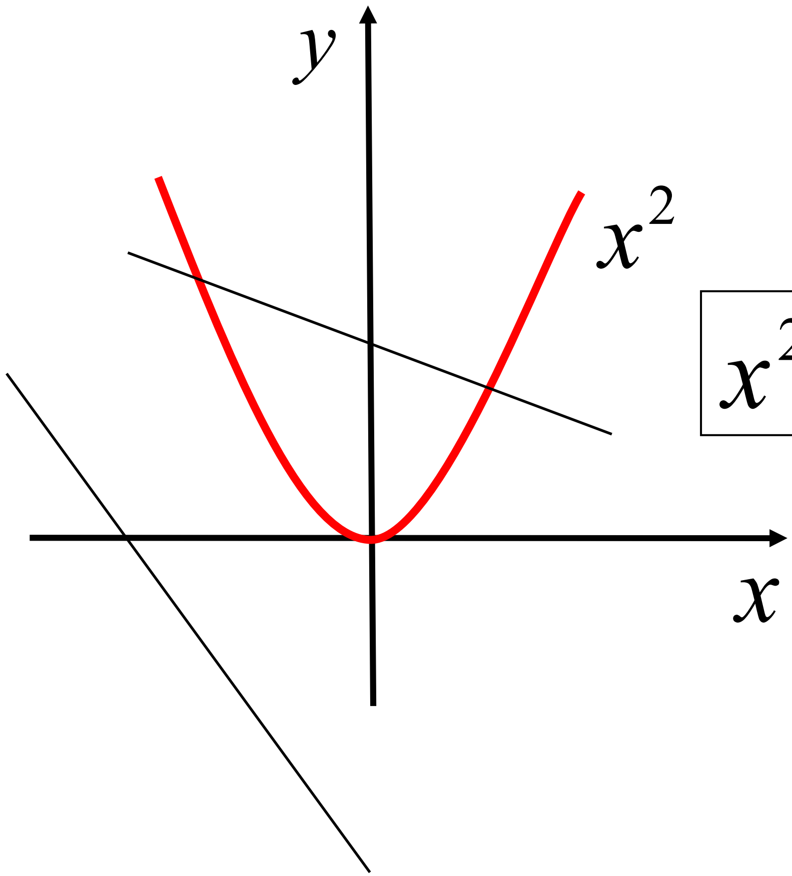
"[...] mi amigo Niccolo Tartaglia resolvió el mismo caso [...] y movido por mis ruegos, me la confió a mí."



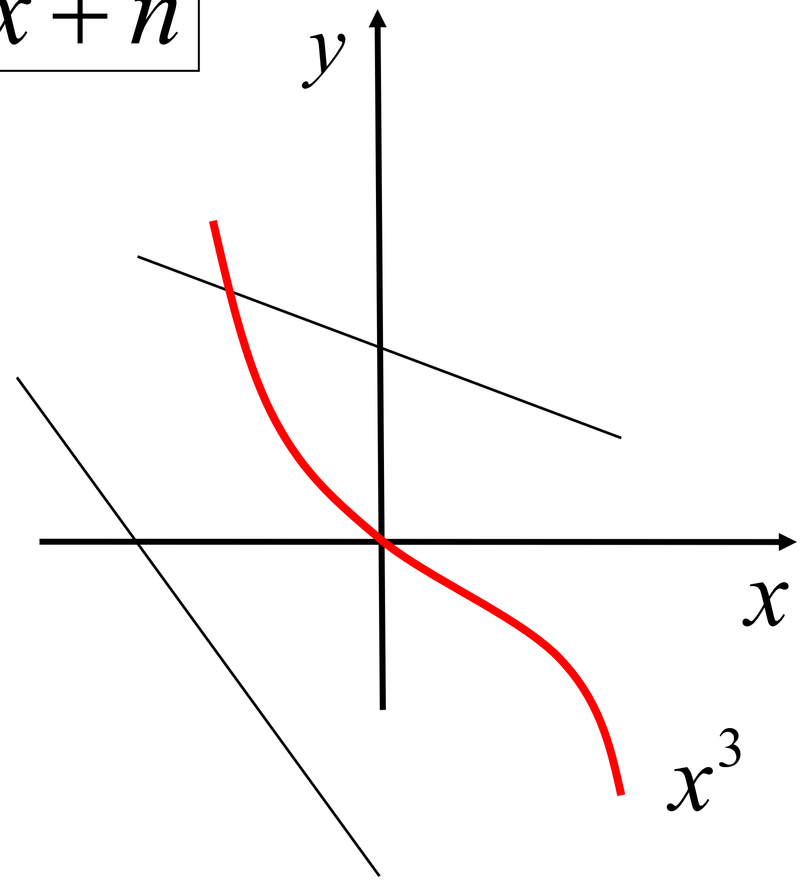
Sonidos de la ciencia:
Programa 98:
La tragicomedia de la ecuación de tercer grado

Tartaglia, muy ofendido, escribe en 1546 'Questi et inmventioni diverse', en la que relata su versión de los hechos y reproduce su correspondencia con Cardano, dando comienzo un tenaz intercambio de cartas y carteles públicos entre Tartaglia y ¡Ferrari!, que salió en defensa de su maestro Cardano, quien se mantuvo al margen de esta polémica. La historia termina el 10 de agosto de 1548 como comenzó: en una disputa pública en Milán entre un tartamudo y cansado Tartaglia y Ferrari, un joven elocuente y brillante matemático que además *jugaba en casa*. La disputa no acabó. Tartaglia abandonó humillado, perdiendo bastante de su fama. Cardano no asistió.

Soluciones geométricas



$$\boxed{x^2 = mx + n}$$

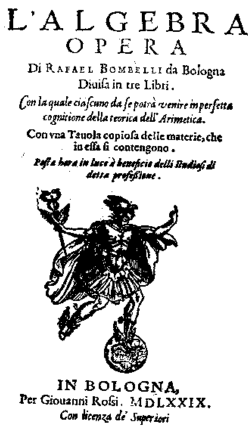


$$t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0$$

$$t = x - \frac{1}{3} a_1$$

$$\boxed{x^3 + px = q \qquad p, q \in \Re}$$

Forma general de la ecuación cúbica y solución:


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

$$x^3 + px = q \qquad p, q \in \Re$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Funcionaba bien en algunos casos, como:

$$x^3 + 6x = 20; \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Pero en otros ... : $x^3 + 15x = 4; \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$

Cardano sabía que x = 4 es solución de esta ecuación.

Rafael Bombelli (1526-1572) resolvió la situación operando como lo hacemos hoy con números complejos.

Ejercicio: Demuestra que la ecuación de tercer grado:

$$t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0$$

se reduce bajo el cambio de variable: $t = x - \frac{1}{3} a_1$

a:

$$x^3 + px = q$$

cuyas soluciones son:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Confirma que los números complejos son necesarios incluso para encontrar las raíces reales de:

$$t^3 - 19t + 30 = 0$$

René Descartes (1596-1650)

60 años después de Bombelli:

"A pesar de que podemos pensar que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, únicamente una de ellas es real, la cual es 2, y las otras dos…son simplemente ***imaginarias****."*

René Descartes
"La Géométrie" (1637)

Gottfried von Leibnitz (1646 – 1716)

"Los números imaginarios son un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser"

Otros términos que han sido usados para referirse a los números complejos incluyen :

"Sofisticados" (Cardano)
"Sin sentido" (Néper)
"Inexplicables" (Girard)
"Incomprensibles" (Huygens)
"Imposibles" (Diversos autores)

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

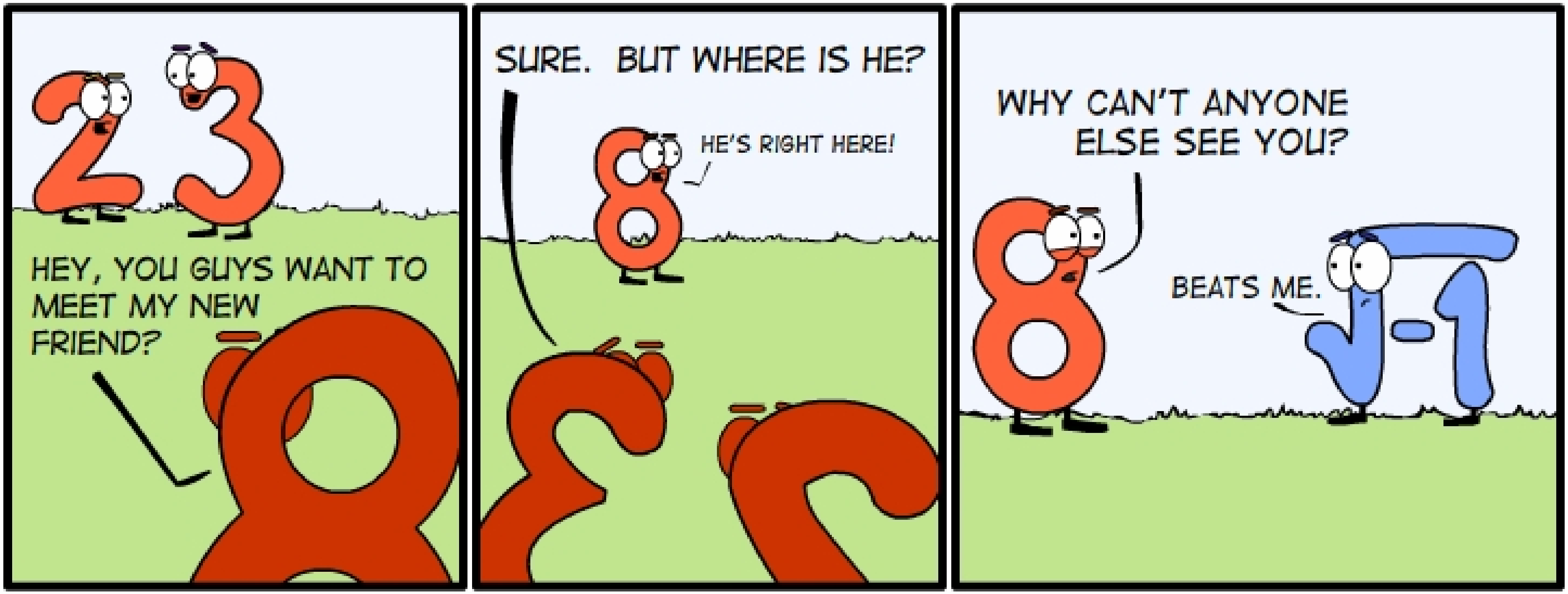
Con Euler los imaginarios se incorporan definitivamente en la Matemática.

"… formulam $\sqrt{-1}$ littera *i* …"
Leonhard Euler (1777)

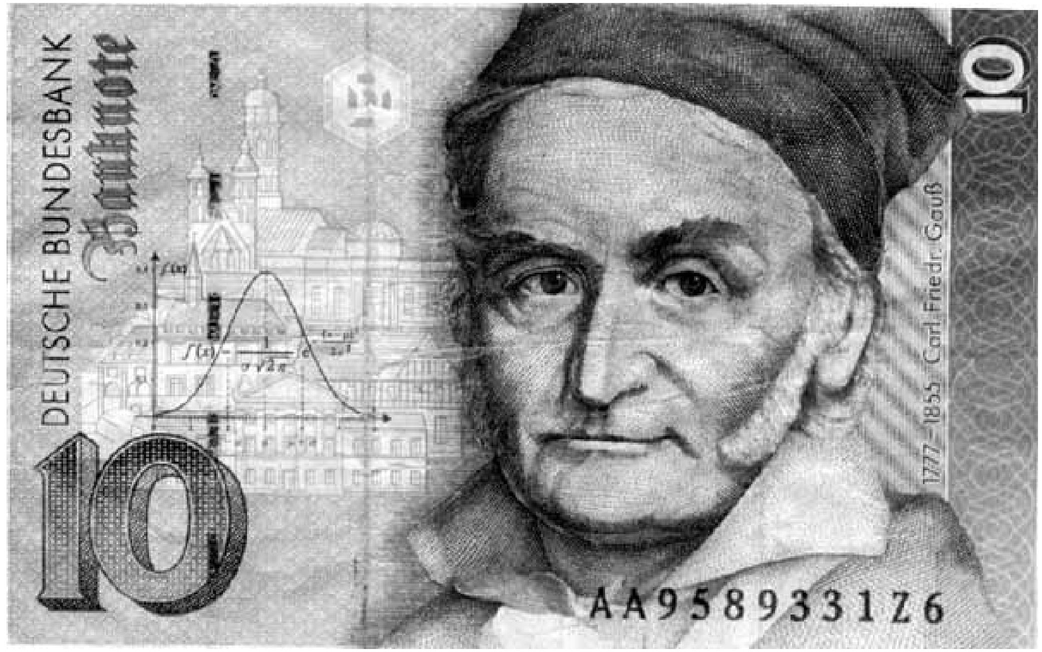
$i^2 = -1$; introdujo la notación binómica. Demostró que el conjunto de los números "imaginarios" era cerrado para las cuatro operaciones básicas, así como para la potenciación y la radicación.

"Estos números no son nada, ni menos que nada, lo cual necesariamente los hace imaginarios, o imposibles".

Visualizar los números complejos



"Nuestra aritmética (...), constituye la creación de los tiempos modernos, (...). A los números enteros se han agregado las fracciones; a las cantidades racionales, las irracionales; a las positivas, las negativas; y a las reales, las imaginarias".



Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

"Números íntegros ***complexos****"*
K. F. Gauss (1831)

"¿Qué es un número complejo?" Gauss dio la respuesta satisfactoria definitiva en 1831 al establecer la interpretación geométrica: $x+iy \rightarrow (x,y)$.

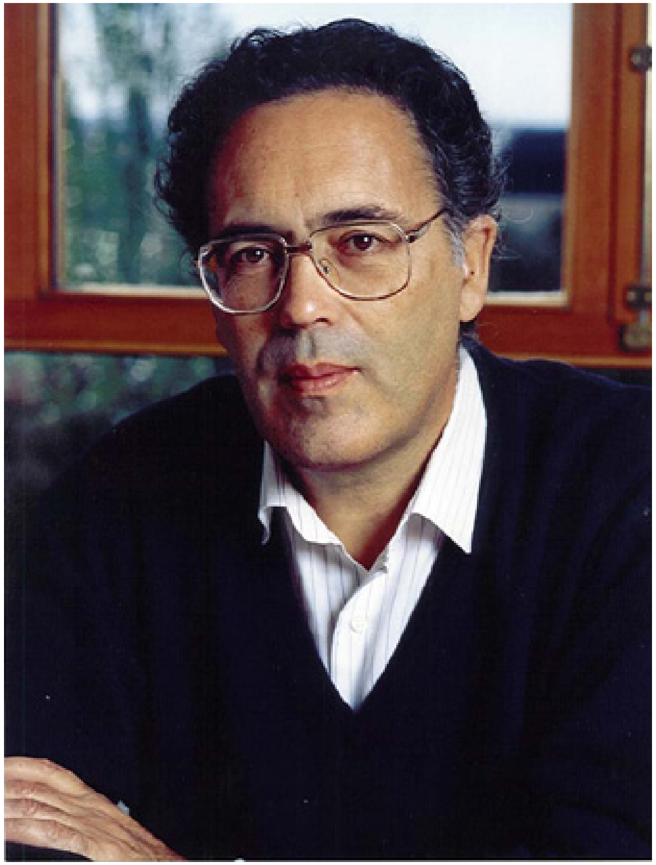
¿Qué significa un número complejo?

Jhon Wallis (1616 - 1703)
"*Algebra*"(1673)

Anteriores a Gauss:

Caspar Wessel
(1745 - 1818)
Primera representación geométrica en 1797.

Jean Argand
(1768 - 1822)
Idem y además consideró *i* como una rotación de 90º.

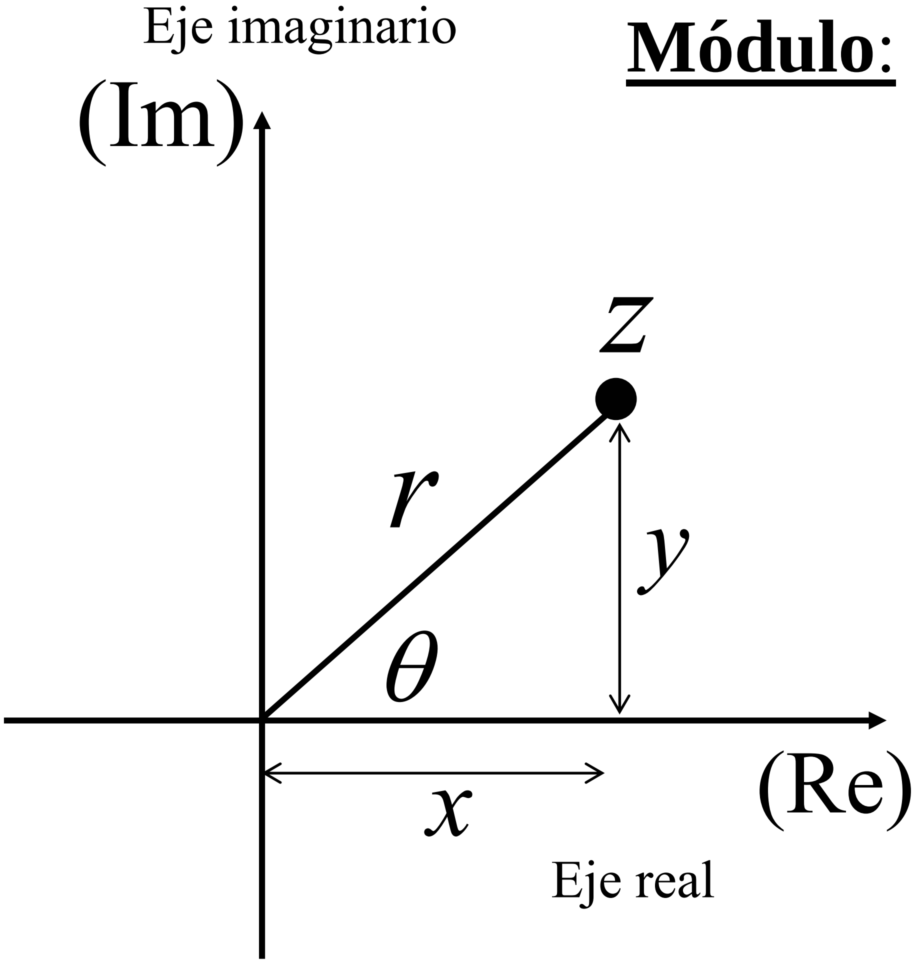


Miguel de Guzmán
(1936-2004)

"La visualización de los números reales mediante los puntos de una recta o de los números complejos mediante los puntos del plano no solamente penetró sin gran resistencia en el análisis, sino que se puede decir con razón que, en el caso de los números complejos, esta visualización (Argand, Gauss) fue lo que hizo posible vencer la fuerte oposición de la comunidad matemática al dar carta de ciudadanía a los números complejos".

El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático.

El plano complejo (Plano z, de Argand o de Gauss)



Módulo: $r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

También llamado "valor absoluto"
(el módulo de un real es su valor absoluto)

$$|z| \geq \operatorname{Re} z,\ |z| \geq \operatorname{Im} z,\ |\bar{z}| = |z|$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Argumento:

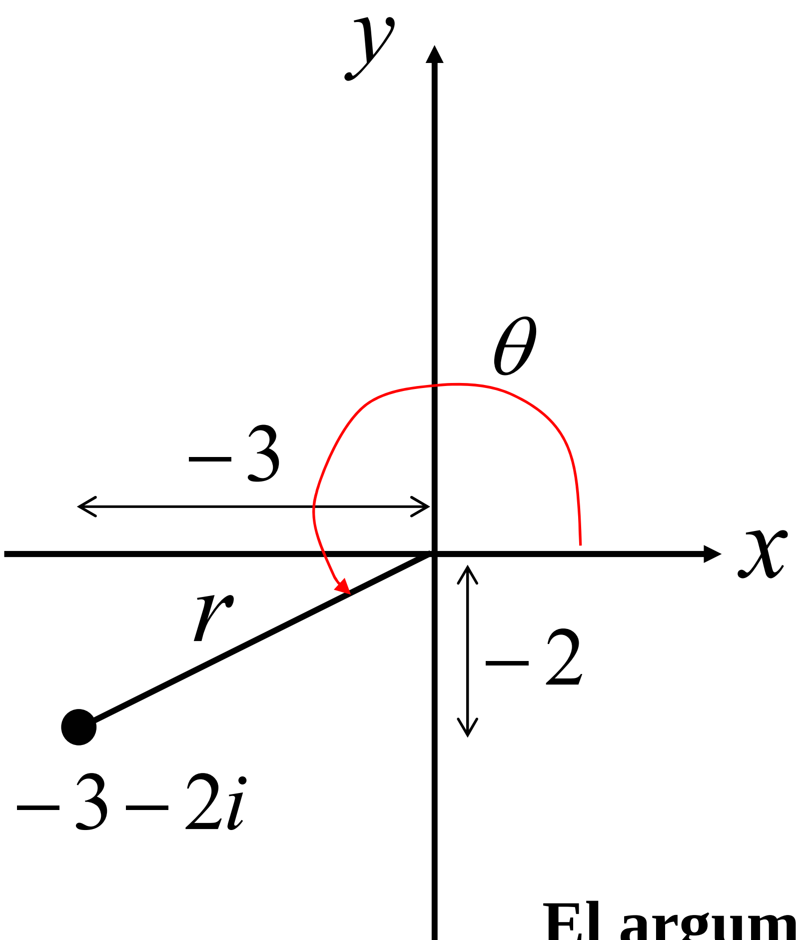
$$\theta := \arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

El argumento está multivaluado.

Para $z = 0$, el ángulo θ no está definido.

Ejemplo:

Dibujar el número complejo *z* = *-3-2i* en el plano complejo y evaluar módulo y argumento



Módulo:

$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{13}$$

La calculadora no distingue

Argumento:

$$\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{-2}{-3}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \{\cdots -146.3°, \cancel{33.7°}, 213.7°, \cdots\}$$

$\boxed{3.73 \text{ rad}}$

El argumento está multivaluado.

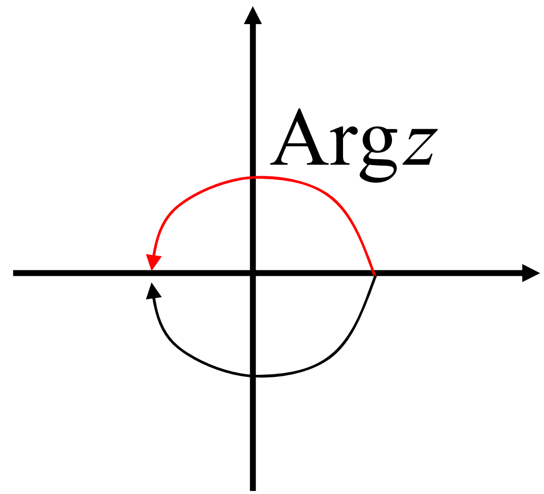
Determinación o valor principal

Para que θ sea único, basta con imponer la condición adicional de que pertenezca a un cierto intervalo semiabierto I de longitud 2π (como $[0,2\pi)$, $(-\pi,\pi]$, etc).

Escoger este intervalo I se conoce como tomar **una determinación del argumento**.

Se denomina **determinación principal o valor principal** a Arg z, el valor de θ en el rango:

$$\boxed{-\pi < \theta := \operatorname{Arg} z \leq +\pi}$$



$$\arg z := \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Ejemplo: supongamos que

$$\arg z = \{\cdots - 2.55 - 2\pi, -2.55, -2.55 + 2\pi, -2.55 + 4\pi, \cdots\}$$

$$= \{-2.55 \pm 2k\pi\} \quad (k = 0, 1, \cdots) \longrightarrow \operatorname{Arg} z = -2.55$$

- Para que θ sea *único*, basta imponerle la condición adicional de que pertenezca a un cierto intervalo semiabierto I de longitud 2π (como $[0, 2\pi)$, $(-\pi, \pi]$, etc.) Escoger este intervalo I se conoce como tomar una **determinación** del argumento $\Longrightarrow \arg_I : \mathbf{C} - \{0\} \to I$

- $\arg_I(z) =$ *único* valor de $\arg z$ que pertenece a I

  Ejemplo: $\arg_{[0,2\pi)}(-1 - i) = 5\pi/4$, $\arg_{(-\pi,\pi]}(-1 - i) = -3\pi/4$.

- **Determinación principal** del argumento:

$$\mathrm{Arg} = \arg_{(-\pi,\pi]}$$

Ejemplo:

	1	i	-1	$-1-i$	$-i$	$1-i$
Arg	0	$\pi/2$	π	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$

- Claramente, $\mathrm{Arg} : \mathbf{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$ es discontinua en $\mathbf{R}^- \cup \{0\}$. Análogamente, $\arg_{[0,2\pi)}$ es discontinua en $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. En general, $\arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ (ó $\arg_{(\theta_0,\theta_0+2\pi]}$) es discontinua en la semirrecta cerrada que forma un ángulo θ_0 con el semieje real positivo.

Ejercicios: Demostrar que

(1) $\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$

(2) $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$

$(\textit{Nota}: |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2)$

(3) $|\bar{z}| = |z|$

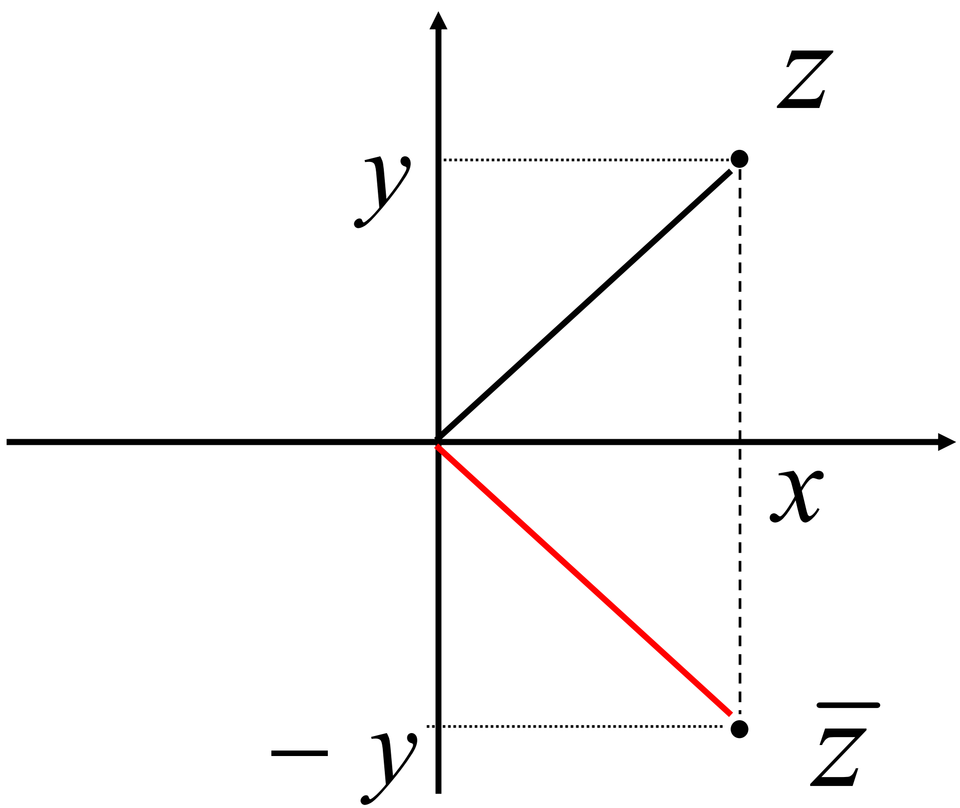
(4) $z\bar{z} = |z|^2$

(5) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|; \quad |z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2| \cdots |z_n|$

(6) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$

Ejercicio:

$$\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = \left|\frac{\overline{x+iy}}{x+iy}\right| = \left|\frac{x-iy}{x+iy}\right| = \frac{|x-iy|}{|x+iy|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$



Gráficamente el conjugado es una reflexión respecto al eje real.

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ *con* $w \neq 0$. *Vamos a probar que* $|z+w| = |z| + |w| \Longleftrightarrow z/w \in \mathbb{R}$ *y* $z/w \geq 0$.

Si $|z+w| = |z| + |w|$, *entonces* $|\frac{z}{w} + 1| = |\frac{z}{w}| + 1$. *Llamando* $\frac{z}{w} = x + iy$, *se deduce que* $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2+y^2} + 1$, *con lo cual*

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} + 1 \tag{1}$$

Simplificando y elevando al cuadrado se obtiene $x^2 = x^2 + y^2$ *y por tanto* $y = 0$. *Además, sustituyendo en (1) se llega a que* $x \geq 0$.

Recíprocamente, si $z/w \in \mathbb{R}$ *y* $z/w \geq 0$, *es inmediato que* $|\frac{z}{w} + 1| = |\frac{z}{w}| + 1$. *Multiplicando por* $|w|$ *se sigue que* $|z+w| = |z| + |w|$.

Vamos a determinar los valores $x, y \in \mathbb{R}$ *que satisfacen la ecuación* $x + iy = |x - iy|$.

Si $x + iy = |x - iy|$, *entonces* $x = \Re\mathrm{e}(x+iy) = \Re\mathrm{e}|x-iy| = |x-iy|$, *con lo cual* $x = \sqrt{x^2+y^2}$ *lo que implica que* $y = 0$. *Por otro lado,* $x = |x|$ *con lo cual* $x \geq 0$.

Es inmediato que si $x \geq 0$ *e* $y = 0$, *se verifica la ecuación.*

Otra forma de verlo es considerar la ecuación equivalente $z = |\overline{z}|$. *Multiplicando por* $\overline{z}$ *se obtiene que* $|z|^2 = |z| \cdot \overline{z}$ *con lo cual* $\overline{z} = |z| = z$. *Por tanto,* $\Im\mathrm{m} z = 0$ *y* $\Re\mathrm{e} z = |z| \geq 0$.

1.- Calcular todos los números $z \in \mathbb{C}$ tales que:

a) $|z-1| = |z-2|$

b) $|z-1| = \mathrm{Re}z + 1$

Sol.: a) $z = 3/2 + iy\ ,\ \ y \in \Re$

b) $z = x \pm i2\sqrt{x}\ ,\ \ x \in \Re$

7.- Encontrar los pares de números complejos que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Su suma es $-6i$ y su producto es $6-8i$.

b) Su cociente es imaginario puro, su suma es 5, y el módulo de uno es doble que el del otro.

c) Tienen parte real positiva, la suma de sus cuadrados es $2i$, y su producto vale $\sqrt{3}$.

Sol.: a) $z_1 = 1 + i\ ,\ \ z_2 = -1 - 7i$

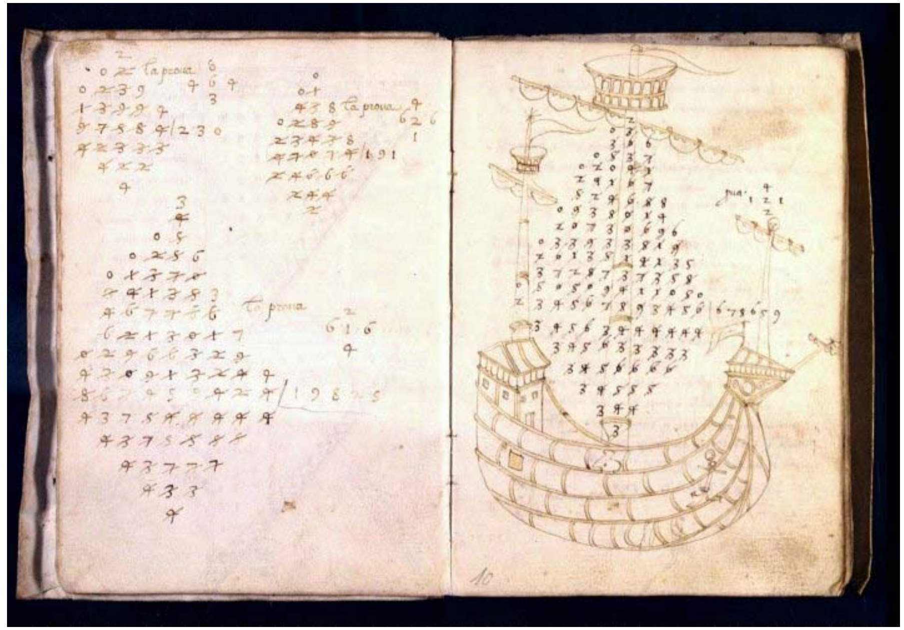
b) $\left(z_1 = 4 + 2i\ ,\ \ z_2 = 1 - 2i\right)\ y\ (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$

c) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1+i),\ \ z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

Ejercicio: Demostrar que para *a, b, c, d* enteros siempre existen *u* y *v* enteros tal que: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=u^2+v^2$

Encontrar *u* y *v* para: $(89^2+101^2)(111^2+133^2)=u^2+v^2$

Liber quadratorum (1225)
Leonardo de Pisa (Fibonacci)
(1170-1250)



El matemático italiano Leonardo de Pisa escribió en 1202 el **Liber Abaci**, un texto en el que se explica como sumar, restar, multiplicar y dividir con numerales hindo-arábigos.

$$(89^2 + 101^2)(111^2 + 133^2) = u^2 + v^2$$

$$z \equiv a + ib \qquad w \equiv c + id \qquad t \equiv u + iv$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3.554^2 + 23.048^2 \\ 626^2 + 23.312^2 \end{array}}$$

$$|z|^2 |w|^2 = |t|^2$$

$$(1) \quad (z\bar{z})(w\bar{w}) = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (zw)(\overline{zw}) = t\bar{t}$$

$$zw = t$$

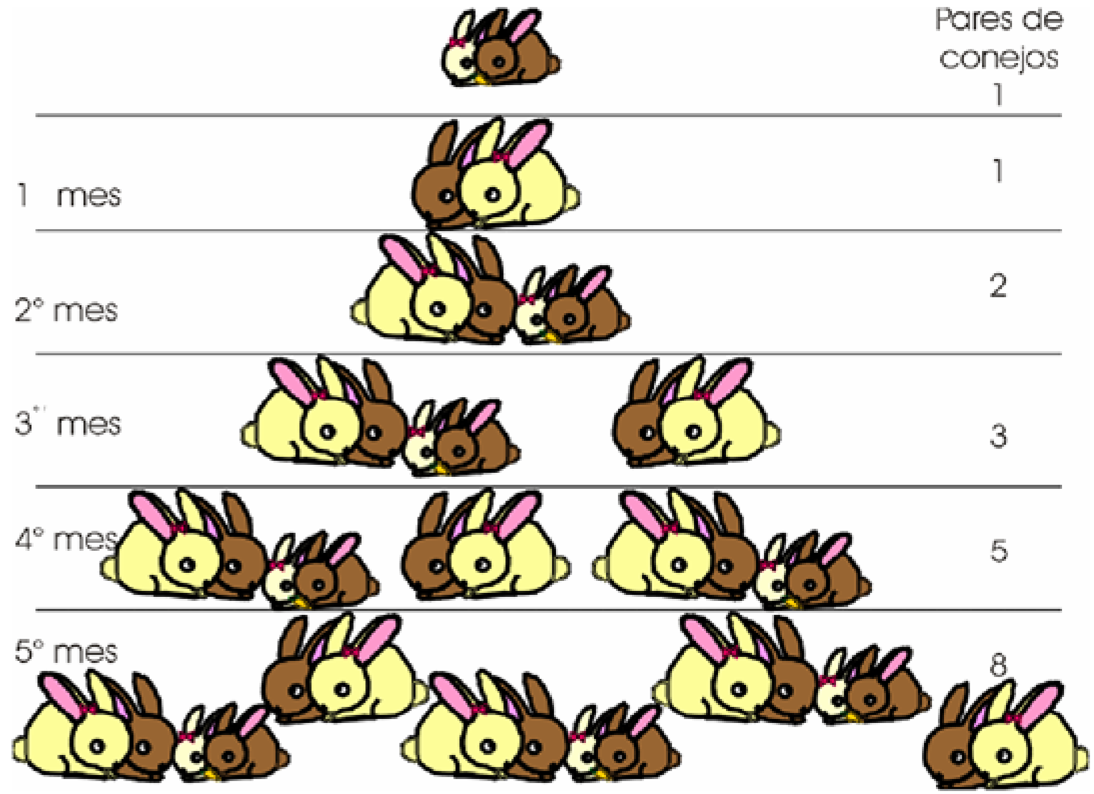
$$u + iv = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$u = |ac - bd| \qquad v = bc + ad$$

$$(2) \quad (z\bar{z})(w\bar{w}) = (z\bar{w})(\bar{z}w) = t\bar{t} \qquad z\bar{w} = t$$

$$u + iv = (a + ib)(c - id) = (ac + bd) + i(bc - ad)$$

$$u = ac + bd \qquad v = |bc - ad|$$



$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0; \\ 1 & \text{si } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

"Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, a partir de ese momento cada vez engendra una pareja de conejos, que a su vez, tras ser fértiles engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?"

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

N. J. A. Sloane (http://www.research.att.com/~njas/sequences/)

Base de datos con más de 100.000 sucesiones de números enteros.

Capaz de identificar una sucesión a partir de sus primeros términos.

No solo hay ejemplos de combinatoria o teoría de números, sino también de otras áreas como: diseño de circuitos (combinaciones de funciones booleanas), química (números de ésteres con *n* átomos de carbono), física (diagramas de Feynman con *n* vértices) y biología (estructuras secundarias de ARN con *n* nucleótidos).

Sloane, N. J. A. 1973. *A Handbook of Integer Sequences*. New York: Academic Press.

Sloane, N. J. A. 1994. "An On-Line Version of the Encyclopedia of Integer Sequences." *The Electronic Journal of Combinatorics*. Vol. 1, Feature F1.

Sloane, N. J. A., and Simon Plouffe. 1995. *The Encyclopedia of Integer Sequences*. San Diego: Academic Press.

Inverse Symbolic Calculator

Simon Plouffe (http://oldweb.cecm.sfu.ca/projects/ISC/)

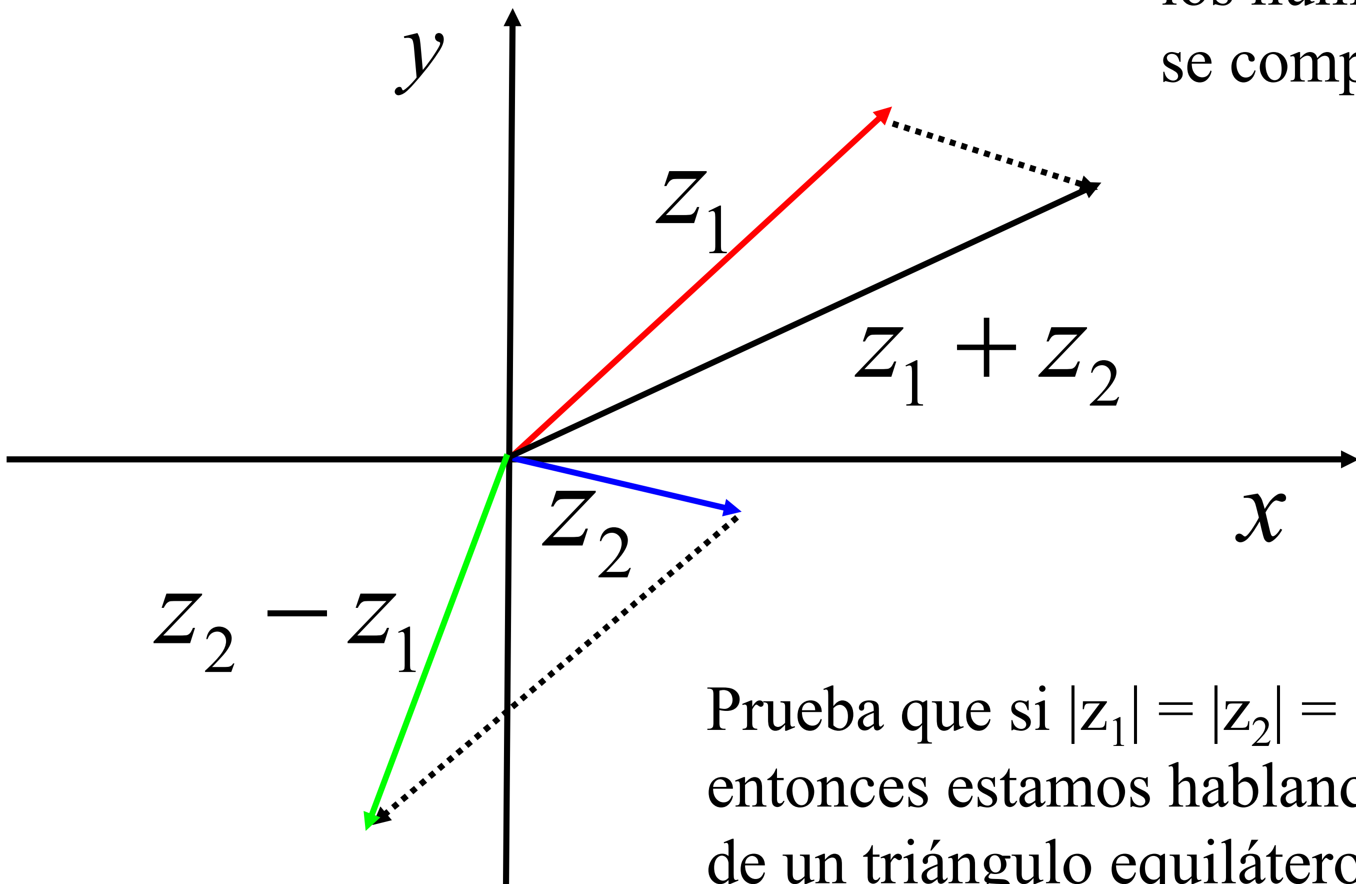
Como en el caso de la *Encyclopedia of Integer Sequences*, Simon Plouffe ha desarrollado el *Inverse Symbolic Calculator*, o ISC. La calculadora es inversa en el sentido de que utiliza como entrada un número y devuelve "de dónde puede surgir". Por ejemplo, no le preguntamos cuánto vale $e/\pi + 1$ y nos devuelve 1.8652559794322, como en una calculadora estándar. Sino al revés: introducimos 1.8652559794322 y nos sugiere $e/\pi + 1$ como posible fuente del mismo.

La base de datos de constantes matemáticas de ISC tiene alrededor de 9 millones de entradas y su creador aspira a que tenga hasta 10 millones.

Brian Hayes, "A Question of Numbers", *American Scientist*, January-February 1996

Suma y resta de números complejos en el plano complejo

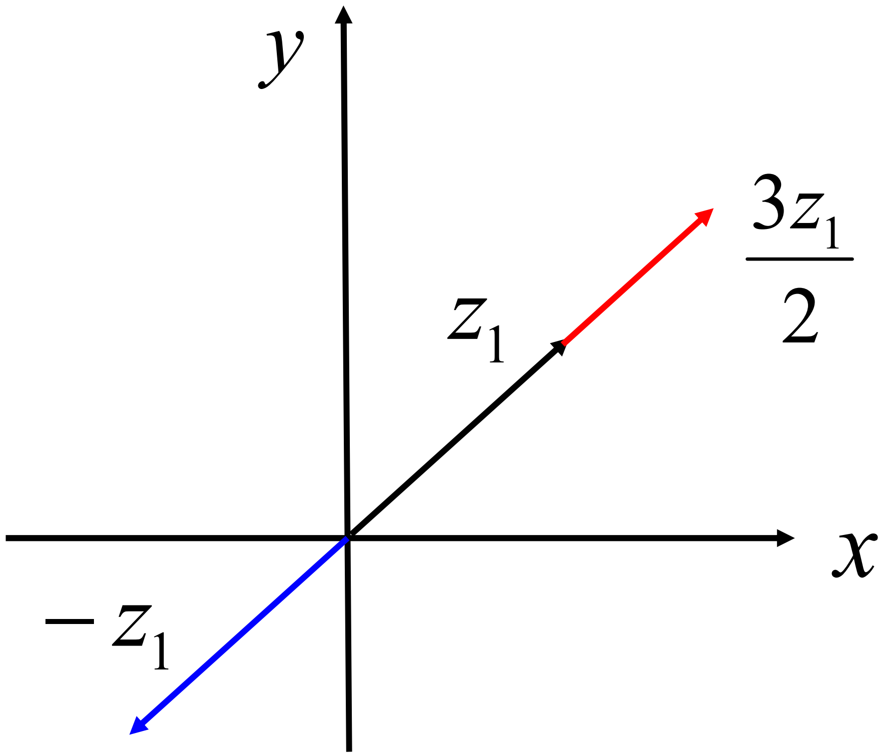
En la suma (y la resta) los números complejos se comportan como vectores



Prueba que si $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, entonces estamos hablando de los vértices de un triángulo equilátero.

Sugerencia:

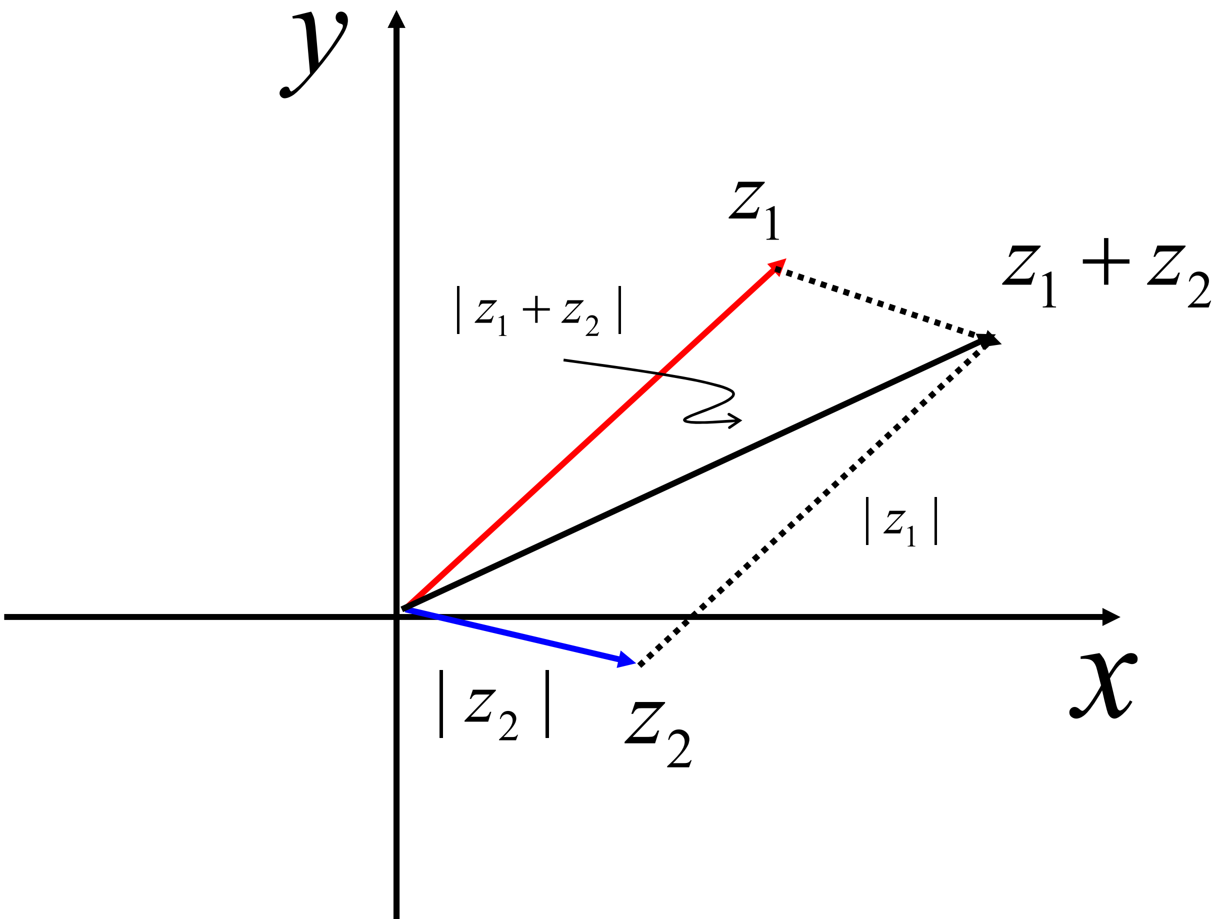
Muestra que $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2$



C con la suma y el producto por un escalar posee estructura de **espacio vectorial**, isomorfo a R^2.
El conjunto *{1, i}* es base de ese espacio. Y podemos identificar C con los vectores libres del plano R^2. Pero recordemos que C tiene algo más: el producto complejo.

Desigualdad triangular

$$\boxed{|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$



El módulo de z es equivalente a la distancia euclidiana del vector libre *(x,y)*.

La **distancia** entre z_1 y z_2 es $|z_1-z_2|$. Así disponemos de un **espacio métrico** donde podemos definir límites, continuidad, ...

¿Qué significa que $|z_1| > |z_2|$?

Demostremos la **desigualdad triangular**:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) =$$

$$z_1\overline{z_1} + \underbrace{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}_{2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\le 2|z_1\overline{z_2}|=2|z_1||\overline{z_2}|=2|z_1||z_2|} + z_2\overline{z_2}$$

$$|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada (recordemos que el módulo es siempre positivo), la desigualdad triangular queda demostrada.

Ejercicio: Demostrar que $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Ejercicio: Demostrar que $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

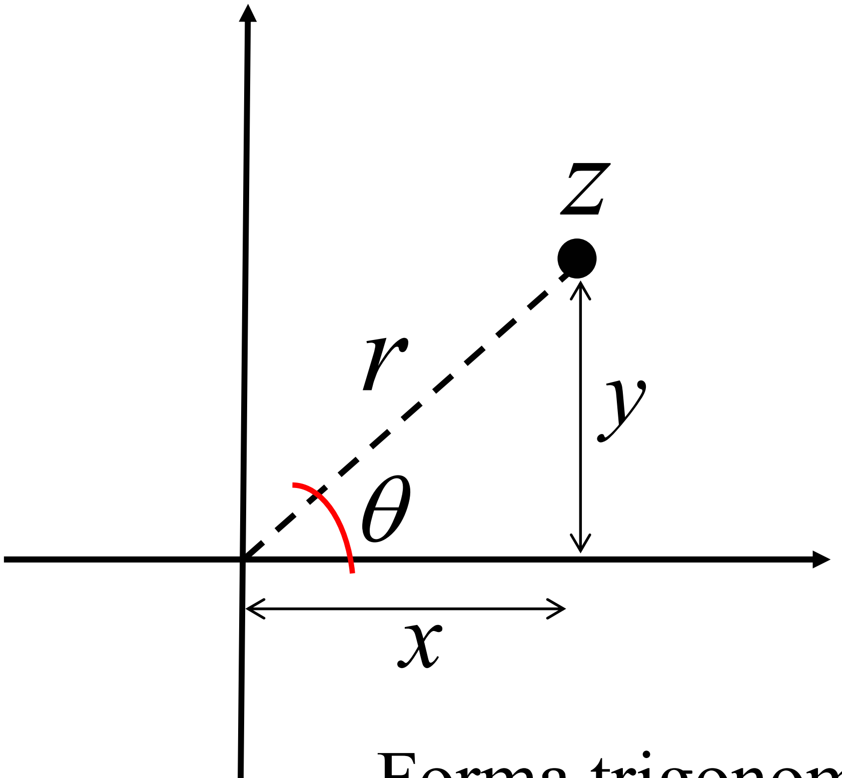
Podemos generalizar la desigualdad triangular:

$$\boxed{\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| \qquad (n = 2, 3, \ldots)}$$

Ejercicio:
Demostrar por inducción.
Hemos demostrado que es cierto para $n = 2$.
Supongamos que es cierto para n y demostremos que entonces es también cierto para $n+1$.

Forma polar y trigonométrica

A partir de las coordenadas polares *(r, θ)* tenemos:



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\rightarrow \quad z = x + iy$$

$$= r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\boxed{z = r_\theta}$$ Forma polar

$r > 0$ Utilizamos el argumento principal

Forma trigonométrica

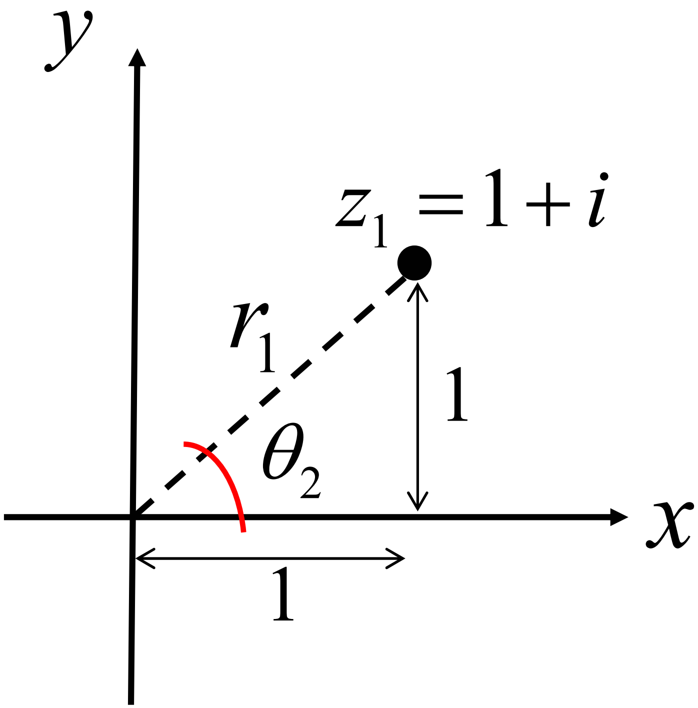
$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

En ingeniería: $r\angle\theta$

$r\,cis\,\theta$

Ejemplo:

Escribir el siguiente número complejo $z_1=1+i$, en forma polar y trigonométrica:



<u>módulo:</u>

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

<u>argumento:</u>

$$\arg z_1 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$$

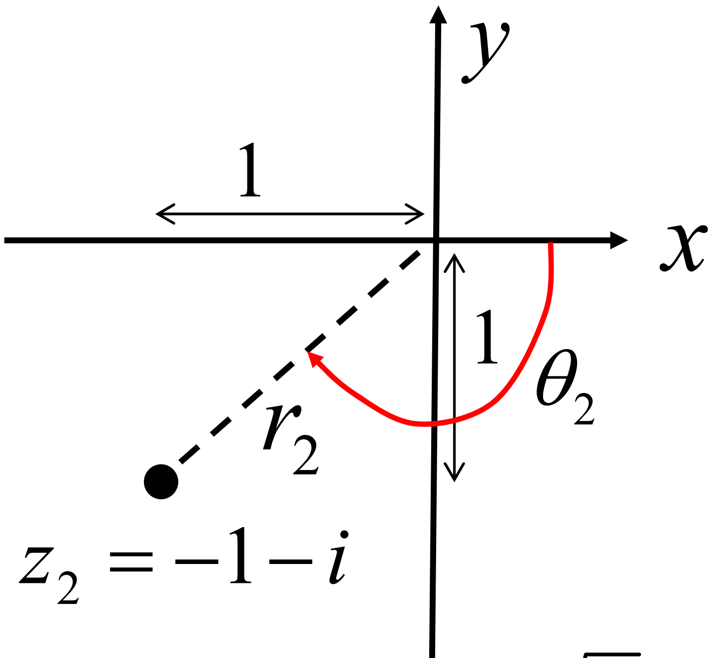
$$= \{\pi/4 \pm 2n\pi\} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

$$\theta_1 = \mathrm{Arg}(z_1) = \pi/4$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad z_1 = \sqrt{2}_{\pi/4}$$

Ejemplo:

Ídem para z_2=-1-i :



Módulo:

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Argumento:

$$\arg z_2 = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) =$$

$$\{\pi/4 \pm 2n\pi\} \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

$$\theta_2 = \mathrm{Arg}(z_2) = -3\pi/4$$

$$z_2 = \sqrt{2}_{3\pi/4} \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Nota: tan(θ_1) = tan(θ_2) = 1, pero z_2 está en el tercer cuadrante, así que θ_2 = *-3π/4.*

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Dos números complejos serán iguales *sii*:

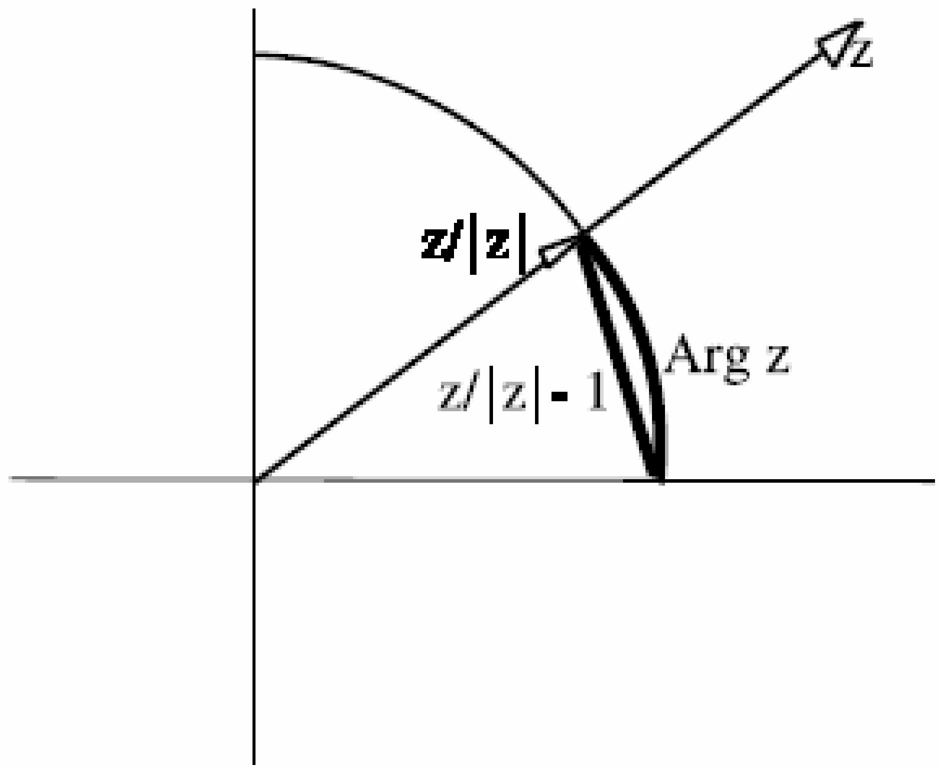
$$\boxed{\begin{array}{l} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 \end{array}}$$

en esquema, repartido por cuadrantes,

$\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} + \pi$	$\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$
$\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x} - \pi$	$\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$

7. Demostrar, usando sólo consideraciones geométricas que: $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq |\arg z|$

Solución:
Basta considerar qué es cada cosa gráficamente (ver figura)



Propiedades del argumento

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}$$

Recordemos que el argumento está multivaluado:

$$\arg z_1 = \{\theta_1 + 2n\pi : n \in Z\}$$
$$\arg z_2 = \{\theta_2 + 2n\pi : n \in Z\}$$

$$z_1 z_2 = |z_1|\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)|z_2|\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) =$$
$$|z_1||z_2|\{\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) +$$
$$i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\}$$

Usemos las relaciones trigonométricas siguientes para la suma de ángulos:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

Obtenemos que:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 z_2)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 + 2n\pi : n \in Z\} =$$

$$\{\theta_1 + 2n\pi : n \in Z\} + \{\theta_2 + 2n\pi : n \in Z\} = \arg z_1 + \arg z_2$$

Tengamos en cuenta que arg z es un conjunto. Y en general dado un conjunto A, A+A no es igual a 2A. Por ejemplo:

$$\arg i = \{\pi/2 + 2n\pi : n \in Z\}$$

$$\arg i + \arg i = \{\pi + 2n\pi : n \in Z\}$$

$$2\arg i = \{\pi + 4n\pi : n \in Z\}$$

$$\arg i + \arg i \neq 2\arg i$$

$$2\arg i \subset \arg i + \arg i$$

$$\arg(i^2) = \arg i + \arg i \neq 2\arg i$$

Hemos demostrado en particular que para $z_1 = z_2 = z$:

$$\arg(z^2) = \arg z + \arg z$$

Pero recordemos que en general: $\arg(z^2) \neq 2\arg z$

Observemos que, sin embargo, para el argumento principal:

$$\operatorname{Arg}[(-i)^2] = \operatorname{Arg}(-1) = \pi$$

$$\operatorname{Arg}(-i) + \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Así que, en general: $\boxed{\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2}$

Ejercicio: demostrar que

$$\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Y que en general:

$$\operatorname{Arg}(z_1 / z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

Multiplicación en forma trigonométrica

En realidad ya tenemos la solución a partir de las propiedades del argumento:

$$z = z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) +$$

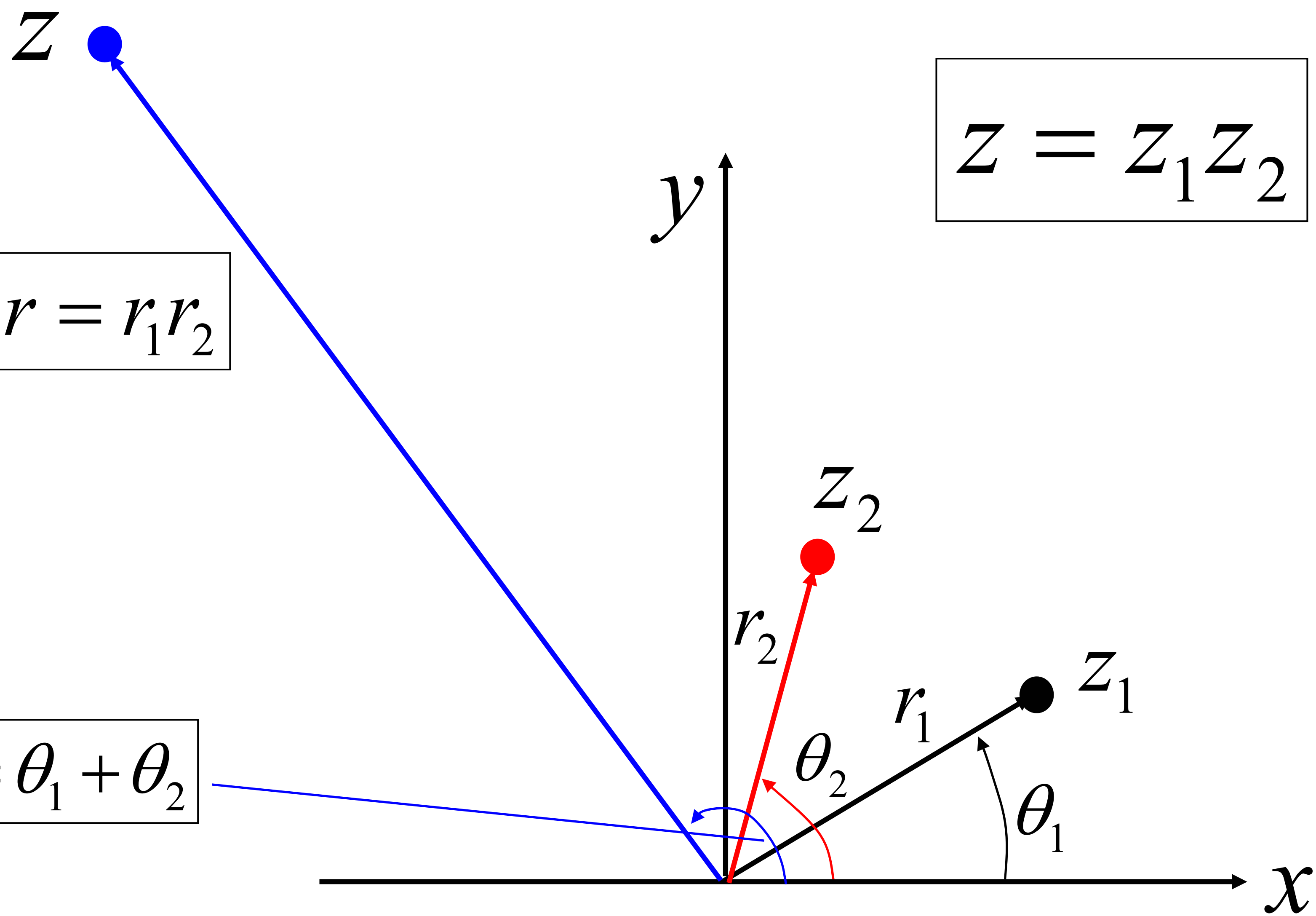
$$i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$r = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\boxed{\begin{gathered} |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \end{gathered}}$$

Producto de números complejos en el plano complejo

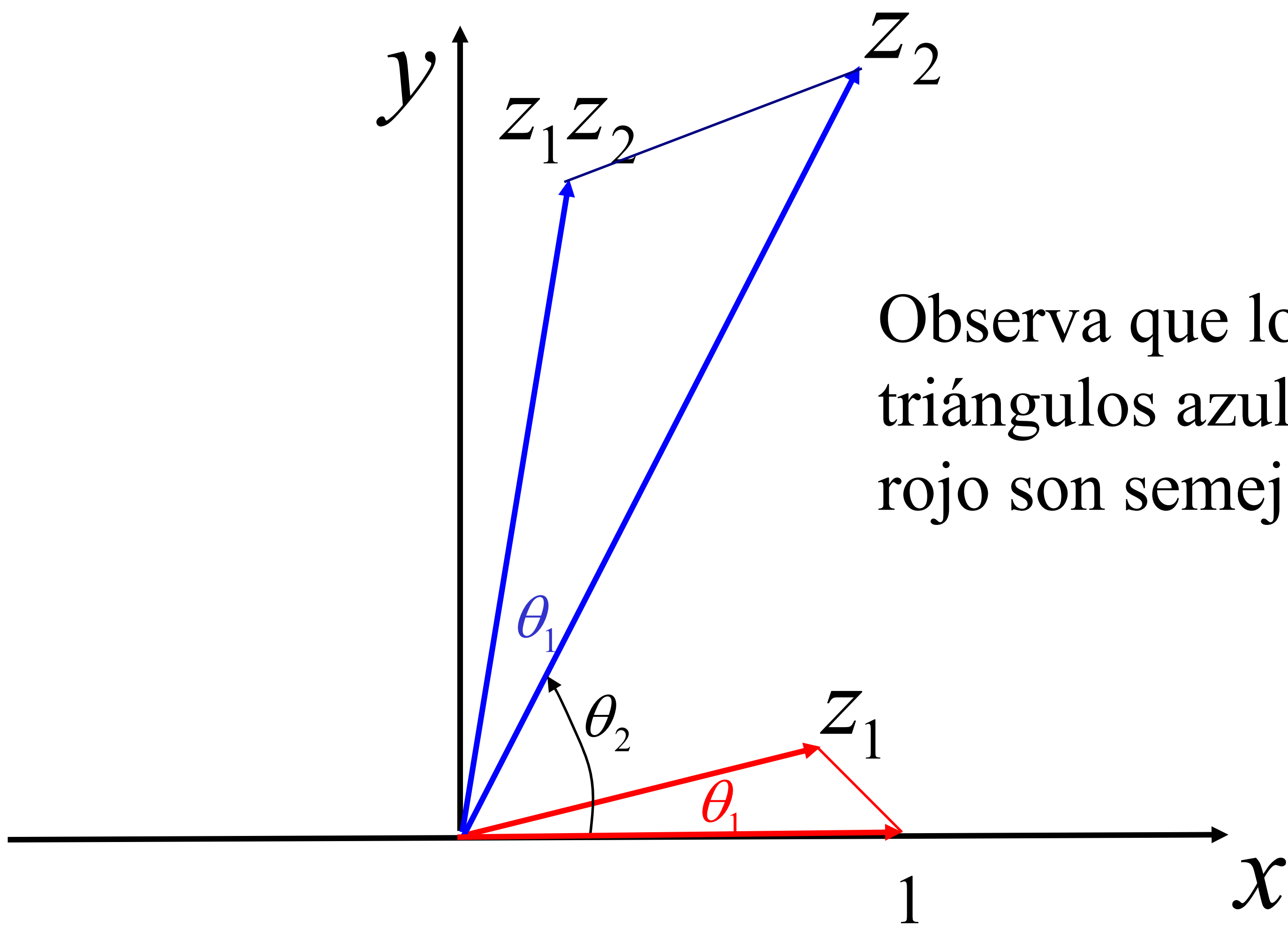


$$z = z_1 z_2$$

$$r = r_1 r_2$$

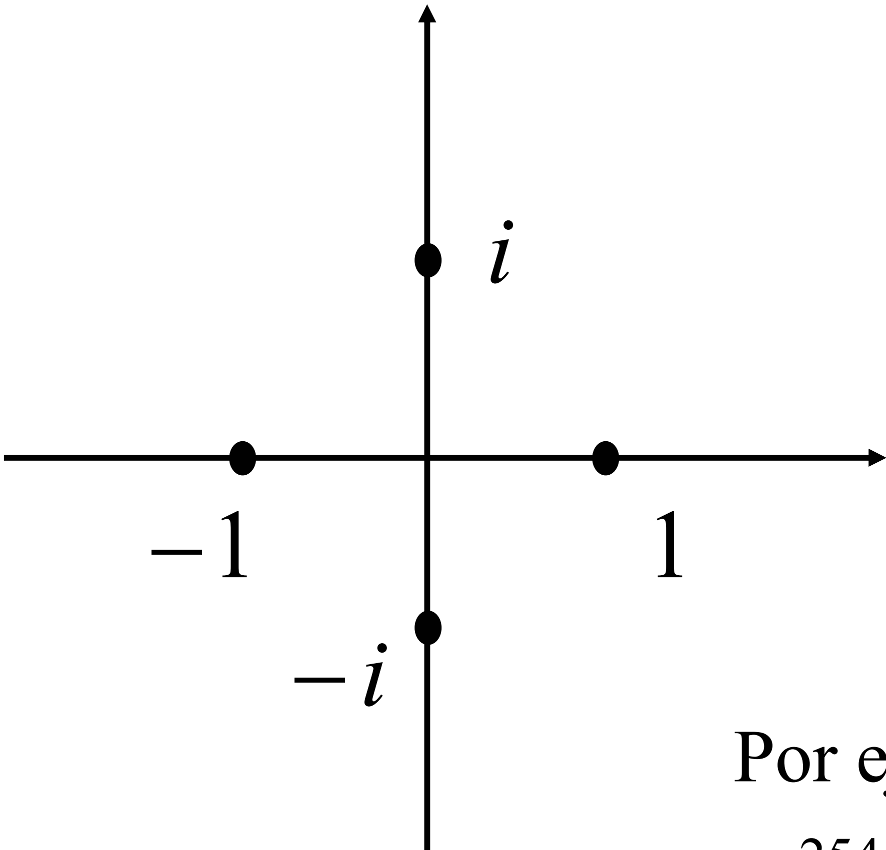
$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

Producto de números complejos en el plano complejo



Observa que los triángulos azul y rojo son semejantes.

Potencias de *i*



$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$\vdots$$

Por ejemplo:

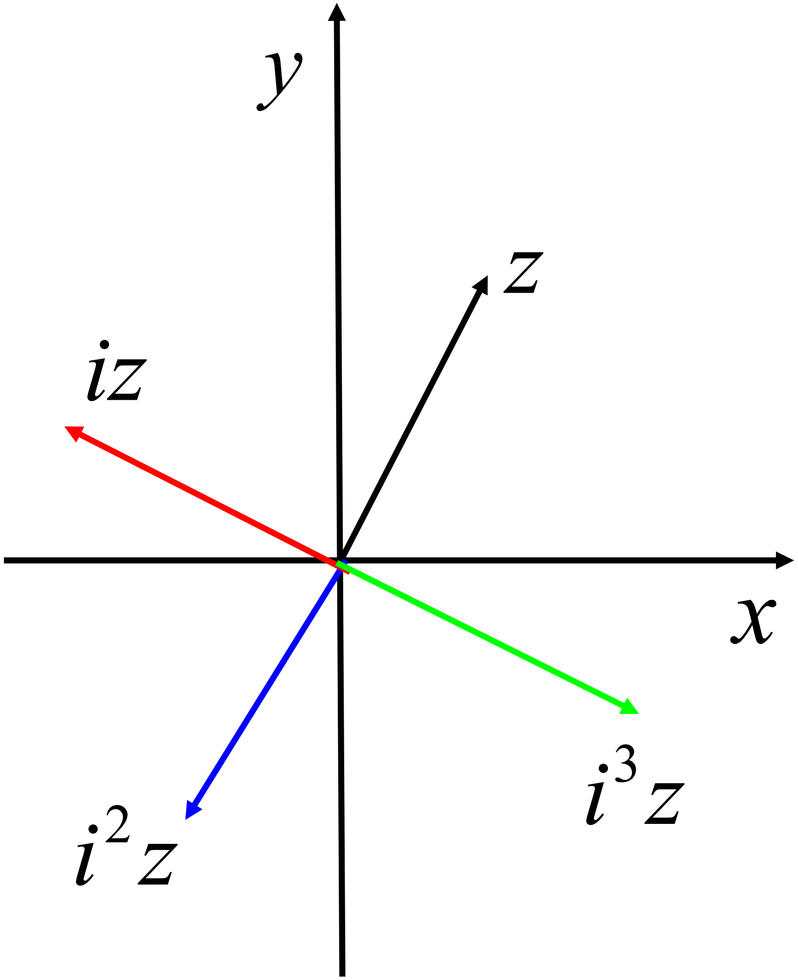
$$i^{254} = (i^4)^{63} \cdot i^2 = 1(-1) = -1$$

Exemple. Si $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

de telle sorte que

$$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \mod 4, \\ 1 + i & \text{si } n = 1 \mod 4, \\ i & \text{si } n = 2 \mod 4, \\ 0 & \text{si } n = 3 \mod 4. \end{cases}$$



Multiplicar por *i* es equivalente a girar 90 grados en sentido anti-horario (operador rotación):

$$iz = ir(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r(-\sin\theta + i\cos\theta)$$
$$= r[\cos(\theta + \pi/2) + i\sin(\theta + \pi/2)]$$

Prueba que: $\mathrm{Re}(iz) = -\,\mathrm{Im}\, z$

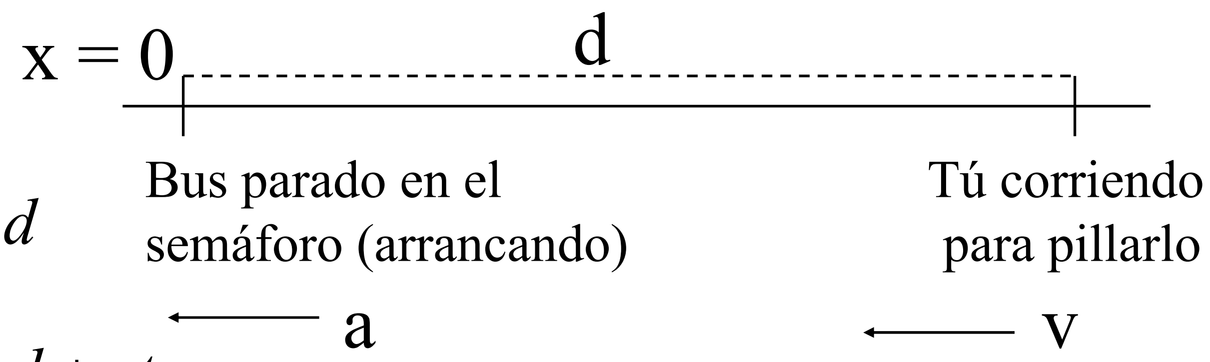
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$$

"The number you have dialed is imaginary. Please rotate your phone 90 degrees and try again."
Anonimus

¿Qué interpretación geométrica tiene el producto de un número complejo por i y por $-i$?

Si $z = |z| \cdot (\cos t + i\ \text{sen}\ t)$, *entonces, por un lado,* $iz = |z| \cdot (-\text{sen}\ t + i \cos t) = |z| \cdot (\cos(t + \pi/2) + i\ \text{sen}\ (t + \pi/2))$ *y, por otro lado,* $-iz = |z| \cdot (\text{sen}\ t - i \cos t) = |z| \cdot (\cos(t - \pi/2) + i\ \text{sen}\ (t - \pi/2))$. *Por tanto,* iz *se obtiene de* z *girándolo un ángulo* $\pi/2$ *en sentido contrario de las agujas del reloj, y* $-iz$ *se obtiene de* z *mediante una rotación de ángulo* $\pi/2$ *en el mismo sentido de las agujas del reloj.*

¿Qué significa un número complejo?



$$t = 0 \quad x_b = 0 \qquad x_p = -d$$

$$t \geq 0 \quad x_b = \frac{1}{2}at^2 \qquad x_p = -d + vt$$

Alcanzar el bus en T: $\quad x_b(T) = x_p(T), \quad \frac{1}{2}aT^2 = -d + vT$

$$T = \frac{v}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2 - 2\frac{d}{a}}$$

Supón que hay dos soluciones reales. ¿Qué significan T_+ y T_-? ¿Y si hay una única solución real?

Si:

$d > \frac{v^2}{2a} \longrightarrow$ T es un tiempo complejo y no alcanzarás el bus. Pero además tiene significado físico...

Supongamos que perdemos el bus:

$$T=\frac{v}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v}{a}\right)^2-2\frac{d}{a}}=\frac{v}{a}\pm i\sqrt{2\frac{d}{a}-\left(\frac{v}{a}\right)^2}$$

y queremos saber en qué momento estuvimos más cerca...

$$s\equiv x_b-x_p \qquad s=\frac{1}{2}at^2+d-vt$$

¿En que instante s es mínimo?

$$\frac{ds}{dt}=0 \qquad t=\frac{v}{a}$$

Es decir: el tiempo correspondiente a la parte real del tiempo complejo T.

Relatividad especial: la importancia de *i*

Albert Einstein

(1879 – 1955)

Distancia espacial
(teorema de Pitágoras)

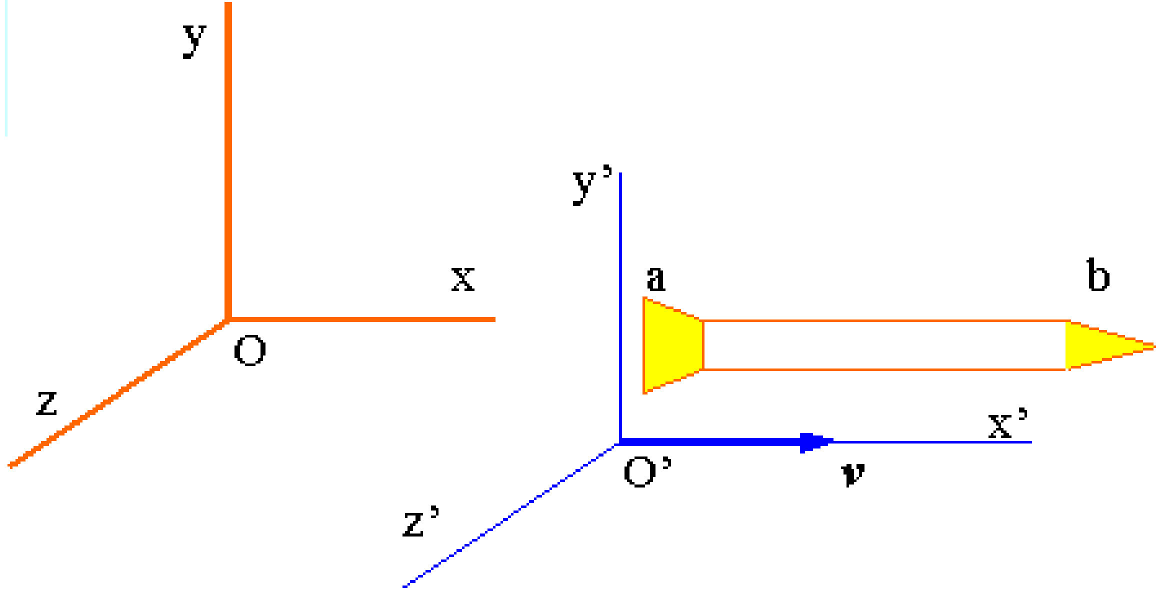
$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$(ds)^2 = (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

Invariancia frente a rotaciones
y/o translaciones

Métrica euclidiana



Transformaciones de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Transformaciones de Galileo

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

En vez de hablar de distancia entre eventos (posiciones) en el espacio tridimensional, los físicos hablan de intervalos entre eventos en el espacio cuatro-dimensional espaciotiempo. Parece razonable definir la métrica de ese espaciotiempo como:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

¡Pero es incorrecto! La métrica así definida no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Para comprobarlo, supón que el movimiento es solo en el eje x, y calcula:

$$(ds)^2 \neq (ds')^2 = (cdt')^2 + (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

Por ejemplo:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad dt' = \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial t}dt$$

$$dt' = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}dt$$

¿Cómo hacer *(ds)*^{2} invariante? Lo que Minkowski descubrió es que en vez de usar *c(dt)* debemos tomar *ic(dt)*.

$$(ds)^2 = -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

Demostrar que de esta manera *(ds)*^{2} es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Observa que usando *ic(dt)* o lo que es lo mismo *c(idt)*, ¡tenemos un "tiempo imaginario"!

"Las consideraciones sobre el espacio y el tiempo que quisiera presentarles surgieron en el seno de la física experimental, y en ello radica su fuerza. Son radicales. De ahora en adelante el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo están condenados a ser sombras; sólo un tipo de unión entre los dos conservará una realidad independiente".

Hermann Minkowski

(1864 – 1909)

División en forma polar

Pensemos que la división es la operación inversa del producto:

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$.

Queremos $z = z_1/z_2$. Entonces: $z\, z_2 = z_1$.

De modo que: $|z\, z_2| = |z|\ |z_2| = |z_1|$

$$|z| = |z_1|/|z_2|$$

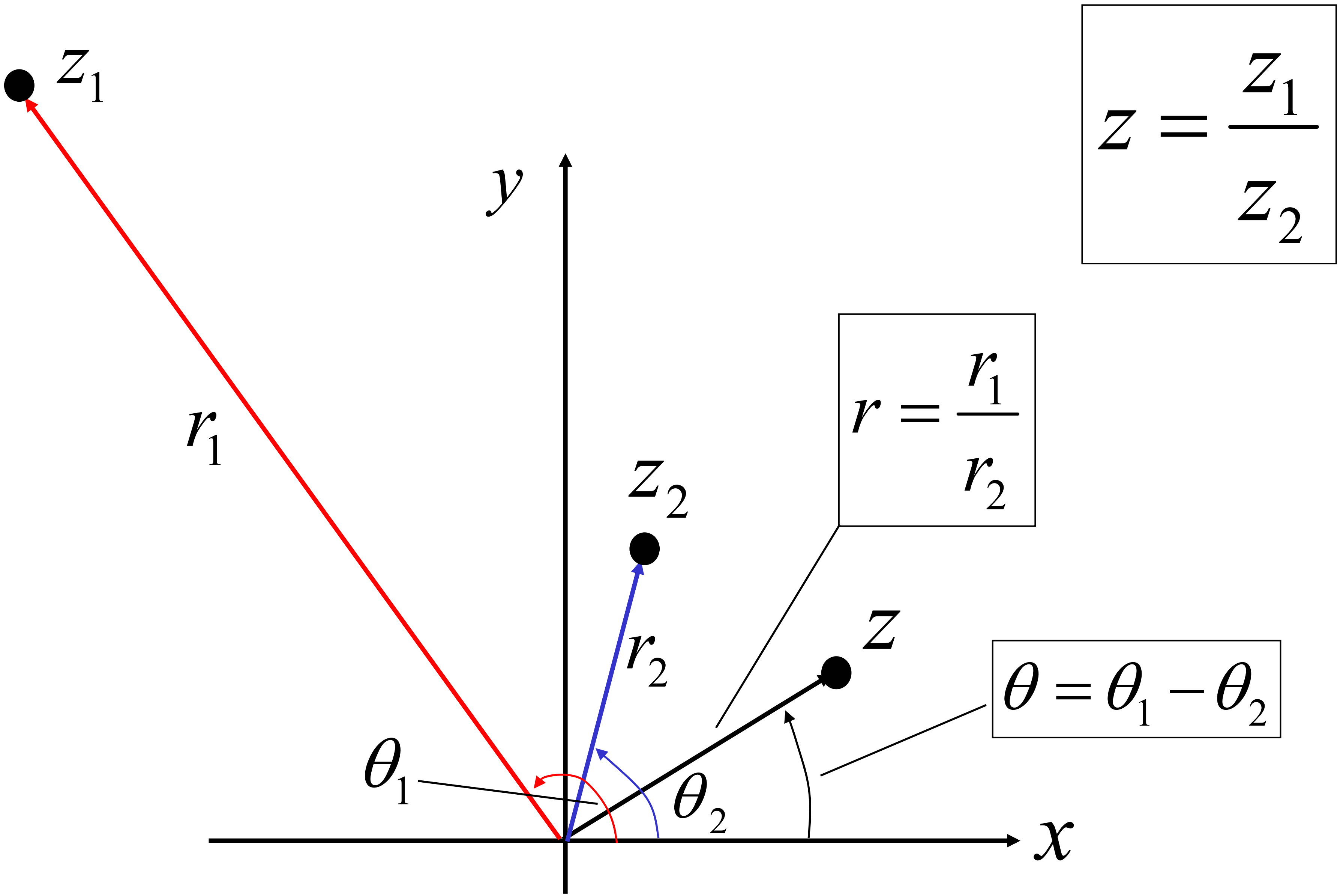
$$arg(z\, z_2) = arg(z) + arg(z_2) = arg(z_1)$$

$$arg(z) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

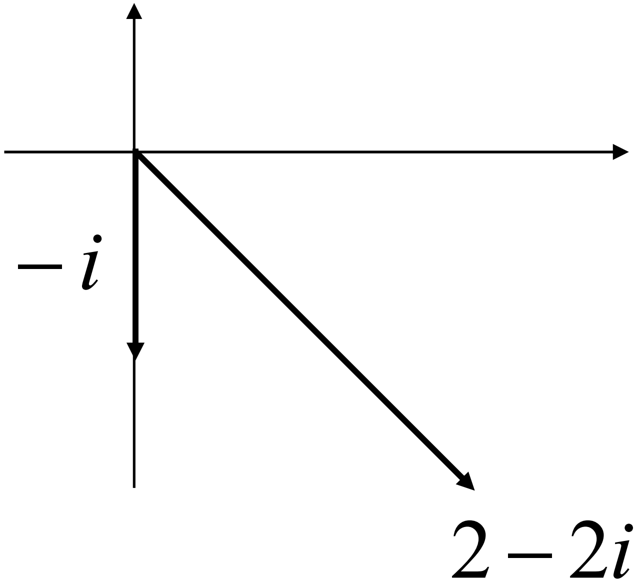
Así que:

$$\boxed{z_1/z_2 = (r_1/r_2)[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]}$$

División de números complejos en el plano complejo



Ejemplos: (1) Usando la forma trigonométrica, evaluar: $\dfrac{-i}{2-2i}$



$$-i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$$

$$2-2i = \sqrt{8}\left[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right]$$

$$\frac{-i}{2-2i} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right]$$

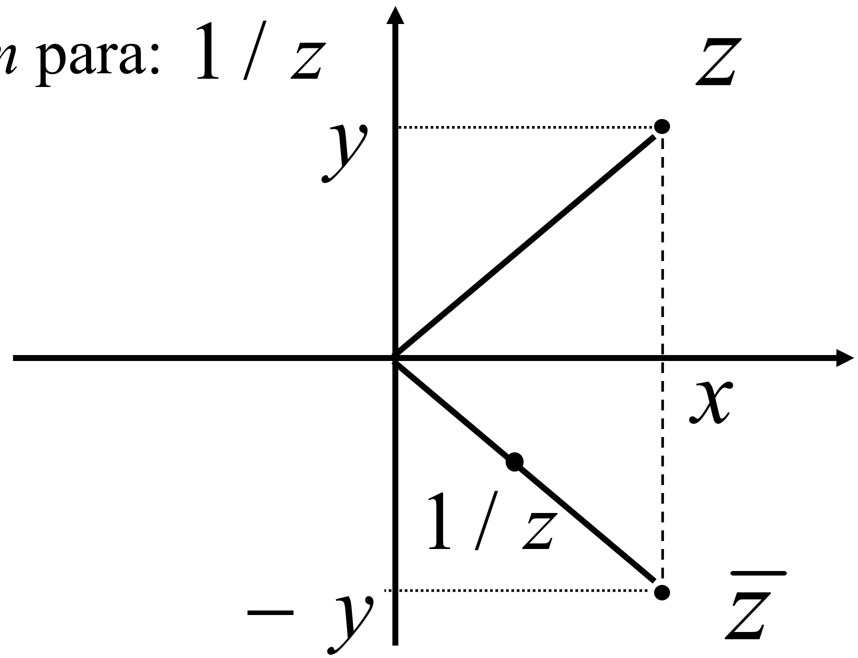
$$1 = \cos(0)$$

(2) *Ídem* para: $1/z$

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

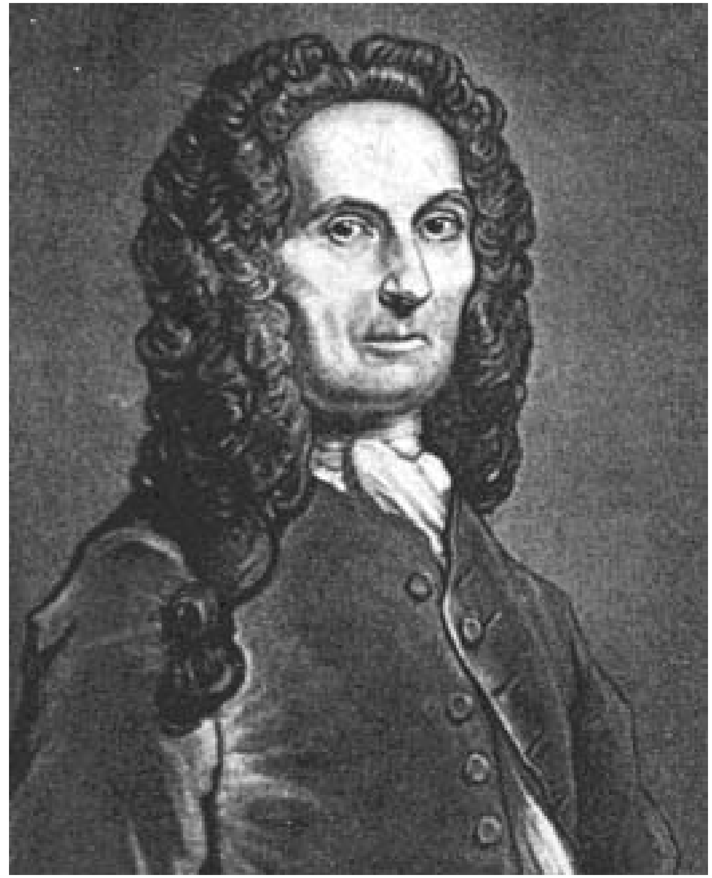
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$



Fórmula de Moivre

Abraham de Moivre (1667 - 1754)



Potencias enteras de complejos en forma polar:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$\vdots$$

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$z^{-2} = r^{-2}(\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta))$$

$$\vdots$$

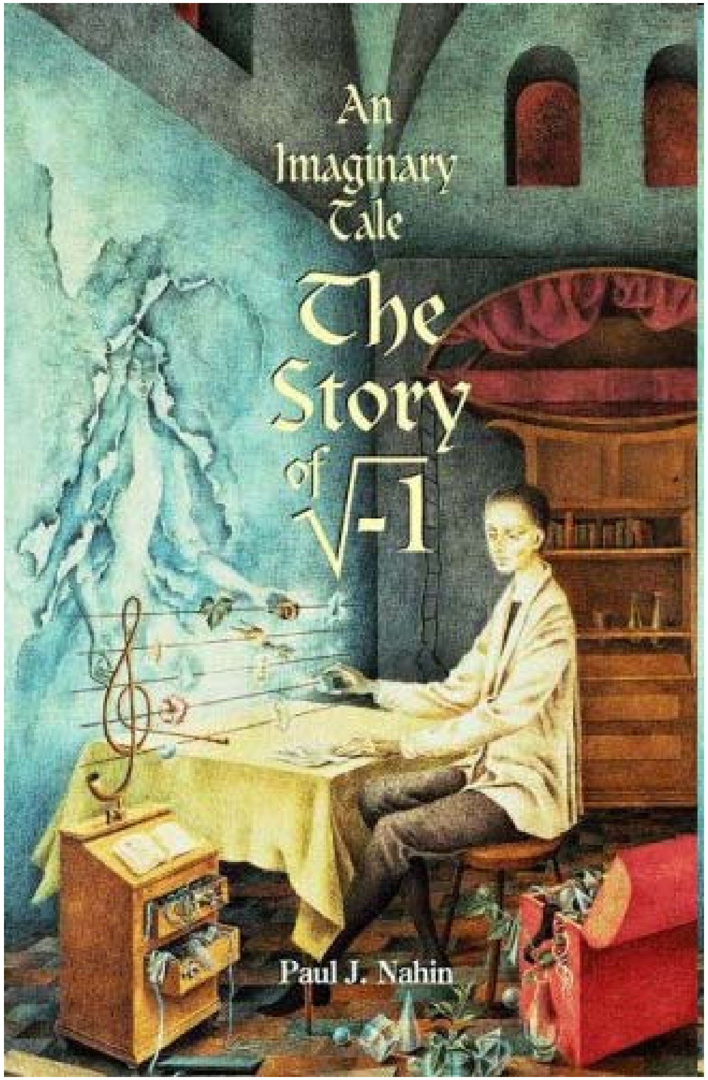
$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

$$\longrightarrow \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Ejercicio: Demostrar por inducción.

5.- Hallar todos los números complejos z tales que $z^3\bar{z} = -1$.

Sol.: $z = \pm i$, $k \in Z$



Amazon.com Review

At the very beginning of his book on *i*, the square root of minus one, Paul Nahin warns his readers: "*An Imaginary Tale* has a very strong historical component to it, but that does not mean it is a mathematical lightweight. But don't read too much into that either. It is *not* a scholarly tome meant to be read only by some mythical, elite group.... Large chunks of this book can, in fact, be read and understood by a high school senior who has paid attention to his or her teachers in the standard fare of pre-college courses. Still, it will be most accessible to the million or so who each year complete a college course in freshman calculus.... But when I need to do an integral, let me assure you I have not fallen to my knees in dumbstruck horror. And neither should you."

Nahin is a professor of electrical engineering at the University of New Hampshire; he has also written a number of science fiction short stories. His style is far more lively and humane than a mathematics textbook while covering much of the same ground. Readers will end up with a good sense for the mathematics of *i* and for its applications in physics and engineering.

--*Mary Ellen Curtin*

El teorema de Moivre es una máquina de generar identidades trigonométricas. Por ejemplo:

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 =$$

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

Igualando las partes reales e imaginarias:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ \sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\end{aligned}}$$

Otra manera ingeniosa de derivar identidades trigonométricas:

$$\boxed{\begin{aligned} & z = \cos\theta + i\sin\theta \\ & \frac{1}{z} = z^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta \\ & z + z^{-1} = 2\cos\theta \\ & \left(z + z^{-1}\right)^n = 2^n \cos^n(\theta) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ & z^{-n} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \\ & z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta) \end{aligned}}$$

Por ejemplo:

$$n = 6 \qquad \left(z + z^{-1}\right)^6 = 2^6 \cos^6(\theta) \quad ; \quad \left(z + z^{-1}\right)^6 = z^6 + 6z^4 + \ldots =$$

$$\underbrace{(z^6 + z^{-6})}_{2\cos(6\theta)} + 6\underbrace{(z^4 + z^{-4})}_{2\cos(4\theta)} + 15\underbrace{(z^2 + z^{-2})}_{2\cos(2\theta)} + 20 =$$

$$2\cos(6\theta) + 12\cos(4\theta) + 30\cos(2\theta) + 20 = 2^6 \cos^6(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^6(\theta) = \frac{1}{32}\cos(6\theta) + \frac{3}{16}\cos(4\theta)\frac{15}{32}\cos(2\theta) + \frac{5}{16}$$

Ejercicio: Sumar $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)\right]$

$$S_1 := \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad S_2 := \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \qquad z := \cos x + i \sin x$$

$$z^k = \cos(kx) + i\sin(kx) \qquad S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

$$S_1 = \mathrm{Re}\left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\cos[(n+1)x] + i\sin[(n+1)x] - 1}{(\cos x - 1) + i\sin x}\right) =$$

$$= \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x] - \cos x + 1}{2 - 2\cos x}$$

En teoría de series de Fourier la función $D_n(x)$ se llama **núcleo de Dirichlet.**

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2} + S_1\right) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Raíces de z

Si $z = w^n$, entonces w se llama la raíz enésima de z y podemos escribirla como:

$$w = \sqrt[n]{z}$$

que posee n distintos valores. Es decir $\sqrt[n]{z}$ está **multivaluada.**

Sean $w = R(\cos\phi + i \sin\phi)$, $\quad z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

Entonces por el teorema de Moivre:

$$w^n = R^n[\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$\Rightarrow \qquad r = R^n, \qquad$ o $\qquad R = \sqrt[n]{r}$

y $\qquad n\phi = \theta + 2k\pi \qquad$ o $\qquad \phi = \theta/n + 2k\pi/n$

tomando los valores $k = 0, 1, \ldots, n-1$, obtendremos las n raíces.

¿Por qué solo hasta n-1?

Resumiendo:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1}$$

donde $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Los n valores se equireparten en un círculo de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen, constituyendo los vértices de un polígono regular de n caras.

El valor de $\sqrt[n]{z}$ obtenido al tomar el valor principal de *arg(z)* y $k = 0$ en la fórmula de arriba se asume como **valor principal** de $w = \sqrt[n]{z}$

Ejercicio: *Encontrar la raíz cúbica de $z = i$.*

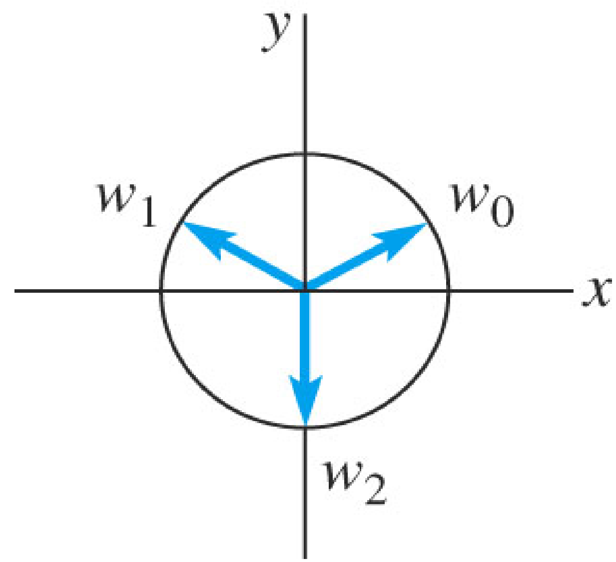
Usando en la fórmula anterior $r = 1$, $\theta = \arg z = \pi/2$:

$$w_k = 1^{1/3}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0, w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$



Encontrar la raíz cuarta de $z = 1 + i$.

Con $r = 2^{½}$, $\theta = \arg z = \pi/4$; tenemos:

$$w_k = 2^{1/8}(\cos\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4})$$

$$k = 0, w_0 = 2^{1/8}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}) = 1.1664 + 0.2320i$$

$$k = 1, w_1 = 2^{1/8}(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}) = -0.2320 + 1.1664i$$

$$k = 2, w_2 = 2^{1/8}(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}) = -1.1664 - 0.2320i$$

$$k = 3, w_3 = 2^{1/8}(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}) = 0.2320 - 1.1664i$$

Ejemplo: raíces de la unidad

$$\boxed{z^n = 1}$$

Ecuación ciclotómica

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, \cdots, 4$$

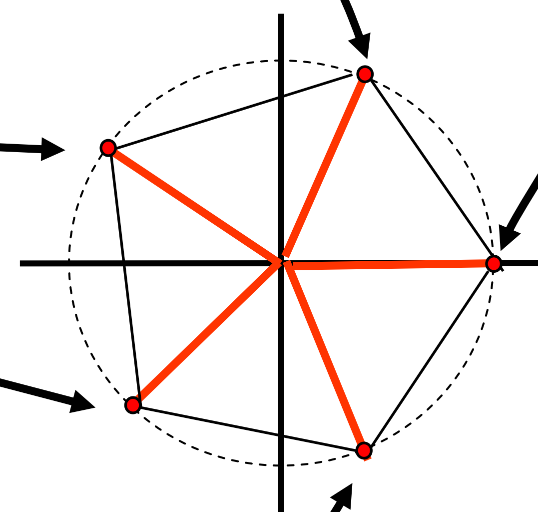
$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$w_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$



Ejercicio: Encuentra las raíces cúbicas de *1 - i*

Ejercicio: Sea z_k cualquier raíz enésima de la unidad, prueba que:

$$1 + z_k + z_k^2 + \ldots z_k^{n-1} = 0, \quad si \quad z_k \neq 1$$

Nota: Si 1, z_1, z_2, ..., z_{n-1} son las raíces de la unidad, demuestra:

$$(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}$$

3.- Obtener en forma binómica $\sqrt{3 - 4i}$. Sol.: $z_1 = -2 + i$

$z_2 = 2 - i$

6.- Hallar los números complejos de módulo unidad cuyas raíces cuartas tienen sus afijos en las bisectrices de los cuadrantes.

Sol.: $z = -1$

Falacia (Del lat. *fallacĭa*).

1. f. Engaño, fraude o mentira con que se intenta dañar a alguien.

2. f. Hábito de emplear falsedades en daño ajeno.

Real Academia Española

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1};\quad \sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}};\quad \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

$$\frac{i}{1}=\frac{1}{i};\quad \frac{i}{2}=\frac{1}{2i};\quad \frac{i}{2}+\frac{3}{2i}=\frac{1}{2i}+\frac{3}{2i}$$

$$i\left(\frac{i}{2}+\frac{3}{2i}\right)=i\left(\frac{1}{2i}+\frac{3}{2i}\right);\quad \frac{i^2}{2}+\frac{3i}{2i}=\frac{i}{2i}+\frac{3i}{2i}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2};\quad 1=2$$

El segundo paso (extraer raíces a ambos lados) puede parecer el origen de la falacia, pero no lo es. Basta con determinar el valor principal en ambas raíces.
El tercer paso es el origen de la falacia. No existe regla que garantice que:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

excepto si *a>0* y *b>0*.
La única manera de que dos números *u* y *v* (*u,v* distintos de cero) tengan el mismo cuadrado es que $u = v$ o $u = -v$. En nuestro caso, podíamos haber escrito:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad ó \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}; \quad \sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}; \quad \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}=-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

De esta manera no se produce falacia.
Observemos que pasa lo mismo con:

$$(-1)(-1)=1; \quad \sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1};$$

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=1; \quad i^2=1; \quad -1=1$$

De hecho, si operamos con i, sin pensar que es √-1, todo funciona correctamente.

Un producto infinito para π:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{1/2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Elevando al cuadrado a ambos lados:

$$\cos\theta + \underbrace{i\sin\theta} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \underbrace{i2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Igualando las partes imaginarias

$$\boxed{\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Un producto infinito para π:

$$\sin\theta = 2\underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\left\{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\right\}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

(Aplicamos el resultado encontrado al ángulo mitad.)

Aplicándolo reiteradamente...

$$\boxed{\sin\theta = 2^n\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$

Dividiendo la igualdad entre θ:

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} \qquad n\to\infty$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\ldots$$

$$\theta=\frac{\pi}{2} \qquad \frac{2}{\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\ldots$$

Producto infinito de Viète para π

$$\boxed{\frac{2}{\pi}=\prod_{k=2}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}$$

Tomando θ = π/4:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \xrightarrow[\text{en el producto infinito}]{\text{Usando reiteradamente}} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Potenciación de exponente racional

Sean $m \in \mathbf{Z}$, n $\in \mathbf{N}$, con m, n primos entre sí.

Se define $z^{m/n} = \left(z^{1/n} \right)^{m}$

Si $z = r(\cos\varphi + i sen\,\varphi)$, entonces:

$$\mathbf{z^{m/n} = r^{m/n}\left[\cos\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + i\ sen\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi)\right]}\quad \text{con}\quad \mathbf{k = 0,1,\dots, n-1}.$$

Los n valores (para $k = 0,1,\dots, n-1$) son distintos.

Supongamos que para k y k' se obtuviese el mismo nº complejo.

Sería entonces:

$\frac{m}{n}(\varphi + 2k'\pi) = \frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi) + 2p\pi$, es decir: $k'\frac{m}{n} = k\frac{m}{n} + p$.

O sea, $p = \frac{m}{n}(k' - k) \Leftrightarrow pn = m(k' - k)$

Como m y n son primos entre si, todo factor de n deberá estar en $k' - k$, es decir $n \mid k' - k$. Imposible pues $|k' - k| < n$

Ya podemos encontrar todas las soluciones de una ecuación como:

$$z^n + 23 = 0 \rightarrow z = \sqrt[n]{-23}$$

Serán *n* soluciones.

O las soluciones de ecuaciones como:

$$z^{n/m} + 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[n]{(-1)^m}$$

¿Cuántas soluciones tiene?

Cualquier complejo elevado a m está univaluado, nos proporcionará un único valor.

Si m/n es irreducible, tendremos n soluciones. Si es reducible, $m/n = p/q$, y tendremos $q < n$ soluciones distintas.
Es importante, por tanto, simplificar m/n siempre.

Además: supongamos que hemos simplificado hasta
alcanzar m/n. Tomemos una solución de las n posibles.
Al elevarla a n/m debería darnos z, ¡pero nos dará m valores y solo uno de ellos es z!

Propiedades algebraicas

La suma y el producto dotan a C de estructura de cuerpo.

Ley de clausura:

$z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ pertenecen a C.

Ley conmutativa:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

Ley asociativa:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

Ley distributiva:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Las propiedades son fáciles de probar escribiendo z en forma algebraica x+iy, y usando las correspondientes propiedades de los números reales.

$$0+z = z+0 = z$$ **(Neutro para la suma)**

$$z+(-z) = (-z)+z = 0$$ **(Opuesto para la suma)**

$$z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$$ **(Neutro para el producto)**

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$ **(Identidad para el producto)**

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$ **(Inverso para el producto)**

(Para todo z distinto de 0)

{C,+,·} con las propiedades anteriores es un cuerpo.

No es posible ordenar el conjunto de los números complejos.

Carecen de sentido expresiones como $z > 0$ o $z_1 < z_2$, por ejemplo.

En efecto, si éste fuera el caso los elementos i y 0 deberían ser comparables. Entonces, ó $i > 0$, en cuyo caso por la compatibilidad con el producto tendríamos $i^2 = -1 > 0$, ó $i < 0$, en cuyo caso y por la misma razón, también se tendría $i^2 = -1 > 0$, con lo cual, obviamente, no se extiende el orden de **R**.

Obsérvese que, como conjunto, $\mathbf{C}$ es en realidad $\mathbf{R}^2$. La novedad (y lo interesante como veremos) está en introducir el producto, pues se comprueba fácilmente que $\mathbf{C}$ con las dos operaciones anteriores se obtiene un cuerpo conmutativo, con $(0, 0)$ y $(1, 0)$ como elementos neutros respectivos.

Además, el cuerpo $\mathbf{C}$ contiene al cuerpo $\mathbf{R}$. Precisemos esta afirmación:

- La aplicación $a \in \mathbf{R} \longrightarrow (a, 0) \in \mathbf{C}$ es un homomorfismo inyectivo de cuerpos.

Esta identificación de $\mathbf{R}$ como subcuerpo de $\mathbf{C}$ nos permite usar la notación simplificada $a = (a, 0)$, y observando que todo elemento $(a, b) \in \mathbf{C}$ se puede escribir como

$$(a, b) = (a, 0).(1, 0) + (b, 0)(0, 1),$$

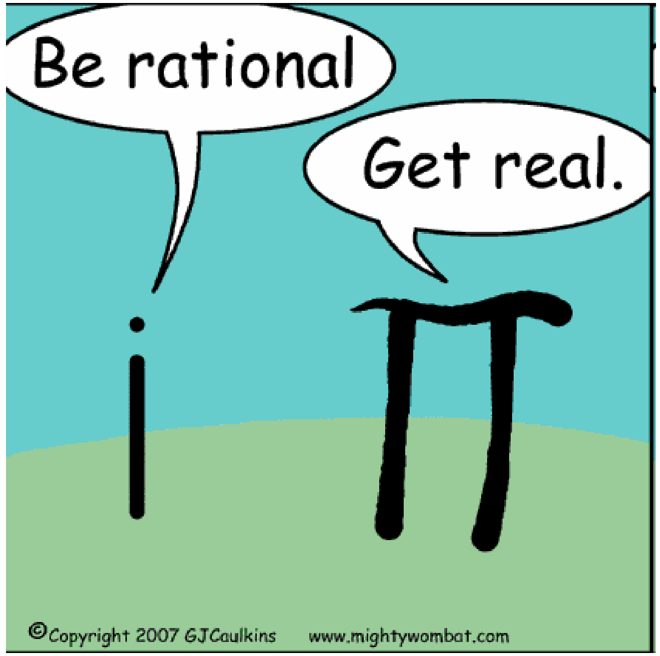
si denotamos $i = (0, 1)$, con esta nueva nomenclatura, tenemos

$$(a, b) = a + ib.$$

Desde el punto de vista algebraico, la principal ventaja de **C** es que soluciona el defecto algebraico de **R** de no ser algebraicamente cerrado, es decir, de que existan ecuaciones polinómicas con coeficientes reales que no tienen soluciones reales. El ejemplo más aparente es $x^2 + 1 = 0$. Esto ya no va a ocurrir en **C**.

Este hecho no es fácil de demostrar con argumentos elementales pero, más adelante, será una consecuencia sencilla del análisis que desarrollaremos sobre **C**.

Además, **C** es el **menor** cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a **R**. Con mayor precisión, si un cuerpo algebraicamente cerrado contiene un subcuerpo isomorfo a **R**, debe contener un subcuerpo isomorfo a **C**.



En la construcción de los números se busca siempre solucionar un defecto, pero con una propiedad de minimalidad. Así, en los contenidos

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

Z es el **menor grupo** que contiene a **N**, **Q** es el **menor cuerpo** que contiene a **Z**, **R** es el **menor cuerpo completo** que contiene a **Q** y **C** es el **menor cuerpo algebraicamente cerrado** que contiene a **R**.

Hay otros contextos matemáticos que llevan a construcciones de $\mathbf{C}$, es decir a la construcción de cuerpos isomorfos a nuestro $\mathbf{C}$. Dos ejemplos son los siguientes:

i) Sea $\mathbf{R}[x]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes reales (con las operaciones habituales). Sea $\mathbf{I}$ el ideal maximal generado por el polinomio x^2+1. Entonces, el espacio cociente $\mathbf{R}/\mathbf{I}$, con las operaciones inducidas, resulta ser un cuerpo conmutativo isomorfo a $\mathbf{C}$.

ii) Sea $M(2\times 2;\mathbf{R})$ el anillo de las matrices 2×2 con coeficientes reales, con las operaciones habituales. El subanillo

$$\mathbf{M}=\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\}$$

es un cuerpo conmutativo isomorfo a $\mathbf{C}$.

Representación matricial de los números complejos

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Actúa como 1}} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Actúa como } i \\ \text{(una rotación de 90º)}}}$$

Con la suma y el producto matricial clásico, y teniendo en cuenta que toda matriz no cero de este tipo es invertible, tenemos un cuerpo.
El módulo es igual a la raíz cuadrada del determinante.

¿A qué corresponde el conjugado de z en forma matricial?

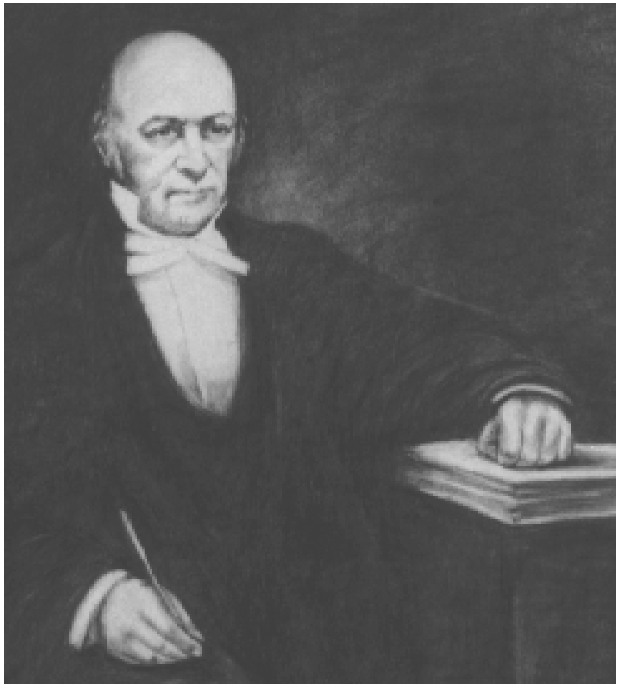
A pesar de las diferencias entre *N, Z, Q, R y C*, poseen muchas propiedades comunes como la conmutatividad y la asociatividad de la suma y el producto, la distributividad del producto respecto a la suma o la existencia de elemento unidad para la multiplicación.

¿Se puede ampliar más el concepto de número de modo que se conserven estas propiedades?

Según el **teorema de Frobenius** no es posible un campo mayor que C.

F. Frobenius
(1849 - 1917)

Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)



Hamilton intentó extender los números complejos a "tres dimensiones". Hasta convencerse de que necesitaba cuatro: cuaterniones. Los cuaterniones son números complejos en cuatro dimensiones en lugar de dos (Hamilton 1843).

Cuaterniones

$$q = \underbrace{a}_{\text{Parte Real}} + \underbrace{bi + cj + dk}_{\text{Parte Imaginaria}}$$

Así un cuaternión *q* se expresa como:

$q = a + ib + jc + kd$ donde a,b,c,d son números reales. $\{1, i, j, k\}$ hacen de base en el hiperespacio de los cuaterniones. $\{1, i\}$ era la base estándar para los números complejos, simplemente se añaden dos vectores unitarios, *j* y *k*, perpendiculares entre sí.

Cuaterniones

Suma:

La suma se realiza análogamente a como se hace con números complejos:

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k$$

Producto:

El producto se realiza componente a componente de acuerdo con las leyes de combinación y producto de los elementos de la base (Reglas de Hamilton):

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Como se puede apreciar en esta regla de multiplicación de los elementos de la base, el producto entre cuaterniones es asociativo y no conmutativo.

Así el producto será:

$$\begin{aligned} ab = (&a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) \\ &+ i(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) \\ &+ j(a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) \\ &+ k(a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) \end{aligned}$$

Cuaternión conjugado:

Dado el cuaternión $q = a + bi + cj + dk$, su conjugado se escribe como: $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Cociente entre cuaterniones:

El cociente entre cuaterniones se obtiene rápidamente a partir de la fórmula del inverso de un cuaternión:

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{a\bar{a}}$$

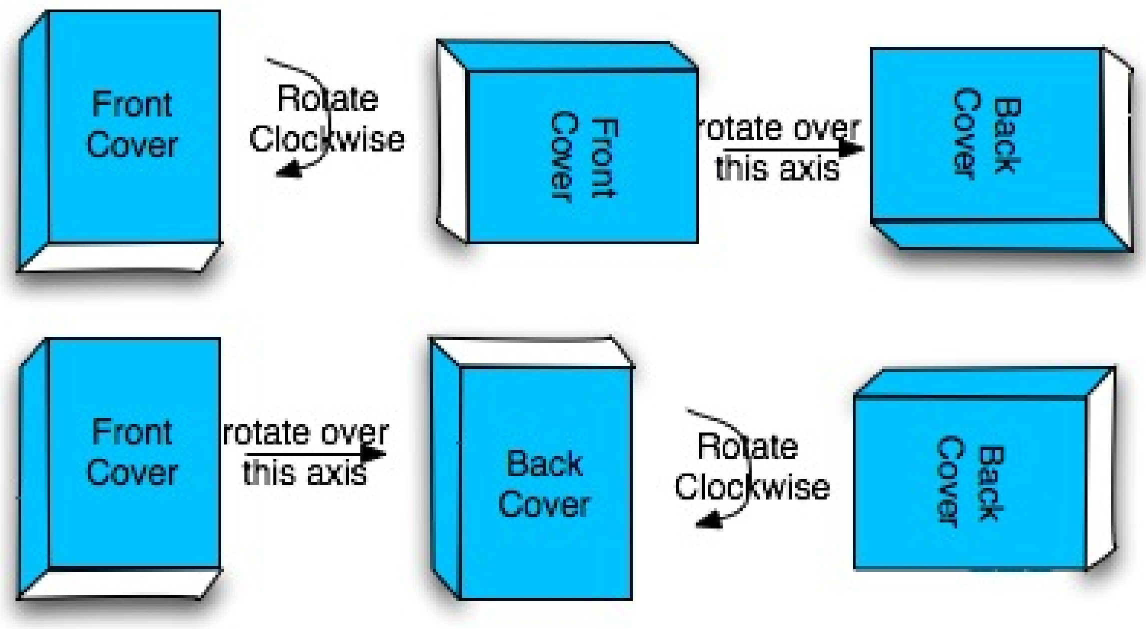
128

Es el precio que se paga por obtener un álgebra consistente con los cuaterniones es la falta de conmutatividad. En general, el producto $q \cdot q'$ de dos cuaterniones no es igual que el producto $q' \cdot q$ (como ocurre con el producto matricial estándar, por ejemplo).

Sorprendentemente, esta propiedad viene al pelo para describir rotaciones en 3 dimensiones.

El software de vuelo del *Space Shuttle* usaba cuaterniones para el control de navegación y vuelo. Su uso conseguía compacidad de código, velocidad de cómputo y evitaba aparición de singularidades en los cálculos.

Las rotaciones 3D no son conmutativas:



180 grados de diferencia dependiendo del orden de las rotaciones.

180 grados es el equivalente al cambio de signo en la multiplicación de cuaterniones. Los cuaterniones tienen las propiedades adecuadas para describir rotaciones y en particular composición de rotaciones. Los cuaterniones se usan para las rotaciones en los gráficos de ordenador (a partir de ahora puedes decir cuando manejes la PS2 que estás computando cuaterniones) y en GPS.

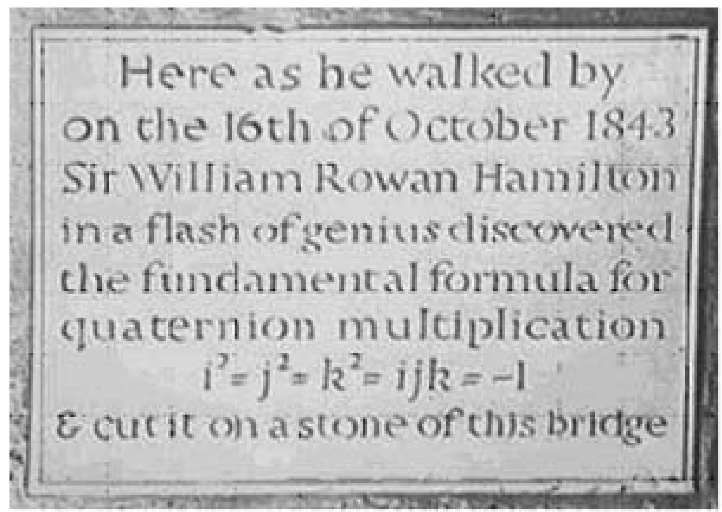
Hamilton desarrolló también otra álgebra alternativa: la de los **números hipercomplejos**. En vez de sacrificar la conmutatividad, sacrificó la existencia de inverso. En el álgebra hipercompleja no todo elemento *h* distinto de *0* posee inverso *1/h*. La base de cuatro elementos posee la misma notación que la de cuaterniones, pero las reglas de multiplicación son distintas:

$$i\,j = k,\quad j\,k = -i,\quad k\,i = -j$$

$$j\,i = k,\quad k\,j = -i,\quad i\,k = -j$$

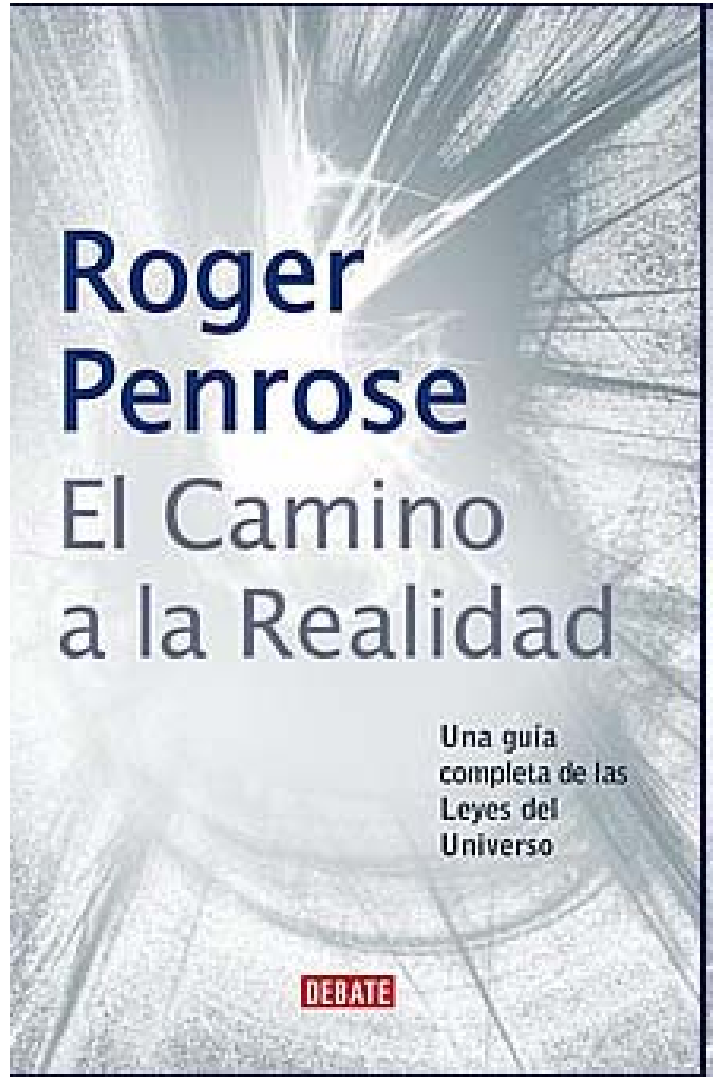
$$i\,i = j\,j = -k\,k = -1 \quad i\,j\,k = 1$$

El puente de Brougham sobre el Canal Real, donde Hamilton durante un paseo dedujo las reglas para los cuaterniones.



"… los números complejos componen una notable unidad con la naturaleza. Es como si la propia naturaleza estuviera tan impresionada por el alcance y consistencia del sistema de los números complejos como lo estamos nosotros, y hubiera confiado a estos números las operaciones detalladas de su mundo en sus escalas más minúsculas".

Roger Penrose,
"El camino a la realidad".



The Complex Number Song

(Tune:John Brown's Body)

Mine eyes have seen the glory of the Argand diagram
They have seen the i's and thetas of De Moivre's mighty plan
Now I can find the complex roots with consummate elan
With the root of minus one

Complex numbers are so easy
Complex numbers are so easy
Complex numbers are so easy
With the root of minus one

In Cartesian co-ordinates the complex plane is fine
But the grandeur of the polar form this beauty doth outshine
You be raising i+40 to the power of 99
With the root of minus one

You'll realise your understanding was just second rate
When you see the power and magic of the complex conjugate
Drawing vectors corresponding to the roots of minus eight
With the root of minus one

(Probably) Mrs P.E.Perella