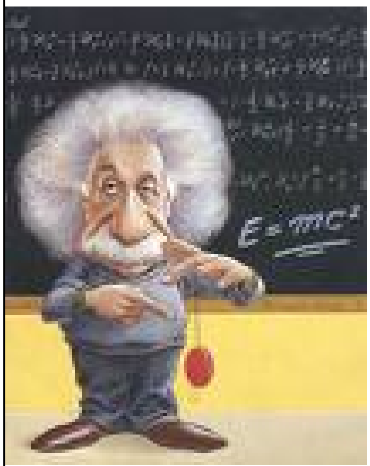
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803	**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES** **SEMILLERO DE MATEMÁTICAS**	**GRADO: 7** **TALLER Nº: 7** **SEMESTRE 2**

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE ENTEROS

RESEÑA HISTÓRICA



Albert Einstein (14 de marzo de 1879 - 18 de abril de 1955) fue un físico alemán. Es el científico más conocido e importante del siglo XX.

En 1905, siendo un joven físico desconocido, empleado en la Oficina de Patentes de Berna (Suiza), publicó su Teoría de la Relatividad Especial... Probablemente, la ecuación de la física más conocida a nivel popular es la expresión matemática de la equivalencia masa-energía, $E=mc^2$, deducida por Einstein como una consecuencia lógica de esta teoría. Ese mismo año publicó otros trabajos que sentarían algunas de las bases de la física estadística y la mecánica cuántica.

En 1915 presentó la Teoría General de la Relatividad, en la que reformuló por completo el concepto de gravedad.

Una de las consecuencias fue el surgimiento del estudio científico del origen y evolución del Universo por la rama de la física denominada cosmología. Muy poco después, Einstein se convirtió en un icono popular de la ciencia alcanzando fama mundial, un privilegio al alcance de muy pocos científicos.

Obtuvo el Premio Nobel de Física en 1921 por su explicación del efecto fotoeléctrico y sus numerosas contribuciones a la física teórica

- **OBJETIVO GENERAL**
  Efectuar operaciones de potenciación sobre expresiones expresiones que involucren radicales.

- **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**
  - Entender el concepto de radicación y potenciación de un número entero
  - Aplicar las propiedades de la potenciación a la solución de ejercicios y problemas en diversos contextos.

- **PALABRAS CLAVES**
  Número entero, potenciación, radical, radicación, base, exponente.

➢ DESARROLLO TEÓRICO

POTENCIA DE ENTEROS

La **potenciación** es una operación matemática, que se escribe como a^n, y que se lee "a elevado a n", que involucra dos números: la base *a* y el exponente *n*.

La potenciación corresponde a una multiplicación de varios factores iguales: el exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.
Por ejemplo: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
En general:

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n},$$

Cuando el exponente es un entero negativo -p, entonces

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÒN

Las propiedades de la potenciación son las que permiten resolver por diferentes métodos una potencia. Estas son:

1. **POTENCIA DE EXPONENTE 0:** Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1

   $$a^0 = 1 \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

   Ejemplo: $5^0 = 1$

2. **Potencia de exponente 1:** Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

   $$a^1 = a$$

   Ejemplo: $54^1 = 54$

3. **Producto de potencias de igual base:** El producto de dos o más potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la suma de los correspondientes exponentes. Se coloca la misma base y se suman los exponentes:

   $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

   Ejemplos: $9^3 \cdot 9^2 = 9^{3+2} = 9^5$

4. **Cociente de potencias de igual base:** la división de dos potencias de igual base a es igual a la potencia de base a y exponente igual a la resta de los exponentes respectivos. Se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo: $\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

5. **Potencia de un producto:** La potencia de un producto de base (a·b) y de exponente "n" es igual a la potencia "a" a la "n" por "b" a la "n". Cada base se multiplica por el exponente.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplo: $(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 125 = 3375$

6. **Potencia de una potencia:** La potencia de una potencia de base a es igual a la potencia de base a elevada a la multiplicación de ambos exponentes. Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. Así se obtiene esta potencia

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

7. **Propiedad distributiva:** La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división, pero no lo es con respecto a la suma ni a la resta.

   Es distributiva con respecto a la multiplicación y división:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

- **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Exprese en forma de potencia

a) $2^3 x 2^5$ b) $(-3)^5(-3)^4$ c) $(x^5)^3$ d) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$ e) $5^7 / 5^3$

f) $(5^3)^4$ g) $[(5^3)^4]^2$ h) $2^7 / 2^6$ i) $(4 \cdot 2 \cdot 3)^4$

2. Realizar las siguientes operaciones con potencia

a. $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$
b. $(-8) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^0 (-2)$
c. $(-2)^{-2} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$
d. $2^2 / 2^3$
e. $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$

3. Realizar las siguientes operaciones con potencia

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e. $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} =$

4. Al multiplicar potencias de igual base
A) Se multiplican los exponentes
B) Se restan los exponentes
C) Se suman los exponentes
D) Se dividen los exponentes

5. Al dividir potencias de igual base
A) Se dividen los exponentes
B) Se suman los exponentes
C) Se restan los exponentes
D) Se multiplican los exponentes

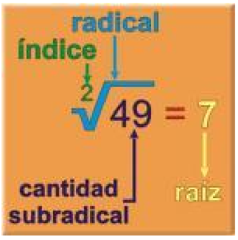
6. Al elevar una potencia a otra potencia
A) Se multiplican los exponentes
B) Se suman los exponentes
C) Se dividen los exponentes
D) Se restan los exponentes

RADICACION DE ENTEROS

La radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación, cuyo objetivo es encontrar la base de la potencia conociendo la potencia y el exponente.

RAIZ DE UN NÚMERO ENTERO

Los términos que intervienen en la radicación son: el índice, la cantidad subradical, el radical (símbolo de la radicación y la raíz (el resultado buscado).



Cuando se expresa un radical con índice 2, se llama raíz cuadrada y no se escribe el índice en la expresión radical.

Ejemplo:

$\sqrt{100} = 10 \; ya \; que \; 10^2 = 100$

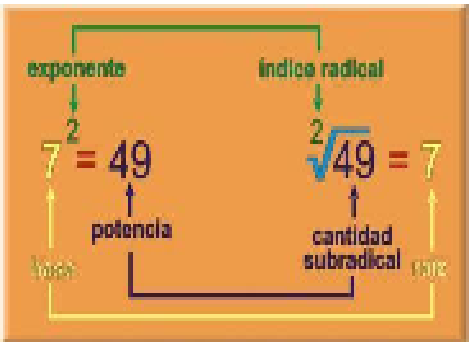
$\sqrt{4} = 2 \; ya \; que \; 2^2 = 4$

Si el índice del radical 3, se llama raíz cúbica.

$\sqrt[3]{8} = 3 \quad ya \; que \; 3^3 = 8$

$\sqrt[3]{1000} = 10 \; ya \; que \; 10^3 = 1000$

Veamos la relación entre potenciación y radicación:



PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

1. **RAIZ DE UN PRODUCTO**:

La raíz de un producto es igual al producto de la raíces, siempre que estas existan.

Ejemplo:

$$\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=3\times4=12$$

2. **RAIZ DE UN COCIENTE**:

La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces, siempre que estas existan.

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{2}{3}$$

3. RAIZ DE UNA RAIZ:

Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva la cantidad sub-radical.

Ejemplo

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[21]{5}$$

4. POTENCIA DE UNA RAIZ

Para elevar una raíz a una potencia, se conserva el índice y es elevado sólo la cantidad subradical.

Ejemplo:

$\left(\sqrt[4]{3}\right)^8 = \sqrt[4]{3^8}$

➢ EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para cada potencia escribe la expresión radical que resulta

$a)\ 3^9 = 19683$

$b)\ 12^2 = 144$

$c)\ 5^5 = 3125$

$d)\ 10^8 = 100000000$

$e)\ 6^3 = 216$

2. ¿Qué número elevado a 5 es 243?
3. ¿Qué número elevado a 3 es -216?

4. Las raíces cuadradas de 36 son

A) 6 y -6 B) 6^2 y 6^{-2} C) -6^2 y 6^2 D) 36 y -36

5. ¿Entre cuales dos números enteros se encuentran las siguientes raíces cuadradas?
   a. raíz cuadrada de siete.
   b. raíz cuadrada de quince.
   c. raíz cuadrada de cuarenta y ocho.

6. Escribe en forma de potencia las siguientes raíces.

   a. raíz cúbica de dieciséis.
   b. raíz octava de nueve.
   c. raíz cuadrada de ocho mil.
   d. raíz doceava de tres.

7. Un campo de golf es de forma cuadrada. Sabiendo que el área de este es 4096 m² ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado que lo forma?

8. Resuelva las siguientes operaciones utilizando las propiedades de la radicación

   a. $\sqrt{\frac{25}{36}}$ b. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ f. $\sqrt[5]{\frac{a^5}{b^5}}$ g. $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$

h. $\sqrt{\frac{4}{25}} \div \sqrt{\frac{25}{4}}$ i. $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \times \sqrt[4]{\frac{625}{81}}$ j. $\sqrt[3]{\frac{27}{216}} + \sqrt{\frac{25}{36}}$

9. Desarrolla los siguientes polinomios aritméticos utilizando las propiedades de la radicación y la potenciación

a. $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left[\frac{1}{2^4} + \sqrt{\frac{4}{9}}\right]\right\}$ **b.** $\left\{2\left[\sqrt{\frac{1}{9}} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)\right\}$

10. Calcula las siguientes potencias:

a. $\frac{2^8}{4^{17}}$ b. $\frac{3^8}{9^{20}}$ c. $\frac{\left(\sqrt{125}\right)^{100}}{5^{99}\left(\sqrt{5}\right)^{98}}$ d. $\frac{\left(\sqrt[3]{16}\right)^{30}}{2^{32}\left(\sqrt[3]{2}\right)^{30}}$ e. $\frac{\left(\sqrt[4]{32}\right)^{15}}{2^{14}\left(\sqrt[4]{2}\right)^{11}}$

➢ PEQUEÑOS RETOS

1. A un experto joyero le llevan cuatro trozos de cadena, de tres eslabones cada uno, para que los una formando una pulsera. "Para ello, dijo el joyero, tendré que cortar cuatro eslabones, uno de cada trozo, para engarzar los trozos y soldar a continuación cada eslabón cortado. Tendré, en definitiva, que hacer cuatro cortes y cuatro soldaduras". Pero la persona que le encarga el trabajo dice: "No, no es necesario hacer cuatro empalmes. Puede formarse la pulsera con solo tres". ¿Cómo podría hacerse esto?

2. El inspector cero solía ir a la audiencia para observar los juicios. De esta forma ponía a prueba su capacidad de razonamiento. Uno de los casos con los que se encontró es el siguiente:

Tenemos cuatro acusados: A, B, C y D. Se establecieron los siguientes hechos:

- Si A es culpable, entonces B era cómplice.
- Si B es culpable, entonces o bien C era cómplice o bien A es inocente.
- Si D es inocente, entonces A es culpable y C inocente.
- Si D es culpable, también lo es A.

¿Quiénes son inocentes y quiénes culpables?

a) Todos son culpables b) B y C son culpables c) A y D son culpable

3. Hechos:

1: Tenemos 5 casas de 5 diferentes colores (cada casa de un color).
2: En cada casa vive una persona con nacionalidad diferente.
3: Estos 5 dueños beben una bebida diferente, fuman una cierta marca y tienen alguna mascota.
4: Ningún dueño tiene la misma mascota, fuma la misma marca o bebe el mismo tipo de bebida que otro.

Detalles:

1: El Ingles vive en la casa Roja.
2: La mascota del Sueco es un perro.
3: El Danés bebe té.
4: La casa verde es la inmediata de la izquierda de la casa blanca.
5: El dueño de la casa verde toma café.
6: La persona que fuma Pall Mall cría pájaros.
7: El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
8: El hombre que vive en la casa del centro toma leche.
9: El Noruego vive en la primera casa.
10: La persona que fuma Blend vive junto a la que tiene gatos.
11: El hombre que tiene caballos vive junto al hombre que fuma Dunhill.
12: La persona que fuma Blue Master bebe cerveza.
13: El alemán fuma Prince.
14: El Noruego vive junto a la casa azul.
15: El hombre que fuma Blend tiene un vecino que bebe agua.

La pregunta es... ¿QUIEN TIENE POR MASCOTA AL PESCADO?

a) El alemán   b) El ingles   c) El sueco   d) El danés   e) El noruego

4. Un pastor tiene que pasar un lobo, una cabra y una lechuga a la otra orilla de un río, dispone de una barca en la que solo caben él y una de las otras tres cosas. Si el lobo se queda solo con la cabra se la come, si la cabra se queda sola con la lechuga se la come, ¿cómo debe hacerlo?