CAPÍTULO XVI.
NÚMEROS COMPLEJOS

SECCIONES

A. Definición. Primeras propiedades.

B. Potencia y raíz de números complejos.

C. Ejercicios propuestos.

A. DEFINICIÓN. PRIMERAS PROPIEDADES.

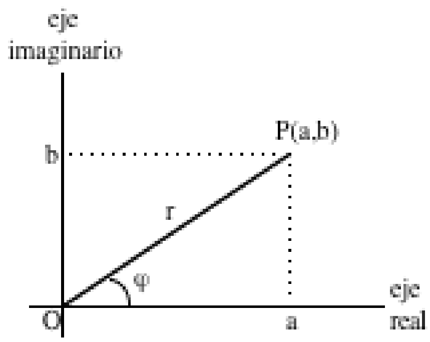
Un número complejo es un par ordenado de números reales. El conjunto de los número complejos es pues

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, se llama *parte real* de z a la primera componente $a = \operatorname{Re} z$ y se llama *parte imaginaria* de z a la segunda componente $b = \operatorname{Im} z$.

Observación 1. Los números complejos surgen como necesidad de resolver ecuaciones que involucren raíces de números negativos. Así, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el sistema de números reales; por eso, originalmente se representó una de sus raíces con la letra i (de imaginario). En este nuevo conjunto se podrá verificar el teorema fundamental del Algebra mediante el cual todo polinomio con coeficientes complejos tiene exactamente tantas raíces como indica su grado.

Observación 2. De la definición se observa que $\mathbb{C}$ puede representarse como el conjunto de puntos del plano: su primera coordenada corresponde a la parte real y su segunda coordenada a la parte imaginaria. El punto cuyas coordenadas son las componentes de un número complejo se llama *afijo* del número. Llamamos *eje real* al eje de abscisas y *eje imaginario* al eje de ordenadas.



El conjunto $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo con las operaciones

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc),\end{aligned}$$

siendo $(0, 0)$ el neutro para la suma y $(1, 0)$ el elemento unidad. El *opuesto* de $z = (a, b)$ es $-z = (-a, -b)$ y el *inverso*, $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, si $z \neq 0$.

Se puede considerar a los números reales como subconjunto de los complejos haciendo la identificación $a = (a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, pues de este modo las operaciones anteriores coinciden con la suma y producto de números reales. Así pues, a los números complejos de la forma $a = (a, 0)$ los llamaremos *reales* y un número complejo es *imaginario* si no es real.

Se llama *unidad imaginaria* al número $i = (0, 1)$ y un número complejo z es *imaginario puro* si $z = (0, b) = b \cdot i$, $b \in \mathbb{R}$.

Observación 3. Así definida, la unidad imaginaria verifica la ecuación $x^2 + 1 = 0$. En general, debido a que $i^4 = 1$, todas las potencias de i se reducen a cuatro:

$$i^0 = 1, \ i^1 = i, \ i^2 = -1, \ i^3 = -i.$$

Debido a la descomposición $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$, todo número complejo se puede escribir en *forma binómica* como $(a, b) = a + ib$.

Se define *conjugado* de $z = (a, b)$ al número $\overline{z} = (a, -b)$. De la definición se observa que los afijos de dos complejos conjugados son puntos simétricos respecto al eje real. Podemos destacar las siguientes propiedades:

1) $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4) $\overline{-z} = -\overline{z}$, $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

5) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$; $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Llamamos *módulo* de un número complejo $z = (a, b)$ a la longitud $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se verifican las siguientes propiedades:

6) $z = 0 \iff |z| = 0$.

7) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

8) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

9) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Se llama *argumento* de un número complejo $z = (a, b)$ al número $\varphi = \arg z = \operatorname{arc\,tg} b/a$ y gráficamente representa el ángulo que forma el segmento OP con la parte positiva del eje real medido en la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj. A veces se considera el argumento como alguno de los valores $\varphi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, con lo que llamaremos *argumento principal* de z, $\operatorname{Arg} z$, al que verifica $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$. Las siguientes propiedades son fáciles de verificar:

10) $\arg(\alpha z) = \arg z$ si $\alpha > 0$; $\arg(\alpha z) = \pi + \arg z$ si $\alpha < 0$.

11) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

12) $\arg \overline{z} = -\arg z,\ \forall z \in \mathbb{C}$; $\arg(1/z) = -\arg z,,\ \forall z \neq 0.$

Dado un número complejo $z = (a, b)$, los valores $r = |z|,\ \varphi = \arg z$ constituyen las llamadas *coordenadas polares* de z. De la relación entre las coordenadas cartesianas y polares podemos escribir z como

$$z = (a, b) = a + ib = r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

con $r \geq 0$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$, y la llamaremos *forma trigonométrica* del número z (abreviadamente escribiremos $z = r\operatorname{cis}\varphi$). A veces también se utiliza la *forma módulo-argumental o polar* $z = r_\varphi$.

En los siguientes problemas estudiaremos diferentes aplicaciones de los conceptos y propiedades arriba indicadas.

PROBLEMA 16.1

Dados $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, probar que $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ y $z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 = 2i(y_1x_2 - x_1y_2)$.

Solución

Operando directamente se obtiene:

$$\begin{aligned} z_1\,\overline{z}_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2; \\ \overline{z}_1 z_2 &= (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 - iy_1x_2 + ix_1y_2. \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro se obtiene que $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ y al restar, se obtiene análogamente que $z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 = 2i(y_1x_2 - x_1y_2)$.

PROBLEMA 16.2

Dados $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$, expresar en forma binómica el número $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1z_2 - 1}$.

Solución

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1+z_2}{z_1z_2-1} &= \frac{(z_1+z_2)(\overline{z}_1\overline{z}_2-1)}{|z_1z_2-1|^2} = \frac{|z_1|^2\overline{z}_2+|z_2|^2\overline{z}_1-(z_1+z_2)}{|z_1z_2-1|^2} \\
&= \frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2-y_2i)+(x_2^2+y_2^2)(x_1-y_1i)-(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i}{|(x_1x_2-y_1y_2-1)+(x_1y_2+x_2y_1)i|^2} \\
&= \frac{(x_1^2+y_1^2)x_2+(x_2^2+y_2^2)x_1-(x_1+x_2)}{(x_1x_2-y_1y_2-1)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} \\
&\quad -i\cdot\frac{y_2(x_1^2+y_1^2)+y_1(x_2^2+y_2^2)+(y_1+y_2)}{(x_1x_2-y_1y_2-1)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.3

Dado $z=x+iy$, expresar $(z/\overline{z})^2-(\overline{z}/z)^2$ en forma binómica.

Solución

Haciendo denominador común, tenemos:

$$\begin{aligned}
&(z/\overline{z})^2-(\overline{z}/z)^2 = \frac{z^2}{\overline{z}^2}-\frac{\overline{z}^2}{z^2} = \frac{z^4-\overline{z}^4}{\overline{z}^2z^2} \\
= \; & \frac{z^4+\overline{z}^4-2\overline{z}^4}{|z|^4} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z^4)-2\overline{z}^4}{(x^2+y^2)^2} \\
= \; & \frac{2(x^4-6x^2y^2+y^4)-2[x^4+4x^3(-iy)+6x^2(-iy)^2+4x(-iy)^3+(iy)^4]}{(x^2+y^2)^2} \\
= \; & \frac{8x^3yi-8xy^3i}{(x^2+y^2)^2} = 0+i\cdot\frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.4

Simplificar las siguientes expresiones:

a) $(a+ib)^2+(a-ib)^2$.

b) $(1+ia)^4+(1-ia)^4$.

c) $\dfrac{a+ib}{c+id}+\dfrac{a-ib}{c-id}$.

Solución

a) Desarrollando las potencias,

$$(a+ib)^2+(a-ib)^2 = a^2-b^2+2iab+a^2-b^2-2iab = 2(a^2-b^2).$$

b) Análogamente al anterior,

$$\begin{aligned}(1+ia)^4 &+ (1-ia)^4 = 1+4ia+6(ia)^2+4(ia)^3+(ia)^4 \\ &+ 1-4ia+6(ia)^2-4(ia)^3+(ia)^4 = 2-12a^2+2a^4.\end{aligned}$$

c) Hacemos denominador común y obtenemos

$$\frac{a+ib}{c+id}+\frac{a-ib}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)+(c+id)(a-ib)}{c^2+d^2} = 2\cdot\frac{ac+bd}{c^2+d^2}.$$

Se observa que todos los resultados son reales, hecho que se deduce de que en todos los casos se tenía la suma de un número y su conjugado.

PROBLEMA 16.5

Calcular $B = \dfrac{(1+i)(1-i)^3}{(1+2i)^3} - \dfrac{i(i-1)(2i-1)}{(3+i)^2}$.

Solución

Desarrollando las potencias y expresando cada sumando en forma binómica tenemos:

$$\begin{aligned}B &= \frac{(1+i)(1-i)(1-i)^2}{(1+2i)^3} - \frac{i(i-1)(2i-1)}{(3+i)^2} \\ &= \frac{(1-i^2)(1-i)^2}{(1+2i)^3} - \frac{(i^2-i)(2i-1)}{(3+i)^2} \\ &= \frac{2(1+i^2-2i)}{1^3+3\cdot 2i+3\cdot(2i)^2+(2i)^3} - \frac{(-1-i)(2i-1)}{9+i^2+6i} \\ &= \frac{-4i}{1-12+6i-8i} + \frac{2i-1+2i^2-i}{8+6i} = \frac{-4i}{-11-2i} + \frac{-3+i}{8+6i} \\ &= \frac{-4i(-11+2i)}{125} + \frac{(-3+i)(8-6i)}{100} = \frac{8+44i}{125} + \frac{-24+8i+18i-6i^2}{100} \\ &= \left(\frac{8}{125}-\frac{18}{100}\right) + \left(\frac{44}{125}+\frac{26}{100}\right)i = \frac{-29+153i}{250}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.6

Hallar el módulo y argumento de $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

Solución

Por la definición de módulo y argumento, obtenemos:

$$|z| = |-2 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}.$$

Como las partes real e imaginaria de z son negativas, el afijo está en el tercer cuadrante, con lo que $\arg z = \alpha = \pi/3 + \pi$.

PROBLEMA 16.7

Hallar el módulo y el argumento del número complejo $\dfrac{1+ix}{1-ix}$, donde $x \in \mathbb{R}$. Calcular x para que su módulo sea 1.

Solución

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador,

$$\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{(1+ix)^2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} i.$$

El módulo es

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = 1,$$

de modo que el módulo es 1 independientemente del valor de x.

El argumento es $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1-x^2}$.

PROBLEMA 16.8

Calcular el módulo y argumento de $w = \dfrac{3(1+i)(3-\sqrt{3}i)}{(-2-2\sqrt{3}i)^2}$.

Solución

Aplicamos las propiedades del módulo y argumento del producto y cociente de números complejos. Tenemos así:

$$|w| = \frac{3|1+i| \cdot |3-\sqrt{3}i|}{|-2-2\sqrt{3}i|^2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{12}}{(\sqrt{16})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}.$$

$$\begin{aligned} \arg w &= \arg 3 + \arg(1+i) + \arg(3-\sqrt{3}i) - 2\arg(-2-2\sqrt{3}i) \\ &= 0 + \pi/4 - \pi/6 - 2(\pi + \pi/3) = \tfrac{-31\pi}{12}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.9

Hallar el módulo y argumento de $z = \dfrac{2(3-2i)+(2+i)-5-i}{2(2+i)-(3-2i)+3-i}$.

Solución

Simplificamos en primer lugar dicho número:

$$z = \frac{6-4i+2+i-5-i}{4+2i-3+2i+3-i} = \frac{3-4i}{4+3i}.$$

De este modo,

$$|z| = \frac{|3-4i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1.$$

Además,

$$z = \frac{3-4i}{4+3i} = \frac{(3-4i)(4-3i)}{4^2+3^2} = \frac{12-16i-9i-12}{25} = -i,$$

de modo que $\operatorname{Arg} z = 3\pi/2$ y $\arg z = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 16.10

Calcular $z = (1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.

Solución

Calculamos el módulo y argumento de cada factor:

$$|1+i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \pi/4;$$

$$|1+i\sqrt{3}| = 2, \qquad \arg(1+i\sqrt{3}) = \pi/3;$$
$$|\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| = 1, \qquad \arg(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \varphi.$$

El módulo del producto será el producto de los módulos $|z| = 2\sqrt{2}$, y el argumento la suma de los argumentos $\arg z = \pi/4 + \pi/3 + \varphi$.

PROBLEMA 16.11

Expresar en forma binómica $x+iy$ *los complejos*

a) $5 \operatorname{cis} \pi/6$, b) $8 \operatorname{cis} 165°$,
c) $2 \operatorname{cis} 800°$, d) $\sqrt{6} \operatorname{cis} 9\pi/4$.

Solución

Utilizamos en todos los casos la fórmula $\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$.

a) $5 \operatorname{cis} \pi/6 = 5(\cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\pi/6) = 5\sqrt{3}/2 + i\cdot 5/2$.

b) $8 \operatorname{cis} 165° = 8(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°) = -8\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°$.

c) $2 \operatorname{cis} 800° = 2 \operatorname{cis}(4\pi + 80°) = 2\cos 80° + 2i \operatorname{sen} 80°$.

d) $\sqrt{6} \operatorname{cis} 9\pi/4 = \sqrt{6} \operatorname{cis}(2\pi + \pi/4) = \sqrt{6}(\cos\pi/4 + i\operatorname{sen}\pi/4) = \sqrt{3}(1+i)$.

PROBLEMA 16.12

Expresar en forma binómica

$$E = \left[\frac{(1+i)^4 - (1-i)^4}{(1-i)^3 + (1+i)^3}\right]^5 + \frac{(2+3i)(1-i)}{(1-2i)(2-i)}.$$

Solución

Simplificamos por separado los distintos términos:

$$\begin{aligned}
(1+i)^4 - (1-i)^4 &= [(1+i)^2 - (1-i)^2]\cdot[(1+i)^2 + (1-i)^2] = 4i[2+2i^2] = 0;\\
(1-i)^3 + (1+i)^3 &= 2 + 6i^2 = -4;\\
(2+3i)(1-i) &= 5+i;\\
(1-2i)(2-i) &= -5i.
\end{aligned}$$

En definitiva, $E = \dfrac{5+i}{-5i} = \dfrac{-1+5i}{5}$.

PROBLEMA 16.13

Expresar en forma binómica los siguientes complejos:

a) $(4+3i)^3$, b) $\dfrac{3+2i}{3-2i}$,

c) $\dfrac{1}{(4+2i)(3-2i)}$, d) $\dfrac{(4-3i)(2+3i)}{5-3i}$.

Solución

a) Por la fórmula de Newton,

$$\begin{aligned}(4+3i)^3 &= 1\cdot 4^3 + 3\cdot 4^2(3i) + 3\cdot 4(3i)^2 + (3i)^3 \\ &= 64 + 144i - 108 - 27i = -44 + 117i.\end{aligned}$$

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador,

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{3-2i} &= \frac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)} \\ &= \frac{9+12i-4}{9+4} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i.\end{aligned}$$

c) Operando como en el apartado anterior,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(4+2i)(3-2i)} &= \frac{1}{12-8i+6i+4} \\ &= \frac{1}{16-2i} = \frac{16+2i}{16^2+2^2} = \frac{4}{65} + \frac{i}{130}.\end{aligned}$$

d) Operamos nuevamente como en los casos anteriores,

$$\begin{aligned}\frac{(4-3i)(2+3i)}{5-3i} &= \frac{8+12i-6i+9}{5-3i} \\ &= \frac{17+6i}{5-3i} = \frac{(17+6i)(5+3i)}{34} = \frac{67}{34} + \frac{81}{34}i.\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.14

Escribir en la forma trigonométrica los siguientes números complejos:

a) -1, b) $1+i$,

c) $1-\sqrt{3}i$, d) $\sqrt{3}+i$,

e) $-i$, f) $-5-12i$.

Solución

a) Como $|-1| = 1$ y $\arg(-1) = \pi$, entonces

$$-1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi.$$

b) Como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$,

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\,\text{sen}\,\pi/4).$$

c) El módulo y argumento son $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg(1-\sqrt{3}i) = \text{arc tg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$. Así:

$$1 - \sqrt{3}i = 2[\cos(-\pi/3) + i\,\text{sen}(-\pi/3)].$$

d) En este caso, $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$ y $\arg(\sqrt{3}+i) = \text{arc tg}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$, de donde,

$$\sqrt{3} + i = 2[\cos(\pi/6) + i\,\text{sen}(\pi/6)].$$

e) Es evidente que $|-i| = 1$ y $\arg(-i) = 3\pi/2$, con lo que:

$$-i = \cos(3\pi/2) + i\,\text{sen}(3\pi/2).$$

f) En este caso, $|-5-12i| = \sqrt{25+144} = 13$ y, como $\text{tg}\,\varphi = 12/5$, resulta que $\arg(-5-12i) = \pi + \text{arc tg}(12/5)$, por ser negativas las componentes del número complejo. En definitiva,

$$-5 - 12i = 13[\cos(\pi + \text{arc tg}(12/5)) + i\,\text{sen}(\pi + \text{arc tg}(12/5))].$$

PROBLEMA 16.15

Expresar en la forma $x + iy$ y $r\,\text{cis}\,\vartheta$ los complejos

a) $\dfrac{1-i}{1+i}$, b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$, c) $\dfrac{3-4i}{24+7i}$.

Solución

a) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{1-i^2} = \dfrac{-2i}{2} = -i = \text{cis}(3\pi/2).$

b) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{(\sqrt{3}-i)^2}{3-i^2} = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Como $\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$ y $\arg\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\pi/3$, tenemos:

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}(-\pi/3).$$

c) $\dfrac{3-4i}{24+7i} = \dfrac{(3-4i)(24-7i)}{24^2+7^2} = \dfrac{44}{625}-\dfrac{117}{625}i.$

El módulo y argumento son

$$\left|\frac{44}{625}-\frac{117}{625}i\right| = \sqrt{\frac{44^2+117^2}{625^2}} = 0{,}2 \text{ y } \vartheta = \operatorname{arc\,tg}(-117/44),$$

de modo que

$$\frac{3-4i}{24+7i} = \frac{44}{525}-\frac{117}{525}i = 0{,}2 \operatorname{cis} \operatorname{arc\,tg}(-117/44).$$

PROBLEMA 16.16

Representar en forma trigonométrica el número complejo
$z = \dfrac{(1+i)(1-i)^2 i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

Solución

Por las propiedades del módulo, tenemos:

$$|z| = \frac{|1+i|\cdot|1-i|^2\cdot|i|}{\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 1}{1} = 2\sqrt{2}.$$

Como el argumento del producto es la suma de los argumentos,

$$\begin{aligned}\arg z &= \arg(1+i)+2\arg(1-i)+\arg i-\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \pi/4+2(3\pi/2+\pi/4)+\pi/2-\pi/3 = 4\pi+\pi/4-\pi/3 = 4\pi-\pi/12.\end{aligned}$$

En definitiva, $z = 2\sqrt{2}[\cos(-\pi/12)+i\operatorname{sen}(-\pi/12)]$.

PROBLEMA 16.17

Si $z = \operatorname{cis}\vartheta = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta$, *expresar los números*

a) $\dfrac{1}{1+z}$, b) $\dfrac{1}{1-z}$,

c) $\dfrac{2z}{1-z^2}$, d) $\dfrac{1-z}{1+z}$.

Solución

a) Multiplicamos numerador y denominador por $1 + \overline{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1+\overline{z}}{|1+z|^2} = \frac{1+\cos\vartheta - i\operatorname{sen}\vartheta}{(1+\cos\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta} = \frac{2\cos^2\vartheta/2 - 2i\operatorname{sen}\vartheta/2\cos\vartheta/2}{2(1+\cos\vartheta)} \\ &= \frac{2\cos\vartheta/2(\cos\vartheta/2 - i\operatorname{sen}\vartheta/2)}{2\cdot 2\cos^2\vartheta/2} = \frac{1}{2}(1 - i\operatorname{tg}\vartheta/2). \end{aligned}$$

b) Análogamente al apartado anterior,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1-\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{(1-\cos\vartheta) + i\operatorname{sen}\vartheta}{(1-\cos\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2\vartheta} = \frac{2\operatorname{sen}^2\vartheta/2 + 2i\operatorname{sen}\vartheta/2\cos\vartheta/2}{2(1-\cos\vartheta)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\vartheta/2(\operatorname{sen}\vartheta/2 + i\cos\vartheta/2)}{2\cdot 2\operatorname{sen}^2\vartheta/2} = \frac{1}{2}(1 + i\operatorname{cotg}\vartheta/2). \end{aligned}$$

c) Como en los casos anteriores, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{2z}{1-z^2} &= \frac{2z(1-\overline{z}^2)}{|1-z^2|^2} = \frac{2z - 2z\,\overline{z}^2}{|1-z^2|^2} = \frac{2z - 2\,\overline{z}}{|1-z^2|^2} \\ &= \frac{2\cos\vartheta + 2i\operatorname{sen}\vartheta - 2\cos\vartheta + 2i\operatorname{sen}\vartheta}{|1-\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta - 2i\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta|^2} = \frac{4i\operatorname{sen}\vartheta}{|1-\cos 2\vartheta - i\operatorname{sen}2\vartheta|^2} \\ &= \frac{4i\operatorname{sen}\vartheta}{(1-\cos 2\vartheta)^2 + \operatorname{sen}^2 2\vartheta} = \frac{4i\operatorname{sen}\vartheta}{1+\cos^2 2\vartheta - 2\cos 2\vartheta + \operatorname{sen}^2 2\vartheta} \\ &= \frac{4i\operatorname{sen}\vartheta}{2(1-\cos 2\vartheta)} = \frac{4i\operatorname{sen}\vartheta}{4\operatorname{sen}^2\vartheta} = i\operatorname{cosec}\vartheta. \end{aligned}$$

d) Procedemos como en los casos anteriores. Así:

$$\begin{aligned} \frac{1-z}{1+z} &= \frac{(1-z)(1+\overline{z})}{|1+\overline{z}|^2} = \frac{1+\overline{z} - z - z\,\overline{z}}{|1+z|^2} = \frac{\overline{z}-z}{|1+z|^2} \\ &= \frac{\cos\vartheta - i\operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta - i\operatorname{sen}\vartheta}{4\cos^2\vartheta/2} = \frac{-2i\operatorname{sen}\vartheta}{4\cos^2\vartheta/2} = \frac{-i\operatorname{sen}\vartheta}{1+\cos\vartheta}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.18

Dado el número complejo $z = \dfrac{3-2ai}{4-3i}$*, determinar el valor de* $a \in \mathbb{R}$ *para que el cociente sea real y calcular dicho cociente.*

Solución

Si multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador,

$$z = \frac{(3-2ai)(4+3i)}{25} = \frac{12+9i-8ai+6a}{25} = \frac{12+6a}{25} + \left(\frac{9-8a}{25}\right)i.$$

Para que sea real, debe cumplirse que $\dfrac{9-8a}{25} = 0$ con lo que $a = 9/8$ y entonces $z = \dfrac{12+6(9/8)}{25} = 3/4$.

PROBLEMA 16.19

Determinar dos números complejos cuya suma sea 4 y su producto 8.

Solución

Basta resolver el sistema $z_1+z_2 = 4,\ z_1z_2 = 8$. Como $z_2 = 4-z_1$, al sustituir, obtenemos:

$$z_1(4-z_1) = 8 \Longrightarrow z_1^2 - 4z_1 + 8 = 0 \Longrightarrow z_1 = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i.$$

La respuesta es pues $z_1 = 2+2i,\ z_2 = 2-2i$.

PROBLEMA 16.20

Caracterizar los números complejos w *que verifiquen la relación* $\operatorname{Im}\left(\dfrac{a+bw}{c+dw}\right) = \operatorname{Im} w,\ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$.

Solución

Aplicando la fórmula $2i\operatorname{Im} w = w - \overline{w}$, tenemos la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\frac{a+bw}{c+dw}\right) = \operatorname{Im} w &\iff \frac{a+bw}{c+dw} - \frac{a+b\,\overline{w}}{c+d\,\overline{w}} = w - \overline{w} \\
&\iff \frac{ac+ad\,\overline{w}+bcw+bdw\,\overline{w}-ac-bdw\,\overline{w}-adw-bc\,\overline{w}}{|c+dw|^2} \\
= \frac{(bc-ad)(w-\overline{w})}{|c+dw|^2} = w - \overline{w} &\iff bc-ad = |c+dw|^2 \text{ ó } w = \overline{w} \\
&\iff |dw+c| = \sqrt{bc-ad} \text{ ó } w \in \mathbb{R} \\
&\iff |w+c/d| = \frac{\sqrt{bc-ad}}{|d|} \text{ ó } w \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Como se observa por el resultado obtenido, una solución es la circunferencia de centro el punto $-c/d$ y radio $\dfrac{\sqrt{bc-ad}}{|d|}$ y otra solución es el eje real.

PROBLEMA 16.21

Determinar un número complejo $a+ib$ cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

Solución

La condición que se establece es la siguiente:

$$(a+ib)^2 = (a^2-b^2) + 2iab = a - ib.$$

Igualando las partes reales e imaginarias, resulta el sistema de ecuaciones:

$$a^2 - b^2 = a,\ 2ab = -b,$$

que, al resolver, da lugar a

$$
\begin{aligned}
b = 0 &\implies a^2 = a \implies a = 0 \text{ ó } a = 1; \\
b \neq 0 &\implies 2a = -1 \implies a = -1/2 \implies 1/4 - b^2 = -1/2 \\
&\implies b^2 = 3/4 \implies b = \pm\sqrt{3}/2.
\end{aligned}
$$

En definitiva, se obtienen las cuatro soluciones

$$0, 1+0i, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

PROBLEMA 16.22

Hallar un par de enteros p y q tales que $(3+7i)(p+iq)$ sea imaginario puro.

Solución

Al hacer que la parte real sea cero obtenemos:

$$(3p-7q)+(7p+3q)i=\lambda i \Longrightarrow 3p-7q=0 \Longrightarrow p=7,\ q=3,$$

pues, por hipótesis, p y q son enteros.

PROBLEMA 16.23

Determinar dos números complejos, sabiendo que su suma es $1+4i$, su cociente es imaginario puro y la parte real de uno de ellos es -1.

Solución

Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ ambos números. Las condiciones propuestas dan lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}(a+c)+(b+d)i &= 1+4i;\\ \frac{a+bi}{c+di} &= \lambda i;\\ a &= -1.\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned}a+c &= 1 \Longrightarrow c=2;\\ b+d &= 4;\\ \lambda i &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-da}{c^2+d^2}i\\ &\Longrightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2}=0 \Longrightarrow ac+bd=0 \Longrightarrow bd=2.\end{aligned}$$

Del sistema $bd=2,\ b+d=4$, se obtienen las soluciones $b=2-\sqrt{2},\ d=2+\sqrt{2}$ y $b=2+\sqrt{2},\ d=2-\sqrt{2}$. En definitiva, las soluciones son

$$\begin{aligned}z_1&=-1+(2-\sqrt{2})i, \qquad z_2=2+(2+\sqrt{2})i;\\ z_1&=-1+(2+\sqrt{2})i, \qquad z_2=2+(2-\sqrt{2})i.\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.24

Hallar la relación que debe existir entre los parámetros a, b, c y d para que la ecuación de coeficientes complejos $z^2 + (a + ib)z + (c + id) = 0$ tenga una raíz imaginaria pura.

Solución

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación dada y escribimos $x_1 = im$, $x_2 = p+qi$. De la relación entre los coeficientes y las raíces, resulta el sistema:

$$x_1 + x_2 = p + (m + q)i = -(a + bi) \implies \begin{cases} p = -a & (1) \\ m + q = -b & (2) \end{cases}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -mq + mpi = c + di \implies \begin{cases} -mq = c & (3) \\ mp = d & (4) \end{cases}$$

Del sistema resultante eliminamos los parámetros m, p y q, con lo que obtenemos:

De (1) y (4):

$$m = d/p = -d/a. \tag{5}$$

De (3) y (5):

$$q = -c/m = -c \cdot (-a/d) = ac/d.$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en (2):

$$-d/a + ac/d = -b$$

lo que implica que $-d^2 + a^2c = -abd$.

PROBLEMA 16.25

¿Bajo qué condiciones el cociente de un número complejo con su conjugado es un número real? ¿Qué condición deben cumplir dos números complejos para que su cociente sea imaginario puro?

Solución

Si llamamos $z = a + ib$, la condición $z/\overline{z} \in \mathbb{R}$ equivale a:

$$\frac{z}{\overline{z}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R} \iff 2abi = 0 \iff a = 0 \text{ ó } b = 0.$$

Para que el cociente de dos complejos sea imaginario puro basta que la diferencia de los argumentos entre el dividendo y el divisor sea de 90°. De otra forma, como

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

el cociente será imaginario puro cuando $ac+bd=0$.

PROBLEMA 16.26

En el cuerpo de los complejos, resolver el sistema:

$$\begin{aligned} (1+i)z - iu &= 2+i \\ (2+i)z + (2-i)u &= 2i. \end{aligned}$$

Solución

Restando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $z+2u = -2+i$, de donde $z = -2+i-2u$.

Al sustituir este resultado en la primera ecuación, resulta:

$$\begin{aligned} (1+i)(-2+i-2u) - iu = 2+i &\implies (-2-3i)u = 2+i+(1+i)(2-i) \\ &\implies u = \frac{5+2i}{-2-3i} \implies u = \frac{(5+2i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)} \\ &\implies u = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que el valor de z es:

$$z = -2+i-2u = -2+i-2\cdot\frac{16+11i}{13} = \frac{13(-2+i)-32-22i}{13} = \frac{-58-9i}{13}.$$

PROBLEMA 16.27

Sea $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$. Demostrar que existen $m,n,p \in \mathbb{R}$ tales que $\dfrac{(a^2+b^2)(a^2+b^2+2a+1)}{a^2-b^2+a-(1+2a)bi} = p + mz + nz^2$.

Solución

Teniendo en cuenta que $a^2 + b^2 = z\,\overline{z}$ y que $\overline{z}^2 = a^2 - b^2 - 2abi$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2+2a+1)}{a^2-b^2+a-(1+2a)bi} &= \frac{z\,\overline{z}(z\,\overline{z}+z+\overline{z}+1)}{\overline{z}^2+\overline{z}} \\ &= \frac{z\,\overline{z}(z+1)(\overline{z}+1)}{\overline{z}(\overline{z}+1)} = z(z+1) = z^2+z. \end{aligned}$$

Haciendo pues $p = 0$, $m = 1$, $n = 1$, se obtiene lo deseado.

PROBLEMA 16.28

Expresar el producto $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)$ como suma de dos cuadrados.

Solución

Llamando $z_1 = x + i$, $z_2 = y + i$, $z_3 = z + i$, podemos escribir:

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) = |z_1|^2|z_2|^2|z_3|^2 = |z_1z_2z_3|^2.$$

Si escribimos en forma binómica el producto $z_1z_2z_3$, obtenemos:

$$z_1z_2z_3 = (x+i)(y+i)(z+i) = (xyz-x-y-z) + i(xy+yz+zx-1),$$

con lo que

$$|z_1z_2z_3|^2 = (xyz-x-y-z)^2 + (xy+yz+zx-1)^2.$$

PROBLEMA 16.29

Calcular la suma de las siguientes progresiones:

a) $1 - i + i^2 - i^3 + \cdots + (-i)^n$.

b) $1 - 2i + 4i^2 - 8i^3 + \cdots + (-2i)^{n-1}$.

c) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \cdots + ni^{n-1}$.

Solución

a) Se trata de una progresión geométrica de razón $-i$ y cuya suma es:

$$S = \frac{1-(-i)^{n+1}}{1-(-i)} = \frac{[1-(-i)^{n+1}](1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-(-i)^{n+1}-i-(-i)^{n+2}}{2}.$$

En concreto,

$$S = \begin{cases} \frac{1-i+i+1}{2} = 1 & \text{si } n = 4k \\ \frac{1-i+1-i}{2} = 1-i & \text{si } n = 4k+1 \\ \frac{1-i-i-1}{2} = -i & \text{si } n = 4k+2 \\ \frac{1-i-1+i}{2} = 0 & \text{si } n = 4k+3. \end{cases}$$

b) En este caso, se trata de una progresión geométrica de razón $-2i$ y su suma es

$$S = \frac{1-(-2i)^n}{1-(-2i)} = \frac{[1-(-2i)^n](1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i-(-2i)^n-(-2i)^{n+1}}{5}.$$

c) Llamando S_n a la suma de la progresión, si multiplicamos por i y restamos, resulta:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+ni^{n-1} \\ iS_n &= i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+ni^n \\ S_n(1-i) &= 1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{n-1}-ni^n = \frac{1-i^n}{1-i}-ni^n, \\ \Longrightarrow S_n &= \frac{1-i^n}{(1-i)^2}-\frac{ni^n}{1-i}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.30

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^2-2x+10$.

b) $a^2-8ab+20b^2$.

c) $z^2+z+1+i$.

Solución

a) Teniendo en cuenta la fórmula $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$, escribimos la expresión dada como suma de cuadrados:

$$x^2-2x+10 = x^2-2x+1+9 = (x-1)^2+3^2 = [(x-1)+3i][(x-1)-3i].$$

b) Procediendo análogamente al apartado anterior,

$$\begin{aligned} a^2 - 8ab + 20b^2 &= a^2 - 8ab + 16b^2 + 4b^2 = (a-4b)^2 + (2b)^2 \\ &= [(a-4b) + 2bi][(a-4b) - 2bi]. \end{aligned}$$

c) Debido a que $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$, tenemos:

$$z^2 + z + 1 + i = (z+i)(z-i) + z + i = (z+i)(z-i+1).$$

PROBLEMA 16.31

Descomponer el polinomio $P = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i$, *sabiendo que admite una raíz real.*

Solución

Llamamos α a dicha raíz real. Al sustituirla en la ecuación y separar en parte real e imaginaria, obtenemos:

$$2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1 + i(-6\alpha^2 + 9\alpha - 3) = 0.$$

Esto indica que α es raíz común de las ecuaciones $2\alpha^3 - 5\alpha^2 + 1 = 0$ y $-6\alpha^2 + 9\alpha - 3 = 0$. Resolviendo este sistema se obtiene que $\alpha = 1/2$ y dividiendo P por el factor $2x - 1$, resulta en definitiva que:

$$P = (2x-1)(x-2i-1)(x-i-1).$$

PROBLEMA 16.32

Probar que cualquier raíz de la ecuación $z^3 + 3z + 5 = 0$ *tiene módulo mayor que la unidad.*

Solución

Si α es raíz de la ecuación, $\alpha^3 + 3\alpha = -5 \implies |\alpha^3 + 3\alpha| = |-5| = 5$. Suponiendo que $|\alpha| \le 1$, por la desigualdad triangular,

$$5 = |\alpha^3 + 3\alpha| \le |\alpha|^3 + 3|\alpha| \le 1 + 3 = 4,$$

lo que es absurdo. Esto indica que efectivamente $|\alpha| > 1$.

PROBLEMA 16.33

Mediante la transformación $w = az + b$ *los números* $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = 8 + 2i$ *y* $z_3 = 7 + (2 + 5\sqrt{3})i$ *se transforman en* $w_1 = -2 + 5i$, $w_2 = -2 + 7i$ *y* $w_3 = -(2 + 5\sqrt{3}) + 6i$, *respectivamente. Hallar* a *y* b.

Solución

Aplicando la trasformación a z_1 y z_2, tenemos:

$$w_1 = az_1 + b \implies -2 + 5i = a(6 + 2i) + b; \quad (1)$$
$$w_2 = az_2 + b \implies -2 + 7i = a(8 + 2i) + b. \quad (2)$$

Restando estas ecuaciones, tenemos que $-2i = -2a \implies a = i$. Al sustituir este valor en (2):

$$-2 + 7i = 8i - 2 + b \implies b = -i.$$

La transformación buscada es entonces $w = i(z - 1)$ y se puede comprobar que también transforma z_3 en w_3.

B. POTENCIA Y RAÍZ DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Debido a la fórmula $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, podemos representar todo número complejo $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ en *forma exponencial* como $z = re^{i\varphi}$, lo que permitirá definir en forma sencilla las operaciones de potencia y raíz de números complejos.

A partir de las operaciones de suma y producto ya definidas, tenemos las siguientes fórmulas para calcular la potencia y raíz n-ésimas de números complejos.

1) **Fórmula de Moivre.** Dado $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \in \mathbb{C}$, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$, o bien $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

2) Dado $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \in \mathbb{C}$, si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{z}$ tiene exactamente n soluciones:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta), \text{ donde } \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \; k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Gráficamente, el resultado anterior indica que la raíz n-ésima de un número complejo tiene n soluciones cuyos afijos son los vértices de un polígono regular.

PROBLEMA 16.34

Demostrar la fórmula de Moivre: Si $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \in \mathbb{C}$, entonces $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución

Aplicaremos el método de inducción.

Si $n = 1$, es evidente pues $z^1 = z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.

Si suponemos que la fórmula es cierta para un cierto n, probaremos que $z^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \operatorname{sen}(n+1)\varphi]$:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \\ &= r^{n+1}\big[(\cos n\varphi \cdot \cos\varphi - \operatorname{sen} n\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi) + i(\cos n\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} n\varphi \cdot \cos\varphi)\big] \\ &= r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \operatorname{sen}(n+1)\varphi]. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.35

Probar que todo número complejo $z = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ tiene exactamente n raíces de orden n:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta), \text{ donde } \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Solución

Supongamos que $w = s(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ es una raíz n-ésima de z. Entonces, por la fórmula de Moivre,

$$w^n = z \iff s^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta) = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

Al igualar los módulos y argumentos, tenemos:

$$\begin{aligned} s^n = r &\implies s = \sqrt[n]{r}; \\ n\vartheta = \varphi + 2k\pi &\implies \vartheta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Para ver el número de raíces que se obtienen, habrá que determinar cuántos valores de ϑ distintos se obtienen. Para eso basta elegir k tal que $\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ esté comprendido entre 0 y 2π:

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{\varphi + 2k\pi}{n} < 2\pi \quad &\iff \quad -\varphi \le 2k\pi < -\varphi + 2n\pi \\ &\iff \quad -1 < \frac{-\varphi}{2\pi} \le k < \frac{-\varphi}{2\pi} + n < n \iff 0 \le k < n. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.36

¿Es cierta en el campo complejo la implicación $x^3 = y^3 \Longrightarrow x = y$? ¿Puede ser real la raíz de un número complejo con parte imaginaria no nula?

Solución

En el campo complejo, a diferencia del real, no es cierta la implicación $x^3 = y^3 \Longrightarrow x = y$ debido a que la raíz cúbica tiene tres soluciones.

Tampoco es cierto que, si $z = a + bi$ con $b \ne 0$, entonces $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{R}$ porque la potencia n-ésima de un número real es siempre real.

PROBLEMA 16.37

Si $z = e^{i\vartheta}$, demostrar que $z^n + z^{-n} = 2\cos n\vartheta$ y $z^n - z^{-n} = 2i \operatorname{sen} n\vartheta$.

Solución

Como $|z| = 1$, $z \cdot \overline{z} = 1 \Longrightarrow \overline{z} = 1/z$. Además $\overline{z}^n = z^{-n}$. Entonces $z^n + z^{-n} = z^n + \overline{z}^n = 2\operatorname{Re}(z^n)$.

Ahora bien, como $z^n = e^{in\vartheta} = \cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta$, $\operatorname{Re}(z^n) = \cos n\vartheta$, luego $z^n + \overline{z}^n = 2\cos n\vartheta$.

Análogamente, como $\operatorname{Im}(z^n) = \operatorname{sen} n\vartheta$, resulta que

$$z^n - z^{-n} = z^n - \overline{z}^n = 2i \operatorname{Im}(z^n) = 2i \operatorname{sen} n\vartheta.$$

PROBLEMA 16.38

Calcular la sexta potencia de $z = 2 + 2i/\sqrt{3}$.

Solución

- Forma binómica. Aplicamos la fórmula del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}(2+2i/\sqrt{3})^6 &= 2^6 + 6\cdot 2^5 \cdot 2i/\sqrt{3} + 15\cdot 2^4\cdot (2i/\sqrt{3})^2 + 20\cdot 2^3\cdot (2i/\sqrt{3})^3 \\ &\quad +15\cdot 2^2\cdot (2i/\sqrt{3})^4 + 6\cdot 2\cdot (2i/\sqrt{3})^5 + (2i/\sqrt{3})^6 = -\frac{4096}{27}.\end{aligned}$$

- Forma trigonométrica. Como

$$|z| = (4/\sqrt{3}) \text{ y } \operatorname{tg}\vartheta = b/a = \frac{2/\sqrt{3}}{2} = 1/\sqrt{3} \Longrightarrow \vartheta = \pi/6,$$

deducimos, por la fórmula de Moivre, que

$$z^6 = \left[\frac{4}{\sqrt{3}}(\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)\right]^6 = \frac{4096}{27}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi).$$

PROBLEMA 16.39

Desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(1+i)^n,\ n \in \mathbb{Z}^+$.

b) $(x-i)^5,\ x \in \mathbb{R}$.

Solución

a) Aplicando la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \dots + \binom{n}{n-1}i^{n-1} + \binom{n}{n}i^n \\ &= \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots\right] + i\left[n - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right].\end{aligned}$$

b) Aplicando la misma fórmula anterior,

$$\begin{aligned}(x-i)^5 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-i) + \binom{5}{2}x^3(-i)^2 + \binom{5}{3}x^2(-i)^3 + \binom{5}{4}x(-i)^4 \\ &\quad + \binom{5}{5}(-i)^5 = \left[x^5 - 10x^3 + 5x\right] + i\left[-5x^4 + 10x^2 - 1\right].\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.40

Calcular el módulo y el argumento de $w = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.

Solución

Por la fórmula de Moivre,

$$|w| = \left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}\right| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right|^{10} = \frac{|1+i|^{10}}{|1-i|} = (\sqrt{2}/\sqrt{2})^{10} = 1.$$

Como además

$$w = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{10} = \left(\frac{1+i+i-1}{2}\right)^{10} = i^{10} = -1,$$

resulta que $\arg w = \pi$.

PROBLEMA 16.41

Calcular $z = (1+i)^n$ y escribirlo en forma binómica para el caso $n = 25$.

Solución

Como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, entonces

$$z = 2^{n/2}(\cos \pi n/4 + i \operatorname{sen} \pi n/4).$$

Si $n = 25$, $\cos 25\pi/4 = \cos(6\pi + \pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$ así como $\operatorname{sen} 25\pi/4 = \sqrt{2}/2$. Resulta entonces que

$$(1+i)^{25} = 2^{25/2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = 2^{12}(1+i).$$

PROBLEMA 16.42

Simplificar la expresión $\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha}\right)^{6}$.

Solución

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\alpha = \cos(\pi/2-\alpha)$ y $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)$, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen}\alpha+i\cos\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha-i\cos\alpha} &= \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha+i\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha+i\cos\alpha)}{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2+\cos^2\alpha} \\
&= \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2-\cos^2\alpha+2i\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)^2-(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)+2i\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)}{2(1+\operatorname{sen}\alpha)} \\
&= \frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)-(1-\operatorname{sen}\alpha)+2i\cos\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha+i\cos\alpha \\
&= \cos(\pi/2-\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi/2-\alpha) = \operatorname{cis}(\pi/2-\alpha).
\end{aligned}$$

De este modo, la base tiene módulo 1 y argumento $\pi/2-\alpha$, con lo que la potencia n-ésima será $\operatorname{cis} n(\pi/2-\alpha)$ y, en particular, para $n=6$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cis} 6(\pi/2-\alpha) &= \operatorname{cis}(3\pi-6\alpha) = \cos(3\pi-6\alpha)+i\operatorname{sen}(3\pi-6\alpha) \\
&= \cos(\pi-6\alpha)+i\operatorname{sen}(\pi-6\alpha) = -\cos 6\alpha+i\operatorname{sen}6\alpha.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.43

Calcular $[(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b)+i(\cos a-\cos b)]^n$.

Solución

Aplicando las fórmulas

$$\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b = 2\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} \text{ y } \cos a-\cos b = -2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{a-b}{2},$$

resulta:

$$\begin{aligned}
[(\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b) &+ i(\cos a-\cos b)]^n \\
&= \left[2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}-2i\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\right]^n \\
&= 2^n\operatorname{sen}^n\frac{a-b}{2}\operatorname{cis}\left[-n\cdot\frac{a+b}{2}\right].
\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.44

Calcular $\operatorname{sen} 3\varphi$ en función de $\operatorname{sen}\varphi$.

Solución

Debido a la fórmula de Moivre sabemos que $(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi$. Desarrollando el primer miembro de la igualdad anterior, e igualando las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^3 &= \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi + 3i^2\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + i^3\operatorname{sen}^3\varphi \\
&= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi); \\
\Longrightarrow \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\operatorname{sen}^2\varphi, \\
\operatorname{sen} 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi \\
&= 3(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi.
\end{aligned}$$

Análogamente podemos expresar $\cos 3\varphi$ en función de $\cos\varphi$.

PROBLEMA 16.45

Sabiendo que $2\cos\alpha = z + \dfrac{1}{z}$, obtener $2\cos n\alpha$.

Solución

Despejando z de la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}
z + \frac{1}{z} &= 2\cos\alpha \Longrightarrow z^2 - 2z\cdot\cos\alpha + 1 = 0 \\
\Longrightarrow z &= \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}$$

Operamos en primer lugar con el signo $+$; el inverso de z es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha).$$

Aplicando la fórmula de Moivre, obtenemos:

$$\begin{aligned}
z^n &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha, \\
\frac{1}{z^n} &= [\cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha)]^n = \cos(-n\alpha) + i\operatorname{sen}(-n\alpha) = \cos n\alpha - i\operatorname{sen} n\alpha.
\end{aligned}$$

Sumando estas dos últimas igualdades, resulta:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha.$$

Operando con el signo $-$ se llega al mismo resultado.

PROBLEMA 16.46

Probar que $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ *y* $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Solución

Debido a la fórmula de Moivre,

$$(\cos 36^\circ + i \operatorname{sen} 36^\circ)^5 = \cos(5\cdot 36^\circ) + i \operatorname{sen}(5\cdot 36^\circ) = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 + i\cdot 0.$$

Llamaremos por comodidad $c = \cos 36^\circ$ y $s = \operatorname{sen} 36^\circ$ y calculamos la parte real e imaginaria de $(c+is)^5$:

$$\begin{aligned}(c+is)^5 &= c^5 + 5ic^4s + 10i^2c^3s^2 + 10i^3c^2s^3 + 5i^4cs^4 + i^5s^5\\ &= (c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4) + i(s^5 - 10c^2s^3 + 5c^4s).\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $0 = s^5 - 10c^2s^3 + 5c^4s$ y, usando el hecho de que $s^2 = 1 - c^2$, resulta:

$$\begin{aligned}0 &= s^5 - 10(1-s^2)s^3 + 5(1-s^2)^2s = 16s^5 - 20s^3 + 5s\\ \Longrightarrow 0 &= s(16s^4 - 20s^2 + 5) \Longrightarrow 16s^4 - 20s^2 + 5 = 0\\ \Longrightarrow s^2 &= \frac{20 \pm \sqrt{400-320}}{32} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}\\ \Longrightarrow s &= \pm\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}.\end{aligned}$$

Debido a que $30^\circ < 36^\circ < 45^\circ$, se deduce que $\operatorname{sen} 30^\circ < s < \operatorname{sen} 45^\circ$, es decir $1/2 < s < \sqrt{2}/2$. De los valores obtenidos para s, el único que verifica esta acotación es $s = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$, de donde $c^2 = 1 - s^2 = 1 - \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ y

$$c = +\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = +\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = +\sqrt{\frac{1+(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\cos 72^\circ &= \cos(2\cdot 36^\circ) = \cos^2 36^\circ - \operatorname{sen}^2 36^\circ = 2\cos^2 36^\circ - 1 \\ &= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{8} - 1 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.47

Demostrar que $\dfrac{\operatorname{sen} 4\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = 8\cos^3\vartheta - 4\cos\vartheta$.

Solución

Por la fórmula de Moivre, $(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)^4 = \cos 4\vartheta + i\operatorname{sen} 4\vartheta$.

Por otra parte, por la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned}(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)^4 &= \cos^4\vartheta + 4\cos^3\vartheta(i\operatorname{sen}\vartheta) + 6\cos^2\vartheta(i\operatorname{sen}\vartheta)^2 \\ &\quad +4\cos\vartheta(i\operatorname{sen}\vartheta)^3 + (i\operatorname{sen}\vartheta)^4 = \cos^4\vartheta - 6\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta \\ &\quad +\operatorname{sen}^4\vartheta + i(4\cos^3\vartheta\operatorname{sen}\vartheta - 4\cos\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta).\end{aligned}$$

Igualando la parte imaginaria, resulta que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 4\vartheta &= 4\cos^3\vartheta\operatorname{sen}\vartheta - 4\cos\vartheta\operatorname{sen}^3\vartheta \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} 4\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = 4\cos^3\vartheta - 4\cos\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta \\ \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} 4\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} &= 4\cos^3\vartheta - 4\cos\vartheta(1-\cos^2\vartheta) = 8\cos^3\vartheta - 4\cos\vartheta.\end{aligned}$$

PROBLEMA 16.48

Expresar en forma binómica la suma

$$S = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{28}}.$$

Solución

Como los términos de la suma siguen una progresión geométrica, su suma es

$$S = \frac{\frac{1}{(1+i)^{29}} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)^{29}} - 1}{\frac{-i}{1+i}} = \frac{i}{(1+i)^{28}} - i(1+i).$$

Por otra parte, debido a la fórmula de Moivre,

$$(1+i)^{28} = [\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\operatorname{sen}\pi/4)]^{28} = 2^{14}(\cos 28\pi/4+i\operatorname{sen}28\pi/4) = -2^{14}.$$

Sustituyendo en el resultado anterior, se deduce que

$$S = -2^{-14}i - i - i^2 = 1 - i(2^{-14}+1).$$

PROBLEMA 16.49

Siendo $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$*, calcular* $f(1),\ f(2),\ f(3)$ *y* $f(4)$*, y demostrar que* $f(n+4) = -f(n)$*.*

Solución

Como $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = 1$, $\operatorname{Arg}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pi/4$ y $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \overline{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$, entonces

$$f(n) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = 2\cos\frac{n\pi}{4}.$$

En particular,

$$f(1) = \sqrt{2},\ f(2) = 0,\ f(3) = -\sqrt{2},\ f(4) = -2.$$

Por otra parte,

$$f(n+4) = 2\cos\frac{(n+4)\pi}{4} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\pi\right) = -2\cos n\pi/4 = -f(n).$$

PROBLEMA 16.50

Calcular $\sqrt{1-i}$ *y* $\sqrt{5+12i}$*, expresando el resultado en la forma binómica.*

Solución

a) Si escribimos $\sqrt{1-i}$ en forma binómica, obtenemos:

$$\sqrt{1-i} = x+iy \Longrightarrow |1-i| = \sqrt{2} = |x+iy|^2 = x^2+y^2 \text{ y } 1-i = x^2-y^2+2ixy.$$

De aquí se deduce el sistema de ecuaciones:

$$x^2-y^2 = 1,\ x^2+y^2 = \sqrt{2},\ 2xy = -1,$$

cuya solución es

$$2x^2 = \sqrt{2}+1,\ 2y^2 = \sqrt{2}-1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Como $2xy = -1$, las únicas soluciones son

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

b) Análogamente al apartado anterior,

$$\begin{aligned}
\sqrt{5+12i} &= x+iy \Longrightarrow 5+12i = x^2-y^2+2xyi \Longrightarrow x^2-y^2=5,\ 2xy=12,\\
\sqrt{25+144} &= x^2+y^2 \Longrightarrow x^2+y^2 = 13,\\
2x^2 &= 18,\ 2y^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm 3,\ y = \pm 2.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $xy = 6$, las soluciones son,

$$3+2i,\ -3-2i.$$

PROBLEMA 16.51

Hallar $\sqrt{i}$ y $\sqrt{1+i}$.

Solución

a) Como el módulo y el argumento principal de i son $|i| = 1$ y $\operatorname{Arg} i = \pi/2$, tenemos que $|\sqrt{i}| = 1$ y $\arg\sqrt{i} = \dfrac{\pi/2+2k\pi}{2}$, para $k = 0, 1$.

Las dos raíces son entonces

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ y_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

b) En este caso, el módulo y el argumento principal de $1+i$ son $\sqrt{2}$ y $\operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$, respectivamente. Esto indica que el módulo y argumento de las raíces cuadradas de $1+i$ son $\sqrt[4]{2}$ y $\dfrac{\pi/4+2k\pi}{2}$, $(k = 0, 1)$, respectivamente. Tenemos entonces:

$$y_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\pi/8 + i\operatorname{sen}\pi/8),\ y_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 9\pi/8 + i\operatorname{sen} 9\pi/8).$$

PROBLEMA 16.52

Hallar $\sqrt{-16-30i}$ y escribir en forma binómica $\sqrt{\dfrac{1}{3-4i}}$.

Solución

a) Si llamamos $\sqrt{-16-30i} = x+iy$, tenemos que $-16-30i = x^2-y^2+2xyi$, de donde $x^2-y^2 = -16$ y $2xy = -30$. Al resolver el sistema, obtenemos los valores $x = -3$, $y = 5$ y $x = 3$, $y = -5$, lo que da las dos soluciones $-3+5i$ y $3-5i$.

b) Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador, obtenemos:

$$x+iy = \sqrt{\frac{1}{3-4i}} = \sqrt{\frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)}} = \sqrt{\frac{3+4i}{25}}.$$

Elevando al cuadrado, $\dfrac{3+4i}{25} = x^2-y^2+2xyi$, lo que da lugar al sistema

$$x^2-y^2 = 3/25,\ 2xy = 4/25.$$

Al resolver este sistema, obtenemos las soluciones $(2+i)/5$ y $(-2-i)/5$.

PROBLEMA 16.53

Calcular las raíces cúbicas de $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ expresándolas en forma módulo-argumental.

Solución

En forma binómica es $z = \dfrac{(\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$.

Como $|z| = \sqrt{(1/4)+(3/4)} = 1$ y el afijo de z está en el tercer cuadrante, $\arg z = \pi + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = 4\pi/3$, podemos escribir $z = \cos(4\pi/3) + i\operatorname{sen}(4\pi/3)$. Las raíces cúbicas de z son

$$\sqrt[3]{z} = \cos\frac{2k\pi+4\pi/3}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi+4\pi/3}{3},\ k = 0,1,2.$$

Los valores que se obtienen son $y_1 = 1_{4\pi/9}$, $y_2 = 1_{10\pi/9}$, $y_3 = 1_{16\pi/9}$.

PROBLEMA 16.54

Hallar los números complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado.

Solución

Sea $z = m(\cos w + i \operatorname{sen} w)$ el número buscado (y suponemos $z \neq 0$). De acuerdo con la fórmula de Moivre, será $z^3 = \overline{z}^2$ si y sólo si

$$m^3(\cos 3w + i \operatorname{sen} 3w) = m^2(\cos 2w - i \operatorname{sen} 2w) = m^2[\cos(-2w) + i \operatorname{sen}(-2w)].$$

Igualando sus módulos y argumentos, resulta que $m^3 = m^2$ y $3w = 2k\pi - 2w$, de lo que se deduce que $m = 1$ y $5w = 2k\pi$. De aquí resultan cinco soluciones:

$$\cos 0 + i \operatorname{sen} 0,\ \cos(2\pi/5) + i \operatorname{sen}(2\pi/5),$$

$$\cos(4\pi/5) + i \operatorname{sen}(4\pi/5),\ \cos(6\pi/5) + i \operatorname{sen}(6\pi/5),\ \cos(8\pi/5) + i \operatorname{sen}(8\pi/5).$$

Dichas soluciones corresponden precisamente a las raíces de la ecuación $z^5 - 1 = 0$.

PROBLEMA 16.55

a) *Efectuar la operación*

$$E = \sqrt{\frac{[a(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)]^2 \cdot [b(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)]^4}{[c(\cos\gamma + i \operatorname{sen}\gamma)]^3}}.$$

b) *Si en el apartado a) damos los valores $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 30°$, $\gamma = 40°$, hallar los posibles valores de E.*

Solución

a) Teniendo en cuenta la fórmula de Moivre y el producto y cociente de complejos en forma módulo-argumental, obtenemos:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{a^2b^4}{c^3}[\cos(2\alpha + 4\beta - 3\gamma) + i \operatorname{sen}(2\alpha + 4\beta - 3\gamma)]} \\ &= \frac{ab^2}{c\sqrt{c}}\left[\cos\frac{2k\pi + (2\alpha + 4\beta - 3\gamma)}{2} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi + (2\alpha + 4\beta - 3\gamma)}{2}\right],\ k = 0, 1. \end{aligned}$$

b) Como $2\alpha + 4\beta - 3\gamma = 0°$ y $ab^2/c\sqrt{c} = 18$, es $E = 18(\cos k\pi + i \operatorname{sen} k\pi) = 18\cos k\pi$.

Para $k = 0$, $E = 18$ y para $k = 1$, $E = -18$.

PROBLEMA 16.56

Sabiendo que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es igual a cero, probar que

$$1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \cos 288^\circ = 0;$$

$$\operatorname{sen} 72^\circ + \operatorname{sen} 144^\circ + \operatorname{sen} 216^\circ + \operatorname{sen} 288^\circ = 0.$$

Solución

Las raíces quintas de la unidad son $\cos(2k\pi/5) + i\operatorname{sen}(2k\pi/5)$, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, es decir

$$1,\ \cos 72^\circ + i\operatorname{sen} 72^\circ,\ \cos 144^\circ + i\operatorname{sen} 144^\circ,\ \cos 216^\circ + i\operatorname{sen} 216^\circ,\ \cos 288^\circ + i\operatorname{sen} 288^\circ.$$

Como su suma es cero, también sus partes real e imaginaria son cero. De aquí se deducen las igualdades propuestas.

PROBLEMA 16.57

Si z_1 y z_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, demostrar que $z_1^n + z_2^n$ es real para cualquier entero n. Si la ecuación es en particular $z^2 - 2z + 2 = 0$, calcular $z_1^n + z_2^n$.

Solución

Como los coeficientes son reales, tenemos los siguientes resultados posibles en función del discriminante de la ecuación Δ:

i) Si $\Delta > 0$, hay dos soluciones reales distintas.

ii) Si $\Delta = 0$, hay una solución real doble.

iii) Si $\Delta < 0$, hay dos soluciones que son complejos conjugados.

Así pues, si $\Delta \ge 0$, como $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, es evidente que $z_1^n + z_2^n \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$, tenemos que

$$\overline{z}_1 = z_2 \Longrightarrow z_1^n + z_2^n = z_1^n + \overline{z}_1^n = z_1^n + \overline{z_1^n} = 2\operatorname{Re} z_1^n \in \mathbb{R}.$$

Las raíces de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$ son

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Longrightarrow z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i.$$

Para probar que $\alpha = z_1^n + z_2^n = (1+i)^n + (1-i)^n$ es real, basta comprobar que $\alpha = \overline{\alpha}$. Ahora bien,

$$\overline{\alpha} = \overline{(1+i)}^n + \overline{(1-i)}^n = (1-i)^n + (1+i)^n = \alpha,$$

de donde se deduce el resultado.

PROBLEMA 16.58

Si a y b son raíces de la ecuación $z^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta - z \operatorname{sen} 2\vartheta + 1 = 0$, demostrar que $a^n + b^n = 2\cos n\vartheta \operatorname{cosec}^n \vartheta$.

Solución

Calculamos las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 2\vartheta - 4\operatorname{sen}^2 \vartheta}}{2\operatorname{sen}^2 \vartheta} = \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \pm \sqrt{4\operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \vartheta - 4\operatorname{sen}^2 \vartheta}}{2\operatorname{sen}^2 \vartheta} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \pm \sqrt{4\operatorname{sen}^2 \vartheta(\cos^2 \vartheta - 1)}}{2\operatorname{sen}^2 \vartheta} = \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \pm 2i\operatorname{sen}^2 \vartheta}{2\operatorname{sen}^2 \vartheta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \pm i\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} = \frac{\cos\vartheta \pm i\operatorname{sen}\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = \operatorname{cotg}\vartheta \pm i.
\end{aligned}$$

Llamamos entonces $a = \operatorname{cotg}\vartheta + i$ y $b = \operatorname{cotg}\vartheta - i$, que son complejos conjugados. Escritos en forma trigonométrica, como su módulo es $r = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \vartheta} = \operatorname{cosec}\vartheta$ y el argumento de a es $\varphi = \operatorname{arc\,tg}(1/\operatorname{cotg}\vartheta) = \vartheta$, resulta que $a = \operatorname{cosec}\vartheta(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$ y $b = \operatorname{cosec}\vartheta(\cos\vartheta - i\operatorname{sen}\vartheta)$. Por la fórmula de Moivre, sus potencias son

$$a^n = \operatorname{cosec}^n \vartheta(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta),\ b^n = \operatorname{cosec}^n \vartheta(\cos n\vartheta - i\operatorname{sen} n\vartheta),$$

de donde $a^n + b^n = 2\operatorname{cosec}^n \vartheta \cos n\vartheta$ como se quería probar.

PROBLEMA 16.59

Teniendo en cuenta que $\cos\alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})$ y recordando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, calcular en forma simplificada $C = \sum_{n=1}^{k} 2^n \cos 3n$.

Solución

Llamando $S = \sum_{n=1}^{k} 2^n \operatorname{sen} 3n$, obtenemos:

$$\begin{aligned} C + iS &= 2(\cos 3 + i \operatorname{sen} 3) + 2^2(\cos 6 + i \operatorname{sen} 6) + \cdots + 2^k(\cos 3k + i \operatorname{sen} 3k) \\ &= 2e^{3i} + 2^2 \cdot e^{6i} + \cdots + 2^k e^{3ki} = \frac{2^{k+1}e^{3(k+1)i} - 2e^{3i}}{2e^{3i} - 1} \\ &= \frac{2^{k+1}\cos 3(k+1) - 2\cos 3 + i[2^{k+1}\operatorname{sen} 3(k+1) - 2\operatorname{sen} 3]}{-1 + 2\cos 3 + 2i \operatorname{sen} 3}. \end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador de la última expresión por el conjugado del denominador y separando la parte real del número complejo resultante, se obtiene finalmente:

$$C = \frac{2^{k+2}\cos 3k - 2^{k+1}\cos 3(k+1) + 2\cos 3 - 4}{5 - 4\cos 3}.$$

PROBLEMA 16.60

Determinar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

a) $\operatorname{cis} 120°,\ \operatorname{cis} 240°$.

b) $\operatorname{cis} \pi/n,\ \operatorname{cis}(-\pi/n)$.

c) $a(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta),\ a(\cos n\vartheta - i \operatorname{sen} n\vartheta)$.

Solución

a) Escribimos en primer lugar las raíces en forma binómica.

$$\begin{aligned} \operatorname{cis} 120° &= \operatorname{cis} 2 \cdot 60° = (\cos 60 + i \operatorname{sen} 60)^2 = (1/2 + i\sqrt{3}/2)^2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2; \\ \operatorname{cis} 240° &= \operatorname{cis} 2 \cdot 120° = (-1/2 + i\sqrt{3}/2)^2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

El producto y la suma de dichas raíces son

$\operatorname{cis} 120 \cdot \operatorname{cis} 240 = \operatorname{cis} 360 = 1$ y $\operatorname{cis} 120 + \operatorname{cis} 240 = -1/2 + -1/2 = -1$,

con lo que la ecuación buscada es $x^2 + x + 1 = 0$.

b) Debido a que

$$\begin{aligned} r_1 &= \operatorname{cis} \pi/n = \cos \pi/n + i \operatorname{sen} \pi/n, \\ r_2 &= \operatorname{cis}(-\pi/n) = \cos(-\pi/n) + i \operatorname{sen}(-\pi/n) = \cos \pi/n - i \operatorname{sen} \pi/n, \end{aligned}$$

resulta que

$$r_1 + r_2 = 2\cos\pi/n \text{ y } r_1 \cdot r_2 = \text{cis}(\pi/n - \pi/n) = \text{cis}\,0 = 1,$$

con lo que la ecuación es $x^2 - 2x\cos\pi/n + 1 = 0$.

c) Análogamente a los casos anteriores, observando que las raíces dadas r_1 y r_2 son complejos conjugados, tenemos que

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 \text{ y } r_1 + r_2 = 2a\cos n\vartheta,$$

de modo que la ecuación pedida es $x^2 - 2ax\cos n\vartheta + a^2 = 0$.

PROBLEMA 16.61

Resolver la ecuación $z^4 + 16 = 0$.

Solución

De $z^4 + 16 = 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} z^4 = -16 = 16(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) \Longrightarrow z &= \sqrt[4]{16(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)} \\ &= \sqrt[4]{16}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right], \end{aligned}$$

donde $k = 0, 1, 2, 3$. Para cada valor de k se obtiene $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ y $z_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

PROBLEMA 16.62

Resolver las ecuaciones:

a) $z^2 + 4z + 29 = 0$.

b) $z^2 + 2iz + 1 = 0$.

c) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

d) $8z^3 - 12z^2 + 10z - 3 = 0$.

Solución

a) Al despejar z, se obtiene directamente,

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \frac{-4 \pm 10i}{2} \Longrightarrow z_1 = -2 - 5i,\ z_2 = -2 + 5i.$$

b) Como en el caso anterior,

$$z = \frac{-i \pm \sqrt{-1-1}}{1} \Longrightarrow z_1 = i(-1+\sqrt{2}),\ z_2 = -i(1+\sqrt{2}).$$

c) Si llamamos $w = z^2$, la ecuación se escribe como $w^2 + w + 1 = 0$ y sus raíces son:

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow w_1 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ w_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Las soluciones de la ecuación original son las raíces cuadradas de w_1 y w_2. Como sus módulos y argumentos son:

$$|w_1| = |w_2| = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1,\ \arg w_1 = 2\pi/3,\ \arg w_2 = 4\pi/3,$$

sus raíces cuadradas son:

$$z_1 = \operatorname{cis}\left[\frac{2\pi/3 + 2k\pi}{2}\right],\ z_2 = \operatorname{cis}\left[\frac{4\pi/3 + 2k\pi}{2}\right],\ k = 0, 1,$$

que, en forma trigonométrica, dan las soluciones:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3 \quad , \quad z_{12} = \cos 4\pi/3 + i\operatorname{sen} 4\pi/3, \\ z_{21} &= \cos 2\pi/3 + i\operatorname{sen} 2\pi/3 \quad , \quad z_{22} = \cos 5\pi/3 + i\operatorname{sen} 5\pi/3. \end{aligned}$$

d) Dividimos la ecuación por 8 y hacemos el cambio $z = z' + 1/2$, y resulta:

$$\begin{aligned} z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{5}{4}z - \frac{3}{8} = 0 &\Longleftrightarrow \left(z' + \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(z' + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(z' + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} = 0 \\ &\Longleftrightarrow z'^3 + \frac{3}{2}z'^2 + \frac{3}{4}z' + \frac{1}{8} - \frac{3}{2}z'^2 - \frac{3}{8} - \frac{3}{2}z' + \frac{5}{4}z' + \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = 0 \\ &\Longleftrightarrow z'^3 + \frac{z'}{2} = 0 \Longleftrightarrow z'\left(z'^2 + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow z'_1 = 0,\ z'_2 = \frac{i\sqrt{2}}{2},\ z'_3 = -\frac{i\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Al deshacer el cambio de variable, obtenemos en definitiva que:

$$z_1 = 1/2,\ z_2 = (1/2) + i\sqrt{2}/2,\ z_3 = (1/2) - i\sqrt{2}/2.$$

PROBLEMA 16.63

Resolver $2z^2 + (-1+i)z + 3 + i = 0$.

Solución

Despejando z tenemos:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-1+i) \pm \sqrt{(-1+i)^2 - 4 \cdot 2(3+i)}}{4} = \frac{1-i \pm \sqrt{1-1-2i-24-8i}}{4} \\ &= \frac{1-i \pm \sqrt{-24-10i}}{4}. \end{aligned}$$

Si llamamos ahora $\sqrt{-24-10i} = x + iy$, resulta:

$$-24 - 10i = (x+iy)^2 \Longrightarrow x^2 - y^2 = -24,\ 2xy = -10.$$

Además, igualando los módulos de ambos complejos, tenemos la ecuación $x^2 + y^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

El sistema $x^2 - y^2 = -24$, $x^2 + y^2 = 26$ tiene las cuatro soluciones $x = \pm 1$, $y = \pm 5$. Como se debe verificar además que $2xy = -10$, las únicas soluciones posibles son $x = 1$, $y = -5$ y $x = -1$, $y = 5$.

En definitiva,

$$z = \frac{1-i \pm (1-5i)}{4} \Longrightarrow z_1 = \frac{2-6i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3i}{2},\ z_2 = \frac{4i}{4} = i.$$

PROBLEMA 16.64

Resolver la ecuación $z^3 - 3iz - 5(1+i) = 0$, *haciendo* $z = x + iy$.

Solución

Al sustituir $z = x + iy$ y separar el resultado en parte real e imaginaria, resulta el sistema de ecuaciones:

$$x^3 - 3xy^2 + 3y - 5 = 0,\ 3x^2y - y^3 - 3x - 5 = 0.$$

Para resolver este sistema, efectuamos la resta de ambas ecuaciones, con lo que:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + 3y + 3x &= 0 \\ \Longleftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy(x+y) + 3(x+y) &= 0 \\ \Longleftrightarrow (x+y)(x^2 + y^2 - 4xy + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Al sustituir en la primera ecuación la condición $x + y = 0$, obtenemos la ecuación $2x^3 + 3x + 5 = 0$ en la que $x = -1$ es la única solución real. Esto produce la raíz $z_1 = -1 + i$ de la ecuación dada. Efectuando la división, se obtiene una ecuación de segundo grado cuyas raíces son $z_2 = 2 + i$ y $z_3 = -1 - 2i$.

PROBLEMA 16.65

Determinar los números reales a y b de manera que $z = 1 + i$ sea raíz de la ecuación $z^5 + az^3 + b = 0$.

Solución

Debemos desarrollar la expresión $Q = (1 + i)^5 + a(1 + i)^3 + b$ e igualarla a cero:

$$\begin{aligned} Q &= 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 + a + 3ai + 3ai^2 + ai^3 + b = 0 \\ &\Longrightarrow (1 - 10 + 5 + a - 3a + b) + i(5 - 10 + 1 + 3a - a) = 0 \\ &\Longrightarrow b - 2a = 4,\ 2a = 4 \Longrightarrow a = 2,\ b = 8. \end{aligned}$$

PROBLEMA 16.66

Resolver la ecuación $\dfrac{1+i}{1-i} = e^{2x}$.

Solución

Multiplicando numerador y denominador por $1 + i$ tenemos:

$$\begin{aligned} e^{2x} &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2} \\ &\Longrightarrow 2x = i(\pi/2 + 2k\pi) \Longrightarrow x = i(\pi/4 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Recordamos que, en el campo complejo, $e^a = e^b \Longrightarrow a = b + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.)

C. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Escribir en la forma trigonométrica $r(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$ los siguientes números complejos:

   a) $\sqrt{3} - 2 - i$.

   Resp.: $z = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - i\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)$.

   b) $\sqrt{2} - 1 + i$.

   Resp.: $z = \sqrt{4-2\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \dfrac{i}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)$.

2. Hallar el módulo y argumento de $u = \dfrac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z}_1 z_2}$ si $|z_1| = |z_2| = 1$, $z_1 \neq z_2$.

   Resp.: $|u| = 1,\ \arg u = \arg z_1$.

3. Simplificar las expresiones:

   a) $\dfrac{(a+i)^3 - (a-i)^3}{(a+i)^2 - (a-i)^2}$.

   Resp.: $(3a^2 - 1)/2a$.

   b) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-2i}{1+i}$.

   Resp.: $(1+5i)/2$.

   c) $\dfrac{(-2+i)^3}{1-3i}$.

   Resp.: $(-7+i)/2$.

   d) $\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-i)^4}$.

   Resp.: $(5+i\sqrt{2})/27$.

4. Calcular $(2-3i)^4$.

   Resp.: $-119+120i$.

5. Calcular $(\sqrt{3}-i)^n$ y $(\sqrt{3}+i)^n$.

   Resp.: $z_1^n = 2^n \operatorname{cis} \dfrac{-n\pi}{6}$, $z_2^n = 2^n \operatorname{cis} \dfrac{n\pi}{6}$.

6. Expresar como suma de cuadrados la expresión $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

   Resp.: $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$.

7. Hallar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son:

   a) $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$.

      Resp.: $x^2-6x+4=0$.

   b) $-3+i$, $-3-i$.

      Resp.: $x^2+6x+10=0$.

   c) $2+\sqrt{3}i$, $2-\sqrt{3}i$.

      Resp.: $x^2-4x+7=0$.

8. Factorizar los siguientes polinomios:

   a) $5x^2+4y^2$.

      Resp.: $(\sqrt{5}x+2iy)(\sqrt{5}x-2iy)$.

   b) x^2+xy+y^2.

      Resp.: $\big[(x+y/2)+\sqrt{3}iy/2][(x+y/2)-\sqrt{3}iy/2\big]$.

9. Resolver las ecuaciones:

   a) $4z^2-12z+25=0$.

      Resp.: $z_1=(3/2)+2i$, $z_2=(3/2)-2i$.

   b) $z^2+iz=2$.

      Resp.: $z_1=\sqrt{7}/2-i/2$, $z_2=-\sqrt{7}/2-i/2$.

c) $z^3 + 10z^2 + 37z + 42 = 0$.

Resp.: $z_1 = -2,\ z_2 = -4 + \sqrt{5}i,\ z_3 = -4 - \sqrt{5}i$.

10. Resolver las ecuaciones:

a) $z^2 - (2 + 2i)z + (4 + 2i) = 0$.

Resp.: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - i$.

b) $z^2 - (2 + 2i)z + 2i = 0$.

Resp.: $z_1 = z_2 = 1 + i$.

11. Hallar las raíces cuartas de $-i$.

Resp.: $r_1 = \operatorname{cis} 3\pi/8,\ r_2 = \operatorname{cis} 7\pi/8,\ r_3 = \operatorname{cis} 11\pi/8,\ r_4 = \operatorname{cis} 15\pi/8$.

12. Calcular las raíces sextas de $4\sqrt{3} + 4i$.

Resp.: $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/36,\ z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 13\pi/36,\ z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 25\pi/36,$
$z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 37\pi/36,\ z_5 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 49\pi/36,\ z_6 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 61\pi/36$.

13. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ siendo $z_n = \sqrt[n]{n} + \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n+5} i$.

Resp.: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1 + e^2 \cdot i$.