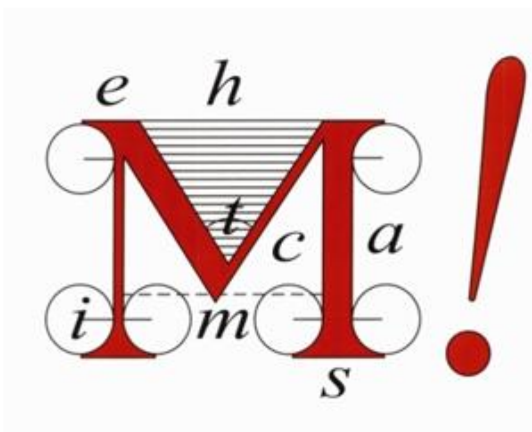
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL YARACUY
PROGRAMA DE EDUCACION SEMIPRESENCIAL
CIENCIA DEL DEPORTE
CURSO INTRODUCTORIO
- **MATEMÁTICA**-

GUIA DIDACTICA



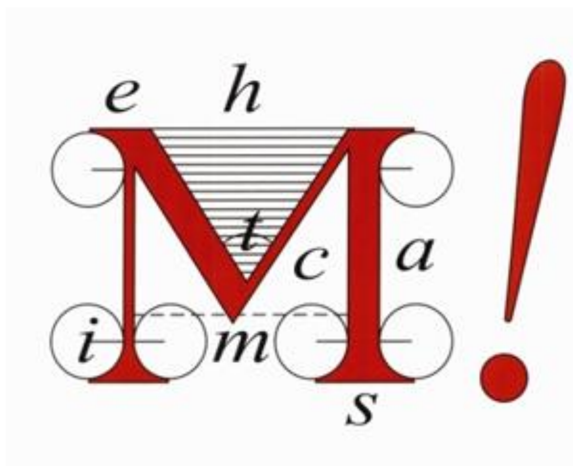
Potenciación de Números Naturales y Enteros

Autor: Prof. Dennar Oropeza

San Felipe, Septiembre 2009

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL YARACUY
PROGRAMA DE EDUCACION SEMIPRESENCIAL
CIENCIA DEL DEPORTE
CURSO INTRODUCTORIO
- **MATEMÁTICA**-

GUIA DIDACTICA



Potenciación de Números Naturales y Enteros

Datos de Identificación
Elaborado por: Dennar Oropeza
e-mail: dennaroropeza@yahoo.com
Fecha Elaboración: Septiembre de 2010
Fecha de Última Actualización: Febrero de 2011

Tabla de Contenidos

Introducción

Para continuar estimado estudiante, revisaremos la parte correspondiente a la potenciación de números enteros. Se hará un repaso de las propiedades y su ejercitación. Mantén tu ritmo de estudio y seguirás aprendiendo con facilidad. Recuerda que cualquier duda o interés en particular, puedes escribir un correo electrónico a tu facilitador. **Entonces, a trabajar!!!!**

Objetivos Específicos.

Luego de culminar esta unidad de estudio, amigo estudiante serás capáz de:

- ✓ Identificar y resolver identificando las propiedades de la potenciación en **N y Z**
- ✓ Aplicar la ley de signos en la resolución de las operaciones básicas aplicando potenciación en **N** y **Z**
- ✓ Entender el concepto de potenciación como una multiplicación de factores iguales expresados matemáticamente.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊

π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

Contenidos

La Potenciación

Propiedades de la potenciación

- Potencia de exponente cero
- Potencia de exponente 1
- Producto de potencias de igual base
- Cociente de potencias de igual base
- Potencia de un producto
- Potencia de una potencia
- Propiedad distributiva
- Propiedades que no cumple la potenciación
- Potencia de base 10

Desarrollo del Aprendizaje

1. La Potenciación

Un día, un estudioso estaba pensando y jugando con papel se planteó una cosa:

— *Voy a tirar un papel al cesto, pero antes decido romperlo. Lo parto en dos y superpongo las partes; vuelvo a partir en dos y a superponer las partes, y así sucesivamente. Entonces:*

— *¿Cuántos trozos de papel habré tirado al cesto después de efectuar 5 veces esa operación?*

— *¿Y si hubiera partido el papel cada vez en tres partes?*

— *¿Y si lo hubiese partido cada vez en cuatro partes?*

— *¿Y en cinco partes?*

— *¿Y en diez partes?*

— *¿Y en a partes?*

— *¿Y si hubiese repetido n veces esta última operación?*

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

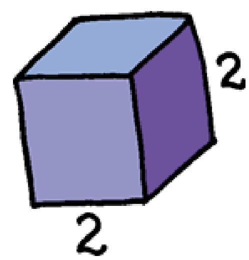
El análisis de este problema condujo al estudioso a la introducción de la potenciación en N como una multiplicación repetida para anotar productos de factores iguales.

La **potenciación** no es una operación matemática, es una ley que se nota como **a^n**, y que se lee "**a elevado a n**", que involucra dos números: **la base *a* y el exponente *n***. Por lo tanto la Potenciación es una elevación de una cantidad o una expresión a una potencia; la Potencia, es el producto que resulta de multiplicar una cantidad o expresión por sí misma una o más veces, y los factores son cada una de las cantidades o expresiones que se multiplican para formar un producto.

Otra forma de expresar una potencia es utilizando el símbolo ^ ente la base y el exponente: es decir:

$$5^2 = 5\wedge 2 = 25$$

La definición de la potenciación varía según el conjunto numérico al que pertenezca el exponente:



- ✓ Cuando el **exponente** es un **número natural**, la potenciación corresponde a una multiplicación de varios factores iguales: el exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma. Por ejemplo:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

En líneas generales: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \quad veces}$

- ✓ Cuando el **exponente** es un **entero negativo -p**, una potencia que tenga exponente negativo es el resultado de elevar la fracción inversa de la base **1/a** al **exponente positivo p**. O sea: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$,

por ejemplo: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

- ✓ Cuando el **exponente** es una **fracción irreducible *m/n***, se define como: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$; por ejemplo: $3^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{3^4} = 3^2 = 9$

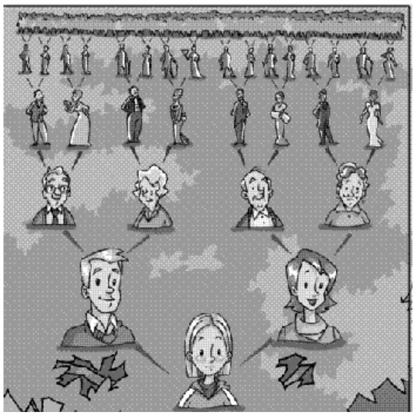
La definición de potenciación puede extenderse a exponentes reales, complejos o incluso matriciales.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

- ✓ Como caso especial, se hace destacar que cualquier número (salvo el 0) elevado a 0 da 1, así:

  $a^0 = 1$; donde a $\neq$ 0; por ejemplo: $56^0 = 1$

- ✓ El caso particular de 0^0, en principio, no está definido. Sin embargo, también se puede definir como 1 si nos atenemos a la idea de producto vacío o simplemente por analogía con el resto de números.



Mira este cuadro, acá se aplica la potenciación!!!!

Propiedades de la potenciación

Las propiedades de la potenciación son las que permiten resolver por diferentes métodos una potencia. Estas son:

Potencia de exponente cero

- ✓ Una de las definiciones de la potenciación, por recursión, es la siguiente: a^1 = a entonces $a^p = a * a^{p-1}$, por ejemplo: $4^3 = 4 * 4^{3-1}$

- ✓ Si en la segunda expresión se toma *p* = 1, se tiene que $a^1 = a * a^{1-1} = a * a^0$.

Al dividir los dos términos de la igualdad por ***a***(que se puede hacer siempre que ***a*** sea distinto de 0), queda que ***a***^{0}=1. Así, toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1, pero recuerden que **a** debe pertenecer por obligación a los reales y $a \neq 0$.

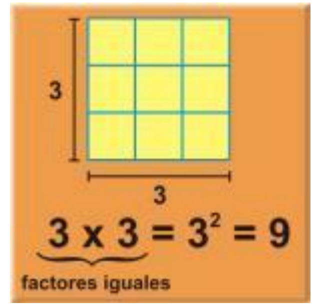
- ✓ La expresión $\mathbf{0^0}$ es una indeterminación. Que puede relacionarse con la indeterminación $\frac{0}{0}$ dado que: $0^0 = 0^{-1} * 0^1 = \frac{0}{0}$

Potencia de exponente 1

Toda potencia de exponente 1 es igual a la base. $a^1 = a$; por ejemplo: $54^1 = 54$

Producto de potencias de igual base

El producto de dos o más potencias de igual base **a** es igual a la potencia de base **a** y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. Se coloca la misma base y se suman los exponentes: $a^m * a^n = a^{m+n}$. por ejemplo: $9^3 * 9^2 = 9^{3+2} = 9^5$



Cociente de potencias de igual base

La división de dos potencias de igual base **a** es igual a la potencia de base **a** y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. Se coloca la misma base y se restan los exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Una muestra de $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2}$ ello es:

$$\frac{12^6}{12^4} = 12^{6-4} = 12^2 = 144$$

Potencia de un producto

La potencia de un producto de base (**a** ·**b**) y de exponente "**n**" es igual a la potencia "**a**" a la "**n**" por "**b**" a la "**n**". Cada base se multiplica por el exponente: $(a * b)^n = a^n * b^n$. Numéricamente se muestra como ejemplo:

$(3 * 5)^2 = 3^2 * 5^2 = 9 * 25 = 225$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia de base **a** es igual a la potencia de base **a** elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. Así se obtiene esta potencia: $(a^m)^n = a^{m*n}$.

Un ejemplo de ello es: $((5)^2)^3 = 5^{2*3} = 5^6 = 5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 15625$

Propiedad distributiva

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división, pero no lo es con respecto a la suma ni a la resta. Solo es distributiva con respecto a la multiplicación y división, es decir:

◊ Α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

(Multiplicación) $(a*b)^n = a^n * b^n$. Por ejemplo $(3*7)^2 = 3^2 * 7^2 = 9*49 = 441$

y (División) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Por ejemplo: $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{4*4*4}{3*3*3} = \frac{64}{27}$

Propiedades que no cumple la potenciación

- ✓ No es distributiva con respecto a la adición y sustracción, en otras palabras:

(**Adición**) $(a+b)^m \neq a^m + b^m$.

Por ejemplo: $(1+5)^2 \neq 1^2 + 5^2$ entonces $(6)^2 \neq 1+25$ por lo tanto: $36 \neq 26$

y de esta forma no se cumple la potenciación.

(**Sustracción**) $(a-b)^m \neq a^m - b^m$.

Por ejemplo: $(1-5)^2 \neq 1^2 - 5^2$ entonces $(-4)^2 \neq 1-25$; así $(-4)*(-4) \neq 26$ (y recordando la ley de los signos en la multiplicación)

se tiene que $+16 \neq 26$

por lo tanto acá tampoco no se cumple la potenciación.

- ✓ No cumple la propiedad conmutativa, exceptuando aquellos casos en que base y exponente tienen el mismo valor o son equivalentes. En general, $a^b \neq b^a$ y con números se ve así:

$6^2 \neq 2^6$, resolviendo se tiene que: $36 \neq 64$

- ✓ Tampoco se cumple la propiedad asociativa: $a^{b^c} = a^{(b)^c} \neq \left(a^b\right)^c = a^{(b*c)} = a^{b*c}$

Como por ejemplo: $:2^{2^3} = 2^{(2)^3} \neq \left(2^2\right)^3 = 2^{(2*3)} = 2^{2*3}$,

(Pero recordando que a nivel de exponentes: $2^3 = 8$ y $2*3 = 6$ respectivamente)

Entonces resolviendo se ve que: $2^{(8)} \neq 2^6$
Finalmente se demuestra que $2^{(8)} = 256 \neq 64 = 2^6$

y no se cumple la potenciación en este caso.

Potencia de base 10

Normalmente, las potencias con base 10, por la cantidad que represente el exponente, esa será la cantidad de ceros en el resultado. El resto de la base, para sacar el resultado el número se multiplica por sí mismo cuantas veces indique el exponente.

Cuando el exponente de base diez (10) tiene su exponente positivo, es señal de una potencia cuya coma decimal se mueve a la derecha tanta veces lo indique el número exponente: la unidad (1) seguida de ceros Al ejemplificar se tiene que:

- ✓ $10^{+2} = 10^{+2} = 100$ ó $10^{+5} = 10^5 = 100000$

$$\mathbf{100 = 10 \times 10 = 10^2}$$
$$\mathbf{1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3}$$
$$\mathbf{10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4}$$
$$\mathbf{100000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5}$$

Cuando el exponente de base diez (10) tiene su exponente negativo, es señal de una potencia cuya coma decimal se mueve a la izquierda tanta veces lo indique el número exponente: la unidad (1) seguida de ceros Al ejemplificar se tiene que:

- ✓ $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ ó $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$ (Aplicando Propiedad)

Cuando se hacen estudios, el que sea, y se involucren valores muy grandes como la distancia de separación entre ciudades: 450 Km, es lo mismo decir, 450000 m, ò 450000000 mm. O por el contrario cantidades muy pequeñas: 1 mg, que es lo mismo decir 0,001 g, ó también 0,000001 Kg; es necesario expresarlas en potencias de base diez (10) para facilitar su manejo y escritura: esto es conocido como Notación Científica y su principio es el uso de potencias de base diez (10). Es decir:

Se deja el primer número como parte entera y el resto es temporalmente la parte decimal; se coloca la potencia base diez y el valor del exponente será el número de dígitos que hay hacia la derecha desde la coma original hasta el nuevo lugar de la coma; por lo que el exponente será positivo:

✓ 450 Km = $4{,}50 \times 10^2$ Km = $4{,}5 \times 10^2$ Km
Se colocó la coma decimal luego del cuatro (4), de allí hasta el cero hay dos lugares o dos dígitos a la derecha que es donde está la coma original.

✓ 450000 m = $4{,}50 \times 10^2$ m = $4{,}5 \times 10^2$ m
Se colocó la coma decimal luego del cuatro (4), de allí hasta el último cero hay cinco lugares o cinco dígitos a la derecha que es donde está la coma original.

✓ 450000000 mm = $4{,}50 \times 10^2$ mm = $4{,}5 \times 10^2$ mm
Se colocó la coma decimal luego del cuatro (4), de allí hasta el último cero hay ocho lugares o ocho dígitos a la derecha que es donde está la coma original.

O por el contrario con las cantidades muy pequeñas:
✓ 1 mg = $1{,}0 \times 10^0$ mg (Recordando que $1 = 10^0$)
Se colocó la coma decimal luego del Uno (1), de allí hasta el cero no hay lugares o dígitos a la derecha o izquierda que es donde está la coma original.

✓ 0,001 g = 1×10^{-3} g
Se colocó la coma decimal luego del uno (1), número que servirá de parte entera, de allí hasta el cero hay tres lugares o tres dígitos a la izquierda que es donde está la coma original.

✓ 0,000001 Kg = 1×10^{-6} Kg
Se colocó la coma decimal luego del uno (1), número que servirá de parte entera, de allí hasta el cero hay seis lugares o seis dígitos a la izquierda que es donde está la coma original.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

Ahora, realicemos las siguientes operaciones con potencias:

a. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

Solución

= $(-2)^{2+3+4} = (-2)^9 =$

Como es la misma base, se copia ésta y se suman los exponentes, luego se resuelve la potencia multiplicando nueves veces el dos

= $-2. -2. -2. -2. -2. -2. -2. -2. -2 = -512$ (Recordando aplicar la ley de los signos)

En resumen:

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$ $(-2)^9 = -512$

Cuando se resuelven potencias cuyas bases tienen signos positivos o negativos, la potencia dependerá del tipo de exponente, es decir:

"Cuando una base tiene base positiva y su exponente es par o impar, entonces la potencia será positiva".

"Cuando una base tiene base negativa y su exponente es par, entonces la potencia será positiva, pero cuando una base tiene base negativa y su exponente es impar, entonces la potencia será negativa".

b. $(-8)\cdot(-2)^2\cdot(-2)^0\,(-2) =$

Solución

= $(-2)^3\cdot(-2)^2\cdot(-2)^0\cdot(-2)^1 = (-2)^6 =$ **64**

Observa que la primera potencia resulta de descomponer el 8 en sus factores primos $8 = 2^3$ manteniendo su signo. La última potencia tiene potencia uno (1) aunque no se vea. Como es la misma base, se copia ésta y se suman los exponentes,
Luego se resuelve la potencia multiplicando seis veces el dos (no es multiplicar seis por dos).
Recuerda también que la base es negativa y el exponente par, entonces la potencia es positiva

c. $\left[\dfrac{(-6)^2}{2^3} * 3^5 * (9)^{-4} * 4^3\right]^2 =$

Solución:

$$\left[\frac{(-6)^2}{2^3} * 3^5 * (9)^{-4} * 4^3\right]^2 = \frac{(-6)^{2*2}}{2^{3*2}} * 3^{5*2} * (9)^{-4*2} * 4^{3*2} = \frac{(-6)^4}{2^6} * 3^{10} * (9)^{-8} * 4^6 =$$

(Se aplicó la propiedad potencia de una potencia)

$$= \frac{6^4}{2^6} * 3^{10} * \left(\frac{1}{9}\right)^8 * 4^6 = \frac{(2*3)^4}{2^6} * 3^{10} * \left(\frac{1}{3^2}\right)^8 * (2^2)^6 =$$

(Recuerda que 6 = 2*3; el nueve al pasarlo al denominador su exponente cambia de signo (Inversión de la fracción); y 4 =2*2 = 2^2; Así se sustituye todo esto)

$$= \frac{2^4 * 3^4}{2^6} * 3^{10} * \frac{1^8}{3^{16}} * 2^{12} = 2^{4+12-6} * 3^{4+10-16}$$

(Ahora, se aplicó la propiedad potencia de una potencia entonos los casos; recuerda que $1^8=1$; luego se aplicó la propiedad multiplicación de potencia de igual base y cociente de potencia de igual base)

$$= 2^8 * 3^{-2} = \frac{2^8}{3^2}$$

(Luego de operar, resulta una potencia con exponente negativo, por lo que al invertir la fracción cambia el signo del exponente)

En resumen:

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

$$\left[\frac{(-6)^2}{2^3} * 3^5 * (9)^{-4} * 4^3\right]^2 = \frac{(-6)^4}{2^6} * 3^{10} * (9)^{-8} * 4^6 = \frac{(2*3)^4}{2^6} * 3^{10} * \left(\frac{1}{3^2}\right)^8 * (2^2)^6 =$$

$$= \frac{2^4 * 3^4}{2^6} * 3^{10} * \frac{1^8}{3^{16}} * 2^{12} = \frac{2^8}{3^2}$$

Actividad de Control:

A través de ejercicios de potenciación, desarrollarás habilidad matemática para este concepto, aplicarás tus conocimientos para resolver problemas que requieran el uso de potenciación y aplicarán sus conceptos a problemas cercanos a tu contexto.

Resuelve: Para producir un balón de fútbol, una fábrica tiene 2 trabajadores, cada uno encargado de 2 máquinas, y cada máquina produce 2 artículos cada 2 minutos. ¿Cuál es la cantidad de artículos que se producen en 2 minutos?

***Respuesta**: $2^3 = 8$; es decir, se producen 8 artículos en 2 minutos*

Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a. $(-3)^1 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

b. $(-3)^3 \cdot (-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^0 =$

c. $3^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 3^4 = 3^{-2} =$

d. $5^2 / 5^3 =$

e. $5^{-2} / 5^3 =$

f. $5^2 / 5^{-3} =$

g. $5^{-2} : 5^{-3} =$

h. $(-3)^1 \cdot [(-3)^3]^2 \cdot (-3)^{-4} =$

i. $\left[\frac{(-3)^6}{(-3)^3} * (-3)^{-4} * (-3)^0\right]^3 =$

Si comprendiste todo esto, estás en el buen camino. Si no, es importante descubrir la causa de tus errores. Es necesario concentrarse mejor. Si alguna idea no fue bien entendida, es tu oportunidad de aclararla.

2. Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

Los matemáticos de la Grecia Antigua eran muy estudiosos de las propiedades de los números, especialmente de lo relacionado con su divisibilidad. Según cuenta una historia, alguien le preguntó al gran sabio Pitágoras: "¿Qué es un amigo?", y éste le contestó: "Aquello que es mi otro ser". Ante la sorpresa de su oyente, agregó: "aquello que es mi otro ser, como lo es 220 a 284". Se refería Pitágoras a la pareja más pequeña de números amigos, que comparten el fuerte nexo relativo a sus divisores mencionado al comienzo de esta página. Los divisores de 220 son: 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110. Si se suman estos divisores, se obtiene 284. Por otra parte, los divisores de 284 son: 1, 2, 4, 71, 142 y por supuesto, la suma de todos estos números es igual a 220.

Pero repasemos la divisibilidad de los números:

- ✓ Divisibilidad por dos (2): para ello el número debe ser par o terminar en cero, por ejemplo: 18 es divisible por dos porque tiene mitad y es 9. Otro caso: 30 es divisible por dos (o como decimos entre dos) porque tiene mitad y es 15.
- ✓ Divisibilidad por tres (3): en general, el número debe poseer en la suma de sus dígitos un múltiplo de tres como 3, 6, 9, 12, 15, …; ejemplo: 27 donde 2+7=9 y 9 es múltiplo de tres. Otro ejemplo: 12 donde 1+2=3 y 3 es múltiplo de tres.
- ✓ Divisibilidad por cinco (5), el número debe terminar en cinco o en cero. Ejemplo: 15, termina en 5 entonces 15/5=3 y es número entero y divisor. Otro caso donde 40, termina en cero, entonces 40/5=8, resulta un número entero y por lo tanto es divisible por cinco.
- ✓ Divisibilidad por (7): ,

Entonces, para hacer referencia de divisores comunes, veamos el siguiente ejemplo:

- ✓ Considera los números **12** y **20.** Entonces:

Los divisores de **12** son: **1, 2, 3, 4, 6,12** y los divisores de **20** son: **1, 2, 4, 5, 10, 20**

Por lo tanto, los divisores comunes de **12** y **20** son: **1, 2 y 4**

Máximo común divisor

Como la cantidad de divisores que tiene cualquier número es finita, cuando se consideran los divisores comunes de un grupo de números, siempre hay uno de estos divisores que es mayor que todos los demás. Este número es llamado el **máximo común divisor** del grupo de números considerado.

Ejemplo:

- ✓ Para encontrar el máximo común divisor de los números 20, 24, 16, se determinan primero todos sus divisores:

  De 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20 **los de 24**: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

  y de 16: 1, 2, 4, 8, 16.

Los divisores comunes son: **1, 2, 4**. El mayor de estos 3 números es 4, y por lo tanto el máximo común divisor de 20, 24 y 16 es 4, y se escribe así:

M.C.D. (20, 24,16) = 4.

Actividad de Control:

El máximo común divisor de 6 y 30 es 6. Esto podemos saberlo sin necesidad de encontrar todos los divisores de 30 y de 6. Analiza esto y explica por qué.

Factores primos de un número

Cuando se habla de una multiplicación de números, tal como: 8 x 9 x 3, se dice que los números 8, 9 y 3 son los factores en esa multiplicación. Por ello, todo número natural puede expresarse como una multiplicación de factores, todos primos.

Por ejemplo:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \qquad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$6 = 3 \cdot 2 \qquad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

De esta forma, cuando se escribe un número como producto de factores primos, se realiza una descomposición en factores primos del número en cuestión. En otras palabras:

$$8 = 2 \cdot 4 \qquad 20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$$

$$6 = 6 \cdot 1 \qquad 12 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$$

Pero en este caso los factores no son primos.

Recuerda que un número primo es aquel que es divisible por si mismo y por la unidad; o sea:

1 (divisor: 1), **2** (divisores: 1 y 2); **3** (divisores: 1 y 3);

5 (divisores: 1 y 5); **7** (divisores: 1 y 7);

11 (divisores: 1 y 11); **13** (divisores: 1 y 13); **17**(divisores: 1 y 17);

19(divisores: 1 y 19); **23** (divisores: 1 y 23);

y así sucesivamente. Los demás números son compuestos.

Si un número no es primo, hay varias maneras de descomponerlo en producto de otros números, pero **sólo una** manera de descomponerlo en factores **primos**. La forma más sencilla y segura de obtener todos los divisores de un número, se muestra a continuación:

1. Se descompone el número en factores primos. Por ejemplo, para hallar los divisores de **36**, se divide sucesivamente entre 2, 3, 5 y todos los números primos que sean necesarios hasta llegar a la unidad como cociente. Lo que sucede es que se comienza con el número primo más pequeño:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

2. La descomposición en factores primos es:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

Los divisores de 36 son, además del 1 y del 36, todos los números que se obtienen al multiplicar los factores primos entre sí. Por ejemplo, en el caso de $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, se obtienen como divisores:

$1,\ 2,\ 3,\ 2 \cdot 2 = 4,$ $\quad 2 \cdot 3 = 6,$ $\quad 3 \cdot 3 = 9,$

$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12,$ $\quad 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

3. Al descomponer en factores primos de dos o más números, se puede encontrar el máximo común divisor (**MCD**) por lo que se hace muy fácil. Simplemente hay que encontrar el mayor de todos los divisores comunes a los números en cuestión.

✓ Por ejemplo:

◊ Α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

Si se quiere hallar el **M.C.D**. entre **28** y **32**, primero se descomponen estos números en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

4.

Entonces: $28 = 2^2 \cdot 7 \qquad 32 = 2^5 = 2^2 \cdot 2^3$

Los divisores comunes de **28** y **32** son **1**, **2** **y** $\mathbf{2^2 = 4}$. De todos estos, el número común de menor potencia es $\mathbf{2^2}$, luego el **MCD (28, 32) =** $\mathbf{2^2 = 4}$.

En resumen:

- ✓ Se descomponen los números en sus factores primos.
- ✓ Se toman los factores comunes con su menor exponente y luego se multiplican

Es importante, comprender las razones por las cuales un proceso conduce a la solución del problema. Así, si tu memoria falla y olvidas algún paso ó etapa del procedimiento, entonces usando el razonamiento, es posible reconstruir el proceso total y lograr obtener la solución de igual manera.

Actividad de Control:

A calcular el **M.C.D. de 8 y 32** el resultado es **8**. Entonces, ¿podrías hacer este cálculo sin aplicar este método? Razona un poco.

Si has respondido de manera correcta, **Felicitaciones! ! ! !** Si no ha sido así, no más chequea revisa estos apuntes y los ejemplos dados, para que identifiques las razón de tus equivocación.

Seguimos!

Mínimo Común Múltiplo

Como has visto todo número natural tiene una infinidad de múltiplos. De todos ellos, el mínimo múltiplo es el mismo número. Por ejemplo, si se trata del 3, sus múltiplos son: 3, 6, 9, 12, 15, etc. Ciertamente, el menor de todos es el 3. De la misma forma, el menor de todos los múltiplos de cualquier número natural es él mismo. Así, dados dos números naturales, el producto de ellos es otro número que es múltiplo de ambos De esta forma siempre habrá un número natural que sea múltiplo de otros dos a la vez.

Por ejemplo:

- ✓ El **5** y el **7**. El número **35** es múltiplo de 7 y de 5 entonces: $5 \cdot 7 = 35$

Se dice que 35 es un múltiplo común de 7 y 5, pero ningún número menor que 35 es múltiplo de 7 y de 5 a la vez.

- ✓ En el caso de **6** y **2**, también **12** es múltiplo de 6 y de 2

En este caso12 es un múltiplo común de 6 y 2 y sí existe un número menor que 12, el 6, que es múltiplo de sí mismo y también es múltiplo de 2, y se tiene entonces que el 6 también es un múltiplo común de 2 y 6.

En otras palabras, no existe ningún número menor que 6 que sea múltiplo de 2 y de 6 a la vez. Se dice entonces que el 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 6, y en el primer caso el **mínimo común múltiplo** de 5 y 7 es 35, abreviándose así:

m.c.m. (5,7) **= 35,** **m.c.m.** (2,6) **= 6**

¿Cuál es la diferencia entre estos dos casos?
La diferencia se observa cuando se descomponen los números en sus factores primos. Por ejemplo:

Para calcular el **m.c.m.** de **12** y **15**, se descomponen en factores primos ambos números:

$$15 = 5 \cdot 3 \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$$

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ Π

El único número que aparece como factor de ambos números es el 3. Se multiplican entonces todos los factores de ambos números, pero sin repetir el 3:

$$2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

Por lo tanto **El m.c.m. (12,15) = 60**.

¿Cómo se sabe que no hay ningún número menor que 60 que sea múltiplo de 12 y de 15 a la vez?
La respuesta está en la descomposición de 60 en factores primos: $60 = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$

Donde los factores 2^2, 5, 3 se pueden multiplicar en cualquier orden, para obtener 60, es decir:
$60 = (2^2 \cdot 3) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = (3 \cdot 5) \cdot 2^2 = 15 \cdot 4$

ctividad de Control:

Escribe en forma precisa el método general para calcular el mínimo común múltiplo entre 2 ó más números, imprímelo y discútelo con tus compañeros

Determina el M.C.D. y m.c.m. de:
a) 13 y 12; b) 75 y 10; c) 24 y 30; d)100 y 90

Si lograste resolver, excelente!!!!. Será útil en el futuro esta herramienta aprendida. Si no has logrado terminar, revisa de nuevo tu manera de resolverlos, para que detectes el error y sigue insistiendo, luego de haber leído otra vez la información previa.

También puedes revisar estos **videos** para chequear lo aprendido.

Videos
http://www.youtube.com/watch?v=8ewXh5Ofv54
http://www.youtube.com/watch?v=Bm1SAgkhAQc

Referencias Bibliográficas

Para el estudio de este tema, te presento algunos textos de Matemática;

- ✓ Baldor, A. 2000. Algebra. Edit. Cultura Venezolana, S.A.
- ✓ Baldor, A. 2000. Aritmética. Edit. Cultura Venezolana, S.A.
- ✓ Grupo Editorial Girasol. 2007. Guía- Teórica-Práctica Matemática 7. Terra editores.
- ✓ Grupo Editorial Girasol. 2007. Guía- Teórica-Práctica Matemática 8. Terra editores.
- ✓ Paredes, B.y Salcedo, A.(1.997). Matemática 7o. Caracas: Santillana S.A

Además puedes revisar estas direcciones electrónicas:

- ✓ www.recursosmatematicos.com/
- ✓ www.matematicas.net/
- ✓ sauce.cnice.mecd.es/~jdiego/
- ✓ www.edumat.net/
- ✓ http://es.wikipedia.org/wiki/Potenciaci%C3%B3n
- ✓ personal5.iddeo.es/ztt/roble.pntic.mec.es/~jarran2/
- ✓ *http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas3A.htm*
- ✓ http://www.rena.edu.ve/TerceraEtapa/Matematica/TEMA4/maximoMinimo.html
- ✓ http://icarito.tercera.cl/enc_virtual/matemat/index.htm