Números complejos

1. Introducción

Podemos pensar en las progresivas ampliaciones de los conjuntos numéricos como el método necesario para resolver ecuaciones algebraicas progresivamente complicadas. Así, el paso de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ se justificaría por la necesidad de dar solución a una ecuación como

$$x + 5 = 0,$$

y el paso de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ por la necesidad de dar solución a ecuaciones de la forma

$$5x = 1.$$

El paso de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ es más complicado de explicar en este momento, puesto que es más topológico que algebraico, pero permite además dar solución a ecuaciones como

$$x^2 - 2 = 0.$$

El paso de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ viene motivado históricamente por la necesidad de trabajar con las soluciones de ecuaciones como

$$x^2 + 1 = 0,$$

es decir, con raíces cuadradas de números negativos. Inicialmente, se trabajaba con dichas raíces, llamadas *números imaginarios* por Descartes, como paso intermedio hasta llegar a un número real (típicamente elevando el número imaginario al cuadrado en algún momento de los razonamientos). Posteriormente, en los siglos XVIII y XIX, se formaliza la noción de número complejo, lo que convierte a estas entidades algebraicas en "miembros de pleno derecho" de las familias numéricas.

2. Definición

La manera más sencilla de trabajar con los números complejos es dar un nombre abreviado a $\sqrt{-1}$. A esta cantidad la llamaremos i. Hecho eso, y suponiendo inicialmente que esta cantidad "se portará bien", ya podemos realizar cálculos como

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)(25)} = \sqrt{-1}\sqrt{25} = 5i.$$

Necesitaríamos poder sumar y multiplicar estos nuevos números. Está claro que si $b, c \in \mathbb{R}$, se debiera tener

$$bi + ci = (b + c)i.$$

Por otro lado, para $a, b \in \mathbb{R}$ no podremos simplificar la expresión $a + bi$.

Veamos el producto. En primer lugar está claro que si hemos definido i como $\sqrt{-1}$, entonces

$$i^2 = -1.$$

Por otro lado, si vamos a tener un producto asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, se deberá tener

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Con esto ya sabríamos sumar y multiplicar complejos.

3. Formalización

Como siempre en matemáticas, estas ideas intuitivas se pueden (y se deben) formalizar. Una de las formalizaciones más habituales es pensar en los complejos como pares $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con una suma y un producto definidos por

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Es un ejercicio sencillo comprobar que la suma es conmutativa, asociativa, que existe un elemento neutro (el $(0, 0)$) y que todo elemento tiene simétrico. Igualmente fácil es comprobar que el producto es conmutativo, asociativo, que existe un elemento neutro (el $(1, 0)$) y que todo elemento distinto de $(0, 0)$ tiene inverso. También es fácil comprobar que el producto es distributivo respecto de la suma. Decimos entonces que los números complejos tienen estructura de *cuerpo conmutativo*, noción que ya conoceréis más adelante.

Es obvio que esta formalización (cuya notación apenas utilizaremos) coincide con la noción intuitiva descrita en la sección anterior, sin más que identificar

$$(a, b) \equiv a + bi.$$

A cualquiera de estas dos notaciones se las conoce como *forma binómica* del número complejo.

Llamaremos $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos con la suma y producto definidos.

Es muy fácil darse cuenta de que podemos identificar de manera natural un elemento a de $\mathbb{R}$ con el complejo $a + 0i = (a, 0)$. De esta forma podemos considerar $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{C}$.

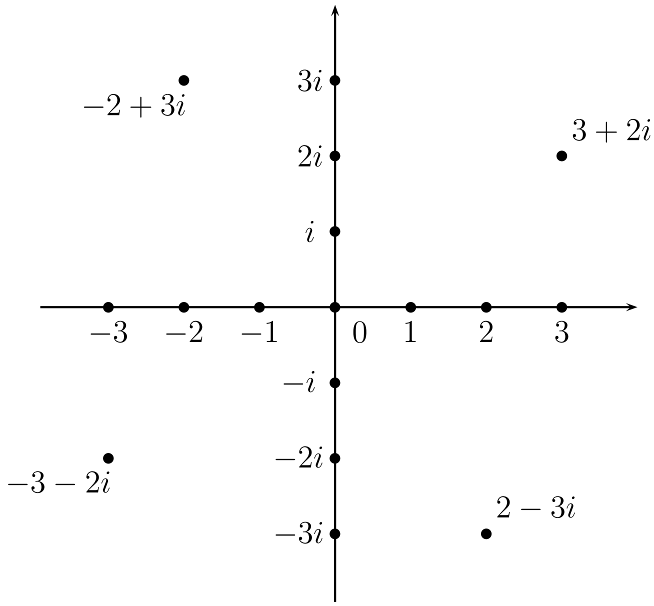
Análogamente, tendríamos un conjunto destacado de números complejos formado por aquellos de la forma $bi = 0 + bi = (0, b)$. A estos números se les denomina a menudo *imaginarios puros*.

Dado un complejo $z = a + bi$ nos referiremos a a como su *parte real* y a b como su *parte imaginaria*

$$\begin{aligned} a &= \Re z, \\ b &= \Im z. \end{aligned}$$

4. Interpretación geométrica

Puesto que podemos ver un número complejo como un par $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es natural interpretarlo como un punto del plano. Llamaremos *plano complejo* al plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cuando pensamos en él como formado por números complejos. Es claro que en el plano podemos identificar el eje de abscisas con la recta de los números reales, y el eje de ordenadas con la recta formada por los números imaginarios puros.



5. Conjugación

Una noción muy importante al usar números complejos y que es propia de éstos es la noción de *conjugación*.

DEFINICIÓN 5.1. Dado un complejo $z = a + bi$ definimos su conjugado $\overline{z}$ como

$$\overline{z} = a - bi.$$

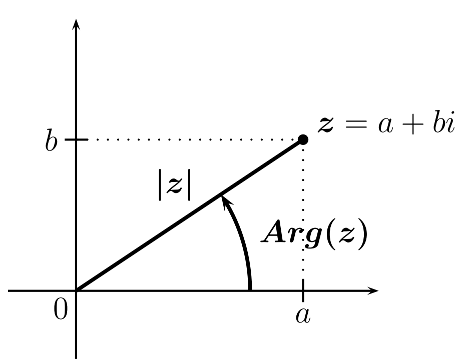
Observamos que si $z = a + 0i$ es real, $\overline{z} = z$. Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = z \text{ y } z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

6. Forma módulo-argumental

Si pensamos en un complejo $z = a+bi$ como un punto del plano, podemos referirnos a él de varias formas. La primera, con la propia notación binomial. Otra forma de describir ese punto del plano sería decir a qué distancia está el punto del origen y qué ángulo forma el segmento que une 0 con z con la parte positiva del eje de abscisas. Llamaremos *módulo* de z a la longitud del segmento que une 0 con z, y lo denotaremos como $|z|$ (una cantidad estrictamente positiva, salvo en el caso de $z = 0$, que es nula). Utilizando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

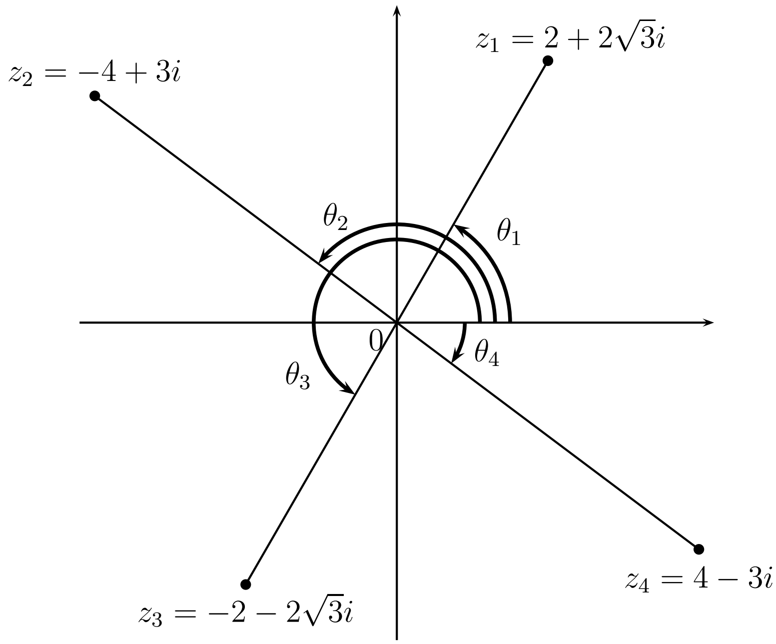


El *argumento* de un número complejo z distinto de 0, denotado $Arg(z)$, es el ángulo que forma el segmento que une 0 con z con la parte positiva del eje de abscisas, siendo el sentido positivo para la medida de dicho ángulo, como es habitual, el contrario al de las agujas del reloj.

Se puede ver que

$$Arg(z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right),$$

teniendo en cuenta que podemos tener que sumar o restar π al ángulo así obtenido, en función de los signos de a y b.



$\theta_1 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$; $\quad \theta_3 = \pi + \theta_1 = \frac{4\pi}{3}$

$\theta_4 = \operatorname{arc\,tg}(-0.75) = -0.6435$; $\quad \theta_2 = \pi + \theta_4 = 2.4981$.

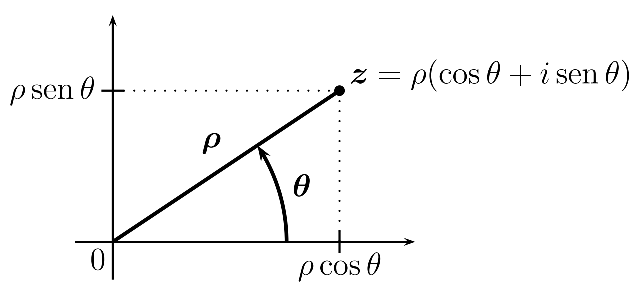
Por supuesto, debiera ser posible (y de hecho lo es) recuperar la forma binómica del complejo a partir de su módulo y su argumento. Sea $z = a + bi$. Llamando $\rho = |z|$ y $\theta = Arg(z)$, se puede ver que

$$a = \rho \cos\theta, \qquad b = \rho \operatorname{sen}\theta,$$

de manera que tenemos

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Notad que esta presentación del complejo es formalmente binomial, pero a la vez deja a la vista quiénes son el módulo y el argumento de θ.



Por otro lado, si z puede escribirse de la forma $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, para ciertos ρ y r positivos y θ, α reales, puesto que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ para cualquier t real, se tendrá que $\rho = r$. Las propiedades de las funciones trigonométricas garantizan que existirá también un entero k tal que $\theta = \alpha + 2k\pi$.

7. Forma exponencial

A continuación se presenta la notación exponencial (probablemente la más usada). Merece la pena tener presente este modo de referirse a los números complejos distintos de 0. Un tratamiento riguroso exige algunos conocimientos extra, por lo que no definiremos la función exponencial compleja con el detalle que merece. Apuntamos que comparte propiedades clave con la función exponencial real (su derivada coincide con ella misma, lleva sumas en productos...) y coincide con la exponencial real cuando $z = a + 0i$ es un número real. Si hubiéramos definido e^z de manera que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ para todo par de números complejos z y w, para $z = a + bi$ tendríamos

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib}.$$

Puesto que $a \in \mathbb{R}$, e^a es su valor habitual. Falta dar sentido a e^{ib}. Admitid como válida la siguiente afirmación/definición:

Definición 7.1. Para todo número real α definimos $e^{i\alpha}$ como

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha.$$

Inicialmente resulta chocante la existencia de una relación tan estrecha entre la función exponencial y las funciones trigonométricas (en el curso de Variable Compleja se desvelará esta conexión). Admitida la definición precedente, queda claro que si z es un complejo de módulo ρ y argumento θ podemos escribir

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Comprobaremos lo útil que resulta la notación exponencial a la hora de multiplicar y dividir complejos.

8. Trigonometría Aplicada: producto de complejos

Recordemos las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Notad que las dos segundas (a través de las que daremos una expresión del cociente de números complejos) se siguen inmediatamente de las dos primeras (que nos sirven para expresar el producto de dos números complejos).

Escribamos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)\\
&= r_1 r_2\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)\big)\\
&= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 + \theta_2)\big),
\end{aligned}$$

de donde se sigue que para multiplicar números complejos en forma módulo argumental, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Veamos lo mismo con notación exponencial. En ese caso escribimos $z_i = r_i e^{i\theta_i}$ y por tanto

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

9. División

Podemos dividir complejos en forma binomial multiplicando y dividiendo por el conjugado del divisor:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2},$$

pero, como veis, resulta algo farragoso.

Si escribimos los complejos como $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)(\cos\theta_2 - i\operatorname{sen}\theta_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\big),\end{aligned}$$

y deducimos que para dividir números complejos en forma módulo argumental, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

De nuevo podemos advertir que la notación exponencial nos permite ahorrar cálculos. Si escribimos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

10. Potencias

Veamos cómo calcular las sucesivas potencias de un número complejo. Es fácil darse cuenta de que calcular potencias en forma binomial no es especialmente eficiente.

Notemos en cambio la siguiente

Proposición 10.1 (Fórmula de Moivre). *Para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta.$$

Demostración. Se prueba muy fácilmente usando las fórmulas trigonométricas antes mencionadas e inducción en n. □

Con la fórmula de Moivre a nuestra disposición, tenemos que si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Por supuesto podíamos haber deducido esto directamente de la fórmula para el producto de complejos.

De nuevo la notación exponencial es la más sencilla. Si escribimos $z = re^{i\theta}$ tenemos

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

11. Cálculo de raíces

En esta sección se muestra que todas las ecuaciónes del tipo $w^n = a + bi$ tienen soluciones complejas. Es una manifestación muy concreta de una de las diferencias principales entre los complejos y los reales: la completitud algebraica de $\mathbb{C}$.

Es claro que para cualquier n natural, la ecuación $w^n = 0$ posee una única solución, $w = 0$.

Sea $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$ un número complejo no nulo. Nos planteamos el problema de calcular las raíces n-simas de z, siendo n un número natural.

Supongamos que $w = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = \rho e^{i\alpha}$ es una de estas raíces: es decir $w^n = z$. Se tiene que

$$\big(\rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\big)^n = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

y por tanto,

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta). \tag{1}$$

De aquí se sigue en primer lugar que

$$\rho^n = r$$

y por tanto,

$$\rho = \sqrt[n]{r}.$$

(La raíz que aparece en la última expresión es la raíz n-sima positiva de un número real, ya conocida).

Por otro lado, de (1) *no* se sigue, como podría parecer a primera vista, que $n\alpha = \theta$, sino, como apuntamos anteriormente, que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n\alpha = \theta + 2k\pi.$$

Por tanto, tenemos que

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Eso nos daría en principio infinitas soluciones α_k para α, una para cada valor de k. Notemos, sin embargo, que si $k' = k + n$, entonces

$$\alpha_{k'} - \alpha_k = \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k'\pi}{n}\right) - \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = 2\pi$$

y por tanto, considerados como ángulos, y como argumentos de un complejo, son indistinguibles. En realidad, no tenemos infinitas sino exactamente n soluciones para α, correspondientes a n elecciones consecutivas de números enteros, que den lugar a raíces n-simas distintas de z.

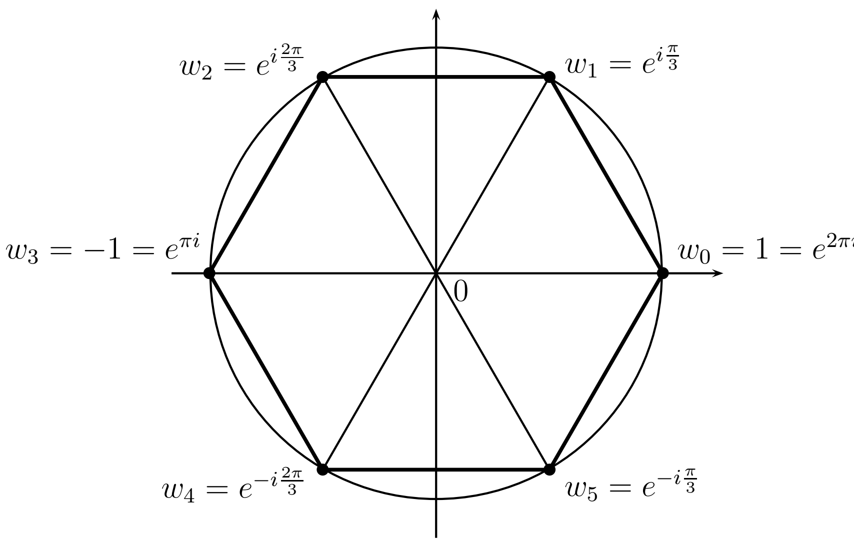
Es decir, tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{\theta}{n} \\
\alpha_1 &= \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\
\alpha_2 &= \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \\
&\vdots \\
\alpha_{n-1} &= \frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

y observamos que
$$\alpha_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \alpha_0 + 2\pi$$
y por tanto, como argumento de un complejo, da lugar a la misma solución que α_0.

En consecuencia, existen n raíces distintas w_j $(0 \leq j \leq n-1)$ dadas por
$$w_j = \sqrt[n]{r}(\cos \alpha_j + i \operatorname{sen} \alpha_j).$$

Notad que el razonamiento es totalmente general, de manera que llegamos a que cualquier complejo (distinto del 0) tiene exactamente n raíces n-simas, todas ellas con el mismo módulo, y argumentos que difieren entre sí por $\frac{2\pi}{n}$. Geométricamente, esto se traduce en que las raíces n-simas de un complejo z de módulo r están situadas sobre los vértices de un n-ágono regular inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen.



$w^6 = 1$