POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Recordemos en primer lugar algunas definiciones y propiedades de la potenciación y de la radicación de números reales:

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

- Potencia de exponente cero : $a^0 = 1$ por definición, siendo $a \neq 0$
- Potencia de exponente uno: $a^1 = a$
- Potencia de exponente negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (siendo a $\neq$ 0)
- Potencia de otra potencia: $\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$
- Producto de potencias de igual base: $a^n . a^m = a^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Distributiva respecto de la multiplicación: $\left(a.b\right)^n = a^n . b^n$
- Distributiva respecto de la división: $\left(a:b\right)^n = a^n : b^n$
- Toda potencia de exponente fraccionario se puede expresar como raíz:
  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Siempre que las raíces indicadas existan, entonces se cumplen las siguientes propiedades

- La radicación puede expresarse como potencia de exponente fraccionario:
  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- Raíz de raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
- Distributiva respecto de la multiplicación: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$
- Distributiva respecto de la división: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
- Simplificación de índices: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$; Ej: $\sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5}$; $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3}$
- Eliminación del radical:

  a) $\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow n$ es impar Ej: $\sqrt[5]{2^5} = 2$; $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

  b) $\sqrt[n]{a^n} = |a| \Leftrightarrow n$ es par Ej: $\sqrt[4]{6^4} = |6| = 6$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$

Ejercicios

1) Exprese las potencias como raíz y las raíces como potencias

a) $8^{\frac{2}{3}} =$ b) $2^{\frac{2}{5}} =$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} =$ d) $5^{\frac{4}{3}} =$ e) $y^{-\frac{5}{3}} =$ f) $(3m)^{-\frac{1}{4}} =$

g) $\sqrt[7]{3^3} =$ h) $\sqrt{a^3} =$ i) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} =$ j) $\sqrt[4]{\frac{1}{5}} =$

2) Evalúe las siguientes expresiones:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{\sqrt{625}}$ c) $\sqrt{144+25}$

d) $(-64)^{-\frac{2}{3}}$ e) $\left(-\frac{125}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ f) $\sqrt[5]{(-243)^2} \cdot 49^{-\frac{1}{2}}$

g) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$ h) $\left(\frac{32}{49} - \frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$

3) Halla la mínima expresión, aplicando las propiedades de la radicación.

a) $\sqrt{a^3}.\sqrt{a}.\sqrt{a^4} =$ b) $\sqrt[3]{x^2.z^5}\ .\ \sqrt[3]{x^7.z} =$

c) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) =$ d) $\left(\sqrt{5}+\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right) =$

e) $\left(\sqrt{3}+4\right)^2 =$ f) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 =$

g) $(x+5)^2 =$ h) $(3-x)^2 =$

i) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)^2 =$ j) $(2x+4)^2 =$

k) $\left(2+x^3\right)^2 =$ l) $(5+x)^3 =$

m) $(2-3x)^3 =$

INTERVALOS REALES

El Conjunto de los números reales está formado por los números racionales y los irracionales. Los números reales se representan en una recta numérica llamada recta real.
Si a y b son dos números reales ($a < b$) , llamamos ***INTERVALO*** a todo subconjunto de números reales que cumplen con las siguientes condiciones, siendo a y b los extremos del mismo:

***A) INTERVALO CERRADO* [*a;b*]** es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b.

En símbolos: $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$
Se representa en la recta numérica gráficamente mediante un segmento

Ejemplo: $[-2;5] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 \leq x \leq 5\}$

***B) INTERVALO ABIERTO* (a;b)** es el conjunto de todos los números reales que son mayores que a y menores que b.

En símbolos: $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$
Se representa en la recta numérica gráficamente mediante un segmento, sin los extremos.

Ejemplo: $\left(-3;\frac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$

***C) INTERVALO SEMIABIERTO A LA DERECHA* [*a;b*)** es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que a y menores b.

En símbolos: $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$
Se representa en la recta numérica gráficamente mediante un segmento, sin el extremos derecho.

Ejemplo: $[-5;1) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -5 \leq x < 1\}$

***D) INTERVALO SEMIABIERTO A LA IZQUIERDA* (*a;b*]** es el conjunto de todos los números reales que son mayores que a y menores o iguales que b.

En símbolos: $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$
Se representa en la recta numérica gráficamente mediante un segmento, sin el extremo izquierdo.

Ejemplo: $\left(-\frac{3}{2};4\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ -\frac{3}{2} < x \leq 4\right\}$

E) También son intervalos de números reales los siguientes subconjuntos, llamados **INFINITOS O NO ACOTADOS**.

M = $\{ x \in \mathbb{R} \ / x > a \} = (a; +\infty)$ ______________

N = $\{ x \in \mathbb{R} \ / x < a \} = (-\infty ; a)$ ______________

A = $\{ x \in \mathbb{R} \ / x \geq a \} = [a; +\infty)$ ______________

B = $\{ x \in \mathbb{R} \ / x \leq a \} = (-\infty ; a]$ ______________

Estos subconjuntos de números reales se representan mediante semirrectas.

Ejemplos:

$(-3;+ \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$ ______________________

$(-\infty ; 5) = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$ ______________________

$[-7; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -7\}$ ______________________

$(-\infty ; 6] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 6\}$ ______________________

NOTA: al conjunto de los números reales se lo puede escribir como el intervalo $(-\infty ; +\infty)$

<u>Ejercicios</u>

1) Escriba cada uno de los intervalos reales

a) A = $\{x \in \mathbb{R} / x < -2{,}8\}$

b) C = $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 3{,}5\}$

c) E = $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2{,}5\}$

d) B = $\{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7\}$

e) D = $\{x \in \mathbb{R} / -4{,}5 \leq x < -1{,}3\}$

f) F = $\left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{3}{2}\right\}$

2) Represente cada uno de los intervalos sobre la recta real.

a) M = (-3,5; 0,5)

____

b) P = (-∞; 0,25]

____

c) T = (1,25;0]

____

d) S = $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$

____

MÓDULO O VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

El módulo o valor absoluto de un número real, geométricamente es la distancia entre el número y cero.
Ejemplo:

*El 5 está a 5 unidades del cero

*El – 3,5 está a 3,5 unidades del cero

*El 0 está a 0 unidades con respecto a si mismo

En símbolos: $|5| = 5$; $|-3{,}5| = 3{,}5$; $|0| = 0$

Generalizando: $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Es decir el módulo o valor absoluto de un número positivo o del cero es el mismo número, pero para los números negativos es el opuesto del número dado.

Propiedades

a) $|x| \geq 0$ * $|2| = 2 > 0$; $|-3| = 3 > 0$; $|0| = 0$

b) $|x| = |-x|$ * $|4| = 4 \wedge |-4| = 4$

c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ * $\left.\begin{array}{l} |2 + 3| = |5| = 5 \\ |2| + |3| = 2 + 3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow |2 + 3| = |2| + |3|$

* $\left.\begin{array}{l} |-3 + 7| = |4| = 4 \\ |-3| + |7| = 3 + 7 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow |-3 + 7| < |-3| + |7|$

d) $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$ * $\left.\begin{array}{l} |5 \,.\, (-2)| = |-10| = 10 \\ |5| \,.\, |(-2)| = 5 \,.\, 2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow |5 \,.\, (-2)| = |5| \,.\, |-2|$

e) $|x| < a \quad (a > 0) \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a; a)$

$-a \qquad 0 \qquad a$

$|x| \leq a \quad (a > 0) \Rightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow x \in [-a; a]$

$-a \qquad 0 \qquad a$

Ejemplos

$|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \Rightarrow x \in (-4; 4)$
$|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-4; 4]$

f) $|x| > a \quad (a > 0) \Rightarrow x > a \lor x < -a \Rightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$

$-a \qquad 0 \qquad a$

$x < -a \qquad\qquad x > a$

$|x| \geq a \quad (a > 0) \Rightarrow x \geq a \lor x \leq -a \Rightarrow x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$

$-a \qquad 0 \qquad a$

$x \leq -a \qquad\qquad x \geq a$

Ejemplos

$|x| > 6 \Rightarrow x > 6 \lor x < -6 \Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$

$|x| \geq 6 \Rightarrow x \geq 6 \lor x \leq -6 \Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$

Ejercicios

1) Efectúe los cálculos:

a) $|4-8| + |-5+11| - |-9| =$

b) $|-7| \,.\, |6-12| - |(-2) \,.\, (-9+4)| =$

2) Complete con < , > o = según corresponda

a) $|-14|.......|14|$ b) $|-54+11|.......|-54|+|11|$ c) $|-18-7|.......|-18|-|7|$

d) $|-5-(-41)|.......|-5|+|-41|$ e) $|8{,}1-(3{,}7)|.......|8{,}1|-|-3{,}7|$

3) Escribe el conjunto de valores que verifican las siguientes igualdades.

a) $|x| < 3$

b) $|x| \leq 0{,}1$

c) $|x| > 6{,}2$

d) $|x| \geq 3$

4) Grafica sobre la recta real los conjuntos de números reales que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) $|x| < 4 \land x \geq 0$

c) $|x| \geq 1{,}2 \land x < 0$

b) $|x| > 5 \land x > 0$

d) $|x| \leq 1 \land x > 0$