Titulo: **RADICACION**
Año escolar: 3er. año de bachillerato
Autor: José Luis Albornoz Salazar
Ocupación: Ing Civil. Docente Universitario
País de residencia: Venezuela
Correo electrónico: martilloatomico@gmail.com

El autor de este trabajo solicita su valiosa colaboración en el sentido de enviar cualquier sugerencia y/o recomendación a la siguiente dirección :

martilloatomico@gmail.com

Igualmente puede enviar cualquier ejercicio o problema que considere pueda ser incluido en el mismo.

Si en sus horas de estudio o práctica se encuentra con un problema que no pueda resolver, envíelo a la anterior dirección y se le enviará resuelto a la suya.

◄RADICACIÓN :

RAÍZ *de una expresión algebraica es toda expresión algebraica que elevada a una potencia reproduce la expresión dada.*

Así "2a" *es raíz cuadrada de* $4a^2$ *porque* $(2a)^2 = 4a^2$ *y* "– 2a" *también es raíz cuadrada de* $4a^2$ *porque* $(-2a)^2 = 4a^2$.

"3X" es raíz cúbica de $27X^3$ *porque* $(3X)^3 = 27X^3$.

El **signo de raíz** *es* $\sqrt{}$ *, llamada* **signo radical**. *Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada* **cantidad sub-radical o radicando**.

El signo $\sqrt{}$ *lleva un* **índice** *que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reproduzca la cantidad sub-radical. Por convención el índice "2" se suprime y cuando el signo* $\sqrt{}$ *no lleve índice se entiende que el índice es 2.*

Índice *Signo radical*

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

Cantidad sub-radical o radicando *Raíz*

RADICAL O EXPRESIÓN RADICAL *es toda raíz indicada de un número o de una expresión algebraica.*

Así, $\sqrt{4}$, $\sqrt[5]{6X^3}$, $\sqrt[3]{16a^2}$ *son expresiones radicales.*

Si la raíz indicada es exacta, la expresión es **racional**, *si no es exacta, es* **irracional**.

Las expresiones irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3a^2}$ *son las que comúnmente se llaman* **radicales**.

El **grado** *de un radical lo indica su índice. Así,* $\sqrt{2a}$ *es un radical de segundo grado;* $\sqrt[3]{5a^2}$ *es un radical de tercer grado;* $\sqrt[4]{3X}$ *es un radical de cuarto grado.*

SIGNOS DE LAS RAICES :

1) Las **raíces impares** *de una cantidad tienen el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando.*

Así,

- $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$ *porque* $(3a)^3 = 27a^3$
- $\sqrt[3]{-27a^3} = -3a$ *porque* $(-3a)^3 = -27a^3$
- $\sqrt[5]{X^{10}} = X^2$ *porque* $(X^2)^5 = X^{10}$
- $\sqrt[5]{-X^{10}} = -X^2$ *porque* $(-X^2)^5 = -X^{10}$

2) Las **raíces pares** *de una cantidad positiva tienen doble signo.*

Así,

- $\sqrt{25X^2} = 5X$ *ó* $-5X$ *porque* $(5X)^2 = 25X^2$ *y* $(-5X)^2 = 25X^2$

  Esto se indica de este modo : $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$
- $\sqrt[4]{16a^4} = 2a$ *y* $-2a$ *porque* $(2a)^4 = 16a^4$ *y* $(-2a)^4 = 16a^4$

  Esto se indica : $\sqrt[4]{16a^4} = \pm 2a$

3) Las **raíces pares** *de una cantidad negativa no se pueden extraer. Estas raíces se llaman* **cantidades imaginarias**.

Así,

$\sqrt{-4}$ *no se puede extraer. La raíz de* -4 *no es 2 porque* "$2^2 = 4$" *y no* -4, *y tampoco es* -2 *porque* $(-2)^2 = 4$ *y no* -4. "$\sqrt{-4}$ " *es una* **cantidad imaginaria**.

Del propio modo, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16X^2}$ *son* ***cantidades imaginarias.***

NOTA IMPORTANTE : *Sea muy cuidadoso al expresar o "leer" la cantidad sub-radical o radicando de las raíces pares; sobre todo, cuando se usan signos de agrupación (paréntesis, corchetes o llaves).*

Así,

- $\sqrt{-a^2}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-a^2$.

  Sin embargo, $\sqrt{(-a)^2}$ *si es racional porque* $(-a)^2 = a^2$*, luego la expresión será* $\sqrt{a^2}$ *y esta es una raíz par de una cantidad positiva.* $\sqrt{a^2} = \pm a$

  Si el signo no está afectado por el paréntesis, es decir si el signo menos no está dentro del paréntesis; como en este caso : $\sqrt{-(a)^2}$ *también se dice que es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-(a)^2$.

- $\sqrt{-5X^2}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe una expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-5X^2$.

  Sin embargo, $\sqrt{(-5X)^2}$ *si es racional porque* $(-5X)^2 = 25X^2$*, luego la expresión será* $\sqrt{25X^2}$ *y esta es una raíz par de una cantidad positiva.* $\sqrt{25X^2} = \pm 5X$

  Si el signo no está afectado por el paréntesis, es decir si el signo menos no está dentro del paréntesis; como en este caso : $\sqrt{-(5X)^2}$ *también se dice que es una cantidad imaginaria porque no existe un número o expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-(5X)^2$.

- $\sqrt{(-2X)^3} = \sqrt{-2^3X^3} = \sqrt{-8X^3}$ *es una cantidad imaginaria porque no existe una expresión algebraica que elevado a la "2" nos dé* $-8X^3$.

Raíz de una potencia : *Para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz.*

- $\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$
- $\sqrt[2]{X^3} = X^{3/2}$

Raíz de un producto de varios factores : *Para extraer una raíz a un producto de varios factores se extrae dicha raíz a cada uno de los factores.*

$$\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\ \sqrt[n]{Y}.\ \sqrt[n]{Z}$$

Raíz de un monomio : *De acuerdo con lo anterior, para extraer una raíz a un monomio se sigue la siguiente regla :*

1) *Se extrae la raíz del coeficiente y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raíz.*
2) *Si el índice del radical es impar, la raíz tiene el mismo signo que la cantidad sub-radical o radicando, y si el índice es par y la cantidad sub-radical positiva, la raíz tiene el doble signo ±.*

Ejemplos :

1. $\sqrt{4a^2b^4} = \pm 2ab^2$
2. $\sqrt{25x^6y^8} = \pm 5x^3y^4$
3. $\sqrt[3]{27a^3b^9} = 3ab^3$
4. $\sqrt[3]{-8a^3b^6x^{12}} = -2ab^2x^4$
5. $\sqrt{64x^8y^{10}} = \pm 8x^4y^5$
6. $\sqrt[4]{16a^8b^{16}} = \pm 2a^2b^4$
7. $\sqrt[5]{x^{15}y^{20}z^{25}} = x^3y^4z^5$
8. $\sqrt[3]{-64a^3x^6y^{18}} = -4ax^2y^6$
9. $\sqrt[5]{-243m^5n^{15}} = -3mn^3$
10. $\sqrt{81x^6y^8z^{20}} = \pm 9x^3y^4z^{10}$
11. $\sqrt[3]{1.000x^9y^{18}} = 10x^3y^6$
12. $\sqrt[4]{81a^{12}b^{24}} = \pm 3a^3b^6$
13. $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}c^{30}} = \pm 2a^2b^3c^5$
14. $\sqrt{49a^{2n}b^{4n}} = \pm 7a^nb^{2n}$
15. $\sqrt[5]{-x^{5n}y^{10x}} = -x^ny^{2x}$

16. $\sqrt{\dfrac{9a^2}{25x^4}}=\pm\dfrac{3a}{5x^2}$

17. $\sqrt[3]{-\dfrac{27a^3}{64x^9}}=-\dfrac{3a}{4x^3}$

18. $\sqrt[5]{-\dfrac{a^5b^{10}}{32x^{15}}}=-\dfrac{ab^2}{2x^3}$

19. $\sqrt[4]{\dfrac{a^8}{81b^4c^{12}}}=\pm\dfrac{a^2}{3bc^3}$

20. $\sqrt[7]{\dfrac{128}{x^{14}}}=\dfrac{2}{x^2}$

21. $\sqrt{\dfrac{x^{2m}}{121y^{4n}}}=\pm\dfrac{x^m}{11y^{2n}}$

22. $\sqrt[3]{-\dfrac{125x^9}{216m^{12}}}=-\dfrac{5x^3}{6m^4}$

23. $\sqrt[9]{\dfrac{a^{18}}{b^9c^{27}}}=\dfrac{a^2}{bc^3}$

24. $\sqrt[10]{\dfrac{x^{20}}{1.024y^{30}}}=\pm\dfrac{x^2}{2y^3}$

RADICALES SEMEJANTES : *son radicales del mismo grado y que tienen la misma cantidad sub-radical o radicando.*

Así, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ y ½ $\sqrt{3}$ son radicales semejantes; $2\sqrt{3}$ y $5\sqrt{2}$ no son semejantes.

Los radicales semejantes son considerados como términos semejantes y con ellos se pueden realizar las mismas operaciones que con estos últimos (ver Reducción de Términos Semejantes pág. 2).

Así,

- $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$
- $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$
- $6\sqrt[3]{3aX^2} + 2\sqrt[3]{3aX^2} - 3\sqrt[3]{3aX^2} = 5\sqrt[3]{3aX^2}$
- $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

REDUCCIÓN DE RADICALES :

Reducir un radical es cambiar su forma sin cambiar su valor.

Simplificar un Radical : *Es reducirlo a su más simple expresión. Un radical está reducido a su más simple expresión cuando la cantidad sub-radical o radicando es entera y del menor grado posible.*

Para simplificar radicales debe tenerse muy presente que para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores, o sea :

$$\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\ \sqrt[n]{Y}.\ \sqrt[n]{Z}$$

En la simplificación de radicales consideraremos los dos casos siguientes :

Caso 1 : Cuando la cantidad sub-radical contiene factores cuyo exponente es divisible por el índice de la raíz :

Ejemplo 1 : ***Simplificar*** $\sqrt{9a^3}$

Primero se descompone la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos. separando los factores con los exponentes que sean divisibles por "2" (índice de esta raíz) :

$$\sqrt{9a^3} = \sqrt{3^2.a^2.a}$$

Para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores. o sea :

$$\sqrt{3^2.a^2.a} = \sqrt{3^2}.\ \sqrt{.a^2}.\ \sqrt{a}$$

Se calculan las raíces exactas y se dejan indicados los radicales irracionales :

$$\sqrt{3^2}.\ \sqrt{.a^2}.\ \sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$$

Ejemplo 2 : *Simplificar* $2.\sqrt{75X^4Y^5}$

Primero se descompone la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos. separando los factores con los exponentes que sean divisibles por "2" (índice de esta raíz) :

$$2.\sqrt{75X^4Y^5} = 2.\sqrt{3.\ 5^2.X^4.Y^4.Y}$$

Para extraer una raíz a un producto se extrae dicha raíz a cada uno de sus factores. o sea :

$$2.\sqrt{3.\ 5^2.X^4.Y^4.Y} = 2.\ \sqrt{5^2}\ .\ \sqrt{X^4}.\ \sqrt{Y^4}.\ \sqrt{3Y}$$

Se calculan las raíces exactas y se dejan indicados los radicales irracionales :

$$2.\ \sqrt{5^2}\ .\ \sqrt{X^4}.\ \sqrt{Y^4}.\ \sqrt{3Y} = 2*5*X^2*Y^2*\sqrt{3Y}$$

Se realiza la multiplicación de los números extraídos de las raíces :

$$2*5*X^2*Y^2*\sqrt{3Y} = \mathbf{10X^2Y^2\sqrt{3Y}}$$

Ejercicios :

1. $\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2}$

2. $3\sqrt{48}=3\sqrt{3\cdot 2^4}=3\cdot 2^2\ \sqrt{3}=12\sqrt{3}$

3. $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\cdot 2^3}=2\ \sqrt[3]{2}$

4. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{128}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2^6\cdot 2}=\frac{1}{2}\cdot 2^2\ \sqrt[3]{2}=2\ \sqrt[3]{2}$

5. $2\sqrt[4]{243}=2\sqrt[4]{3^4\cdot 3}=2\cdot 3\ \sqrt[4]{3}=6\ \sqrt[4]{3}$

6. $\sqrt{50a^2b}=\sqrt{2\cdot 5^2\,a^2b}=5a\sqrt{2b}$

7. $3\sqrt{81x^3y^4}=3\sqrt{9^2\cdot x^2xy^4}=3\cdot 9xy^2\ \sqrt{x}=27xy^2\ \sqrt{x}$

8. $\frac{1}{2}\sqrt{108a^5b^7}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3\cdot a^4ab^6b}$

$=\frac{2}{2}\cdot 3a^2b^3\ \sqrt{3ab}=3a^2b^3\ \sqrt{3ab}$

9. $\frac{3}{5}\sqrt{125mn^6}=\frac{3}{5}\sqrt{5^2\cdot 5mn^6}=\frac{3\cdot 5}{5}n^3\ \sqrt{5m}=3n^3\ \sqrt{5m}$

10. $2a\sqrt{44a^3b^7c^9}=2a\sqrt{2^2\cdot 11a^2ab^6bc^8c}$

$=2\cdot 2a\cdot ab^3c^4\ \sqrt{11abc}=4a^2b^3c^4=\sqrt{11abc}$

11. $2\ \sqrt[3]{16x^2y^7}$

$=2\ \sqrt[3]{2^3\cdot 2x^2y^6y}=2\cdot 2y^2\ \sqrt[3]{2x^2y}=4y^2\ \sqrt[3]{2x^2y}$

12. $\frac{2}{3}\ \sqrt[3]{27m^2n^8}$

$=\frac{2}{3}\ \sqrt[3]{3^3m^2n^6n^2}=\frac{2\cdot 3}{3}n^2\ \sqrt[3]{m^2n^2}=2n^2\ \sqrt[3]{m^2n^2}$

13. $5a\ \sqrt[3]{160x^7y^9z^{13}}$

$=5a\sqrt[3]{2^3\cdot 20x^6xy^9z^{12}z}$

$=5\cdot 2ax^2y^3z^4\ \sqrt[3]{20xz}=10ax^2y^3z^4\ \sqrt[3]{20xz}$

14. $\sqrt[4]{80a^4b^5c^{12}}=\sqrt[4]{2^4\cdot 5a^4b^4bc^{12}}=2abc^3\ \sqrt[4]{5b}$

15. $3\sqrt[4]{5x^8y^{14}z^{16}}=3\sqrt[4]{5x^8y^{12}y^2z^{16}}=3x^2y^3z^4\ \sqrt[4]{5y^2}$

16. $\frac{2}{5}\ \sqrt[5]{32x^2y^{11}}$

$=\frac{2}{5}\ \sqrt[5]{2^5x^2y^{10}y}=\frac{2\cdot 2}{5}\ y^2\ \sqrt[5]{x^2y}=\frac{4y^2}{5}\ \sqrt[5]{x^2y}$

17. $2xy\sqrt[3]{128x^2y^8}$

$=2xy\ \sqrt[3]{2^6\cdot 2x^2y^6y^2}$

$=2\cdot 2^2xyy^2\ \sqrt[3]{2x^2y^2}=8xy^3\ \sqrt[3]{2x^2y^2}$

18. $\frac{1}{3a}\sqrt{27a^3m^7}$

$=\frac{1}{3a}\sqrt{3^2\cdot 3a^2am^6m}=\frac{3am^3}{3a}\sqrt{3am}=m^3\ \sqrt{3am}$

19. $\frac{3}{5x}\sqrt[3]{375a^8b}$

$=\frac{3}{5x}\sqrt[3]{5^3\cdot 3a^6a^2b}=\frac{3\cdot 5a^2}{5x}\sqrt[3]{3a^2b}=\frac{3a^2}{x}\sqrt[3]{3a^2b}$

20. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{81a^4b}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{3^4a^4b}=\frac{3}{3}a\sqrt[4]{b}=a\sqrt[4]{b}$

21. $\sqrt{9a+18b}=\sqrt{9(a+2b)}=\sqrt{3^2(a+2b)}=3\sqrt{a+2b}$

22. $\sqrt{3a^3b^2-3a^2b^2}$

$=\sqrt{3a^2b^2(a-1)}=ab\sqrt{3(a-1)}=ab\sqrt{3a-3}$

23. $\sqrt{8x^2y^4+16xy^4}$

$=\sqrt{2^2\cdot 2xy^4(x+2)}=2y^2\sqrt{2x(x+2)}=2y^2\sqrt{2x^2+4x}$

24. $\sqrt{2x^2-4xy+2y^2}$

$=\sqrt{2(x^2-2xy+y^2)}=\sqrt{2(x-y)^2}=(x-y)\sqrt{2}$

25. $\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

$=\sqrt{(a-b)(a-b)(a+b)}$

$=\sqrt{(a-b)^2(a+b)}=(a-b)\sqrt{a+b}$

26. $\sqrt{2am^2+4amn+2an^2}$

$=\sqrt{2a(m^2+2mn+n^2)}=\sqrt{2a(m+n)^2}=(m+n)\sqrt{2a}$

27. $\sqrt{9a^3-36a^2+36a}$

$=\sqrt{3^2a(a^2-2a+4)}$

$=3\sqrt{a(a-2)^2}=3(a-2)\sqrt{a}=(3a-6)\sqrt{a}$

Cuando la cantidad sub-radical o radicando es una fracción y el denominador es irracional hay que multiplicar ambos términos de la fracción por la cantidad necesaria para que el denominador tenga raíz exacta.

<u>Ejemplos :</u>

1. $\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{5}{5^2}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$

2. $\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2}{8\cdot 2}}=\sqrt{\frac{6}{2^4}}=\frac{1}{2^2}\sqrt{6}=\frac{1}{4}\sqrt{6}$

3. $2\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}}=2\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{2}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}$

4. $3\sqrt{\frac{1}{6}}=3\sqrt{\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}}=3\sqrt{\frac{6}{6^2}}=\frac{3}{6}\sqrt{6}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$

5. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{3^2}}=\frac{1}{2\cdot 3}\sqrt{6}=\frac{1}{6}\sqrt{6}$

6. $\sqrt{\frac{a^2}{8x}}=\sqrt{\frac{a^2x}{2^2\cdot 2x^2}}=\frac{a}{2x}\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{a}{2x}\sqrt{\frac{2x}{2^2}}=\frac{a}{4x}\sqrt{2x}$

7. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{27y^3}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 2^2a^2y}{3^4y^4}}=\frac{3\cdot 2a}{2\cdot 3^2y^2}\sqrt{3y}=\frac{a}{3y^2}\sqrt{3y}$

8. $5\sqrt{\frac{9n}{5m^3}}=5\sqrt{\frac{3^2\cdot 5mn}{5^2m^4}}=\frac{5\cdot 3}{5m^2}\sqrt{5mn}=\frac{3}{m^2}\sqrt{5mn}$

9. $6\sqrt{\frac{5a^3}{24x^2}}=6\sqrt{\frac{5\cdot 6a^3}{2^4\cdot 3^2x^2}}=\frac{6}{2^2\cdot 3x}\sqrt{30a^2a}=\frac{a}{2x}\sqrt{30a}$

10. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 3^2}{3^3}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$

Caso 2 : ***Cuando los factores de la cantidad sub-radical y el índice de la raíz tienen un divisor común :***

Ejemplo 1 : ***Simplificar*** $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

Se descomponen los factores de la cantidad sub-radical o radicando en sus factores primos :

$$=\sqrt[4]{5^2a^2b^2}$$

Recordando lo estudiado en la pág. 90. Raíz de un producto de varios factores : $\sqrt[n]{XYZ} = \sqrt[n]{X}.\sqrt[n]{Y}.\sqrt[n]{Z}$ *y Raíz de una potencia :* $\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$ *se indica cada factor como una potencia :*

$$=5^{\frac{2}{4}}a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{2}{4}}$$

Se efectúa la división de los exponentes de cada factor:

$$=5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

Y por último se indican estas potencias como raíz :

$$=\sqrt{5ab}$$

Ejercicios :

1. $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
2. $\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$
3. $\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = 3^{\frac{3}{9}} = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$
4. $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
5. $3\sqrt[12]{64} = 3\sqrt[12]{2^6} = 3\cdot 2^{\frac{6}{12}} = 3\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$
6. $\sqrt[4]{25a^2b^2}$

   $=\sqrt[4]{5^2a^2b^2} = 5^{\frac{2}{4}}a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5ab}$
7. $5\sqrt[6]{49a^2b^4} = 5\sqrt[6]{7^2a^2b^4} = 5\cdot 7^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{7ab^2}$
8. $\sqrt[8]{81x^4y^8} = \sqrt[8]{3^4x^4y^8} = 3^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y = y\sqrt{3x}$
9. $\sqrt[10]{32x^{10}y^{15}}$

   $=\sqrt[10]{2^5x^{10}y^{15}} = 2^{\frac{1}{2}}xy^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{2y^3} = x\sqrt{2y^2y} = xy\sqrt{2y}$
10. $\sqrt[12]{64m^6n^{18}}$

    $=\sqrt[12]{2^6m^6n^{18}} = 2^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2mn^3} = \sqrt{2mn^2n} = n\sqrt{2mn}$
11. $\sqrt[6]{343a^9x^{12}}$

    $=\sqrt[6]{7^3a^9x^{12}} = 7^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}x^2 = x^2\sqrt{7a^3} = x^2\sqrt{7a^2a} = ax^2\sqrt{7a}$
12. $\sqrt[15]{m^{10}n^{15}x^{20}}$

    $=m^{\frac{2}{3}}nx^{\frac{4}{3}} = n\sqrt[3]{m^2x^4} = n\sqrt[3]{m^2x^3x} = nx\sqrt[3]{m^2x}$

INTRODUCCIÓN DE CANTIDADES BAJO EL SIGNO RADICAL : *Para introducir el coeficiente de un radical bajo el signo radical se eleva dicho coeficiente a la potencia que indica el índice del radical.*

1. $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{12}$
2. $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2\cdot 5} = \sqrt{45}$
3. $5a\sqrt{b} = \sqrt{(5a)^2b} = \sqrt{25a^2b}$
4. $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
5. $3a\sqrt{2a^2} = \sqrt{(3a)^2\cdot 2a^2} = \sqrt{9a^2(2a^2)} = \sqrt{18a^4}$

6. $5x^2y\sqrt{3}=\sqrt{\left(5x^2y\right)^2\,3}=\sqrt{\left(25x^4y^2\right)3}=\sqrt{75x^4y^2}$

7. $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

$$=\sqrt[3]{\left(ab^2\right)^3\left(a^2b\right)}=\sqrt[3]{\left(a^3b^6\right)\left(a^2b\right)}=\sqrt[3]{a^5b^7}$$

8. $4m\sqrt[3]{2m^2}=\sqrt[3]{(4m)^3\left(2m^2\right)}=\sqrt[3]{\left(64m^3\right)\left(2m^2\right)}=\sqrt[3]{128m^5}$

9. $2a\sqrt[4]{8ab^3}=\sqrt[4]{(2a)^4\left(8ab^3\right)}=\sqrt[4]{\left(16a^4\right)\left(8ab^3\right)}=\sqrt[4]{128a^5b^3}$

10. $(a+b)\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{(a+b)^2(a)}{a+b}}=\sqrt{(a+b)(a)}=\sqrt{a^2+ab}$

11. $(x+1)\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}=\sqrt{\dfrac{(x+1)^2\,2x}{x+1}}=\sqrt{(x+1)2x}=\sqrt{2x^2+2x}$

12. $(x-1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

$$=\sqrt{\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}}=\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

REDUCCIÓN DE RADICALES AL MÍNIMO COMÚN ÍNDICE : *Esta operación tiene por objeto convertir radicales de distinto índice en radicales equivalentes que tengan el mismo índice. Para ello se aplica la siguiente regla :*

Se halla el mínimo común múltiplo de los índices, que será el índice común, y se eleva cada cantidad sub-radical o radicando a la potencia que resulta de dividir el índice común entre el índice de su radical.

<u>Ejemplo :</u> Reducir al mínimo común índice $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{2}$.

Se halla el mínimo común múltiplo de los índices,

El m.c.m de los índices 2, 3, y 4 es 12. Este será el índice común.

Se divide este índice común (12) entre el índice de cada raíz :

Trabajando con $\sqrt{3}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "2" y me queda "6". Luego se coloca este "6" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{3^6}$$

Trabajando con $\sqrt[3]{5}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "3" y me queda "4". Luego se coloca este "4" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{5^4}$$

Trabajando con $\sqrt[4]{2}$ *: divido 12 entre el índice de la raíz que es "4" y me queda "3". Luego se coloca este "3" como potencia del sub-radical o radicando.*

$$\sqrt[12]{2^3}$$

Por último se calculan las potencias que quedan dentro de la raíz (cantidad sub-radical o radicando).

- $\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729}$
- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$
- $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$

Ahora podemos observar que las tres expresiones son radicales semejantes, todas son raíces de índice "12" , lo que facilita cualquier operación que tengamos que hacer con estas tres raíces.

Ejercicios :

1. $\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$

   $\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{4}$

2. $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{4}$

   $\sqrt[4]{3} \quad =\sqrt[4]{3}$

3. $\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729}$

   $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}$

   $\sqrt[4]{8}=\sqrt[12]{8^3}=\sqrt[12]{512}$

4. $\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}$

   $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$

   $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}$

   $\sqrt[6]{7}=\sqrt[12]{7^2}=\sqrt[12]{49}$

5. $\sqrt{5x}=\sqrt[6]{(5x)^3}=\sqrt[6]{125x^3}$

   $\sqrt[3]{4x^2y}=\sqrt[6]{(4x^2y)^2}=\sqrt[6]{16x^4y^2}$

   $\sqrt[6]{7a^3b} \quad =\sqrt[6]{7a^3b}$

6. $\sqrt[3]{2ab}=\sqrt[15]{(2ab)^5}=\sqrt[15]{32a^5b^5}$

   $\sqrt[5]{3a^2x}=\sqrt[15]{(3a^2x)^3}=\sqrt[15]{27a^6x^3}$

   $\sqrt[15]{5a^3x^2} \quad =\sqrt[15]{5a^3x^2}$

7. $\sqrt[4]{8a^2x^3}=\sqrt[12]{(8a^2x^3)^3}=\sqrt[12]{512a^6x^9}$

   $\sqrt[6]{3a^5m^4}=\sqrt[12]{(3a^5m^4)^2}=\sqrt[12]{9a^{10}m^8}$

8. $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[18]{(x^2)^6}=\sqrt[18]{x^{12}}$

   $\sqrt[6]{2y^3}=\sqrt[18]{(2y^3)^3}=\sqrt[18]{8y^9}$

   $\sqrt[9]{5m^7}=\sqrt[18]{(5m^7)^2}=\sqrt[18]{25m^{14}}$

9. $\sqrt[4]{3a}=\sqrt[20]{(3a)^5}=\sqrt[20]{243a^5}$

   $\sqrt[5]{2b^2}=\sqrt[20]{(2b^2)^4}=\sqrt[20]{16b^8}$

   $\sqrt[10]{7x^3}=\sqrt[20]{(7x^3)^2}=\sqrt[20]{49x^6}$

10. $2\sqrt[3]{a}=2\sqrt[12]{a^4}=2\sqrt[12]{a^4}$

    $3\sqrt{2b}=3\sqrt[12]{(2b)^6}=3\sqrt[12]{64b^6}$

    $4\sqrt[4]{5x^2}=4\sqrt[12]{(5x^2)^3}=4\sqrt[12]{125x^6}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES : *Se simplifican los radicales dados; se reducen los radicales semejantes y a continuación se escriben los radicales no semejantes con su propio signo.*

Si entendemos que los radicales semejantes pueden ser "tratados" como términos semejantes, resultará fácil realizar las operaciones de suma o resta aplicando lo ya estudiado en Reducción de términos semejantes pág. 2.

Ejercicios : *Simplificar : (Resueltos a partir de la página siguiente)*

1. $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}.$
2. $\sqrt{175}+\sqrt{243}-\sqrt{63}-2\sqrt{75}.$
3. $\sqrt{80}-2\sqrt{252}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}.$
4. $7\sqrt{450}-4\sqrt{320}+3\sqrt{80}-5\sqrt{800}.$
5. $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{8}{4}\sqrt{48}+\frac{1}{6}\sqrt{72}.$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}.$
7. $\frac{1}{7}\sqrt{147}-\frac{1}{5}\sqrt{700}+\frac{1}{10}\sqrt{28}+\frac{1}{3}\sqrt{2187}.$
8. $\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}.$
9. $\sqrt{\frac{9}{5}}-\sqrt{\frac{1}{6}}-\sqrt{\frac{1}{20}}+\sqrt{6}.$
10. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}-5\sqrt{\frac{1}{15}}+3\sqrt{\frac{1}{12}}.$
11. $5\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-5\sqrt{98}+\sqrt{\frac{1}{27}}.$
12. $2\sqrt{700}-15\sqrt{\frac{1}{45}}+4\sqrt{\frac{5}{16}}-56\sqrt{\frac{1}{7}}.$
13. $\sqrt{25ax^2}+\sqrt{49b}-\sqrt{9ax^2}.$
14. $2\sqrt{m^2n}-\sqrt{9m^2n}+\sqrt{16mn^2}-\sqrt{4mn^2}.$
15. $a\sqrt{320x}-7\sqrt{5a^2x}-(a-4b)\sqrt{5x}.$
16. $\sqrt{9x-9}+\sqrt{4x-4}-5\sqrt{x-1}.$

1. $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

$-\sqrt{27} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -3\sqrt{3}$

$-\sqrt{20} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -2\sqrt{5}$

Entonces:

$= 3\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

$= (3-2)\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$

2. $\sqrt{175} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = 5\sqrt{7}$

$\sqrt{243} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$

$-\sqrt{63} = -\sqrt{3^2 \cdot 7} = -3\sqrt{7}$

$-2\sqrt{75} = -2\sqrt{5^2 \cdot 3} = -10\sqrt{3}$

Entonces:

$= 5\sqrt{7} + 9\sqrt{3} - 3\sqrt{7} - 10\sqrt{3}$

$= (5-3)\sqrt{7} + (9-10)\sqrt{3} = 2\sqrt{7} - \sqrt{3}$

3. $\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$-2\sqrt{252} = -2\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = -2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{7} = -12\sqrt{7}$

$3\sqrt{405} = 3\sqrt{3^4 \cdot 5} = 3 \cdot 3^2\sqrt{5} = 27\sqrt{5}$

$-3\sqrt{500} = -3\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = -3 \cdot 2 \cdot 5\sqrt{5} = -30\sqrt{5}$

Entonces:

$= 4\sqrt{5} + 27\sqrt{5} - 30\sqrt{5} - 12\sqrt{7}$

$= (4+27-30)\sqrt{5} - 12\sqrt{7} = \sqrt{5} - 12\sqrt{7}$

4. $7\sqrt{450} = 7\sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2} = 7 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} = 105\sqrt{2}$

$-4\sqrt{320} = -4\sqrt{2^6 \cdot 5} = -4 \cdot 2^3\sqrt{5} = -32\sqrt{5}$

$3\sqrt{80} = 3\sqrt{2^4 \cdot 5} = 3 \cdot 2^2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

$-5\sqrt{800} = -5\sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 5^2} = -5 \cdot 2^2 \cdot 5\sqrt{2} = -100\sqrt{2}$

Entonces:

$= 105\sqrt{2} - 100\sqrt{2} - 32\sqrt{5} + 12\sqrt{5}$

$= (105-100)\sqrt{2} + (-32+12)\sqrt{5} = 5\sqrt{2} - 20\sqrt{5}$

5. $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3}$

$-\frac{1}{3}\sqrt{18} = -\frac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{2}$

$\frac{3}{4}\sqrt{48} = \frac{3}{4}\sqrt{2^4 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

$\frac{1}{6}\sqrt{72} = \frac{1}{6}\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2}$

Entonces:

$= \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} = (1+3)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

6. $\frac{3}{4}\sqrt{176} = \frac{3}{4}\sqrt{2^4 \cdot 11} = \frac{2^2 \cdot 3}{4}\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

$-\frac{2}{3}\sqrt{45} = -\frac{2}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} = -\frac{2 \cdot 3}{3}\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

$\frac{1}{8}\sqrt{320} = \frac{1}{8}\sqrt{2^6 \cdot 5} = \frac{2^3}{8}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$\frac{1}{5}\sqrt{275} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 \cdot 11} = \frac{5}{5}\sqrt{11} = \sqrt{11}$

Entonces:

$= 3\sqrt{11} + \sqrt{11} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$

$= (3+1)\sqrt{11} - (2+1)\sqrt{5} = 4\sqrt{11} - \sqrt{5}$

7. $\frac{1}{7}\sqrt{147} = \frac{1}{7}\sqrt{3 \cdot 7^2} = \sqrt{3}$

$-\frac{1}{5}\sqrt{700} = -\frac{1}{5}\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = -2\sqrt{7}$

$\frac{1}{10}\sqrt{28} = \frac{1}{10}\sqrt{2^2 \cdot 7} = \frac{1}{5}\sqrt{7}$

$\frac{1}{3}\sqrt{2.187} = \frac{1}{3}\sqrt{3^6 \cdot 3} = 9\sqrt{3}$

Entonces:

$= \sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{7} + \frac{1}{5}\sqrt{7}$

$= (1+9)\sqrt{3} + \left(-2 + \frac{1}{5}\right)\sqrt{7}$

$= 10\sqrt{3} - \frac{9}{5}\sqrt{7}$

8. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$-\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Entonces:

$= \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{5}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

9. $\sqrt{\frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{3^2\cdot 5}{5^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

$-\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{-\frac{6}{6^2}} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$

$-\sqrt{\frac{1}{20}} = -\sqrt{\frac{5}{2^2\cdot 5^2}} = -\frac{1}{10}\sqrt{5}$

$\sqrt{6} = \sqrt{6}$

Entonces:

$= \frac{3}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{6} + \sqrt{6}$

$= \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)\sqrt{5} + \left(-\frac{1}{6} + 1\right)\sqrt{6}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{6}\sqrt{6}$

10. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{15}{5^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$

$-5\sqrt{\frac{1}{15}} = -5\sqrt{\frac{15}{3^2\cdot 5^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{15}$

$3\sqrt{\frac{1}{12}} = 3\sqrt{\frac{3}{2^2\cdot 3^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Entonces:

$= \frac{1}{3}\sqrt{15} - \frac{1}{3}\sqrt{15} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

11. $5\sqrt{128} = 5\sqrt{2^6\cdot 2} = 40\sqrt{2}$

$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{3^2}} = -\frac{1}{9}\sqrt{3}$

$-5\sqrt{98} = -5\sqrt{7^2\cdot 2} = -35\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{1}{27}} = \sqrt{\frac{3}{3^4}} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$

Entonces:

$= 40\sqrt{2} - 35\sqrt{2} - \frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{9}\sqrt{3}$

$= (40 - 35)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

12. $2\sqrt{700} = 2\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 7} = 20\sqrt{7}$

$-15\sqrt{\frac{1}{45}} = -15\sqrt{\frac{5}{3^2\cdot 5^2}} = -\sqrt{5}$

$4\sqrt{\frac{5}{16}} = 4\sqrt{\frac{5}{2^4}} = \sqrt{5}$

$-56\sqrt{\frac{1}{7}} = -56\sqrt{\frac{7}{7^2}} = -8\sqrt{7}$

Entonces:

$= 20\sqrt{7} - 8\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{5}$

$= (20 - 8)\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$

13. $\sqrt{25ax^2} = \sqrt{5^2ax^2} = 5x\sqrt{a}$

$\sqrt{49b} = \sqrt{7^2b} = 7\sqrt{b}$

$-\sqrt{9ax^2} = -\sqrt{3^2ax^2} = -3x\sqrt{a}$

entonces:

$= 5x\sqrt{a} - 3x\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

$= (5x - 3x)\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

$= 2x\sqrt{a} + 7\sqrt{b}$

14. $2\sqrt{m^2n} = 2m\sqrt{n}$

$-\sqrt{9m^2n} = -\sqrt{3^2m^2n} = -3m\sqrt{n}$

$\sqrt{16mn^2} = \sqrt{2^4mn^2} = 4n\sqrt{m}$

$-\sqrt{4mn^2} = -\sqrt{2^2mn^2} = -2n\sqrt{m}$

Entonces:

$= 2m\sqrt{n} - 3m\sqrt{n} + 4n\sqrt{m} - 2n\sqrt{m}$

$= (2m - 3m)\sqrt{n} + (4n - 2n)\sqrt{m}$

$= -m\sqrt{n} + 2n\sqrt{m}$

15. $a\sqrt{320x} = a\sqrt{2^6\cdot 5x} = 8a\sqrt{5x}$

$-7\sqrt{5a^2x} = -7a\sqrt{5x}$

$-(a - 4b)\sqrt{5x}$

Entonces:

$= 8a\sqrt{5x} - 7a\sqrt{5x} - (a - 4b)\sqrt{5x}$

$= (8a - 7a - a + 4b)\sqrt{5x} = 4b\sqrt{5x}$

16. $\sqrt{9x - 9} = \sqrt{3^2(x - 1)} = 3\sqrt{x - 1}$

$\sqrt{4x - 4} = \sqrt{2^2(x - 1)} = 2\sqrt{x - 1}$

$-5\sqrt{x - 1}$

Entonces:

$= 3\sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 1} - 5\sqrt{x - 1}$

$= (3 + 2 - 5)\sqrt{x - 1} = 0$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES :

<u>Multiplicación de radicales del mismo índice :</u> *Se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales o radicandos entre sí, colocando este último producto bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.*

$$a\sqrt[n]{X}\,.\,b\sqrt[n]{Y} = ab\sqrt[n]{XY}$$

<u>Ejemplos :</u>

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}$

2. $5\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{3}=10\sqrt{63}=10\sqrt{3^2\cdot 7}=30\sqrt{7}$

3. $\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\frac{2}{7}\sqrt{21}=\frac{1}{7}\sqrt{294}=\frac{1}{7}\sqrt{7^2\cdot 6}=\sqrt{6}$

4. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{3^3\cdot 4}=3\sqrt[3]{4}$

5. $\frac{5}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 12\sqrt[3]{50}=10\sqrt[3]{750}=10\sqrt[3]{5^3\cdot 6}=50\sqrt[3]{6}$

6. $x\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{5a}=\frac{x}{a}\sqrt{10a^2}=x\sqrt{10}$

7. $5\sqrt{12}\cdot 3\sqrt{75}=15\sqrt{900}=15\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2}=450$

8. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{9a^2}\cdot 8\sqrt[3]{3ab}=6\sqrt[3]{27a^3b}=6a\sqrt[3]{3^3b}=18a\sqrt[3]{b}$

9. $3\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{35}=6\sqrt{2.940}=6\sqrt{2^2\cdot 7^2\cdot 15}=84\sqrt{15}$

10. $\frac{1}{2}\sqrt{21}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{42}\cdot\frac{3}{7}\sqrt{22}$
$=\frac{1}{7}\sqrt{19.404}=\frac{1}{7}\sqrt{2^2\cdot 7^2\cdot 3^2\cdot 11}=6\sqrt{11}$

11. $3\sqrt[3]{45}\cdot\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}\cdot 4\sqrt[3]{20}=2\sqrt[3]{13.500}=2\sqrt[3]{5^3\cdot 3^3\cdot 4}=30\sqrt[3]{4}$

12. $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{7}{8}}\cdot\frac{3}{5}\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$

13. $\frac{2}{x}\sqrt{a^2x}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^3}}=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{x}{a}}=\frac{3}{x}\sqrt{\frac{ax}{a^2}}=\frac{3}{ax}\sqrt{ax}$

14. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{y^2}}\cdot 6\sqrt{\frac{2}{y}}=2\sqrt{\frac{2x}{y^3}}=2\sqrt{\frac{2xy}{y^4}}=\frac{2}{y^2}\sqrt{2xy}$

<u>Multiplicación de radicales compuestos :</u> *El producto de un radical compuesto por uno simple se halla como el producto de un polinomio por un monomio pág. 12, y el producto de dos radicales compuestos se halla como el producto de dos polinomios pág. 14.*

<u>Ejemplos :</u>

1.
$$\begin{array}{l} \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ \hline =\sqrt{4}-\sqrt{6} \\ =\ 2-\sqrt{6} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} 7\sqrt{5}+5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \\ \hline =14\sqrt{15}+10\sqrt{9} \\ =14\sqrt{15}+30 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} 2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{15} \\ \hline =8\sqrt{45}+4\sqrt{75}-20\sqrt{30} \\ =4\left(2\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{5^2\cdot 3}-5\sqrt{30}\right) \\ =4\left(6\sqrt{5}+5\sqrt{3}-5\sqrt{30}\right) \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{4}\ -\ \sqrt{6} \\ \qquad +2\sqrt{6}-2\sqrt{9} \\ \hline =\sqrt{4}+\sqrt{6}\ -2\sqrt{9} \\ =\ 2+\sqrt{6}\ -6 \\ =\qquad \sqrt{6}-4 \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} \sqrt{5} + 5\sqrt{3} \\ 2\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \\ \hline 2\sqrt{25} + 10\sqrt{15} \\ \qquad + 3\sqrt{15} + 15\sqrt{9} \\ \hline = 2\sqrt{25} + 13\sqrt{15} + 15\sqrt{9} \\ = 10 + 13\sqrt{15} + 45 \\ = 55 + 13\sqrt{15} \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} 3\sqrt{7} - 2\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} + 4\sqrt{7} \\ \hline 15\sqrt{21} - 10\sqrt{9} \\ -8\sqrt{21} \qquad + 12\sqrt{49} \\ \hline = 7\sqrt{21} - 10\sqrt{9} + 12\sqrt{49} \\ = 7\sqrt{21} - 30 + 84 \\ = 7\sqrt{21} + 54 \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} \sqrt{a} - 2\sqrt{x} \\ 3\sqrt{a} + \sqrt{x} \\ \hline 3\sqrt{a^2} - 6\sqrt{ax} \\ \qquad + \sqrt{ax} - 2\sqrt{x^2} \\ \hline = 3\sqrt{a^2} - 5\sqrt{ax} - 2\sqrt{x^2} \\ = 3a - 5\sqrt{ax} - 2x \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} 7\sqrt{5} - 11\sqrt{7} \\ 5\sqrt{5} - 8\sqrt{7} \\ \hline 35\sqrt{25} - 55\sqrt{35} \\ \qquad - 56\sqrt{35} + 88\sqrt{49} \\ \hline = 35\sqrt{25} - 111\sqrt{35} + 88\sqrt{49} \\ = 175 - 111\sqrt{35} + 616 \\ = 791 - 111\sqrt{35} \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ \hline \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{10} \\ \quad -\sqrt{6} \qquad - \sqrt{9} - \sqrt{15} \\ \hline = \sqrt{4} \qquad + \sqrt{10} - \sqrt{9} - \sqrt{15} \\ = 2 \qquad + \sqrt{10} - 3 - \sqrt{15} \\ = \sqrt{10} - \sqrt{15} - 1 \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} \sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{5} \\ \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \\ \hline \sqrt{4} - 3\sqrt{6} + \sqrt{10} \\ \quad + 2\sqrt{6} \qquad - 6\sqrt{9} + 2\sqrt{15} \\ \qquad - \sqrt{10} \qquad + 3\sqrt{15} - \sqrt{25} \\ \hline = \sqrt{4} - \sqrt{6} \qquad - 6\sqrt{9} + 5\sqrt{15} - \sqrt{25} \\ = 2 - \sqrt{6} \qquad - 18 + 5\sqrt{15} - 5 \\ = 5\sqrt{15} - \sqrt{6} - 21 \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{5} \\ \sqrt{3} + \sqrt{6} + 3\sqrt{5} \\ \hline 2\sqrt{9} - \sqrt{18} + \sqrt{15} \\ \quad + 2\sqrt{18} \qquad - \sqrt{36} + \sqrt{30} \\ \qquad + 6\sqrt{15} \qquad - 3\sqrt{30} + 3\sqrt{25} \\ \hline = 2\sqrt{9} + \sqrt{3^2 \cdot 2} + 7\sqrt{15} - \sqrt{36} - 2\sqrt{30} + 3\sqrt{25} \\ = 6 + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{15} - 6 - 2\sqrt{30} + 15 \\ = 7\sqrt{15} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{30} + 15 \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{a+1} \\ \sqrt{a} + 2\sqrt{a+1} \\ \hline \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2+a} \\ \quad + 2\sqrt{a^2+a} + 2\sqrt{(a+1)^2} \\ \hline = \sqrt{a^2} + 3\sqrt{a^2+a} + 2\sqrt{(a+1)^2} \\ = a + 3\sqrt{a^2+a} + 2a + 2 \\ = 3a + 3\sqrt{a^2+a} + 2 \end{array}$$

Multiplicación de radicales de distintos índices : *Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) y se multiplican como radicales del mismo índice (pág. 99).*

Ejemplo 1 : Multiplicar $\sqrt{x}$ **por** $\sqrt[3]{2x^2}$

Primero se reducen los radicales a un índice común como lo explicamos en la pág. 95 :

$$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[6]{\left(2x^2\right)^2} = \sqrt[6]{4x^4}$$

Como ahora los dos radicales tienen el mismo índice ("6" en este caso), se multiplican como radicales del mismo índice (pág. 99).

$$\sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{4x^4} = \sqrt[6]{4x^7}$$
$$= \sqrt[6]{4x^6 x}$$
$$= x\sqrt[6]{4x}$$

Ejemplo 2 : Multiplicar $3\sqrt{2ab}$ **por** $4\sqrt[4]{8a^3}$

$$3\sqrt{2ab} = 3\sqrt[4]{(2ab)^2} = 3\sqrt[4]{4a^2b^2}$$

$$3\sqrt[4]{4a^2b^2} \cdot 4\sqrt[4]{8a^3} = 12\sqrt[4]{32a^5b^2}$$
$$= 12\sqrt[4]{2^4 \cdot 2a^4ab^2}$$
$$= 24a\sqrt[4]{2ab^2}$$

Ejemplo 3 : Multiplicar $\sqrt[3]{a^2b^2}$ **por** $2\sqrt[4]{3a^3b}$

$$\sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[12]{\left(a^2b^2\right)^4}$$
$$= \sqrt[12]{a^8b^8}$$

$$2\sqrt[4]{3a^3b} = 2\sqrt[12]{\left(3a^3b\right)^3}$$
$$= 2\sqrt[12]{27a^9b^3}$$

$$\sqrt[12]{a^8b^8} \cdot 2\sqrt[12]{27a^9b^3} = 2\sqrt[12]{27a^{17}b^{11}}$$
$$= 2\sqrt[12]{27a^{12}a^5b^{11}}$$
$$= 2a\sqrt[12]{27a^5b^{11}}$$

Ejemplo 4 : Multiplicar $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2b}{a}}$ **por** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2b}{a}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\left(\frac{2b}{a}\right)^3} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8b^3}{a^3}}$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{a^2}{4b^2}} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{2^2b^2}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt[6]{\frac{a^4}{2^4b^4}}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{2^3b^3}{a^3}} \cdot \frac{3}{8}\sqrt[6]{\frac{a^4}{2^4b^4}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{a}{2b}} = \frac{1}{4}\sqrt[6]{\frac{2^5ab^5}{2^6b^6}} = \frac{1}{8b}\sqrt{32ab^5}$$

División de radicales del mismo índice : *Se dividen los coeficientes entre sí y las cantidades sub-radicales o radicandos entre sí, colocando este último cociente bajo el signo radical común y se simplifica el resultado.*

$$\frac{a\sqrt[n]{X}}{b\sqrt[n]{Y}} = \frac{a}{b}\cdot\sqrt[n]{\frac{X}{Y}}$$

También es bueno aclarar que la raíz de una fracción equivale a la fracción de las raíces con el mismo índice :

$$\sqrt[n]{\frac{X}{Y}} = \frac{\sqrt[n]{X}}{\sqrt[n]{Y}}$$

Ejemplos *:*

1. $\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{6}{3}} = 2\sqrt{2}$

2. $\frac{2\sqrt{3a}}{10\sqrt{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3a}{a}} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$

3. $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3xy}}{\frac{3}{4}\sqrt{x}} = \frac{4}{6}\sqrt{\frac{3xy}{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{3y}$

4. $\frac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{75x^2y^3}{3xy}} = \frac{1}{5}\sqrt{25xy^2} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2xy^2} = y\sqrt{x}$

5. $\frac{3\sqrt[3]{16a^5}}{4\sqrt[3]{2a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16a^5}{2a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{8a^3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2^3a^3} = \frac{3}{2}a$

6. $\frac{\frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{10}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{15}{60}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2^2}} = \frac{1}{8}\sqrt{3}$

7. $\frac{4x\sqrt{a^3x^2}}{2\sqrt{a^2x^3}} = 2x\sqrt{\frac{a^3x^2}{a^2x^3}} = 2x\sqrt{\frac{a}{x}} = 2x\sqrt{\frac{ax}{x^2}} = 2\sqrt{ax}$

8. $\frac{\frac{2a}{3}\sqrt[3]{x^2}}{\frac{a}{3x^2}\sqrt[3]{x^3}} = \frac{6ax^2}{3a}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = 2x^2\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 2x^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = 2x\sqrt[3]{x^2}$

9. $\frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{6}{3}\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 2\sqrt[3]{\frac{3\cdot 2^2}{2^3}} = \sqrt[3]{12}$

División de radicales de distintos índices : *Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) y luego se dividen como radicales del mismo índice.*

Ejemplo 1 ***: Dividir*** $\sqrt{9x}$ ***entre*** $\sqrt[3]{3x^2}$

Se reducen los radicales al mínimo común índice (pág. 95) :

$$\sqrt{9x} = \sqrt[6]{\left(3^2x\right)^3} = \sqrt[6]{3^6x^3} = 3\sqrt[6]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[6]{\left(3x^2\right)^2} = \sqrt[6]{9x^4}$$

Como ya tienen el mismo índice (6) se efectúa la división de radicales del mismo índice explicada en esta misma página :

$$\frac{3\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{9x^4}} = 3\sqrt[6]{\frac{x^3}{9x^4}} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{9x}}$$

POTENCIACIÓN DE RADICALES (POTENCIA DE UNA RAÍZ) : *Para elevar un radical a una potencia se eleva a dicha potencia el coeficiente y la cantidad sub-radical o radicando, y se simplifica el resultado.*

$$\left(a\sqrt[n]{X}\right)^m = a^m\sqrt[n]{X^m}$$

Un radical elevado a un exponente igual al índice de la raíz equivale a la cantidad sub-radical o radicando.

$$\left(\sqrt[n]{X^m}\right)^n = X^m$$

Ejemplos :

1. $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2\sqrt{2^2} = 16\cdot 2 = 32$

2. $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 2^2\sqrt{3^2} = 4\cdot 3 = 12$

3. $\left(5\sqrt{7}\right)^2 = 5^2\sqrt{7^2} = 25\cdot 7 = 175$

4. $\left(2\sqrt[3]{4}\right)^2 = 2^2\sqrt[3]{2^4} = 4\sqrt[3]{2^3\cdot 2} = 8\sqrt[3]{2}$

5. $\left(3\sqrt[3]{2a^2b}\right)^4 = 3^4\sqrt[3]{\left(2a^2b\right)^4} = 81\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot a^3a^3a^2b^3b} = 162a^2b\sqrt{2a^2b}$

6. $\left(\sqrt[4]{8x^3}\right)^2 = \sqrt[4]{\left(2^3x^3\right)^2} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2^2x^4x^2} = 2x\sqrt[4]{2^2x^2} = 2x(2x)^{\frac{2}{4}}$

$$= 2x(2x)^{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{2x}$$

7. $\left(\sqrt[5]{81ab^3}\right)^3 = \sqrt[5]{\left(3^4ab^3\right)^3} = \sqrt[5]{3^5\cdot 3^5\cdot 3^2a^3b^5b^4} = 9b\sqrt[5]{9a^3b^4}$

8. $\left(\sqrt[6]{18}\right)^3 = \sqrt[6]{18^3} = (18)^{\frac{3}{6}} = (18)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

9. $\left(4a\sqrt{2x}\right)^2 = (4a)^2\sqrt{(2x)^2} = 16a^2(2x) = 32a^2x$

10. $\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 = 2^2\sqrt{(x+1)^2} = 4(x+1) = 4x+4$

11. $\left(3\sqrt{x-a}\right)^2 = 3^2\sqrt{(x-a)^2} = 9(x-a) = 9x-9a$

12. $\left(4\sqrt[6]{9a^3b^4}\right)^3$

$$= 4^3\sqrt[6]{\left(3^2a^3b^4\right)^3}$$

$$= 64\sqrt[6]{3^6a^6a^3b^6b^6}$$

$$= 192ab^2\sqrt[6]{a^3}$$

$$= 192ab^2(a)^{\frac{3}{6}} = 192ab^2(a)^{\frac{1}{2}} = 192ab^2\sqrt{a}$$

RADICACIÓN DE RADICALES (RAÍZ DE UNA RAÍZ) : *Para extraer una raíz a un radical se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz y se simplifica el resultado.*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{X}} = \sqrt[n.m]{X}$$

Ejemplos :

1. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[6]{a^2} = (a)^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = (2)^{\frac{3}{6}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

3. $\sqrt[4]{\sqrt{81}} = \sqrt[8]{3^4} = (3)^{\frac{4}{8}} = (3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

4. $\sqrt{\sqrt{3a}} = \sqrt[4]{3a}$

5. $\sqrt{\sqrt[3]{4a^2}} = \sqrt[6]{2^2a^2} = (2a)^{\frac{2}{6}} = (2a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2a}$

6. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = (2)^{\frac{3}{6}} = (2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

7. $\sqrt{\sqrt[4]{25a^2}} = \sqrt[8]{5^2a^2} = (5a)^{\frac{2}{8}} = (5a)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5a}$

8. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27a^3}} = \sqrt[12]{3^3a^3} = (3a)^{\frac{3}{12}} = (3a)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3a}$

9. $\sqrt{3\sqrt[5]{3}} = \sqrt{\sqrt[5]{3^5\cdot 3}} = \sqrt[10]{3^6} = (3)^{\frac{6}{10}} = (3)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$

10. $\sqrt[4]{\sqrt{a^4b^6}} = \sqrt[8]{a^4b^4b^2} = (ab)^{\frac{4}{8}}(b)^{\frac{2}{8}} = (ab)^{\frac{1}{2}}(b)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{ab}\cdot\sqrt[4]{b}$

$\Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt[4]{(ab)^2} = \sqrt[4]{a^2b^2}$

$= \sqrt[4]{a^2b^2}\ \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^2b^3}$

11. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}} = \sqrt[15]{x^{10}} = x^{\frac{10}{15}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

12. $\sqrt{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = \sqrt[6]{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{6}} = (a+b)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a+b}$

<u>Expresiones conjugadas :</u> *Dos expresiones que contienen radicales de segundo grado (raíz cuadrada) como $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ó $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$, que difieren solamente en el signo que une sus términos, se dice que son* **conjugadas**.

Así, la conjugada de $3.\sqrt{2}-\sqrt{5}$ *es* $3.\sqrt{2}+\sqrt{5}$

la conjugada de $5+\sqrt{3}$ *es* $5-\sqrt{3}$

El producto de dos expresiones conjugadas es racional; Así :

$(3.\sqrt{2}-\sqrt{5}).(3.\sqrt{2}+\sqrt{5}) = (3.\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2 = 18-5 = 13$

RACIONALIZACIÓN

<u>Racionalizar el denominador de una fracción:</u> *es convertir una fracción cuyo denominador sea irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional.*

Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador.

Se consideran dos casos :

<u>Caso 1 : Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es monomio :</u> *Se multiplican los dos términos de la fracción por el radical del mismo índice del denominador y que multiplicado por éste dé como producto una cantidad racional.*

<u>Ejemplo 1 :</u> **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{3}{\sqrt{2X}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por $\sqrt{2X}$ *y tenemos:*

$$\frac{3}{\sqrt{2X}} = \frac{3.\sqrt{2X}}{\sqrt{2X}.\sqrt{2X}} = \frac{3.\sqrt{2X}}{\sqrt{2^2X^2}} = \frac{3\sqrt{2X}}{2X} = \frac{3}{2X}\sqrt{2X}$$

<u>Ejemplo 2 :</u> **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$

$$\frac{2a}{\sqrt{2ax}}\cdot\frac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{2ax}} = \frac{2a\sqrt{2ax}}{\sqrt{2^2a^2x^2}} = \frac{2a\sqrt{2ax}}{2ax} = \frac{\sqrt{2ax}}{x}$$

<u>Ejemplo 3 :</u> **Racionalizar el denominador de** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}$

Como el denominador es una raíz con índice 3 se multiplicará por un radical que permita que una vez que se efectúe la multiplicación los factores de la cantidad sub radical o radicando queden elevados a la 3 cada uno para así sacarlos en forma entera de la raíz:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4a^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}}=\frac{5\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2^3a^3}}=\frac{5\sqrt[3]{2a}}{2a}$$

Ejemplo 4 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3^3x^3}}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{3x}$$

Caso 2 : Racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado : *Se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador (pág. 103) y se simplifica el resultado :*

Ejemplo 1 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador $1+\sqrt{2}$ *que es* $1-\sqrt{2}$ *y tenemos:*

$$\frac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{3-3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{1-\sqrt{2^2}}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{5-4\sqrt{2}}{-1}=4\sqrt{2}-5$$

Ejemplo 2 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

$$\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{20+5\sqrt{3}+8\sqrt{3}+2\sqrt{3^2}}{4^2-\sqrt{3^2}}$$

$$=\frac{20+13\sqrt{3}+6}{16-3}=\frac{26+13\sqrt{3}}{13}=2+\sqrt{3}$$

Ejemplo 3 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{2\sqrt{a}+\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2\sqrt{a}-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2\sqrt{a^2}-\sqrt{ax}+2\sqrt{ax}-\sqrt{x^2}}{2^2\sqrt{a^2}-\sqrt{x^2}}=\frac{2a+\sqrt{ax}-x}{4a-x}$$

Ejemplo 4 : **Racionalizar el denominador de** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x^2-x}+x-1}{x-(x-1)}=2x-1-2\sqrt{x^2-x}$$

Ejemplo 5 : Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+2)^2}+2\sqrt{x+2}\,\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}{\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{2^2}}$$

$$=\frac{x+2+2\sqrt{2x+4}+2}{x+2-2}=\frac{x+4+2\sqrt{2x+4}}{x}$$

Ejemplo 6 : Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}$

$$\frac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}+\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{(a+4)^2}-2\sqrt{a+4}\,\sqrt{a}+\sqrt{a^2}}{\sqrt{(a+4)^2}-\sqrt{a^2}}$$

$$=\frac{a+4-2\sqrt{a^2+4a}+a}{a+4-a}=\frac{2a+4-2\sqrt{a^2+4a}}{4}$$

$$=\frac{a+2-\sqrt{a^2+4a}}{2}$$

Para racionalizar el denominador de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que realizar dos veces la operación que hemos explicado anteriormente :

Ejemplo : Racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

Con el uso del paréntesis se separa el denominador de manera que quede coformado por un binomio y un monomio :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}$$

Luego se multiplican ambos miembros de la fracción por la comjugada de este "nuevo" denominador :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{6}}$$

$$\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{12}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{6}+3-6}=\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}$$

Como el denimonador presenta un radical irracional utilizo la conjugada de dicha expresión ;

$$\frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-1}\cdot\frac{2\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}+1}=$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+2+12+\sqrt{6}-4\sqrt{18}-2\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{6}\right)^2-1}=\frac{5\sqrt{6}+14-12\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{23}$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON RADICALES QUE SE REDUCEN A PRIMER GRADO :

Ejemplo 1 : **Resolver** $\sqrt{x-8}=2$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical :

$$\left(\sqrt{x-8}\right)^2=2^2$$

Una vez eliminado el radical se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita (pág. 40) :

$$x-8=4$$
$$x=12$$

Ejemplo 2 : **Resolver** $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación (izquierdo o derecho) :

$$\sqrt[3]{5x-2}=2$$

Como el radical es de grado 3 se elevan al cubo ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical y se resuelve la misma :

$$\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3=2^3$$
$$5x-2=8$$
$$5x=10$$
$$x=2$$

Ejemplo 3 : **Resolver** $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación (izquierdo o derecho), como en este caso hay dos radicales en el miembro de la izquierda, paso uno al miembro de la derecha teniendo cuidado de cambiarle el signo que está fuera del radical (los signos que están dentro de la raíz no cambian) :

$$\sqrt{x+10}=\sqrt{x+19}-1$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación para eliminar el radical y se resuelve la misma :

$$\left(\sqrt{x+10}\right)^2=\left(\sqrt{x+19}-1\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la diferencia de dos cantidades pág. 35).

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***menos*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$x+10=x+19-2\sqrt{x+19}+1$$
$$-10=-2\sqrt{x+19}$$
$$5=\sqrt{x+19}$$
$$5^2=\left(\sqrt{x+19}\right)^2$$
$$25=x+19$$
$$6=x$$

Ejemplo 4 : **Resolver** $\sqrt{18x-8}-\sqrt{2x-4}-2\sqrt{2x+1}=0$

Para facilitar la eliminación de los radicales se recomienda, cuando sea posible, aislarlo en alguno de los dos miembros de la ecuación *(izquierdo o derecho), como en este caso hay tres radicales en el miembro de la izquierda, paso uno o dos al miembro de la derecha teniendo cuidado de cambiarle el signo que está fuera del radical (los signos que están dentro de la raíz no cambian) :*

Una vez separados los radicales, uno en un miembro y dos en el otro, elevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación :

$$\left(\sqrt{18x-8}\right)^2=\left(\sqrt{2x-4}+2\sqrt{2x+1}\right)^2$$

El radical del miembro izquierdo se elimina directamente, pero el miembro de la derecha se resuelve como un producto notable (cuadrado de la suma de dos cantidades pág. 35).

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al ***cuadrado*** *de la primera cantidad* ***más*** *el doble producto de la primera cantidad por la segunda* ***más*** *el cuadrado de la segunda cantidad.*

$$18x-8=2x-4+4\sqrt{4x^2-6x-4}+4\left(2x+1\right)$$

Simplificando la ecuación:

$$18x-8=10x+4\sqrt{4x^2-6x-4}$$

$$8x-8=4\sqrt{4x^2-6x-4}$$

$$2x-2=\sqrt{4x^2-6x-4}$$

Notamos que el miembro de la derecha es un radical de grado dos, luego puedo eliminarlo elevando ambos miembros al cuadrado :

$$\left(2x-2\right)^2=\left(\sqrt{4x^2-6x-4}\right)^2$$

$$4x^2-8x+4=4x^2-6x-4$$

$$-2x=-8$$

$$x=4$$

Ejemplo 4 : ***Resolver*** $\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$

$$\left(\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$9x+10-4\sqrt{9x^2+37x+30}+4\left(x+3\right)=x-2$$

$$13x+22-x+2=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$

$$12x+24=4\sqrt{9x^2+37x+30}$$

$$3x+6=\sqrt{9x^2+37x+30}$$

$$\left(3x+6\right)^2=\left(\sqrt{9x^2+37x+30}\right)^2$$

$$9x^2+36x+36=9x^2+37x+30$$

$$36-30=37x-36x$$

$$6=x$$