Matemáticas
de
4º CURSO
de
Educación Secundaria Obligatoria

Trigonometría I
Razones trigonométricas

Por Javier Carroquino Cañas
Catedrático de matemáticas
del
I.E.S. Siete Colinas

Ceuta 2010

Trigonometría
Razones trigonométricas

Javier Carroquino Cañas

Matemáticas

▼▲▼

4º de Educación Secundaria Obligatoria

TRIGONOMETRÍA
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Por

Javier Carroquino Cañas

Catedrático de matemáticas

I.E.S. Siete Colinas (Ceuta)

Departamento de Matemáticas

Ceuta 2010

I.E.S. Siete Colinas (Departamento de Matemáticas)
Trigonometría I
Razones trigonométricas

Depósito Legal : CE−

ISBN :

Número de Registro :

Ceuta 2010

Prólogo

El término ***trigonometría*** proviene de las palabras griegas ***trígonon*** (triángulo) y ***métron*** (medida) y podemos considerar que es la parte de la **geometría** que trata de establecer y estudiar las relaciones métricas entre los lados y ángulos de los triángulos.

Esta disciplina surgió con la necesidad de resolver problemas relacionados con los elementos de un triángulo (lados y ángulos) tanto planos como esféricos. Tanto Aristarco de Samos como Hiparco, astronomos griegos anteriores a Cristo, establecieron una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo, lo que llamamos *razones trigonométricas*, que constituyen la base de la trigonometría.

La trigonometría, tanto plana como esférica, es de especial importancia y útil en topografía, cartografía, navegación marítima y aérea, astronomía, construcción, mecánica, diseños gráficos, etc. Es un ejemplo claro de la aplicación de la ciencia matemática a la resolución de problemas reales.

Confiamos en que estas páginas sirvan para la formación de futuros técnicos en diversos campos.

Índice

Página

Trigonometría
Razones trigonométricas

1.Introducción.-

Para iniciar con éxito el estudio de este tema es conveniente que el alumno repase y recuerde todo lo relativo a ángulos en el plano, igualdades de ángulos, sus unidades de medida, tipos, operaciones con ángulos, tanto analítica como gráficamente, así como las cuestiones más elementales sobre triángulos. Conviene, además, adquirir o recuperar una destreza elemental en el uso de escuadra, cartabón y compás. No obstante, iniciaremos este tema con un breve repaso sobre ángulos. Por último, el uso de una calculadora científica es cuestión obligada para el normal desarrollo del aprendizaje de esta unidad.

2.Ángulo.-

Sea $\mathscr{P}$ un plano. Recordemos que un plano es una figura espacial infinita, abstracta y no tangible (no se ve ni se toca). En general asociamos la idea de plano (o parte un plano) a una superficie lisa, como por ejemplo un folio, la pizarra, el suelo de un salón, etc. Para nosotros, los folios donde están escritos estos apuntes representan partes de planos.

- ❑ Sean ***r*** y ***s*** dos semirrectas (una semirrecta es un trozo de recta que tiene un origen pero no tiene fin) que comparten como origen el mismo punto O.
- ❑ El plano quedará dividido en dos regiones infinitas, cada una de esas regiones corresponde a un ángulo, es decir, dos semirrectas con el mismo origen determinan dos ángulos. La *figura* 1 ilustra el concepto mencionado.
  Obsérvese que el plano (en este caso el folio) ha quedado dividido en dos regiones infinitas. Una de ellas la hemos sombreado en parte (la mas cerrada por las semirrectas). Cada una de esas regiones corresponde a un ángulo determinado por las semirrectas ***r*** y ***s***. Nótese que una de las regiones es "*menor*" que la otra, es decir, uno de los ángulos es mas "*cerrado*" que el otro.

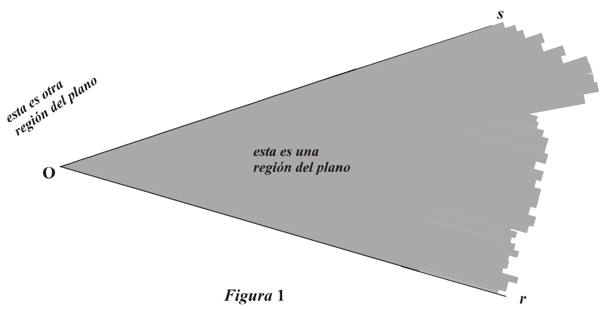


Figura 1

- ❑ Pongamos nombre a cada uno de los elementos que interviene en un ángulo (figura 1):
  O → Es un punto del plano que se llama **vértice** del ángulo.
  r,s → Son semirrectas de origen O y se llaman **lados** del ángulo.

3.Formas de expresar un ángulo.-

Hay diversas maneras de expresar un ángulo. Veremos las más habituales.

⇨ Con letras griegas minúsculas α, β, γ,....

⇨ Utilizando el "nombre" del vértice $\hat{O}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$ con un ^ en la parte superior.

⇨ Utilizando un punto de cada lado y el vértice (este situado en el centro) $\overset{\wedge}{AOB}$

Como un punto (vértice) y dos semirrectas (lados) determinan dos ángulos, para indicar a cual de ellos nos referimos es habitual señalarlo con un **arco de circunferencia** entre los lados. Gráficamente:

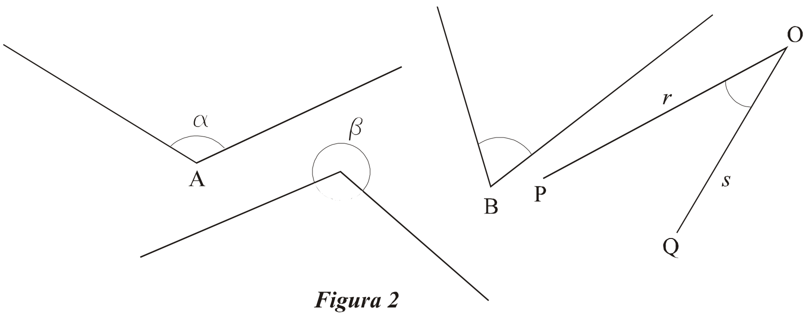


Figura 2

En la *figura* 2 tenemos dibujados cuatro ángulos a los que podríamos llamar :

α , β , $\hat{B}$, $\overset{\wedge}{POQ}$

4.Tamaño de un ángulo.-

La mayor o menor apertura de los lados de un ángulo no indica su tamaño. Esto hace que los ángulos se puedan comparar según dicho tamaño. Veamos un ejemplo que ilustre este concepto.

Ejemplo 1.-

Observando los siguientes ángulos puede apreciarse a simple vista que:

$$\delta < \beta < \alpha < \gamma$$

Es decir, de los cuatro ángulos dibujados δ es el menos de ellos y γ es el mayor.

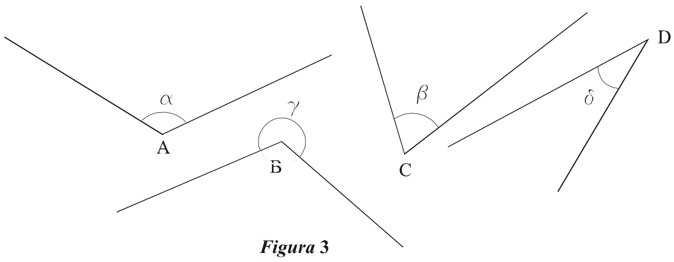


Figura 3

Ejemplo 2.-

Observando los siguientes ángulos puede apreciarse a simple vista que son aproximadamente iguales, es decir:

$$\alpha \approx \beta$$

Sin embargo, una observación mas detallada nos permitiría determinar que $\beta < \alpha$

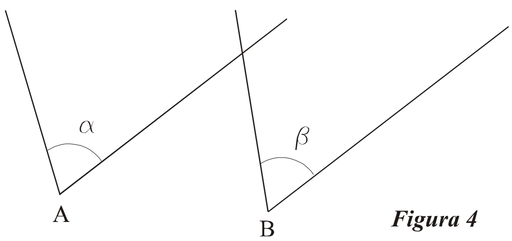


Figura 4

5.Ángulo orientado. Sentido y signo de un ángulo.-

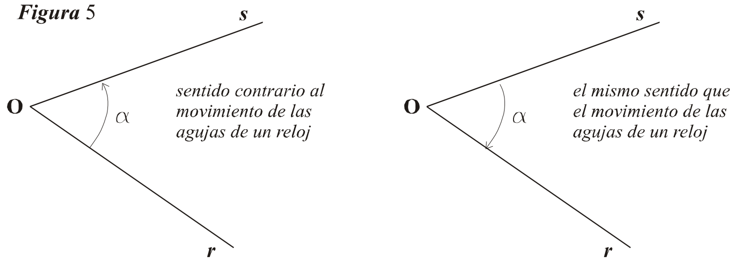
En algunos problemas es conveniente dar a los ángulos una orientación o sentido de las dos posibles que puede tener y asignaremos a cada uno de ellos un signo, positivo o negativo.

Aclaremos esto:

✔ Supongamos un ángulo α de vértice O y lados *r* y *s*. Podemos considerar el ángulo α

tomado en el sentido de "*el lado **r** hacia el lado **s***" o de "*el lado **s** hacia el lado **r***"
Es decir:

Figura 5

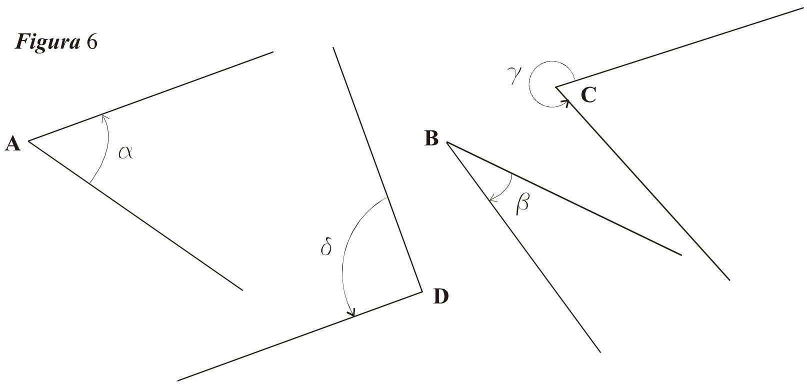


- En la *figura* 5 hemos orientado el ángulo α (dibujado una flecha en el arco) que nos indica el sentido (de ***r*** a ***s*** en el primer caso y de ***s*** a ***r*** en el segundo).
- En el ángulo de la izquierda puede apreciarse que el sentido es el del movimiento contrario a las agujas del reloj (este será el **sentido positivo**). En el ángulo de la derecha el sentido es el mismo que el movimiento de las agujas de un reloj (este será el **sentido negativo**). Por tanto, en el primer caso el ángulo α es un ángulo **positivo** y en el segundo caso es un ángulo **negativo**
- Un ángulo se dice orientado cuando se considera su signo, es decir, si es positivo o negativo. En algunos problemas sólo tiene importancia el tamaño del ángulo, no su signo.

Ejemplo 3.-

En los siguientes ángulos se expresa su orientación de tal modo que indica su signo:

Figura 6



En la *figura* 6 tenemos cuatro ángulos.
α, δ, y γ son positivos porque su orientación es en el sentido del movimiento contrario a las agujas de un reloj.
El ángulo β es negativo porque su orientación es en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

6.Ángulos opuestos.-

Si α es un ángulo orientado (será positivo o negativo), al ángulo de igual tamaño pero con orientación contraria, se llama ángulo opuesto a α y se expresa por $-\alpha$.

Si α es positivo, $-\alpha$ es negativo y viceversa.

Gráficamente:

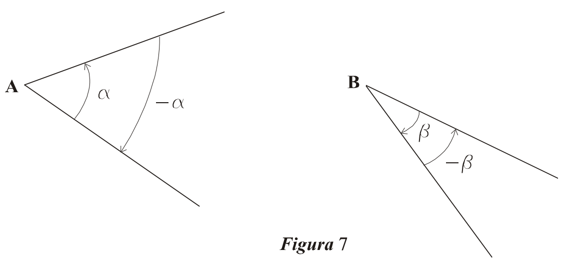


Figura 7

En la *figura* 7 observamos que :
α es positivo
$-\alpha$ es su opuesto y es negativo.

β es un ángulo negativo.
$-\beta$ es el opuesto de β y es positivo.

NOTA: $-\alpha$ se lee "*menos alfa*"

7.Casos particulares de ángulos.-

Destacamos algunos ángulos por su especial aspecto. Veamos:

Ángulo llano.-

Los dos lados del ángulo (las dos semirrectas) forman una recta. Gráficamente:

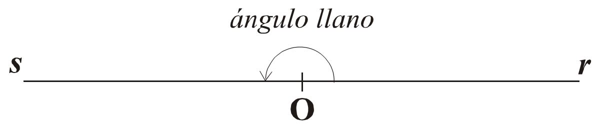


Figura 8

Ángulo completo.-

Los dos lados del ángulo (las dos semirrectas) forman una única semirrecta. Gráficamente:

Figura 9

El ángulo que hemos representado en la *figura* 9 es el que va del lado *s* al lado *r*. Nótese que le hemos dado una orientación positiva. En realidad, *r* y *s* coinciden.

Ángulo nulo.-

Los dos lados del ángulo (las dos semirrectas) forman una única semirrecta, pero la apertura es nula. Gráficamente:

Figura 10

El ángulo que hemos representado en la *figura* 10 es el que va del lado *r* al *s*. Nótese que en este caso la apertura entre los lados es nula.

8.Medida de un ángulo.-

Lo mismo que las longitudes, las superficies, el tiempo etc. son magnitudes que se pueden medir (*en metros, metros cuadrados, segundos,* etc.), los ángulos también son magnitudes que pueden medirse. La mayor o menor apertura de los lados de un ángulo nos dará su mayor o menor medida, al margen de que por su orientación podamos asignarle un signo positivo o negativo.

En la *figura* 11 hemos representados dos ángulos, α y β. Es evidente que sus tamaños son distintos, lo que hace que sus medidas sean también distintas.

Quede claro que el tamaño de un ángulo viene dado por la mayor o menor apertura de sus lados, no por el tamaño del dibujo. Recordemos que si no indicamos su orientación es porque esta no tiene interés para el problema que estemos tratando.

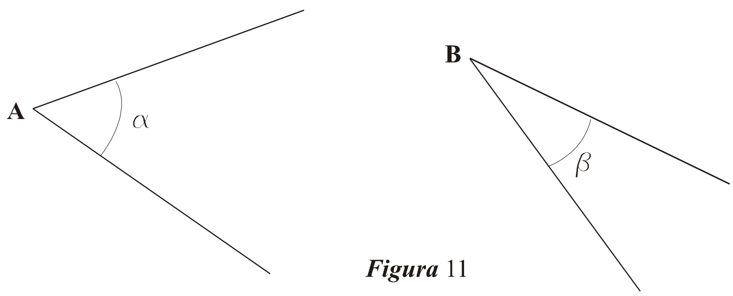


Figura 11

9.Unidades de medida de un ángulo.-

Las distancias podemos medirlas utilizando diversas unidades o sistemas de medidas de longitud. Por ejemplo, una distancia puede medirse en *metros* (y sus múltiplos y submúltiplos) o en *millas* o en *pies*, etc. No obstante si conocemos una distancia en una de estas unidades, es posible pasarla a otra, esto es, si conocemos una distancia en *millas* podemos conocerla en *kilómetros*.

Algo parecido ocurre con los ángulos. Existen diversas unidades para medir ángulos, siendo las más usuales las siguientes:

- ☞ *El radián*
- ☞ *El grado sexagesimal*
- ☞ *El grado centesimal*

En estos apuntes utilizaremos como medida de ángulos el ***radián*** y el ***grado sexagesimal***.

10.El radián.-

Recordemos que un ***metro*** (unidad de medida para las longitudes) es la longitud que tiene una barra de una aleación de platino e iridio que existe en el museo de Artes y Oficios de París (en realidad es la distancia entre dos trazos hechos sobre esa barra).

Veamos que es un ***radián*** (unidad para medir ángulos):

> *Un radián es el ángulo central de un círculo que corresponde a un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de dicha circunferencia.*

Expliquemos este concepto:

- Sea **O** un punto del plano y ***r*** un número real positivo.
- Tracemos una circunferencia de centro **O** y radio de longitud ***r***.
- Sea **A** un punto cualquiera de la circunferencia y **B** otro punto de ella tal que la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ sea igual a la longitud del radio, es decir, $longitud\ \overset{\frown}{AB} = r$
- Consideremos el ángulo de vértice **O** y lados que pasen por los puntos **A** y **B**, es decir, el ángulo $A\hat{O}B$. Este tipo de ángulo se denomina **central de una circunferencia** porque el vértice está en el centro.

¡Pues bien!

La medida de este ángulo se dice que es un radián
(recuerda que la longitud del arco es igual a la medida del radio).

Gráficamente:

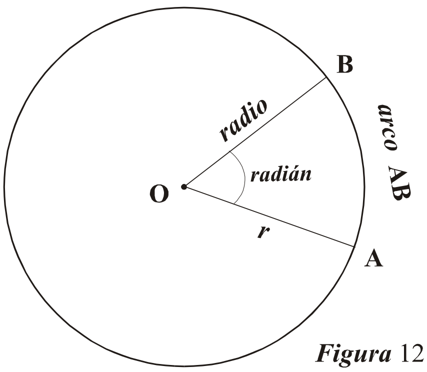


Figura 12

La *figura* 12 nos muestra la idea de ***radián***.

- ❍ Tenemos una circunferencia de centro O y radio ***r***.
- ❍ La longitud de la circunferencia es $2\pi r$
- ❍ Tomamos un arco de extremos **A** y **B** cuya longitud es igual a la del radio ***r***.
- ❍ Si formamos el ángulo AÔB con vértice en O, la medida de este ángulo es un ***radián***.

- Si tomásemos un arco de circunferencia cuya longitud fuese el doble del radio, el ángulo central correspondiente tendría una medida de dos radianes.
- Si tomamos un arco de circunferencia cuya longitud fuese 2´5 veces el radio, el ángulo central correspondiente medirá 2´5 radianes, etc.

Nos hacemos la siguiente pregunta:

¿El tamaño del radio ***r*** influye en el tamaño del ángulo central?

Dicho de otro modo:

¿Según sea el tamaño del radio, el tamaño de un radián será distinto?

Contestemos a estas preguntas.

"*Sea cual sea el tamaño del radio **r**, el ángulo central correspondiente al tamaño del arco igual a la longitud del radio, es siempre el mismo*".

Expliquemos esto gráficamente:

La *figura* 13 nos muestra dos circunferencias con el mismo centro O (circunferencias concéntricas).

Circunferencia 1:

El radio es ***r***, es decir $\overline{OA} = r$.

El arco de extremos A y B tiene la longitud del radio ***r***, es decir:

$\overset{\frown}{AB} = r$

El ángulo $\overset{\wedge}{AOB} = \textit{radián}$

Circunferencia 2:

El radio es ***r´***, es decir $\overline{OA'} = r'$.

El arco de extremos A´ y B´ tiene la longitud del radio ***r´***, es decir:

$\overset{\frown}{A'B'} = r'$

El ángulo $\overset{\wedge}{A'OB'} = \textit{radián}$

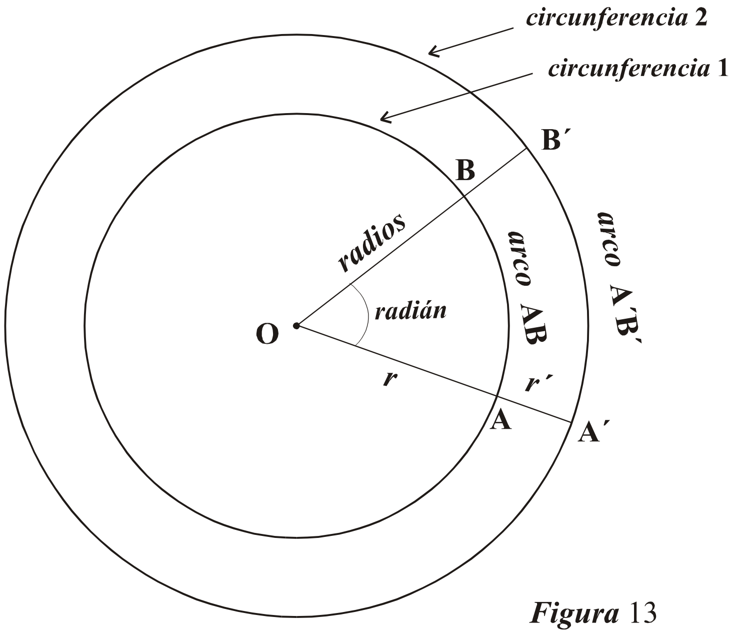


Figura 13

Puede apreciarse que se verifica la igualdad de los ángulos $\overset{\wedge}{AOB}$ *y* $\overset{\wedge}{A'OB'}$, es decir:

$$\overset{\wedge}{AOB} = \overset{\wedge}{A'OB'} = \textit{radián}$$

por lo que observamos que sea cual sea la circunferencia, si tomamos un arco de ella cuya longitud sea igual a la del radio, el ángulo central correspondiente es el mismo, independientemente del tamaño de ese radio.

- Si tomamos un arco de circunferencia cuya longitud fuese dos veces la del radio, el ángulo central correspondiente tendrá una medida de 2 *radianes*, si la longitud del arco es de una vez y media la del radio, la medida del ángulo asociado será 1´5 *radianes* y así sucesivamente. Un ángulo medirá 0´5 *radianes* si el arco de circunferencia asociado a dicho ángulo tiene una longitud igual a la mitad del radio.

  Veamos un ejemplo gráfico:

Ejemplo 4.-

Comentemos la *figura* 14:

figura* 14*a :

En este caso la medida del arco de extremos **A** y **B** es el doble que la del radio, es decir:

$$longitud\ \overset{\frown}{AB} = 2r$$

Entonces:

$$A\hat{O}B = 2\ radianes$$

Figura 14

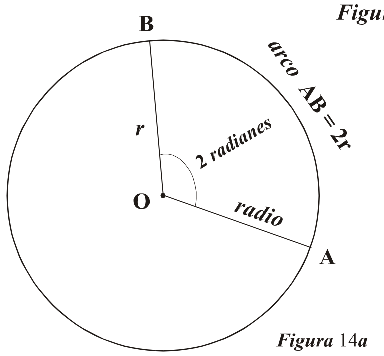


Figura 14*a*

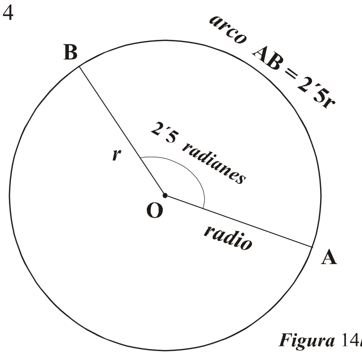


Figura 14*b*

figura* 14*b :

En este caso la medida del arco de extremos **A** y **B** es dos veces y media la del radio, es decir:

$$longitud\ \overset{\frown}{AB} = 2'5r \quad \text{por lo que} \quad A\hat{O}B = 2'5\ radianes$$

11.Medida en radianes de un ángulo completo.-

Nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cuántos radianes mide un ángulo completo?

Veamos:

- Un ángulo completo se corresponde con un arco igual a la circunferencia completa, es decir, con una vuelta completa a la circunferencia.

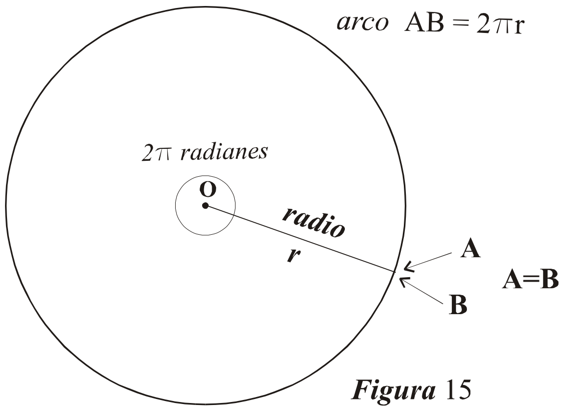


Figura 15

En la *figura* 15 tenemos una circunferencia de radio ***r*** en la que hemos trazado el arco AB (en este caso A = B). La medida de dicho arco coincide con la longitud de la circunferencia, es decir:

$$longitud\ \overset{\frown}{AB} = longitud\ circunferencia = 2\pi r$$

Como cada medida del radio se corresponde con un radián, si el arco mide 2π veces el radio ***r***, entonces la medida del ángulo será 2π *radianes*.

- Por tanto:

$$\boxed{\left.\begin{matrix} medida\ en\ radianes \\ de\ un\ \grave{a}ngulo\ completo \end{matrix}\right\} = 2\pi\ radianes \approx 6'2832\ radianes}$$

Nota: Recordemos que $\pi = 3´14159265$.......

- Con el mismo razonamiento podemos determinar la medida en radianes de un ángulo llano. El arco de circunferencia que corresponde a un ángulo llano es exactamente la mitad de dicha circunferencia, por lo que su longitud será la mitad de $2\pi\, r$, esto es $\pi\, r$.

$$\boxed{\text{medida en radianes de un ángulo llano} = \pi\ radianes}$$

12.Los grados sexagesimales.-

Otra unidad básica para la medida de ángulos es el ***grado sexagesimal***.

Definimos que un ***ángulo completo***, es decir, el ángulo correspondiente a una vuelta completa de la circunferencia, mide **360 *grados sexagesimales***. El símbolo empleado para expresar los grados sexagesimales es º puesto a modo de potencia sobre el número que indica su medida el tamaño del ángulo.

Por tanto:

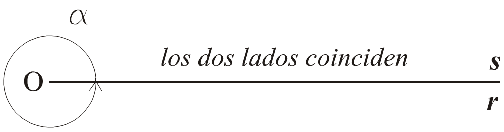


Figura 16

α es un ángulo completo

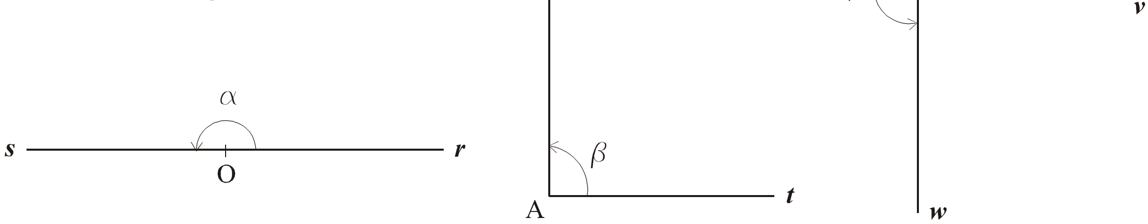
$$\alpha \text{ medido en } \begin{cases} \textit{radianes es } \alpha = 2\pi \textit{ radianes} \\ \textit{grados sexagesimales es } \alpha = 360^{\circ} \end{cases}$$

Nótese que el ángulo es el mismo pero expresado en dos unidades distintas. Podemos expresar lo siguiente:

$$\boxed{2\pi \textit{ radianes} \text{ equivalen a } 360^{\circ}}$$

En base a lo anterior, podemos dibujar ángulos cuyas medidas sean 180º, 90º y 270º

Figura **17**



De la *figura* 17 deducimos que:

$$\alpha \textit{ es la mitad de un àngulo completo} \Rightarrow \alpha = \pi \textit{ radianes} = 180^{\circ}$$

$$\beta \textit{ es la mitad de un àngulo llano} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} \textit{ radianes} = 90^{\circ}$$

$$\gamma \textit{ es } \frac{3}{4} \textit{ de un àngulo completo} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{4} 2\pi \textit{ radianes} = \frac{3\pi}{2} \textit{radianes} = 270^{\circ}$$

> **Ángulo recto:**
> Un ángulo cuya medida sea 90º se llama ángulo recto. Nótese que los lados de un ángulo recto son semirrectas perpendiculares.

En la *figura* 17 vemos que el ángulo β es un ángulo recto. El ángulo α es el doble de un recto ($\alpha = 180^{\circ} = 2 \cdot 90^{\circ}$) y el ángulo γ mide el triple de un recto ($\gamma = 270^{\circ} = 3 \cdot 90^{\circ}$).

Submúltiplos del grado sexagesimal:

Lo mismo que un metro se divide en 10 partes y cada una de ellas es un decímetro y si un decímetro lo dividimos en 10 partes obtenemos un centímetro, etc, el grado sexagesimal también puede dividirse en partes iguales y cada una de esas partes es un submúltiplo.

Explicamos esto:

Minuto:
Si un grado sexagesimal lo dividimos en **sesenta** partes iguales, cada una de esas partes es un **minuto**. Por tanto, un grado tiene sesenta minutos. Al minuto lo representaremos con el símbolo ´ colocado a modo de potencia en el numero que indica la medida del ángulo.
Por tanto: $1^{\circ} = 60'$ "*un grado es igual a sesenta minutos*"

Ejemplo 5.-

En este ejemplo veremos como se puede dar la medida de un ángulo:

ángulo	una forma de leerlo	otra forma de leerlo
$\alpha = 38{,}5^{\circ} = 38^{\circ}\ 30'$	38 grados y medio	38 grados 30 minutos
$\beta = 102{,}25^{\circ} = 102^{\circ}\ 15'$	102,25 grados	102 grados 15 minutos
$\gamma = 253{,}75^{\circ} = 253^{\circ}\ 45'$	253,75 grados	253 grados 45 minutos

NOTA: Recuerda que, por ejemplo, 4´25 metros son 4 metros 2 decímetros y 5 centímetros.

Segundo:
Si un minuto lo dividimos en **sesenta** partes iguales, cada una de esas partes es un **segundo**. Por tanto, un minuto tiene sesenta segundos. Al segundo lo representamos con el símbolo ´´ colocado a modo de potencia en el número que indica la medida del ángulo.
Por tanto: $1' = 60''$ "*un minuto es igual a sesenta segundos*"

Ejemplo 6.-

ángulo	se lee
$\alpha = 42^{\circ}\ 20'\ 38''$	42 grados 20 minutos 38 segundos
$\beta = 134^{\circ}\ 0'\ 15''$	134 grados 0 minutos 15 segundos
$\gamma = 0^{\circ}\ 45'\ 3''$	0 grados 45 minutos 3 segundos

Ejemplo 7.-

Dado el ángulo $\alpha = 92{,}40^{\circ}$, queremos expresarlo en grados, minutos y segundos.

Veamos:

$$\alpha = 92{,}40^{\circ} = 92^{\circ} + \underbrace{0{,}40^{\circ}}_{\downarrow} = 92^{\circ}\ 24'$$

debemos ver cuantos minutos son 0,40º

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ} \xrightarrow{son} 60' \\ 0{,}40^{\circ} \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = 0{,}40 \cdot 60 = 24'$$

Ejemplo 8.-

Dado el ángulo $\beta = 35{,}82^\circ$, queremos expresarlo en grados minutos y segundos.

Veamos.

$$\beta = 35{,}82^\circ = 35^\circ + \underbrace{0{,}82^\circ}_{\downarrow} = 35^\circ\ 49{,}2' = 35^\circ\ 49' + \underbrace{0{,}2'}_{\downarrow} = 35^\circ\ 49'\ 12''$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \xrightarrow{son} 60' \\ 0{,}82^\circ \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = 0{,}82 \cdot 60 = 49{,}2' \qquad \left.\begin{array}{l} 1' \xrightarrow{son} 60'' \\ 0{,}2' \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = 0{,}2 \cdot 60 = 12''$$

Ejemplo 9.-

Dado el ángulo $\gamma = 217{,}458^\circ$ queremos expresarlo en grados, minutos y segundos.

Veamos:

$$\beta = 217{,}458^\circ = 217^\circ + \underbrace{0{,}458^\circ}_{\downarrow} = 35^\circ\ 27{,}48' = 35^\circ\ 27' + \underbrace{0{,}48'}_{\downarrow} = 35^\circ\ 27'\ 28{,}8'' \approx 35^\circ\ 27'\ 29''$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ \xrightarrow{son} 60' \\ 0{,}458^\circ \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = 0{,}458 \cdot 60 = 27{,}48' \qquad \left.\begin{array}{l} 1' \xrightarrow{son} 60'' \\ 0{,}48' \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = 0{,}48 \cdot 60 = 28{,}8''$$

Ejemplo 10.-

Dado el ángulo $\alpha = 98^\circ\ 52'\ 25''$, queremos expresarlo en grados.

Veamos:

☞ Primero expresamos los segundos en minutos:

$$\left.\begin{array}{l} 60'' \xrightarrow{son} 1' \\ 25'' \quad \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = \frac{25}{60} = 0'41\widehat{6} \Rightarrow \alpha = 98^\circ\ 52{,}41\widehat{6}'$$

☞ Ahora pasamos los minutos a grados:

$$\left.\begin{array}{l} 60' \quad \xrightarrow{son} 1^\circ \\ 52{,}41\widehat{6}' \quad \rightarrow \quad x \end{array}\right\} x = \frac{52{,}41\widehat{6}}{60} = 0'8736\widehat{1} \Rightarrow \alpha = 98{,}8736\widehat{1}^\circ$$

Ejemplo 11.-

La medida de un ángulo es $\alpha = 2958'$, queremos expresarlo en grados, minutos y segundos.

Veamos:

$\alpha = 2958'$ Veremos cuantos grados enteros hay en estos minutos y cuantos minutos sobran

$$\begin{array}{r|l} 2958 & 60 \\ \hline 558 & 49 \\ 18 & \end{array}$$

Entonces: $2958 = 60 \cdot 49 + 18$

Por tanto: $\alpha = 2958' = 49^\circ\ 18'\ 0''$ ← ángulo en grados, minutos y segundos.

Ejemplo 12.-

La medida de un ángulo es $\alpha = 39696''$, queremos expresarlo en grados, minutos y segundos.

Veamos:

$\alpha = 39696''$ Veremos cuantos minutos enteros hay en estos segundos y cuantos segundos sobran y posteriormente cuantos grados en esos minutos y cuantos sobran.

39696 | 60			661 | 60	
369	661	Por tanto:	061	11
096		39696 ´´ = 661´ 36´´	01	
36				

Podemos poner:

$\alpha = 39696'' = 661'\ 36'' = 11^{\circ}\ 1'\ 36''$ ← ángulo en grados, minutos y segundos.

Ejemplo 13.-

¿Cuántos segundos mide el ángulo $\alpha = 28^{\circ}\ 56'\ 59''$?

Veamos:

$28^{\circ} = 28 \cdot 60' = 1680' = 1680 \cdot 60'' = 100800''$

$56' = 58 \cdot 60'' = 3480''$

$59'' = 59''$

Sumando : $\alpha = 104339''$

13.Herramienta para medir ángulos. Transportador de ángulos.-

El transportador de ángulos (también llamado goniómetro) es una herramienta con forma de semicírculo o círculo, graduado en su borde de forma similar a una regla, que permite medir o trazar ángulos en unidades sexagesimales.

Generalmente las graduaciones son de uno o medio grado sexagesimal.

La *figura* 18 ilustra esta herramienta indispensable en el estudio de este tema.

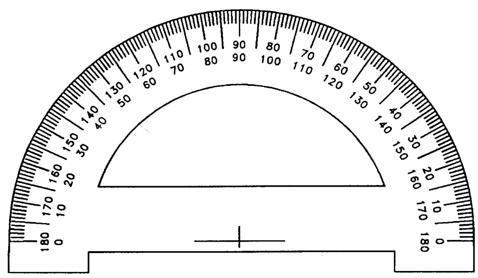


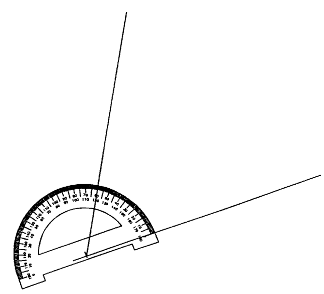
***Figura* 18**

Forma de uso:

En la cruz situada en la base se hace coincidir el cruce de las marcas con el vértice del ángulo y uno de los lados con la graduación 0º. El otro lado, a su paso por la graduación nos indica la medida del ángulo.

La *figura* 19 ilustra este proceso. Parece evidente que cuanto mayor sea la herramienta mas precisión se consigue en la medida del ángulo.

***Figura* 19**



14.Paso de radianes a grados y de grados a radianes.-

Planteamos las siguientes cuestiones:

Dado un ángulo en **radianes**, ¿cómo expresarlo en **grados**?

Dado un ángulo en **grados**, ¿cómo expresarlo en **radianes**?

Para ello tendremos en cuenta la siguiente relación entre radianes y grados sexagesimales.

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\pi \ \ \textit{radianes son } 360^\circ \\ \textit{o mejor} \\ \pi \ \textit{radianes son } 180^\circ \end{array}}$$

Utilizando alguna de las dos relaciones anteriores y con una *regla de tres* simple obtenemos el paso de grados a radianes y viceversa.

Ejemplo 14.-

La medida de un ángulo en radianes es $\frac{\pi}{4}$. Expresa dicho ángulo en grados.

Veamos:

Llamamos α al ángulo: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *radianes.*

Como $\pi = 180^\circ$, entonces: $\alpha = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

Ejemplo 15.-

Queremos expresar el ángulo $\beta = 2{,}4$ *radianes* en grados sexagesimales.

Veamos:

$$\left.\begin{array}{lll} \pi & \textit{radianes} \xrightarrow{son} & 180^\circ \\ 2{,}4 & \quad '' \quad \to & x \end{array}\right\} \ x = \frac{2{,}4 \cdot 180}{\pi} = \frac{432}{3'141592654} = 137{,}5098708^\circ$$

Por tanto:

$$\alpha = 137{,}5098708^\circ \underbrace{=}_{\substack{\textit{pasando a} \\ \textit{minutos y} \\ \textit{segundos}}} 137^\circ \ 30' \ 35{,}5''$$

Ejemplo 16.-

Hallemos la medida de un **radián** en grados, minuto y segundos.

$$\left.\begin{array}{lll} \pi & \textit{radianes} \xrightarrow{son} & 180^\circ \\ 1 & \quad '' \quad \to & x \end{array}\right\} \ x = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3'141592654} = 57{,}29577951^\circ$$

Por tanto:

$$\alpha = 57{,}29577951^\circ = 57^\circ \ 17' \ 44{,}81'' \approx 57^\circ \ 17' \ 45''$$

Ejemplo 17.-

Queremos expresar en radianes los ángulos $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$ y $\gamma = 135^o$

Veamos:

① $\left.\begin{array}{l} 180^o \xrightarrow{son} \pi \ radianes \\ 30^o \quad \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{30\pi}{180} = \frac{3\pi}{18} = \frac{\pi}{6} \ radianes$ $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} \ rad.}$

② $\left.\begin{array}{l} 180^o \xrightarrow{son} \pi \ radianes \\ 60^o \quad \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{60\pi}{180} = \frac{6\pi}{18} = \frac{\pi}{3} \ radianes$ $\boxed{\beta = \frac{\pi}{3} \ rad.}$

③ $\left.\begin{array}{l} 180^o \xrightarrow{son} \pi \ radianes \\ 135^o \quad \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{27\pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \ radianes$ $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6} \ rad.}$

Ejemplo 18.-

Queremos expresar en radianes el ángulo $\alpha = 22^o \ 40' \ 54''$

Veamos:

✔ Primero expresamos el ángulo α en grados :

$$\left.\begin{array}{l} 60'' \xrightarrow{son} 1' \\ 54'' \quad \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{54}{60} = 0{,}9' \Rightarrow \alpha = 22^o \ 40{,}9'$$

$$\left.\begin{array}{l} 60' \xrightarrow{son} 1^o \\ 40{,}9' \quad \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{40{,}9}{60} = 0{,}681\widehat{6} \Rightarrow \alpha = 22{,}681\widehat{6}^o \approx 22{,}68167^o$$

✔ Ahora expresamos el ángulo en radianes:

$$\left.\begin{array}{l} 180^o \xrightarrow{son} \pi \ radianes \\ 22{,}68167^o \to \quad x \end{array}\right\} x = \frac{22{,}68167\pi}{180} = 0{,}126009277\pi \ \ radianes$$

Por tanto:

$$\boxed{\alpha = 22^o \ 40' \ 54'' = 0{,}126009277\pi \ \ rad.}$$

15.Operaciones con ángulos.-

Los ángulos son magnitudes que pueden medirse. Ya hemos visto que estas medidas son un valore numéricos y estos valores son factibles de sumarse, restarse etc. Veamos algunas de estas operaciones.

Suma de ángulos.-

La *figura* 20 ilustra como se suman dos ángulos de un modo gráfico, aunque puede realizarse de una forma más efectiva utilizando el compás. En el anexo de actividades se propone alguna suma gráfica de ángulos.

***Figura* 20**

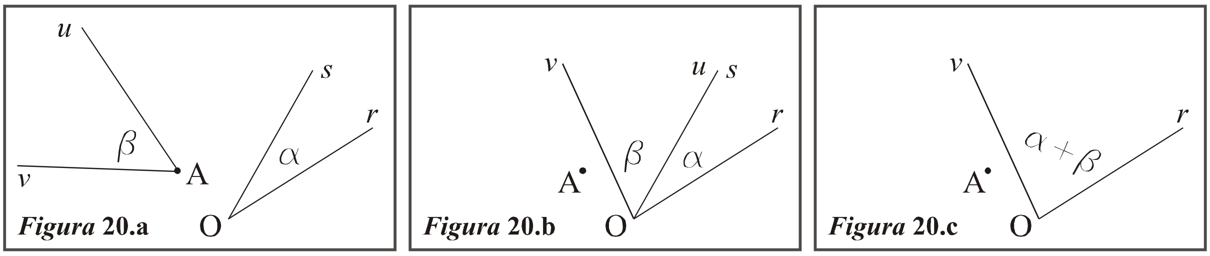


***Figura* 20.a** ***Figura* 20.b** ***Figura* 20.c**

***Figura* 20.a**	***Figura* 20.b**	***Figura* 20.c**
Tenemos dos ángulos α y β, de vértices O y A respectivamente.	Hemos "trasladado" el ángulo β al vértice O, haciendo coincidir el lado *u* con el lado *s*.	El nuevo ángulo de vértice O y lados *r* y *v* tiene una medida igual a $\alpha + \beta$

Ejemplo 19.-

Dados los ángulos $\alpha = 43º\ 49'\ 35''$ *y* $\beta = 74º\ 24'\ 51''$, hallar la medida de $\alpha + \beta$

Veamos:

Llamemos $\gamma = \alpha + \beta$

$$\alpha = 43º\ 49'\ 35''$$
$$\beta = 74º\ 24'\ 51''$$
$$\gamma = 117º\ 73'\ 86'' = 117º\ 74'\ 26'' = 118º\ 14'\ 26''$$

$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta = 118º\ 14'\ 26''}$$

Resta de ángulos.-

La *figura* 21 ilustra como se restan dos ángulos de un modo gráfico, aunque puede realizarse de una forma más efectiva utilizando el compás. En el anexo de actividades se propone alguna resta gráfica de ángulos.

***Figura* 21**

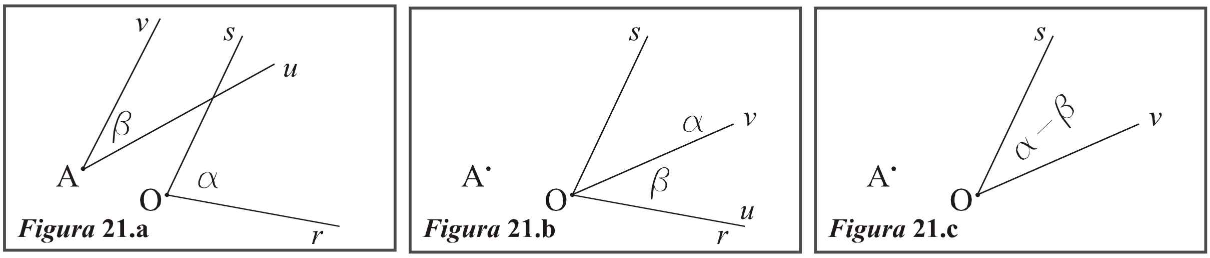


***Figura* 21.a** ***Figura* 21.b** ***Figura* 21.c**

***Figura* 21.a**	***Figura* 21.b**	***Figura* 21.c**
Tenemos dos ángulos α y β, de vértices O y A respectivamente.	Hemos "trasladado" el ángulo β al vértice O, haciendo coincidir el lado *u* con el lado *r*.	El nuevo ángulo de vértice O y lados *v* y *s* tiene una medida igual a $\alpha - \beta$

Ejemplo 20.-

Dados los ángulos $\alpha = 103º\ 19'\ 38''$ *y* $\beta = 78º\ 39'\ 54''$, hallar la medida de $\alpha - \beta$

Veamos:

Llamemos $\gamma = \alpha - \beta$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 103^{\circ}\ 19'\ 38'' & \alpha \textit{ es el } \text{minuendo} \\ \beta = 78^{\circ}\ 39'\ 55'' & \beta \textit{ es el } \text{sustraendo} \end{array}\right\}$$

Expresamos α de otro modo para hacer que los valores del minuendo sean superiores a los del sustraendo.

$$\alpha = 103^{\circ}\ 19'\ 38'' = 103^{\circ}\ 18'\ 98'' = 102^{\circ}\ 78'\ 98''$$

$$\beta = 78^{\circ}\ 39'\ 55'' = 78^{\circ}\ 39'\ 55'' = 78^{\circ}\ 39'\ 55''$$

Restamos $\alpha - \beta = 24^{\circ}\ 39'\ 43''$

$$\boxed{\gamma = \alpha - \beta = 24^{\circ}\ 39'\ 43''}$$

Producto de un número por un ángulo.-

Si α es la medida de un ángulo y k es un número real, la expresión $k \cdot \alpha$, o mejor $k\alpha$, indica la medida de un ángulo cuyo valor es el resultado de multiplicar los valores numéricos k y α.

Ejemplo 21.-

Consideremos un ángulo $\alpha = 62^{\circ}\ 43'\ 34''$. La expresión 2α equivale al ángulo $\alpha + \alpha$, es decir:

$$2\alpha = \alpha + \alpha = 2 \cdot 62^{\circ}\ \ 2 \cdot 43'\ \ 2 \cdot 34'' = 124^{\circ}\ 86'\ 68'' = 124^{\circ}\ 87'\ 8'' =$$

$$= 125^{\circ}\ 27'\ 8''$$

Ejemplo 22.-

Dado el ángulo $\beta = 72^{\circ}\ 53'\ 25''$, queremos hallar el ángulo $1{,}2\ \beta$

Veamos:

$$1{,}2 \cdot \beta = 1{,}2 \cdot 72^{\circ}\ \ 1{,}2 \cdot 53'\ \ 1{,}2 \cdot 8'' = 86{,}4^{\circ}\ 63{,}6'\ 9{,}6'' = (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ} \rightarrow 60' \\ 0{,}4^{\circ} \rightarrow x \end{array}\right\} x = 24' \Rightarrow 1{,}2 \cdot \beta = 86^{\circ}\ 87{,}6'\ 9{,}6''$$

$$\left.\begin{array}{l} 1' \rightarrow 60'' \\ 0{,}6' \rightarrow x \end{array}\right\} x = 36'' \Rightarrow 1{,}2 \cdot \beta = 86^{\circ}\ 87'\ 45{,}6''$$

$$(*)\ \ 1{,}2\ \beta = 87^{\circ}\ 27'\ 45{,}6''$$

16.Razones trigonométricas o circulares de un ángulo.-

Sea α un ángulo cualquiera.

Vamos a definir lo que llamaremos "***razones trigonométricas del ángulo*** α"

Dichas ***razones trigonométricas*** (o circulares) son seis y se denominan:

seno, ***coseno***, ***tangente***, ***cotangente***, ***secante*** y ***cosecante***

La siguiente tabla nos muestra como se lee y como se escribe abreviadamente cada una de ellas:

Se lee	Se escribe
seno de α	*sen* α
coseno de α	*cos* α
tangente de α	*tg* α
cotangente de α	*ctg* α
secante de α	*sec* α
cosecante de α	*cosec* α

NOTA: Es posible que en otros textos o en ocasiones la terminología cambie y en lugar de ***tg*** encuentres ***tang***, o ***cotang*** en vez de ***ctg***, etc.

Una razón trigonométrica de un ángulo es un número que puede ser positivo, negativo o cero y su valor dependerá de la medida del ángulo.

Antes de entrar en las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo, diremos que un ángulo puede ser del **cuadrante I**, del **cuadrante II**, del **cuadrante III** o del **cuadrante** IV. Expliquemos esto:

A la derecha, *figura* 22, tenemos representado un sistema de ejes rectangulares con origen en el punto O.

Observa que dicho sistema divide al plano en cuatro zonas o regiones iguales e infinitas llamadas cuadrantes.

Los cuadrantes los enumeramos utilizando la numeración romana, de la siguiente forma:

Cuadrante I
Cuadrante II
Cuadrante III
Cuadrante IV

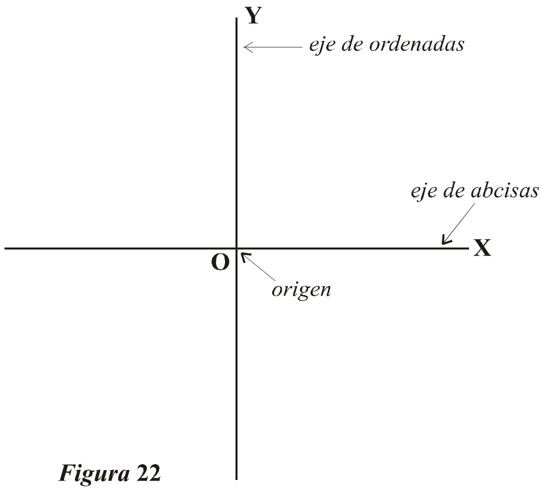


***Figura* 22**

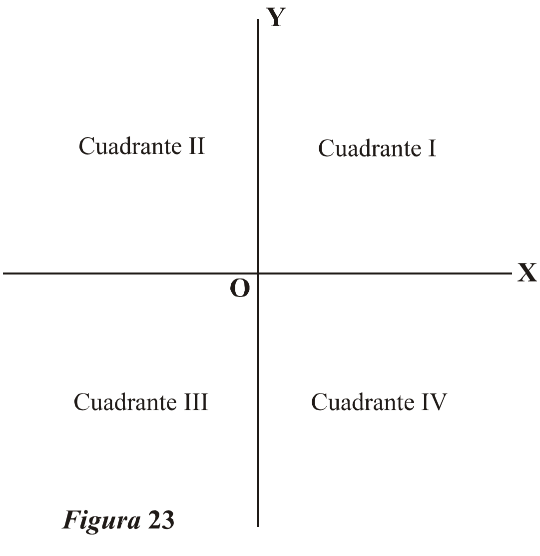


***Figura* 23**

En la figura 23 tenemos determinados los cuatro cuadrantes del siguiente modo:

$$A(x,y) \ \ \text{punto del plano} \begin{cases} x = \text{abcisa} \\ y = \text{ordenada} \end{cases}$$

Si A está en el cuadrante I, entonces $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante II, entonces $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante III, entonces $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Si A está en el cuadrante IV, entonces $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

✔ Ángulos del cuadrante I:

Tomemos un punto cualquiera A(x,y) del cuadrante I. En este caso será $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta ***r*** de origen O y que pase por el punto A(x,y).
Consideremos el ángulo α que forma el eje de abcisas con la semirrecta ***r*** tomado en sentido positivo.
¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante I**. La *figura* 24 ilustra el proceso.

***Figura* 24**

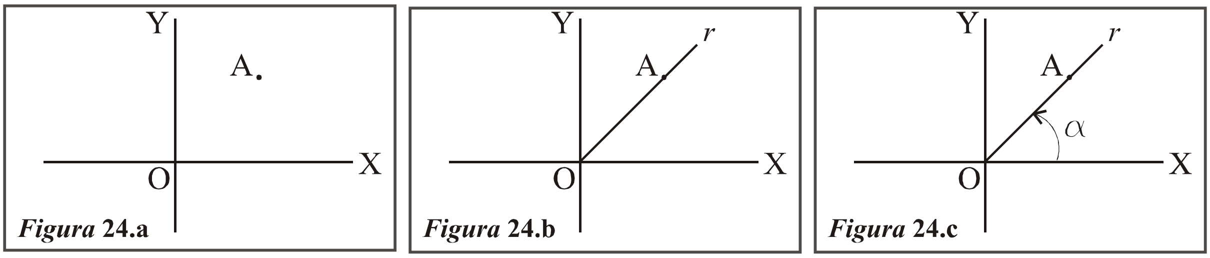


***Figura* 24.a** ***Figura* 24.b** ***Figura* 24.c**

✔ Ángulos del cuadrante II:

Tomemos un punto cualquiera A(x,y) del cuadrante II. En este caso será $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta ***r*** de origen O y que pase por el punto A(x,y).
Consideremos el ángulo α que forma el eje de abcisas con la semirrecta ***r*** tomado en sentido positivo.
¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante II**. La *figura* 25 ilustra el proceso.

***Figura* 25**

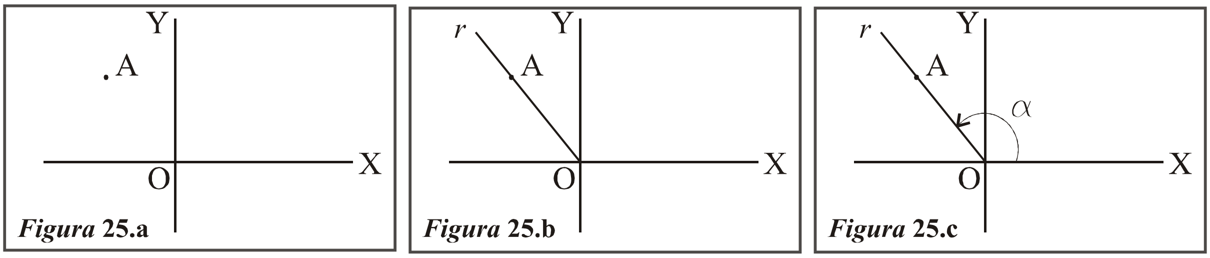


***Figura* 25.a** ***Figura* 25.b** ***Figura* 25.c**

✔ Ángulos del cuadrante III:

Tomemos un punto cualquiera A(x,y) del cuadrante III. En este caso será $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta ***r*** de origen O y que pase por el punto A(x,y).
Consideremos el ángulo α que forma el eje de abcisas con la semirrecta ***r*** tomado en sentido positivo.
¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante III**. La *figura* 26 ilustra el proceso

***Figura* 26**

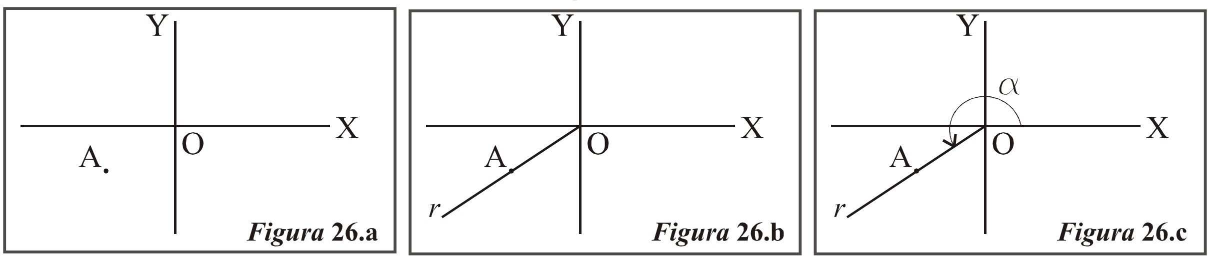


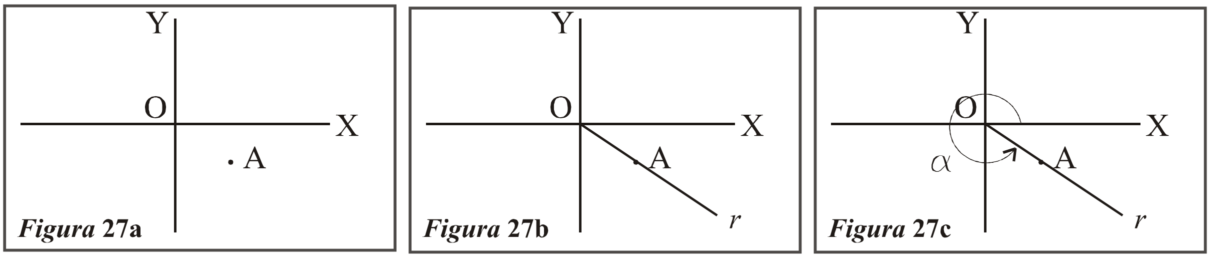
***Figura* 26.a** ***Figura* 26.b** ***Figura* 26.c**

✔ Ángulos del cuadrante IV:

Tomemos un punto cualquiera A(x,y) del cuadrante IV. En este caso será $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

Tracemos una semirrecta ***r*** de origen O y que pase por el punto A(x,y).
Consideremos el ángulo α que forma el eje de abcisas con la semirrecta ***r*** tomado en sentido positivo.
¡Pues bien! El ángulo α es un ángulo del **cuadrante IV**. La *figura* 27 ilustra el proceso

***Figura* 27**



Nótese lo siguiente:

∗ *Si* α *es del cuadrante* I, *entonces* 0º < α < 90º

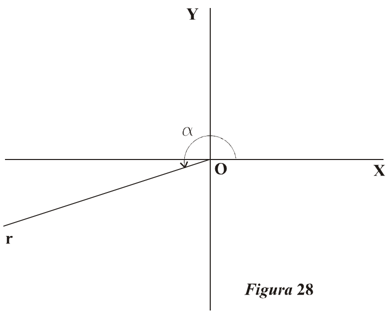
∗ *Si* α *es del cuadrante* II, *entonces* 90º < α < 180º

∗ *Si* α *es del cuadrante* III, *entonces* 180º < α < 270º

∗ *Si* α *es del cuadrante* IV, *entonces* 270º < α < 360º

Ejemplo 23.-

Vamos a representar el ángulo $\alpha = 198º$



En la *figura* 28 tenemos representado en un sistema de ejes cartesianos el ángulo α = 198º, situado en el cuadrante III.
Observa que el vértice es el ***punto*** O y los lados son el ***semieje positivo*** de abcisas (eje X) y la ***semirrecta*** *r*.
Nótese que 180º < 198º < 270º

Ahora vamos a definir las razones trigonométricas de un ángulo.

✎ Consideremos un sistema de ejes cartesiano rectangular.

✎ Sea α un ángulo cualquiera. Vamos a suponer que el ángulo α es del cuadrante I, pero todo que lo expresemos en este caso es válido si α es de otro cuadrante.

✎ El ángulo α tendrá de vértice al punto O y de lados el semieje positivo de abcisas (OX) y la semirrecta *s* de origen O.

✎ Sea A(x,y) un punto cualquiera de la semirrecta *s* (lado del ángulo). Si el ángulo es del cuadrante I, el punto A(x,y) estará en el cuadrante I, es decir, x>0 e y >0

✎ Llamamos **r** a la distancia que hay del punto O al punto A, es decir:

distancia $OA = \overline{OA} = \mathrm{r}$ NOTA: **r** se denomina **radio** y además **r** > 0

La *figura* 29 ilustra los puntos anteriores:

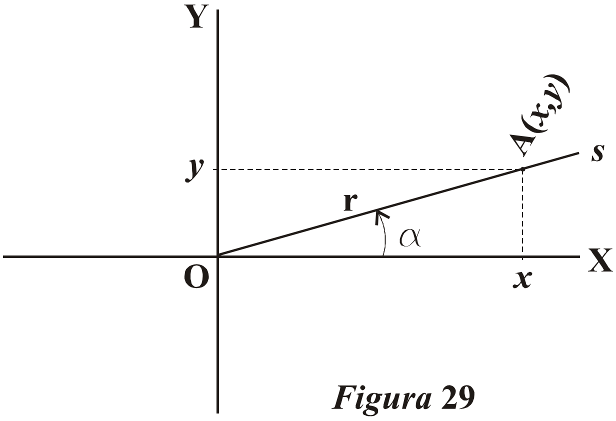


***Figura* 29**

$$A(x,y)\ punto\begin{cases} x\ es\ la\ \text{abcisa}\ de\ \text{A} \\ \text{y}\ es\ \ la\ \text{ordenada de A}\end{cases}$$

$radio = \text{r} = d(\text{O},\text{A}) = \text{distancia}\ de\ \text{O}\ a\ \text{A}$

$\text{r} > 0$ por ser una distancia.

α *àngulo de vèrtice O y lados OX y s*

Recordemos que A(*x,y*) es un punto cualquiera situado en la semirrecta *s*.
Nótese que en este caso $x > 0$ e $y > 0$ por ser α un ángulo del cuadrante I.

Definimos:

$$seno\ de\ \alpha\ =\ sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$coseno\ de\ \alpha\ =\ cos\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$tangente\ de\ \alpha\ =\ tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{abcisa\ de\ A} = \frac{y}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$cotangente\ de\ \alpha\ =\ cotg\,\alpha\ = \frac{abcisa\ de\ A}{ordenada\ de\ A} = \frac{x}{y} = \frac{+}{+} = +$$

$$secante\ de\ \alpha\ =\ sec\,\alpha\ = \frac{radio}{abcisa\ de\ A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$cosecante\ de\ \alpha\ = cosec\ \alpha\ = \frac{radio}{ordenada\ de\ A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{+} = +$$

Signos:

Puede verse que al ser $x > 0$, $y > 0$, $\text{r} > 0$, las seis **razones trigonométricas** de α son positivas. Ello se debe a que A(*x,y*) es un punto del cuadrante I.

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante II y, por tanto, el punto A(*x,y*) está situado en el cuadrante II, por lo que $x < 0$ e $y > 0$.

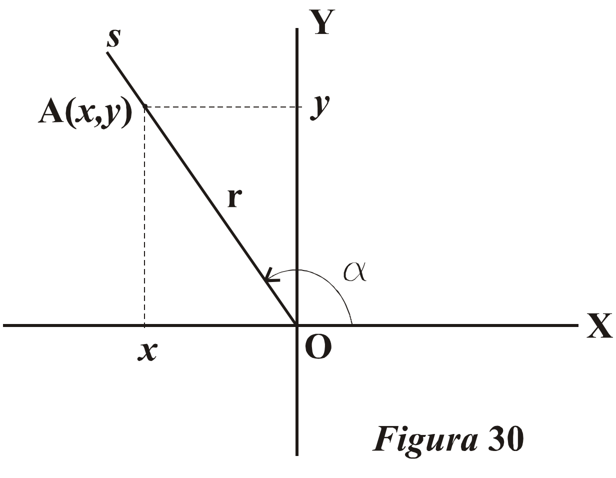


***Figura* 30**

En la *figura* 30 tenemos:

$$A(x,y)\ punto\begin{cases} x < 0 \\ y > 0\end{cases}\quad 90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$$

$radio\ r = d(O,A) = positivo\ \ (distancia)$

$A(x,y)\ un\ punto\ cualquiera\ del\ lado\ s$

Insistimos en que A(*x,y*) es un punto cualquiera situado en la semirrecta *s*.
Nótese que en este caso $x < 0$ e $y > 0$ por ser α un ángulo del cuadrante II.

¡Pues bien! En este caso:

$$\textit{seno de } \alpha = sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$\textit{coseno de } \alpha = cos\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\textit{tangente de } \alpha = tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{abcisa\ de\ A} = \frac{y}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\textit{cotangente de } \alpha = cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{ordenada\ de\ A} = \frac{x}{y} = \frac{-}{+} = -$$

$$\textit{secante de } \alpha = sec\,\alpha = \frac{radio}{abcisa\ de\ A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\textit{cosecante de } \alpha = cosec\,\alpha = \frac{radio}{ordenada\ de\ A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{+} = +$$

Signos:

Nótese como en este caso (α ángulo del cuadrante II) tenemos:

$$sen\,\alpha > 0\ ;\ \ cos\,\alpha < 0\ ;\ \ tg\,\alpha < 0$$

$$cotg\,\alpha < 0\ ;\ \ sec\,\alpha < 0\ ;\ \ cosec\,\alpha > 0$$

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante III y, por tanto, el punto A(x,y) está situado en el cuadrante III, por lo que $x < 0$ e $y < 0$.

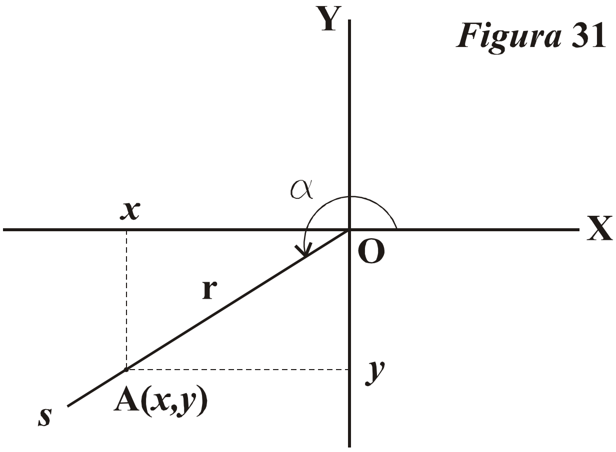


***Figura* 31**

En la *figura* 31 tenemos:

$$A(x,y)\ punto \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

$$radio\ r = d(O,A) = positivo\ (distancia)$$

$$A(x,y)\ un\ punto\ cualquiera\ del\ lado\ s$$

Insistimos en que A(x,y) es un punto cualquiera situado en la semirrecta s.
Nótese que en este caso $x < 0$ e $y < 0$ por ser α un ángulo del cuadrante III.

¡Pues bien! En este caso:

$$\textit{seno de } \alpha = sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\textit{coseno de } \alpha = cos\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$\textit{tangente de } \alpha = tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{abcisa\ de\ A} = \frac{y}{x} = \frac{-}{-} = +$$

$$\textit{cotangente de } \alpha = cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{ordenada\ de\ A} = \frac{x}{y} = \frac{-}{-} = +$$

$$\textit{secante de } \alpha = sec\,\alpha = \frac{radio}{abcisa\ de\ A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{-} = -$$

$$\textit{cosecante de } \alpha = cosec\,\alpha = \frac{radio}{ordenada\ de\ A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{-} = -$$

Signos:

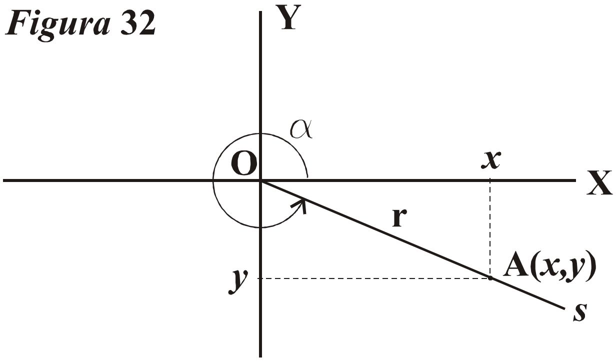
Nótese como en este caso (α ángulo del cuadrante III) tenemos:

$$sen\,\alpha < 0 \;\; ; \;\; cos\,\alpha < 0 \;\; ; \;\; tg\,\alpha > 0$$

$$cotg\,\alpha > 0 \;\; ; \;\; sec\,a < 0 \;\; ; \;\; cosec\,\alpha < 0$$

Supongamos el caso de que el ángulo α es del cuadrante IV y, por tanto, el punto A(x,y) está situado en el cuadrante IV, por lo que $x > 0$ e $y < 0$.

***Figura* 32**



En la *figura* 32 tenemos:

$$A(x,y)\ punto \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad 270º < \alpha < 360º$$

$$radio\ r = d(O,A) = positivo\ \ (distancia)$$

$$A(x,y)\ un\ punto\ cualquiera\ del\ lado\ s$$

Insistimos en que A(x,y) es un punto cualquiera situado en la semirrecta s. Nótese que en este caso $x > 0$ e $y < 0$ por ser α un ángulo del cuadrante IV.

¡Pues bien! En este caso:

$$seno\ de\ \alpha = sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{-}{+} = -$$

$$coseno\ de\ \alpha = cos\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{+}{+} = +$$

$$tangente\ de\ \alpha = tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{abcisa\ de\ A} = \frac{y}{x} = \frac{-}{+} = -$$

$$cotangente\ de\ \alpha = cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{ordenada\ de\ A} = \frac{x}{y} = \frac{+}{-} = -$$

$$secante\ de\ \alpha = sec\,\alpha = \frac{radio}{abcisa\ de\ A} = \frac{r}{x} = \frac{+}{+} = +$$

$$cosecante\ de\ \alpha = cosec\ \alpha = \frac{radio}{ordenada\ de\ A} = \frac{r}{y} = \frac{+}{-} = -$$

Ejemplo 24.-

Considera el ángulo 218º 53´ 29´´. Indica el signo de cada una de sus razones trigonométricas.

Veamos:

El ángulo dado pertenece al cuadrante III, por lo que:

$$sen\ 218º\ 53'\ 29'' < 0 \quad ; \quad cos\ 218º\ 53'\ 29'' < 0$$

$$tg\ 218º\ 53'\ 29'' > 0 \quad ; \quad cotg\ 218º\ 53'\ 29'' > 0$$

$$sec\ 218º\ 53'\ 29'' < 0 \quad ; \quad cosec\ 218º\ 53'\ 29'' < 0$$

Ejemplo 25.-

Dado el punto del plano A(−3, 5), queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo de vértice el origen O y lados el semieje positivo de abcisas y la semirrecta de origen O que pasa por el punto A.
Veamos:

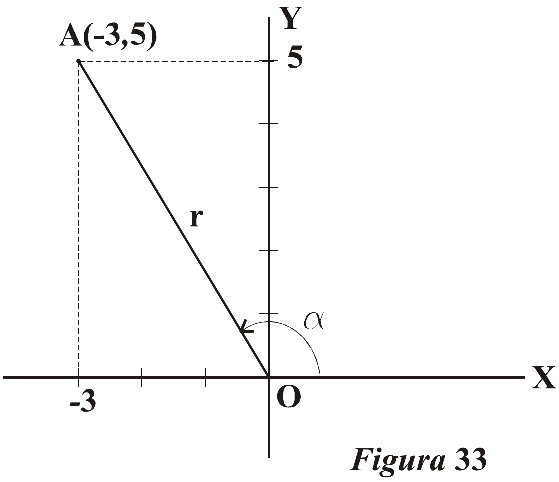


Figura **33**

La *figura* 33 representa el problema gráficamente.
Por definición:

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{radio} = \frac{5}{r}$$

$$cos\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{radio} = \frac{-3}{r}$$

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ A}{abcisa\ de\ A} = \frac{5}{-3} = -1'\widehat{6}$$

$$cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ A}{ordenada\ de\ A} = \frac{-3}{5} = -0'\widehat{6}$$

$$sec\,\alpha = \frac{radio}{abcisa\ de\ A} = \frac{r}{-3}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{radio}{ordenada\ de\ A} = \frac{r}{5}$$

Necesitamos hallar el valor de **r**. Nótese que se trata de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos cateto miden 3 y 5. Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow r = +\sqrt{34}$$

Entonces:

$$sen\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0'857492925$$

$$cos\,\alpha = \frac{-3}{\sqrt{34}} = \frac{-3\sqrt{34}}{34} \approx -0'514495755$$

$$sec\,\alpha = \frac{\sqrt{34}}{-3} \approx -1'94365063$$

$$\cos ec\,\alpha = \frac{\sqrt{34}}{5} \approx 1'166190378$$

Observación importante:

Todo parece indicar que las razones trigonométricas de un ángulo α dependen única y exclusivamente de sus coordenadas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, así como del radio **r** (distancia del punto al origen). Sin embargo, ocurre que si elegimos dos puntos distintos A(x,y) y B(x',y') situados en el mismo lado del ángulo, resulta que el ángulo α es el mismo para ambos puntos, es decir:

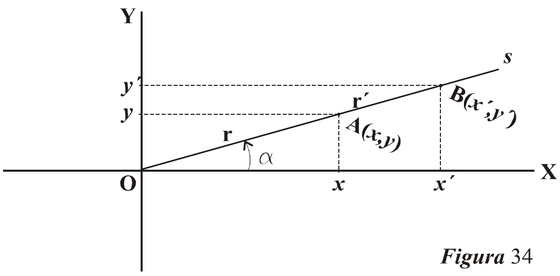


Figura 34

En la *figura* 34 observamos que:
El ángulo α es el mismo para los puntos A y B.

$$\overline{OA} = r \ ; \ \overline{OB} = r'$$

Tenemos que $x \neq x'$; $y \neq y'$; $r \neq r'$
Las razones trigonométricas de α parecen distintas según tomemos el punto A o el punto B, es decir:

$$\text{Razones de } \alpha \text{ si consideramos } A(x,y) \begin{cases} sen\,\alpha = \frac{y}{r} \;\; ; \;\; \cos\alpha = \frac{x}{r} \\ tg\,\alpha = \frac{y}{x} \;\; ; \;\; \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y} \\ \sec\alpha = \frac{r}{x} \;\; ; \;\; \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y} \end{cases}$$

$$\text{Razones de } \alpha \text{ si consideramos } B(x',y') \begin{cases} sen\,\alpha = \frac{y'}{r'} \;\; ; \;\; \cos\alpha = \frac{x'}{r'} \\ tg\,\alpha = \frac{y'}{x'} \;\; ; \;\; \text{cotg}\,\alpha = \frac{x'}{y'} \\ \sec\alpha = \frac{r'}{x'} \;\; ; \;\; \text{cosec}\,\alpha = \frac{r'}{y'} \end{cases}$$

A la vista de lo anterior podemos pensar que hay dos valores para el *seno* de α ya que $sen\,\alpha = \frac{y}{r}$ y $sen\,\alpha = \frac{y'}{r'}$, ocurriendo algo parecido para las demás razones del ángulo α.

Sin embargo esto no es cierto ya que ocurre lo siguiente:

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} \; ; \; \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} \; ; \; \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \; ; \; \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \; ; \; \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'} \; ; \; \frac{r}{y} = \frac{r'}{y'}$$

Esto es debido a la relación existente entre triángulos rectángulos semejantes, es decir:

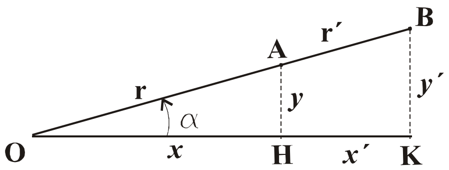


Figura 35

$\overset{\Delta}{OHA}$ *y* $\overset{\Delta}{OKB}$ *triángulos* rectángulos *semejantes*

Entonces:

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} \; ; \; \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} \; ; \; \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \; ; \; \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \; ; \; \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'} \; ; \; \frac{r}{x} = \frac{r'}{x'}$$

Por tanto, las razones trigonométricas de un ángulo dependen única y exclusivamente del ángulo, independientemente del punto (es decir, del radio) que consideremos en el lado.

17.La circunferencia goniométrica o círculo trigonométrico.-

Acabamos de ver que las razones trigonométricas de un ángulo no depende del radio **r** elegido, sino que depende única y exclusivamente del ángulo en sí.

Por esa razón vamos a considerar en un sistema de ejes una circunferencia de centro el origen de coordenadas (punto O) y radio la unidad de longitud. El punto que consideraremos para hallar las razones trigonométricas lo tomaremos sobre esa circunferencia y en el lado del ángulo, es decir:

unidad = ***r***

P(x,y)

Q(x,0)

$\overline{OP} = r$

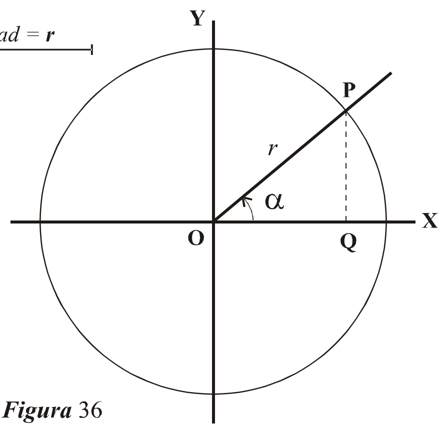


Figura 36

$\overline{PQ} = y$ = *ordenada de* **P**

$\overline{OQ} = x$ = *abcisa de* **P**

P = *punto situado en el lado del ángulo* α *y en la circunferencia*

α = *ángulo situado en el cuadrante* I

Hemos tomado un ángulo α del primer cuadrante, pero todo lo expuesto a continuación es válido para un ángulo de cualquier otro cuadrante.

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α coinciden con las longitudes de unos segmentos :

- Hallemos el *seno* de α :

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada\;de\,\mathrm{P}}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{\mathrm{PQ}}$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

> El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (ordenada de P). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que *sen* $\alpha >$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < sen\,\alpha < 1$.

- Hallemos el *coseno* de α :

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\;de\,\mathrm{P}}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{\mathrm{OQ}}$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

> El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es positiva, tenemos que *cos* $\alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < cos\,\alpha < 1$.

- Hallemos la *tangente* de α :

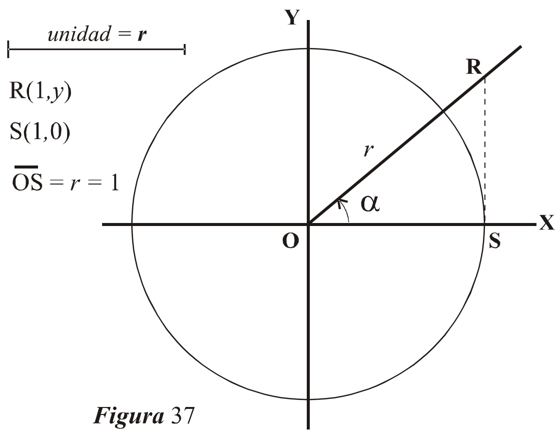


Figura 37

$\overline{\mathrm{RS}} = y =$ *ordenada de* **R**

$\overline{\mathrm{OS}} = 1 =$ *abcisa de* **R**

R = *punto situado en el lado del ángulo* α *y en la perpendicular al eje* X *desde el punto* S

α = *ángulo situado en el cuadrante* I

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada\;de\,\mathrm{R}}{abcisa\;de\,\mathrm{R}} = \frac{y}{1} = y = \overline{\mathrm{RS}}$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

> La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento RS (ordenada de R). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que *tg*α

Puede apreciarse que la longitud de RS depende del valor de α. Dicha longitud puede variar entre 0 (si α es un ángulo de 0º) y $+\infty$ (si α vale 90º). Si α es un ángulo del cuadrante I muy próximo a 0º, su tangente será un valor muy próximo a 0 y si α es un ángulo de I próximo a 90º, su tangete será un número muy grande positivo.

Podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante I es $0 < tg\,\alpha < +\infty$

◘ Hallemos la *cotangente* de α:
En este caso elegimos el punto T (ver *figura* 38) también situado en el lado del ángulo α

$$cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\,\mathrm{M}}{ordenada\ de\,\mathrm{M}} = \frac{x}{1} = x = \overline{\mathrm{MT}}$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

> La *cotangente* de α coincide con la longitud del segmento MT (abcisa de T). Como dicha abcisa es positiva, tenemos que $cotg\,\alpha > 0$

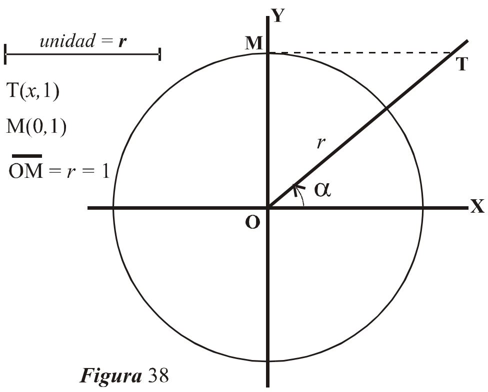


Figura 38

$\overline{\mathrm{MT}} = x$ = *ordenada de* **M**

$\overline{\mathrm{OM}} = 1$ = *abcisa de* **T**

T = *punto situado en el lado del ángulo* α *y en la perpendicular al eje* Y *desde el punto* M

α = *ángulo situado en el cuadrante* I

Puede apreciarse que, en este caso, el valor de cotg α *puede variar entre cero y +infinito.*
Nótese que para un ángulo α *muy próximo a* 0º *la cotangente es un número muy grande positivo y si* α *está muy próximo a* 90º *la cotangente será un número muy próximo a cero.*

◘ Hallemos la *secante* de α:
En este caso consideraremos el punto R (ver *figura* 37) situado en el lado del ángulo α

$$sec\,\alpha = \frac{radio\ de\,\mathrm{R}}{abcisa\ de\,\mathrm{R}} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OS}}} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{1} = \overline{\mathrm{OR}}$$

Nótese que en este caso es $\overline{\mathrm{OR}} > 0$

> La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR (radio de R). Como dicha longitud es positiva, tenemos que $sec\,\alpha > 0$

Apréciese que la *secante* es el cociente entre la longitud de OR (positivo) y 1 (positivo), por lo que dicha *secante* será positiva (cuando α es del cuadrante I). Además puede apreciarse que $\overline{\mathrm{OR}} > r = \mathbf{1}$, es decir, la *secante* de un ángulo del cuadrante I es un número positivo mayor que 1.
También es fácil apreciar que la *secante* puede variar entre 1 y +∞, es decir:

$$1 < sec\,\alpha < +\infty \qquad \textbf{cuando} \quad \mathbf{0^o} < \alpha < \mathbf{90^o}$$

◘ Hallemos la *cosecante* de α:
En este caso consideraremos el punto T (ver *figura* 38) situado en el lado del ángulo α

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\ de\,\mathrm{T}}{ordenada\ de\,\mathrm{T}} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\overline{\mathrm{OM}}} = \frac{\overline{\mathrm{OT}}}{1} = \overline{\mathrm{OT}}$$

Nótese que en este caso es $\overline{\mathrm{OT}} > 0$

> La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT (radio de T). Como dicha longitud es positiva, tenemos que $cosec\,\alpha >$

Apréciese que la *cosecante* es el cociente entre la longitud de OT (positivo) y 1 (positivo), por lo que dicha *cosecante* será positiva (cuando α es del cuadrante I). Además puede apreciarse que $\overline{\mathrm{OT}} > r = \mathbf{1}$, es decir, la *cosecante* de un ángulo del cuadrante I es un número positivo mayor que 1.

También es fácil apreciar que la *cosecante* puede variar entre 1 y +∞, es decir:

$$1 < cosec\,\alpha < +\infty \quad \textbf{cuando} \quad 0^o < \alpha < 90^o$$

Circunferencia goniométrica y círculo trigonométrico:
A la circunferencia y círculo de radio la unidad, dibujados para calcular geométricamente los valores de las razones trigonométricas de un ángulo α, se les denominan respectivamente "*circunferencia goniométrica*" y "*círculo trigonométrico*"

Resumiendo:

Para hallar mediante procedimiento geométrico las razones trigonométricas de un ángulo α del primer cuadrante ($0^o < \alpha < 90^o$), dibujamos la circunferencia goniométrica, el ángulo α y trazamos los siguientes segmentos, asignando a cada uno de ellos la razón trigonométrica de α que le corresponde. Veamos:

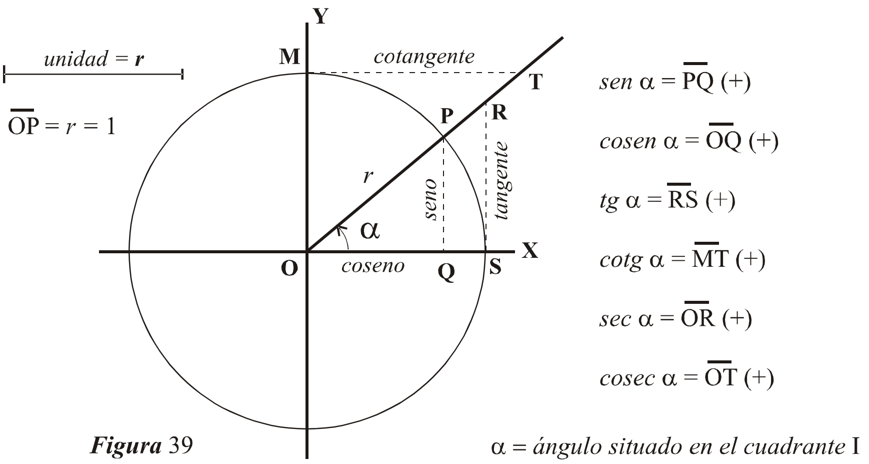


Figura 39

El valor de cada razón trigonométrica se corresponde con el tamaño del segmento que le corresponde, tomando como referencia el valor del radio $r = 1$. Según esto puede apreciarse que el *seno* y *coseno* tomarán valores entre 0 y 1, mientras

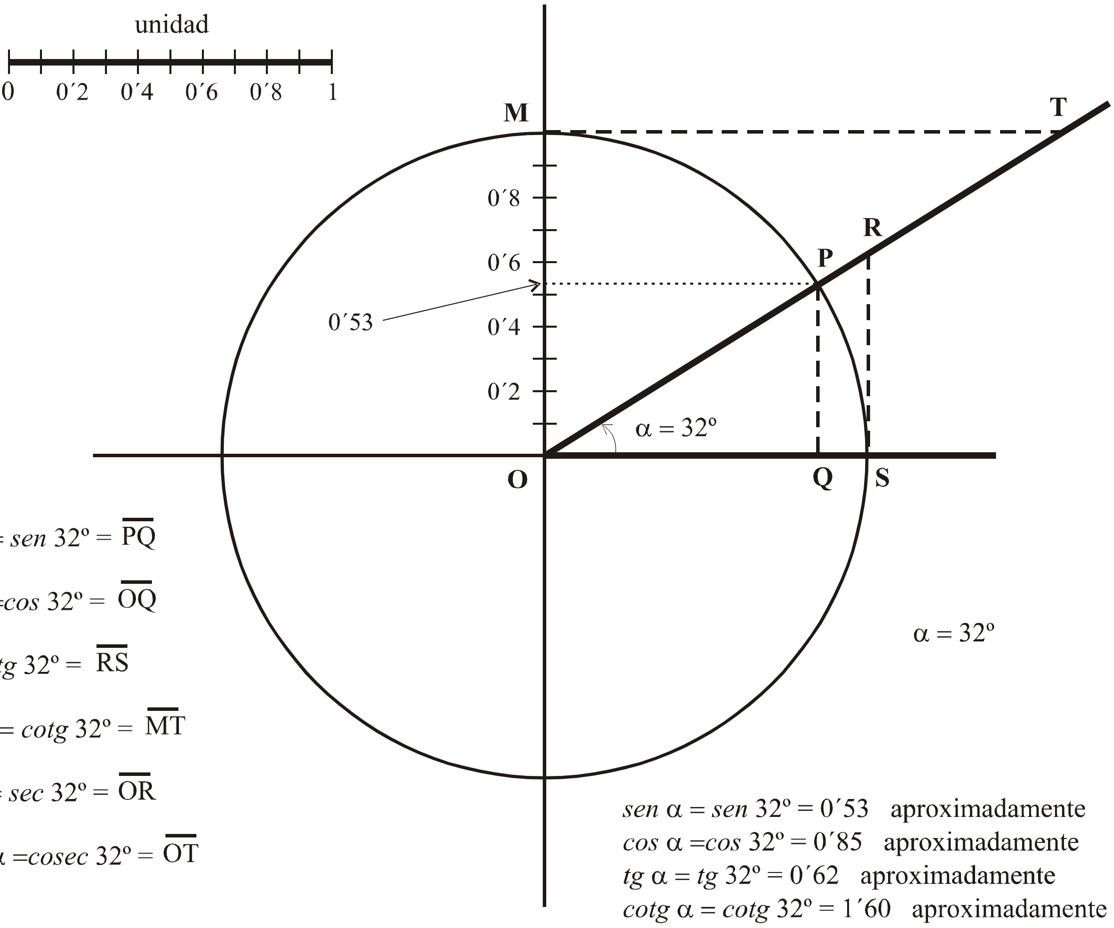
Ejemplo 26.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 32^o$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 5 cm).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0´1 , 0´2 , 0´3 , 0´4 , 0´5 , 0´6 , 0´7, 0´8 , 0´9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0´01 , 0´02 , 0´03 ,......, 0´98 , 0´99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio *r = unidad.* Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 32^o$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abcisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 32^o$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La *figura* 40 desarrolla todo el proceso expuesto.

NOTA: Conviene aclarar que las razones trigonométricas de un ángulo no tienen unidad (no son *cms* ni cualquier otra unidad), son simplemente números.



sen α = *sen* 32º = $\overline{PQ}$

cos α = *cos* 32º = $\overline{OQ}$

tg α = *tg* 32º = $\overline{RS}$

cotg α = *cotg* 32º = $\overline{MT}$

sec α = *sec* 32º = $\overline{OR}$

cosec α = *cosec* 32º = $\overline{OT}$

sen α = *sen* 32º = 0´53 aproximadamente
cos α = *cos* 32º = 0´85 aproximadamente
tg α = *tg* 32º = 0´62 aproximadamente
cotg α = *cotg* 32º = 1´60 aproximadamente
sec α = *sec* 32º = 1´18 aproximadamente
cosec α = *cosec* 32º = 1´89 aproximadamente

***Figura* 40**

Los valores de las razones trigonométricas del ángulo α se corresponden con las longitudes de los segmentos correspondientes con su signo según el cuadrante donde se encuentre dicho ángulo, es decir, para α = 32º tenemos:

sen α *= longitud del segmento* PQ (+) *cos* α *= longitud del segmento* OQ (+)
tg α *= longitud del segmento* RS (+) *cotg* α *= longitud del segmento* MT (+)
sec α *= longitud del segmento* OR (+) *cosec* α *= longitud del segmento* OS (+)

Si tomásemos las medidas con exactitud obtendríamos los siguientes valores:

sen 32º *= longitud del segmento* PQ = 0´52991926........
cos 32º *= longitud del segmento* OQ = 0´84804809.......
tg 32º *= longitud del segmento* RS = 0´62486935.........
cotg 32º *= longitud del segmento* MT = 1´60033452.......
sec 32º *= longitud del segmento* OR = 1´17917840.........
cosec 32º *= longitud del segmento* OS= 1´88707991........

donde los puntos suspensivos significan que hay más decimales.

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante, es decir:

90º < α < 180º

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:

P(x,y)
Q(x,0)
$\overline{\text{OP}} = r$

En este caso:
$x < 0$
$y >$ o

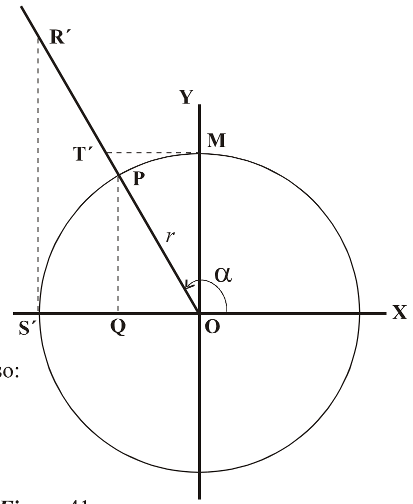


Figura 41

*unidad = **r***

$\overline{\text{PQ}} = y$ = *ordenada de* **P**

$\overline{\text{OQ}} = x$ = *abcisa de* **P**

P = *punto situado en el lado del ángulo* α *y en la circunferencia*

α = *ángulo situado en el cuadrante* II

En este caso los puntos **P**, **T´** y **R´** han quedado en el segundo cuadrante.
El punto **M** ha quedado en el semieje positivo de la **Y**, mientras que **Q** y **S´** están en el semieje negativo de la **X**.

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos, aunque en este caso el signo puede ser negativo. Veamos:

◘ Hallemos el *seno* de α:

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada\;de\,\text{P}}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{\text{PQ}}\;(+)$$

Nótese que en este caso es $y > 0$

El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (ordenada de P). Como dicha ordenada es positiva, tenemos que *sen* $\alpha >$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio r, por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante II es $0 < sen\;\alpha < 1$.

◘ Hallemos el *coseno* de α:

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\;de\,\text{P}}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{\text{OQ}}\;(-)$$

Nótese que en este caso es $x < 0$

El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es negativa, tenemos que *cos* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio r, por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante II es $-1 < cos\;\alpha < 0$.

◘ Hallemos la *tangente* de α:
En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R´) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada\;de\,\text{R}'}{abcisa\;de\,\text{R}'} = \frac{\text{R}'\text{S}'}{\textbf{OS}'} = \frac{\text{R}'\text{S}'}{-1} = \overline{\text{R}'\text{S}'}\;(-)$$

Nótese que en este caso la ordenada de R′ es $\text{R}'\text{S}' > 0$

La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento R´S´ (ordenada de R´). Como está dividida por -1, tenemos que *tg* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento R´S´ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande positivo o infinitamente próximo a cero pero positivo, por lo que podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante II es $-\infty < tg\;\alpha < 0$.

◙ Hallemos la *cotangente* de α:
En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\,\mathrm{T'}}{ordenada\ de\,\mathrm{T'}} = \frac{\mathrm{MT'}}{\mathbf{OM}} = \frac{\mathrm{MT'}}{1} = \overline{\mathrm{MT'}}\,(-)$$

Nótese que en este caso la abcisa de T′ es MT′ < 0

> La *cotangente* de α coincide con la longitud del segmento MT´ (abcisa de M´). Como esa abcisa es negativa, tenemos que *cotg* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento MT´ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *cotangente* de un ángulo α del cuadrante II es $-\infty < cotg\ \alpha < 0$.

◙ Hallemos la *secante* de α:
En este caso, elegimos el punto R´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$sec\,\alpha = \frac{radio\ de\,\mathrm{R'}}{abcisa\ de\,\mathrm{R'}} = \frac{\mathrm{OR'}}{\mathbf{OS'}} = \frac{\mathrm{OR'}}{-1} = \overline{\mathrm{OR'}}\,(-)$$

Nótese que en este caso la abcisa de R′ es OS′ = -1 < 0

> La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR´ (radio de R´). Como está dividida por −1, tenemos que *sec* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OR´ es mayor que el radio r = 1, por lo que podemos asegurar que la *secante* de un ángulo α del cuadrante II es $-\infty < sec\ \alpha < -1$.

◙ Hallemos la *cosecante* de α:
En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado. Se verifica que $1 < cosec\ \alpha < +\infty$

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\ de\,\mathrm{T'}}{ordenada\ de\,\mathrm{T'}} = \frac{\mathrm{OT'}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathbf{OT'}}{1} = \overline{\mathbf{OT'}}\,(+)$$

Nótese que en este caso la ordenada de T′ es OM = 1 > 0

> La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT´ (radio de T´). Como está dividida por 1, tenemos que *cosec* $\alpha > 0$

También podemos hacer coincidir la *tangente* y la *secante* con otros segmentos distintos de $\overline{\mathrm{R'S'}}$ y $\overline{\mathbf{OR'}}$. Veamos:

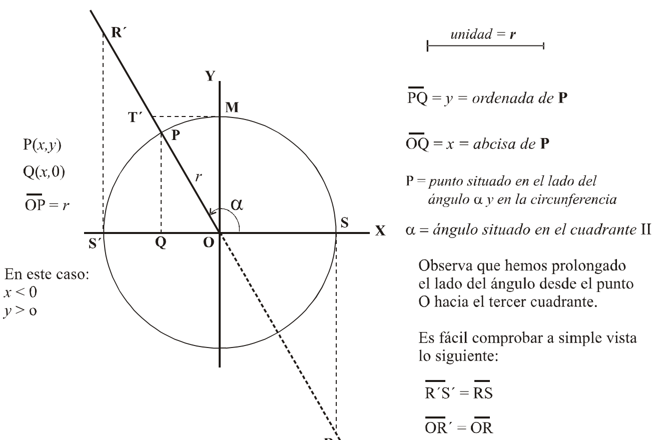


Figura 42

Hemos prolongado el lado del ángulo hacia el cuarto cuadrante y trazado los segmentos RS y OR. Observa que se verifica que:

longitud de R´S´ = *longitud de* RS
longitud de OR´ = *longitud de* OR
Por tanto:

$$tg\,\alpha = \overline{\mathrm{RS'}} = \overline{\mathrm{RS}}\ (-)$$
$$\sec\alpha = \overline{\mathrm{OR'}} = \overline{\mathbf{OR}}\ (-)$$

Nótese que la tangente sale del punto S, exactamente del mismo punto que cuando el ángulo α estaba en el cuadrante I (ver *figura* 39). Observa el valor de la secante de α es el tamaño del segmento OR con signo negativo.

Ejemplo 27.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 124º$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

- ✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).
- ✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 5 cm).
- ✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0´1 , 0´2 , 0´3 , 0´4 , 0´5 , 0´6 , 0´7, 0´8 , 0´9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0´01 , 0´02 , 0´03 ,......, 0´98 , 0´99 , 1
- ✓ Dibujamos una circunferencia de radio *r* = *unidad.* Es la circunferencia goniométrica.
- ✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 124º$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abcisas (eje X).
- ✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 124º$
- ✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La *figura* 43 desarrolla todo el proceso expuesto.

NOTA: Conviene recordar que las razones trigonométricas de un ángulo no tienen unidad (no son *cms* ni cualquier otra unidad), son simplemente números.

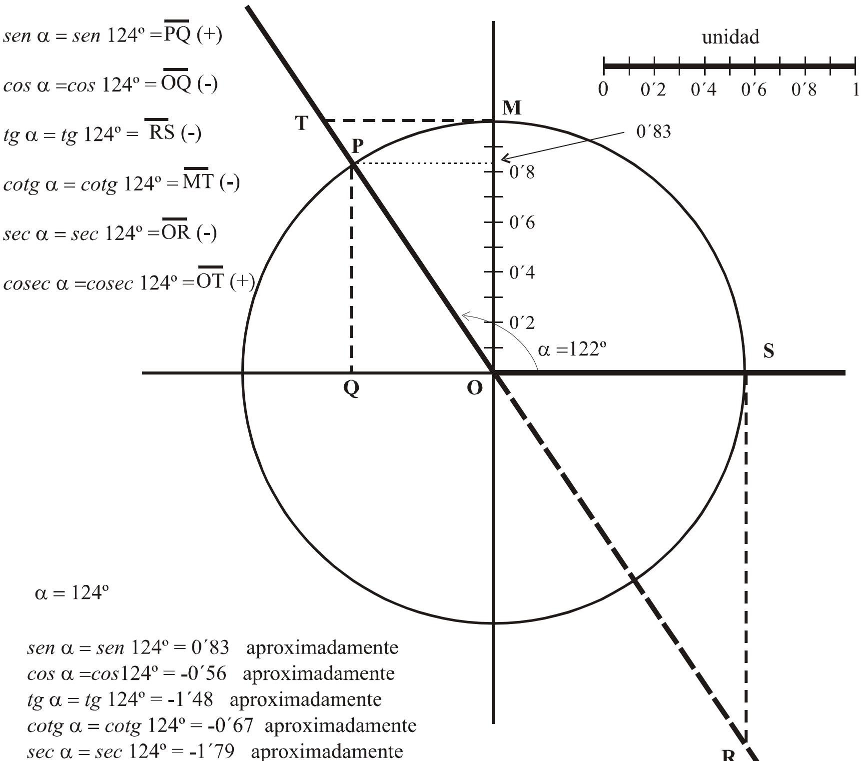


***Figura* 43**

En este caso en que α es un ángulo de cuadrante II, los signos de las razones trigonométricas no coinciden con los del cuadrante I, es decir:

sen 124º = *longitud de* PQ
cos 124º = − *longitud de* OQ
tg 124º = − *longitud de* RS
cotg 124º = −*longitud de* MT
sec 124º = −*longitud de* OR
cosec 124º = *longitud* de OT

Si tomásemos las medidas con exactitud tendríamos los siguientes valores:

sen 124º = 0´82903757....
cos 124º = −0´55919290....
tg 124º = −1´48256096....
cotg 124º = −0´67450851....
sec 124º = −1´7882916....
cosec 124º = 1´20621794....

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el tercer cuadrante, es decir:

$$180^{\circ} < \alpha < 270^{\circ}$$

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:

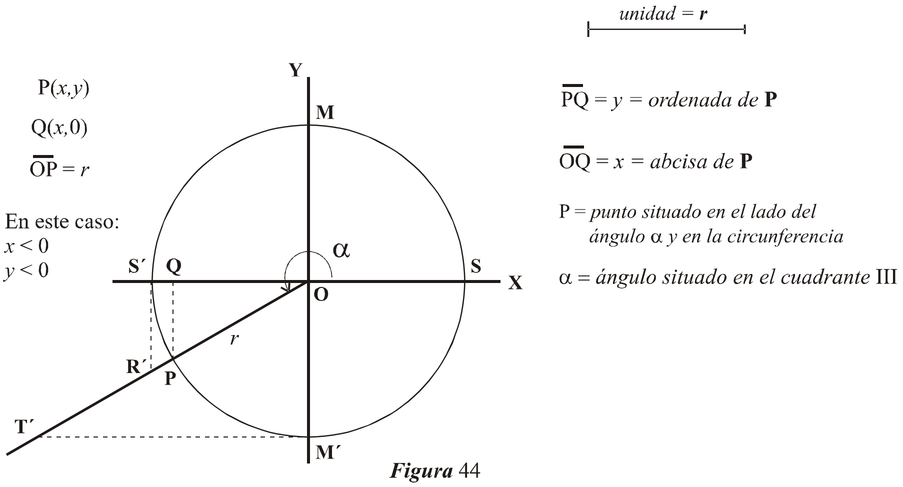


Figura 44

Podemos ver que los puntos **P**, **T´** y **R´** han quedado en el tercer cuadrante.
El punto **M´** ha quedado en el semieje negativo de la **Y**, mientras que **Q** y **S´** están en el semieje negativo de la **X**.

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos. Como antes, los signos pueden ser positivos o negativos. Veamos:

- Hallemos el *seno* de α:

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ \mathrm{P}}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{\mathrm{PQ}}\ (-)$$

Nótese que en este caso es $y < 0$

> El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (abcisa de P). Como dicha ordenada es negativa, tenemos que *sen* $\alpha <$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante III es $-1 < sen\ \alpha < 0$.

- Hallemos el *coseno* de α:

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\ de\ \mathrm{P}}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{\mathrm{OQ}}\ (-)$$

Nótese que en este caso es $x < 0$

> El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es negativa, tenemos que *cos* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante III es $-1 < cos\ \alpha < 0$.

- Hallemos la *tangente* de α:
  En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R´) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada\ de\ \mathrm{R}'}{abcisa\ de\ \mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{R'S'}}{\mathbf{OS}'} = \frac{\mathrm{R'S'}}{-1} = \overline{\mathrm{R'S'}}\,(+)$$

Nótese que en este caso la ordenada de $\mathbf{R'}$ **es** $\mathbf{R'S'} < 0$

> La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento R´S´ (ordenada de R´). Como está dividida por -1, tenemos que *tg* $\alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento R´S´ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante III es $0 < tg\ \alpha < \infty$.

◙ Hallemos la *cotangente* de α:
En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$cotg\,\alpha = \frac{abcisa\,de\,\mathrm{T}'}{ordenada\,de\,\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{M'T'}}{\mathbf{OM}'} = \frac{\mathrm{M'T'}}{-1} = \overline{\mathrm{M'T'}}\,(+)$$

Nótese que en este caso la abcisa de T′ es M′T′ < 0

La co*tangente* de α coincide con la longitud del segmento M´T´ (abcisa de M´). Como esa abcisa es negativa, tenemos que *cotg* α

Puede apreciarse que la longitud del segmento M´T´ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *cotangente* de un ángulo α del cuadrante III es $0 < cotg\ \alpha < \infty$.

◙ Hallemos la *secante* de α:
En este caso, elegimos el punto R´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\sec\alpha = \frac{radio\,de\,\mathrm{R}'}{abcisa\,de\,\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{OR}'}{\mathbf{OS}'} = \frac{\mathrm{OR}'}{-1} = \overline{\mathrm{OR}'}\,(-)$$

Nótese que en este caso la abcisa de R′ es OS′ = -1 < 0

La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR´ (radio de R´). Como está dividida por −1, tenemos que *sec* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OR´ es mayor que el radio r = 1, por lo que podemos asegurar que la *secante* de un ángulo α del cuadrante III es $-\infty < sec\ \alpha < -1$.

◙ Hallemos la *cosecante* de α:
En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\,de\,\mathrm{T}'}{ordenada\,de\,\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{OT}'}{\mathrm{OM}'} = \frac{\mathbf{OT}'}{-1} = \overline{\mathbf{OT}'}\,(-)$$

Nótese que en este caso la ordenada de T′ es OM′ = -1 < 0

La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT´ (radio de T´). Como está dividida por −1, tenemos que *cosec* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OT´ es mayor que el radio r = 1, por lo que podemos asegurar que la *cosecante* de un ángulo α del cuadrante III es $-\infty < cosec\ \alpha < -1$.

También podemos hacer coincidir la *tangente*, la *cotangente*, la *secante* y la *cosecante* con otros segmentos distintos de $\overline{\mathrm{R'S'}}$, $\overline{\mathrm{M'T'}}$, $\overline{\mathbf{OR}'}$ *y* $\overline{\mathbf{OT}'}$. Para ello prolongamos el lado del ángulo y trazamos la tangente desde el punto S y la cotangente desde el punto M. De este modo obtenemos los nuevos puntos R y T.

La *figura* 45 ilustra este proceso. Veamos:

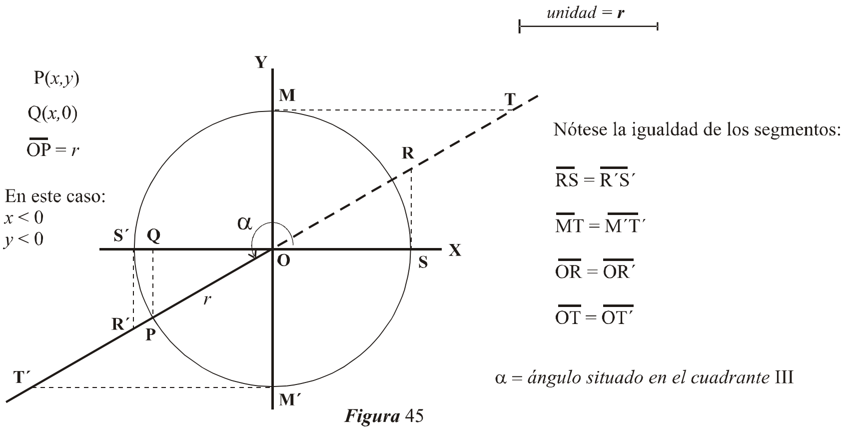


Figura 45

En este caso buscaremos siempre la tangente partiendo del punto S y la cotangente partiendo desde el pinto M.

Ejemplo 28.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 245º$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).

✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 2 cm, etc.).

✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0´1 , 0´2 , 0´3 , 0´4 , 0´5 , 0´6 , 0´7, 0´8 , 0´9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0´01 , 0´02 , 0´03 ,......, 0´98 , 0´99 , 1

✓ Dibujamos una circunferencia de radio *r* = *unidad.* Es la circunferencia goniométrica.

✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 245º$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abcisas (eje X).

✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 245º$

✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La *figura* 46 desarrolla todo el proceso expuesto.

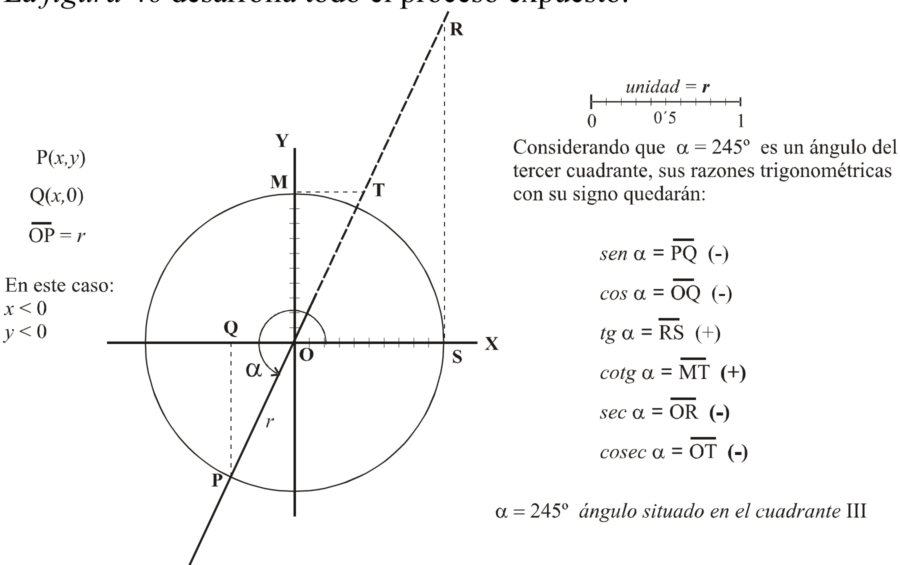


Figura 46

Si comparásemos las longitudes de los segmentos con la unidad y esta comparación fuese precisa, obtendríamos:

sen 245º = −0´90630778
cos 245º = −0´42261826
tg 245º = 2´14450692
ctg 245º = 0´46630765
sec 245º = −2´36620158
cosec 245º= −1´1033779

Recordemos nuevamente que estos valores son simplemente números, sin unidades de longitud.

Ahora vamos a considerar que α es un ángulo situado en el cuarto cuadrante, es decir:

$$270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$$

En este caso los puntos P, Q, R y T varían de posición, por lo que van a influir en los signos de las razones trigonométricas. Veamos:

Podemos ver que los puntos **P**, **T′** y **R′** han quedado en el tercer cuadrante.

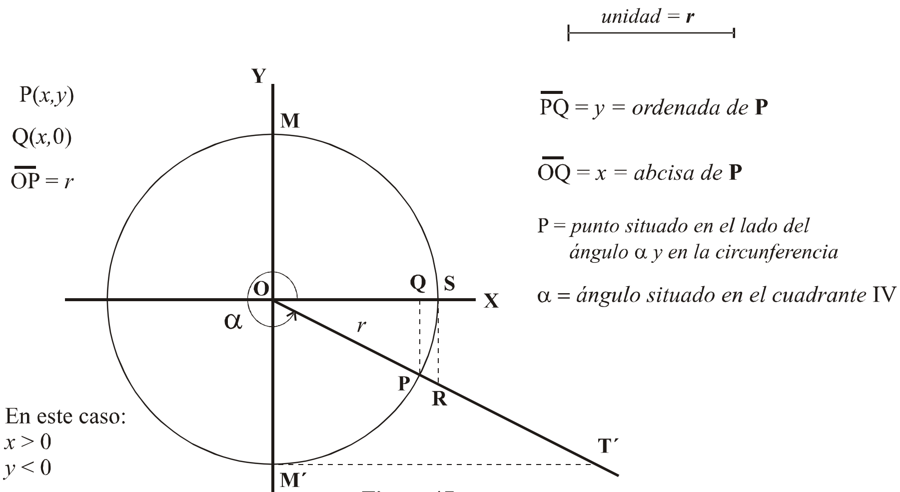


Figura 47

Podemos ver que los puntos **P**, **T′** y **R** han quedado en el tercer cuadrante. El punto **M′** ha quedado en el semieje negativo de la **Y**, mientras que **Q** y **S** están en el semieje positivo de la **X**.

Vamos a ver que las *razones trigonométricas* del ángulo α también coinciden con las longitudes de unos segmentos. Como antes, los signos pueden ser positivos o negativos. Veamos:

◘ Hallemos el *seno* de α:

$$sen\,\alpha = \frac{ordenada\,de\,\text{P}}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y = \overline{\text{PQ}}\ (-)$$

Nótese que en este caso es $y < 0$

> El *seno* de α coincide con la longitud del segmento PQ (abcisa de P). Como dicha ordenada es negativa, tenemos que *sen* $\alpha <$

Puede apreciarse que la longitud de PQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *seno* de un ángulo α del cuadrante IV es $-1 < sen\ \alpha < 0$.

◘ Hallemos el *coseno* de α:

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\,de\,\text{P}}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x = \overline{\text{OQ}}\ (+)$$

Nótese que en este caso es $x > 0$

> El *coseno* de α coincide con la longitud del segmento OQ (abcisa de P). Como dicha abcisa es positiva, tenemos que *cos* $\alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud de OQ es menor que la del radio *r*, por lo que podemos decir que el *coseno* de un ángulo α del cuadrante IV es $0 < cos\ \alpha < 1$.

◘ Hallemos la *tangente* de α:

En este caso, en vez de el punto P, elegimos otro punto (punto R) situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$tg\,\alpha = \frac{ordenada\,de\,\text{R}}{abcisa\,de\,\text{R}} = \frac{\text{RS}}{\textbf{OS}} = \frac{\text{RS}}{1} = \overline{\text{RS}}\ (-)$$

Nótese que en este caso la ordenada de R es RS < 0

> La *tangente* de α coincide con la longitud del segmento RS (ordenada de R). Como está dividida por 1, tenemos que *tg* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento RS (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *tangente* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < tg\ \alpha < 0$.

- Hallemos la *cotangente* de α:
  En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$cotg\,\alpha = \frac{abcisa\ de\ \mathrm{T}'}{ordenada\ de\ \mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{M'T'}}{\mathbf{O}\mathrm{M}'} = \frac{\mathrm{M'T'}}{-1} = \overline{\mathrm{M'T'}}\,(-)$$

Nótese que en este caso la abcisa de T′ es M′T′ > 0

La co*tangente* de α coincide con la longitud del segmento M´T´ (abcisa de M´). Como esa abcisa es positiva, tenemos que *cotg* $\alpha >$

Puede apreciarse que la longitud del segmento M´T´ (con su signo) puede ser un número infinitamente grande negativo o infinitamente próximo a cero pero negativo, por lo que podemos decir que la *cotangente* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < cotg\ \alpha < 0$.

- Hallemos la *secante* de α:
  En este caso, elegimos el punto R situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$\sec\alpha = \frac{radio\ de\ \mathrm{R}}{abcisa\ de\ \mathrm{R}} = \frac{\mathrm{OR}}{\mathbf{O}S} = \frac{\mathrm{OR}}{1} = \overline{\mathrm{OR}}\ (+)$$

Nótese que en este caso la abcisa de R es OS = 1 > 0

La *secante* de α coincide con la longitud del segmento OR (radio de R). Como está dividida por 1, tenemos que *sec* $\alpha > 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OR es mayor que el radio r = 1, por lo que podemos asegurar que la *secante* de un ángulo α del cuadrante IV es $1 < sec\ \alpha < +\infty$.

- Hallemos la *cosecante* de α:
  En este caso, elegimos el punto T´ situado en el lado del ángulo. Recuerda que el punto elegido (si está en el lado) no influye en el resultado.

$$cosec\,\alpha = \frac{radio\ de\ \mathrm{T}'}{ordenada\ de\ \mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{OT}'}{\mathrm{OM}'} = \frac{\mathrm{O}\mathbf{T}'}{-1} = \overline{\mathrm{O}\mathbf{T}'}\,(-)$$

Nótese que en este caso la ordenada de T′ es OM′ = -1 < 0

La *cosecante* de α coincide con la longitud del segmento OT´ (radio de T´). Como está dividida por −1, tenemos que *cosec* $\alpha < 0$

Puede apreciarse que la longitud del segmento OT´ es mayor que el radio r = 1, por lo que podemos asegurar que la *cosecante* de un ángulo α del cuadrante IV es $-\infty < cosec\ \alpha < -1$.

También podemos hacer coincidir la *cotangente* y la *cosecante* con otros segmentos distintos de $\overline{\mathrm{M'T'}}$ *y* $\overline{\mathbf{O}\mathrm{T}'}$. Para ello prolongamos el lado del ángulo y trazamos la cotangente desde el punto M. De este modo obtenemos el nuevo punto T.

La *figura* 48 ilustra este proceso. Veamos:

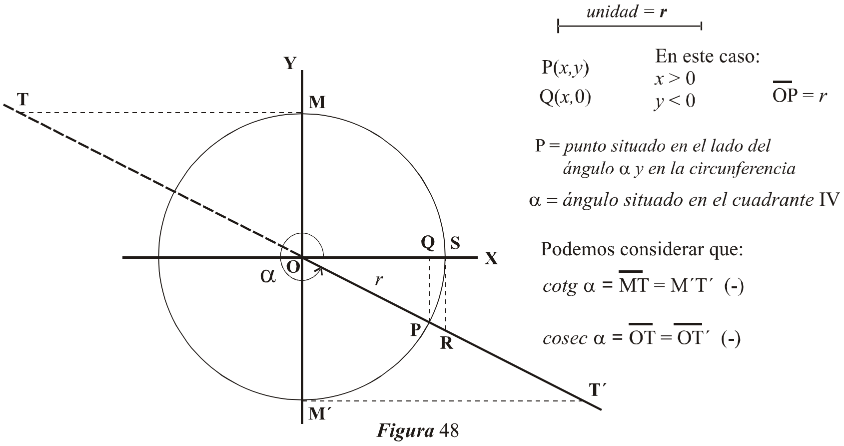


Figura 48

Para buscar la cotangente y la cosecante del ángulo partimos del punto M en lugar de M´

Ejemplo 29.-

Vamos a calcular a partir del círculo trigonométrico las razones del ángulo $\alpha = 335º$. Para ello realizamos los siguientes pasos:

✓ Trazamos un sistema de ejes cartesianos rectangulares de origen un punto O (origen).

✓ Tomamos como unidad un segmento de longitud la que queramos y consideramos que esa longitud es igual a 1 (por ejemplo: unidad = 2 cm, etc.).

✓ Graduamos los ejes con dicha unidad y también es conveniente graduar una unidad con décimas : 0 , 0´1 , 0´2 , 0´3 , 0´4 , 0´5 , 0´6 , 0´7, 0´8 , 0´9 , 1. Si fuese posible graduaríamos también con centésimas: 0´01 , 0´02 , 0´03 ,......, 0´98 , 0´99 , 1

✓ Dibujamos una circunferencia de radio *r = unidad.* Es la circunferencia goniométrica.

✓ Tomando como vértice el punto O, dibujamos el ángulo $\alpha = 335º$ de modo que uno de los lados coincida con el semieje positivo de abcisas (eje X).

✓ Trazamos los segmentos correspondientes a cada razón trigonométrica de $\alpha = 335º$

✓ Comparamos el tamaño de cada uno de esos segmentos con la unidad graduada y dicha comparación nos dará el valor (que será una longitud) de la razón trigonométrica.

La *figura* 49 desarrolla todo el proceso expuesto.

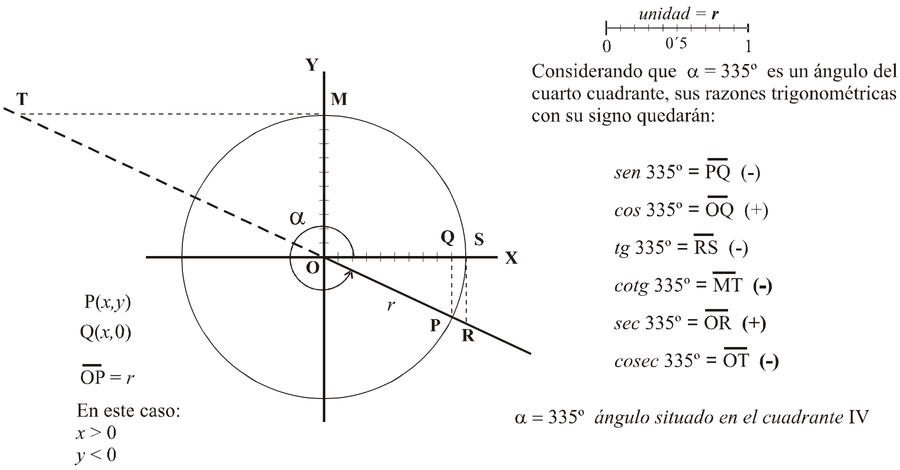


Figura 49

Si calculásemos con exactitud las medidas de los segmentos con sus signos, tendríamos los siguientes valores:

sen 335º = −0´42261826
cos 335º = 0´90630779
tg 335º = −0´46630766
cotg 335º = −2´1445069
sec 335º = 1´10337792
cosec 335º = −2´3662016

18.Observaciones sobre las razones trigonométricas de un ángulo.-

A la vista de lo expuesto y desarrollado en el apartado anterior, convine hacer las siguientes observaciones:

① Las razones trigonométricas (*seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante*) de un ángulo α son números reales cuyo valor podemso hacerlos coincidir con la longitud de un segmento. Esto es posible utilizando como referencia una **circunferencia de radio unidad**. Dichos números pueden ser positivos o negativos, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo. Alguna de las razones de α pueden valer cero (veremos este caso más adelante).

② En todos los casos anteriores hemos visto que $sen\,\alpha = \overline{PQ}$ y que $\overline{PQ} \leq r = 1$, es decir, si consideramos el signo del seno de un ángulo, podemos asegurar que:

$$\boxed{-1 \leq sen\ \alpha \leq 1}$$

El seno de cualquier ángulo es un número comprendido entre -1 y 1

③ En todos los casos anteriores hemos visto que $\cos\alpha = \overline{OQ}$ y que $\overline{OQ} \leq r = 1$, es decir, si consideramos el signo del *coseno* de un ángulo, podemos asegurar que:

$$\boxed{-1 \leq cos\ \alpha \leq 1}$$

El coseno de cualquier ángulo es un número comprendido entre -1 y 1

④ La *tangente* de α en el círculo trigonométrico viene determinada por un segmento $\overline{RS}$ en el que el punto S es la intersección de la circunferencia goniométrica con el semieje positivo de abcisas (eje X). La longitud de $\overline{RS}$ puede variar entre 0 y $+\infty$, por lo que si consideramos el signo, podemos asegurar que:

$$\boxed{-\infty \leq tg\ \alpha \leq \infty}$$

Observa que si tomamos un ángulo α muy próximo a 90º pero un poco menor (por ejemplo $\alpha = 89º\ 59'\ 59''$) podrás notar que $tg\ \alpha$ = *número muy grande positivo.* Esto se debe a que el segmento $\overline{RS}$ es muy grande.
En el caso de que tomemos un ángulo α muy próximo a 90º pero un poco mayor (por ejemplo $\alpha = 90º\ 0'\ 1''$) podrás notar que $tg\ \alpha$ = *número muy grande negativo.* Esto se debe a que el segmento $\overline{RS}$ es muy grande, pero en este caso el signo de la *tangente* es negativo.
Debes entender que si α es un ángulo muy próximo a 0º o a 360º, la *tangente* es un número muy próximo a 0 (positivo o negativo).

⑤ La *cotangente* de α en el círculo trigonométrico viene determinada por un segmento $\overline{MT}$ en el que el punto M es la intersección de la circunferencia goniométrica con el semieje positivo de ordenadas (eje Y). La longitud de $\overline{MT}$ puede variar entre 0 y $+\infty$, por lo que si consideramos el signo, podemos asegurar que:

$$\boxed{-\infty \le cotg\ \alpha \le \infty}$$

Observa que si tomamos un ángulo α muy próximo a 0º pero un poco mayor (por ejemplo $\alpha = 0º\ 0´\ 59´´$) podrás notar que *cotg* α = *número muy grande positivo.* Esto se debe a que el segmento $\overline{MT}$ es muy grande.
En el caso de que tomemos un ángulo α muy próximo a 180º pero un poco menor (por ejemplo $\alpha = 179º\ 59´\ 59´´$) podrás notar que *cotg* α = *número muy grande negativo.* Esto se debe a que el segmento $\overline{MT}$ es muy grande, pero en este caso el signo de la **cotangente** es negativo.
Del mismo modo podrás observar que si α es un ángulo muy próximo a 90º (mayor o menor), la longitud del segmento $\overline{MT}$ es muy pequeña, lo que hace que la *cotangente* sea un número próximo a 0 (positivo o negativo).

⑥ Hemos visto que la *secante* viene determinada por el segmento $\overline{OR}$, es decir, en todos los casos sale del origen de coordenadas (punto O). Nótese que como el punto R está fuera del círculo, la longitud de $\overline{OR}$ es mayor que el radio ***r***, es decir, $\overline{OR} \ge r = 1$. Esto significa que la *secante* de un ángulo siempre es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1.

$$\boxed{\begin{array}{c} sec\ \alpha \le -1 \quad \text{o} \quad sec\ \alpha \ge 1 \\ \textit{depende del cuadrante donde esté } \alpha \end{array}}$$

⑦ Hemos visto que la *cosecante* viene determinada por el segmento $\overline{OT}$, es decir, en todos los casos sale del origen de coordenadas (punto O). Nótese que como el punto T está fuera del círculo, la longitud de $\overline{OT}$ es mayor que el radio ***r***, es decir, $\overline{OT} \ge r = 1$. Esto significa que la *cosecante* de un ángulo siempre es mayor o igual que 1 o menor o igual que -1.

$$\boxed{\begin{array}{c} cosec\ \alpha \le -1 \quad \text{o} \quad cosec\ \alpha \ge 1 \\ \textit{depende del cuadrante donde esté } \alpha \end{array}}$$

Resumiendo:

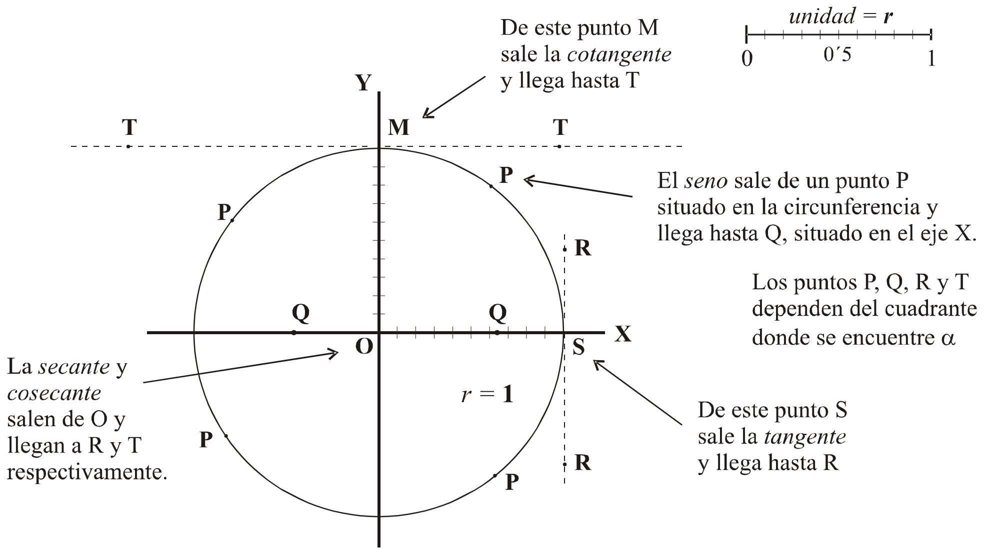


Figura 50

La figura 50 ilustra desde donde debemos tomar los segmentos que miden las razones trigonométricas de un ángulo α

Concretemos la explicación dada en la figura 50:

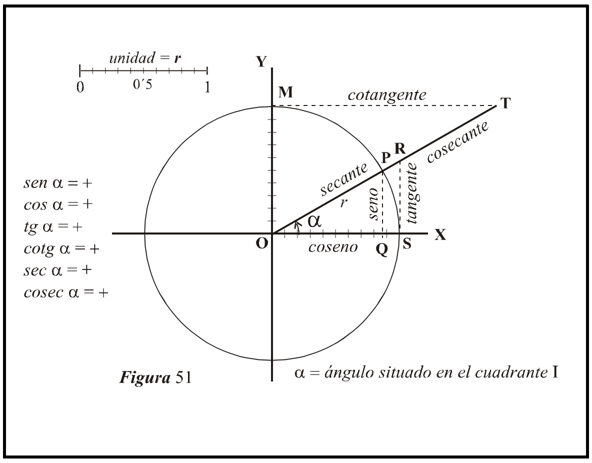


Figura 51

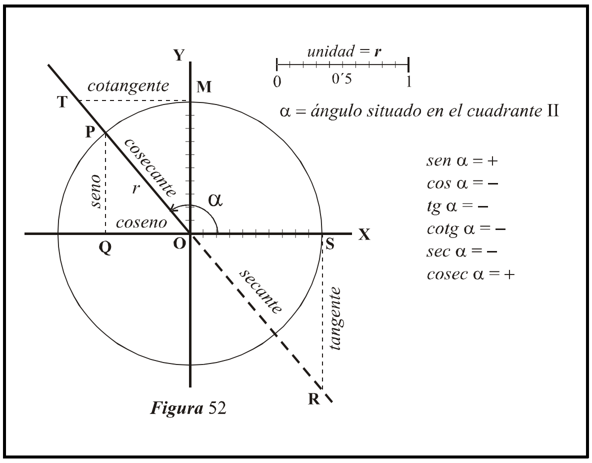


Figura 52

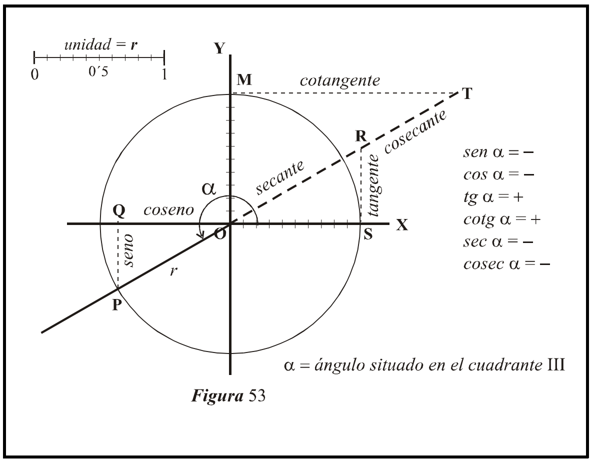


Figura 53

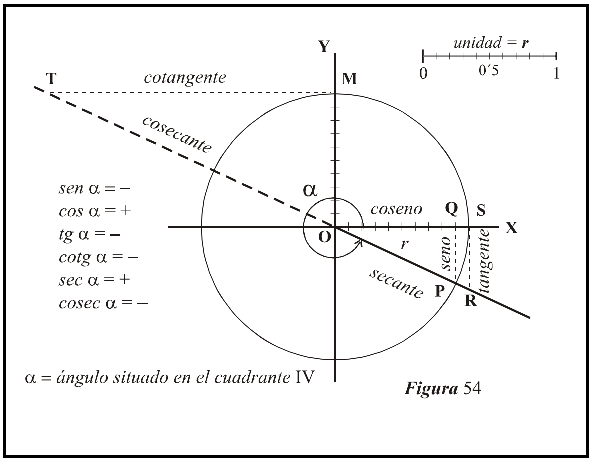


Figura 54

19.Razones trigonométricas del ángulo 0º.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 0º = 0$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 0º (0 *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 0º = 0$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 55 puede apreciarse que los puntos **P**, **Q**, **R** y **S** coinciden y sus coordenadas son $x = 1$ e $y = 0$.
Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* $\overline{MT}$ y la *cosecante* $\overline{OT}$ no existan.
Por tanto, el ángulo 0º no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.

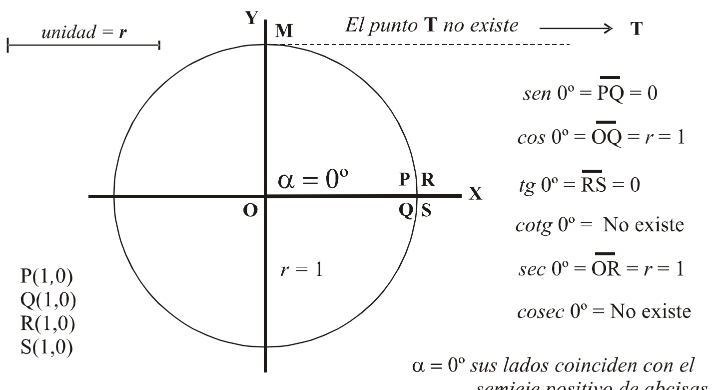


Figura 55

20.Razones trigonométricas del ángulo 90º.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 90º = \pi/2$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 90º ($\pi/2$ *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 90º = \pi/2$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 56 puede apreciarse que los puntos **P**, **M** y **T** coinciden y sus coordenadas son $x = 0$ e $y = 1$.
Nótese que el punto **R** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *tangente* $\overline{RS}$ y la *secante* $\overline{OR}$ no existan.
Por tanto, el ángulo 90º no tiene ni *tangente* ni *secante*.

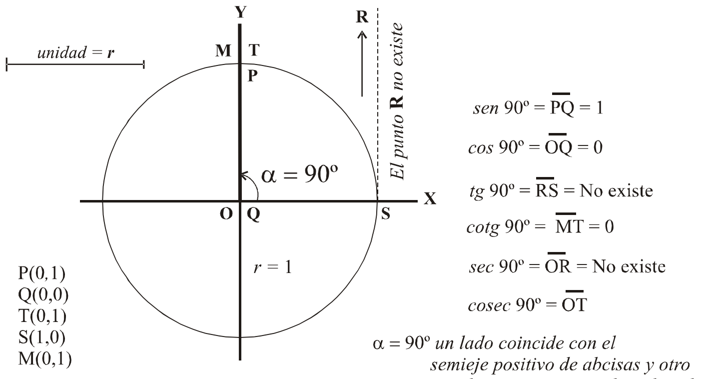


Figura 56

21.Razones trigonométricas del ángulo 180º.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 180º = \pi$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 180º (π *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 180º = \pi$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 57 se aprecia que los puntos **P** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = -1$ e $y = 0$.
También coinciden **S** y **R**.
Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* $\overline{MT}$ y la *cosecante* $\overline{OT}$ no existan.
Por tanto, el ángulo 180º no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.

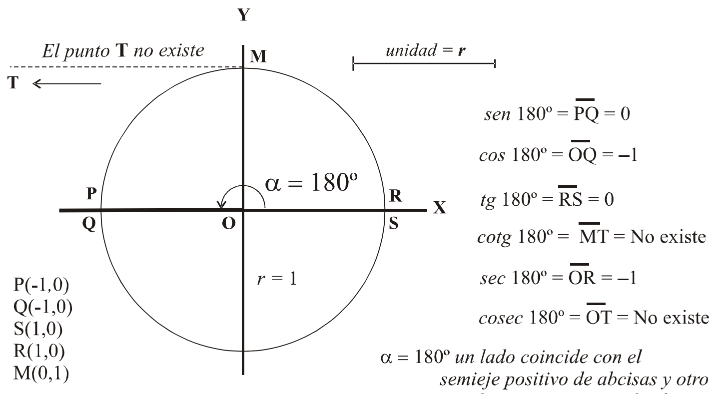


Figura 57

22.Razones trigonométricas del ángulo 270º.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 270º = \frac{3\pi}{2}$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 270º ($\frac{3\pi}{2}$ *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 270º = \frac{3\pi}{2}$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 58 se aprecia que los puntos **O** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = 0$ e $y = 0$.
También coinciden **M** y **T**.
Nótese que el punto **R** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *tangente* $\overline{RS}$ y la *secante* $\overline{OR}$ no existan.
Por tanto, el ángulo 270º no tiene ni *tangente* ni *secante*.

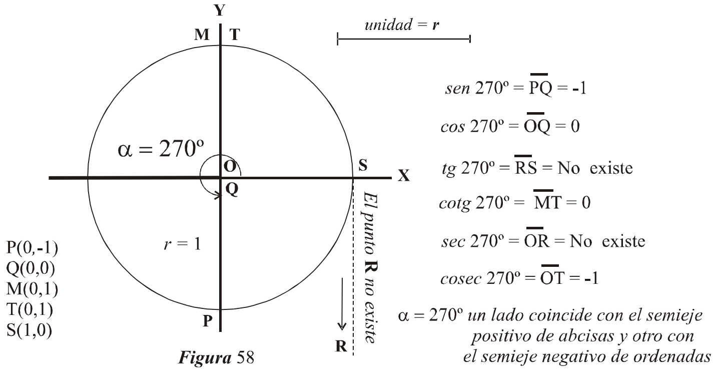


Figura 58

23.Razones trigonométricas del ángulo 360º.-

Veamos el caso particular del ángulo $\alpha = 360º = 2\pi$ *radianes*.

De un modo gráfico podemos obtener los valores de las razones trigonométricas del ángulo 360º (2π *radianes*). Veamos:

- Representemos en el círculo trigonométrico el ángulo $\alpha = 360º = 2\pi$ *radianes* y actuemos del mismo modo que para cualquier otro ángulo:

En la figura 59 se aprecia que los puntos **P** y **Q** coinciden y sus coordenadas son $x = 1$ e $y = 0$.
También coinciden **R** y **S**.
Nótese que el punto **T** no existe (se pierde en el infinito), lo cual hace que la *cotangente* $\overline{MT}$ y la *cosecante* $\overline{OT}$ no existan.
Por tanto, el ángulo 360º no tiene ni *cotangente* ni *cosecante*.

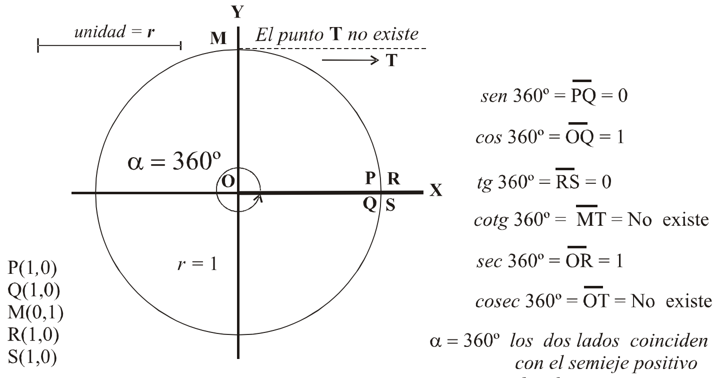


Figura 59

NOTA: Puede apreciarse que las razones trigonométricas del ángulo 360º coinciden con las del ángulo 0º.

24.Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo.-

Sea α un ángulo y sean *sen* α, *cos* α, *tg* α, *cotg* α, *sec* α y *cosec* α sus razones trigonométricas.

Vamos a ver que dichas razones trigonométricas están relacionadas entre si.

En efecto:

Vamos a considerar que α es un ángulo del primer cuadrante, pero el razonamiento es válido para un ángulo de cualquier cuadrante.

En la figura 60 hemos representado un ángulo α del cuadrante I y hemos trazado sus razones trigonométricas para buscar las relaciones existente entre ellas.

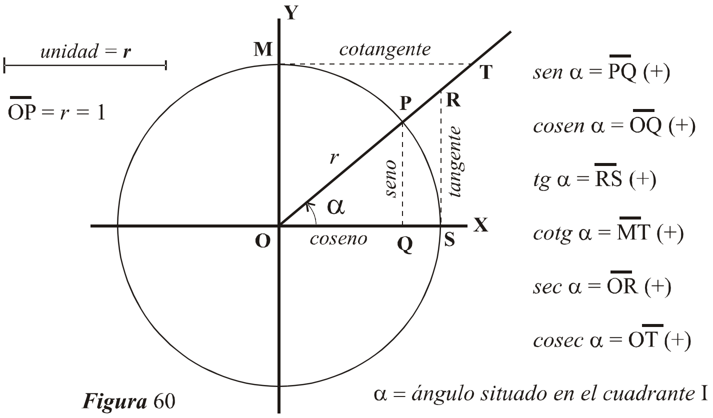


Figura 60

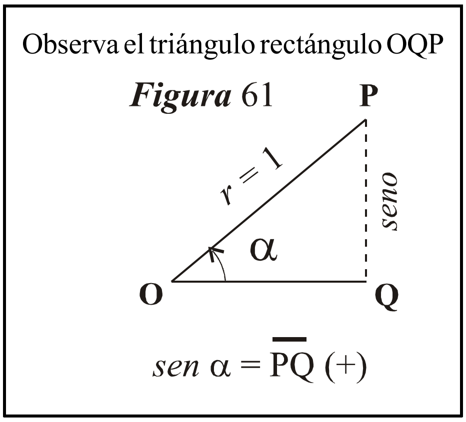


Figura 61

En la figura 61 tenemos el triángulo rectángulo OQP con ángulo recto en el vértice Q, catetos $\overline{PQ}$ *y* $\overline{OQ}$ e hipotenusa $r = 1$.Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos :

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = r^2$$

Teniendo en cuenta que $\overline{PQ} = sen\,\alpha$, $\overline{OQ} = \cos\alpha$ *y* $r = 1$, podemos poner que :

$$(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$$

Para no tener que poner lo paréntesis admitimos como correcto escribir la expresión anterior de la forma siguiente:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Quede claro que esta última expresión significa lo mismo que la anterior. Hemos cambiado la forma para evitar los paréntesis.

La expresión $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ la verifican todos los ángulos α de cualquier cuadrante y se denomina **Fórmula Fundamental de la Trigonometría**. Su enunciado es como sigue:

> " Para cualquier ángulo α se verifica que su ***seno*** al cuadrado mas su ***coseno*** al cuadrado es igual a 1"

Ejemplo 30.-

✓ Para el ángulo α = 38º se verifica que $sen^2 38º + cos^2 38º = 1$

✓ Para el ángulo α = 129º se verifica que $sen^2 129º + cos^2 129º = 1$

✓ Para el ángulo α = 205º se verifica que $sen^2 205º + cos^2 205º = 1$

✓ Para el ángulo α = 310º se verifica que $sen^2 310º + cos^2 310º = 1$

✓ Para el ángulo α = 90º se verifica que $sen^2 90º + cos^2 90º = 1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

También podemos expresar el ángulo en radianes:

✗ Para el ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{5}\,rad$ se verifica que $sen^2\,\frac{3\pi}{5} + cos^2\,\frac{3\pi}{5} = \mathbf{1}$

✗ Para el ángulo $\alpha = \frac{5\pi}{4}\,rad$ se verifica que $sen^2\,\frac{5\pi}{4} + cos^2\,\frac{5\pi}{4} = \mathbf{1}$

Ejemplo 31.-

Se sabe que el *seno* de 45º vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Halla el valor del coseno de 45º.

Veamos:

Sabemos que $sen\,45º = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y queremos hallar $cos\ 45º$

Por la **Fórmula Fundamental de la Trigonometría** sabemos que: $sen^2 45º + cos^2 45º = 1$

Por tanto: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + cos\,45º = \mathbf{1}$

$$cos^2\ 45º = \mathbf{1} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2} = 1 - \frac{\sqrt{2^2}}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Despejando:\ cos\ 45º \underbrace{=}_{\substack{\text{Como } 45º \text{ es} \\ \text{del cuadrante I} \\ \text{el seno es positivo}}} +\sqrt{\tfrac{1}{2}} = +\frac{\sqrt{\mathbf{1}}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{1}\cdot\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2}}\cdot\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2^2}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Ejemplo 32.-

Se sabe que α es un ángulo del cuadrante II y que $sen\,\alpha = \frac{2}{5}$. Halla $\cos\ \alpha$

Veamos:

Por ser α un ángulo del cuadrante II sabemos que *cos* α = *número negativo*.

Por la **Fórmula Fundamental de la Trigonometría** tenemos que: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Por tanto:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\tfrac{2}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1\ ;\ cos^2\alpha = 1 - \tfrac{4}{25}\ ;\ cos^2\alpha = \tfrac{25-4}{25}\ ;\ cos^2\alpha = \tfrac{21}{25}$$

$$Como\ el\ \alpha\ es\ del\ cuadrante\ \text{II}:\ cos\,\alpha = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Por tanto:

$$\boxed{\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 62:

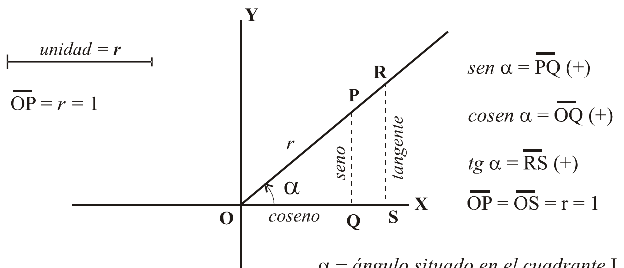


Figura 62

Los triángulos OQP y OSR son rectángulos y semejantes. Entonces podemos poner lo siguiente:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS}$$

Ahora bien, observa que:

$$sen\,\alpha = \overline{PQ} \;\; ; \;\; cos\,\alpha = \overline{OQ} \quad y \quad tg\,\alpha = \overline{RS}$$

Entonces podemos poner que:

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$$

Esto se verifica para todo ángulo **α**, independientemente del cuadrante al que pertenezca.

Por tanto: "*La tangente de un ángulo cualquiera es igual al seno de ese ángulo partido por el coseno*"

Ejemplo 33.-

Se sabe que $cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hallar la tangente de 30º.

Veamos:

$$sabemos\ \ que\ \ cos\,30^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ y\ \ buscamos\ \ tg\,30^o$$

$$tg\,30^o = \frac{sen\,30^o}{cos\,30^o} = \frac{sen\,30^o}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad Necesitamos\ hallar\ \ sen\,30^o$$

Por la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$sen^2\,30^o + cos^2\,30^o = 1$$

$$sen^2\,30^o + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$sen^2\,30^o = 1 - \tfrac{(\sqrt{3})^2}{2^2}$$

$$sen^2\,30^o = 1 - \tfrac{3}{4}$$

$$sen^2\,30^o = \tfrac{1}{4}$$

$$sen\,30^o = +\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2} \quad \textbf{el signo + es por ser 30}^o\ \textbf{del cuadrante I}$$

$$Por\ \ tanto:\ \ sen\,30^o = \tfrac{1}{2}$$

La tangente será: $tg\,30^o = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

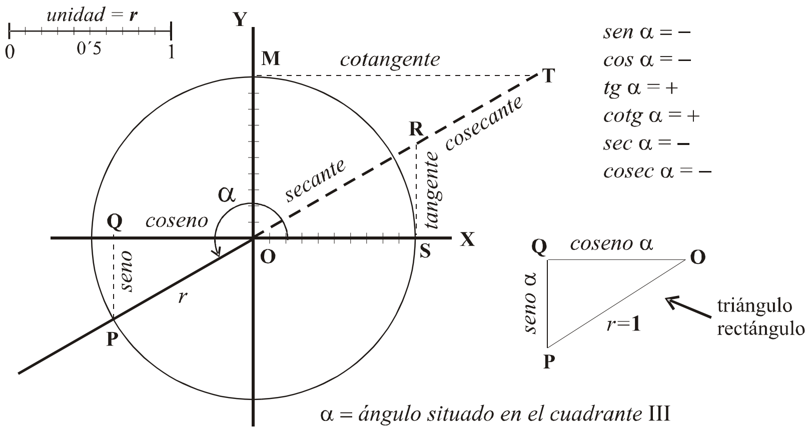
Conclusión:

$$\boxed{tg\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Ejemplo 34.-

De un ángulo del cuadrante III se sabe que el ***seno*** es $-\frac{1}{3}$. Halla el ***coseno*** y la ***tangente*** de ese ángulo.

Veamos:



α = *ángulo situado en el cuadrante* III

Figura 63

Observa el triángulo rectángulo **OQP** :

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = \mathbf{r^2} = \mathbf{1}$$

Es decir:

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

$$\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + cos^2\,\alpha = 1$$

$$\tfrac{1}{9} + cos^2\,\alpha = 1$$

$$cos^2\,\alpha = 1 - \tfrac{1}{9}$$

$$cos^2\,\alpha = \tfrac{8}{9} \Rightarrow cos\,\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{8}{9}}$$

Como α **es de III**, **es**

$$cos\,\alpha = -\sqrt{\tfrac{8}{9}} = -\tfrac{\sqrt{8}}{3} = -\tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto:

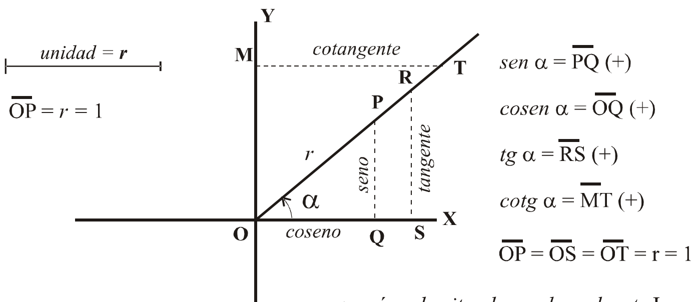
$$\boxed{\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Hallemos la *tangente*:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 64:



α = *ángulo situado en el cuadrante* I

Figura 64

Los triángulos OQP y OMT son rectángulos y semejantes. Entonces podemos poner lo siguiente:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MT}}{1} = \overline{MT}$$

Ahora bien, observa que:

$$sen\,\alpha = \overline{PQ} \;\; ; \;\; cos\,\alpha = \overline{OQ} \quad y \quad cotg\,\alpha = \overline{MT}$$

Entonces podemos poner que:

$$\boxed{cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}}$$

Esto se verifica para todo ángulo **α**, independientemente del cuadrante al que pertenezca.

Por tanto: "*La cotangente de un ángulo cualquiera es igual al coseno de ese ángulo partido por el seno*"

Nótese además que:

$$cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}} = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

Tambièn $tg\,\alpha \cdot cotg\,\alpha = 1$, *es decir*, $tg\,\alpha = \dfrac{1}{cotg\,\alpha}$

Quede claro que la *tangente* y *cotangente* de un ángulo α son inversas, es decir: $tg\ \alpha \cdot cotg\ \alpha = 1$

Nota: Obsérvese que para que ocurra que $tg\ \alpha \cdot cotg\ \alpha = 1$, la *tangente* y la *cotangente* de un ángulo α, deben tener el mismo signo (ambas positivas o ambas negativas).

Ejemplo 35.-

De un ángulo del cuadrante I se sabe que el ***seno*** es $\frac{5}{9}$. Halla el ***coseno***, la ***tangente*** y ***cotangente*** de ese ángulo.

Veamos:

✔ Al ángulo le llamamos α. Sabemos que $sen\,\alpha = \frac{5}{9}$

Buscamos $cos\ \alpha$, $tg\ \alpha$ y $cotg\ \alpha$

✔ Por la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = \mathbf{1}$$

$$\left(\tfrac{5}{9}\right)^2 + cos^2\alpha = \mathbf{1}\ ;\ cos^2\alpha = \mathbf{1} - \left(\tfrac{5}{9}\right)^2\ ;\ cos^2\alpha = \mathbf{1} - \tfrac{25}{81}\ ;\ cos^2\alpha = \tfrac{56}{81}$$

$$cos\,\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{56}{81}}$$

Como α es del cuadrante I, debe ser $cos\,\alpha = +\sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{\sqrt{4\cdot 14}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

Por tanto: $cos\,\alpha = \frac{\sqrt{56}}{9} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

✔ Hallemos la *tangente*:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{2\sqrt{14}}{9}} = \frac{5\cdot 9}{9\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} = \frac{5\cdot\sqrt{14}}{2\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{2\sqrt{14^2}} = \frac{5\sqrt{14}}{2\cdot 14} = \frac{5\sqrt{14}}{28}$$

✔ Hallemos la *cotangente*:

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,a} = \frac{1}{\frac{5\sqrt{14}}{28}} = \frac{28}{5\sqrt{14}} = \frac{28\cdot\sqrt{14}}{5\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{28\sqrt{14}}{5\sqrt{14^2}} = \frac{28\sqrt{14}}{5\cdot 14} = \frac{2\cdot\sqrt{14}}{5}$$

O también: $cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \dfrac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{2\sqrt{14}\cdot 9}{9\cdot 5} = \dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

Por tanto:

$$\boxed{cos\,\alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}\ ;\ tg\,\alpha = \frac{5\sqrt{14}}{28}\ ;\ cotg\,\alpha = \frac{2\sqrt{14}}{5}}$$

Ejemplo 36.-

Se sabe que la *tangente* de un ángulo del cuadrante II es $-1'25$. Halla la *cotangente* de ese ángulo.

Veamos:

✔ α es el ángulo. Sabemos que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y que $tg\,\alpha = -\mathbf{1'25} = -\dfrac{\mathbf{125}}{\mathbf{100}} = -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}$

Buscamos *cotg* α

✔ Sabemos que $cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{1}{-\frac{5}{4}} = -\dfrac{4}{5} = -0'8$

Por tanto:

$$\boxed{cotg\,\alpha = -\frac{4}{5} = -0'8}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 65:

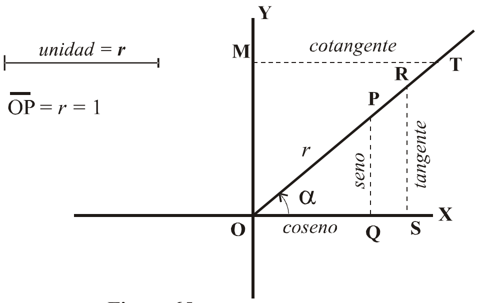


Figura 65

Consideremos el punto P
Hallemos la secante de α :

$$sec\ \alpha = \frac{radio\ de\ P}{abcisa\ de\ P} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

α = *ángulo situado en el cuadrante* I

Observa que la secante de un ángulo es igual a la inversa del coseno, es decir:

$$\boxed{sec\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{cos\,\alpha}}$$

Esto es válido para cualquier cuadrante.

Ejemplo 37.-

De un ángulo del cuadrante I se sabe que el coseno es $\frac{7}{11}$. ¿Cuanto vale la secante?

Veamos:

✔ α es el ángulo. Sabemos que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ y que $cos\,\alpha = \dfrac{7}{\mathbf{11}} = 0'\overset{\frown}{63}$

Buscamos *sec* α

✔ Sabemos que $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{\frac{7}{11}} = \dfrac{11}{7} = 1'571428.......$ Por tanto:

$$\boxed{sec\,\alpha = \frac{11}{7} = 1'571428.......}$$

Ejemplo 38.-

La secante de un ángulo del cuadrante III es $-1'125$. Halla el valor del coseno.

Veamos:

✔ α es el ángulo. Sabemos que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ y que $\sec\alpha = -1'825 = -\dfrac{1825}{1000} = -\dfrac{73}{40}$

Buscamos $cos\ \alpha$

✔ Sabemos que $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = -\dfrac{73}{40}$

Por tanto:

$$\frac{1}{cos\,\alpha} = -\frac{73}{40}\ ;\quad -40 = 73 \cdot cos\,\alpha\ ;\quad -\frac{40}{73} = cos\,\alpha$$

$$\boxed{cos\,\alpha = -\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{73}} = -\,\mathbf{0'54794520}.......}$$

Observa nuevamente la figura 60. De esa figura extraemos la figura 66:

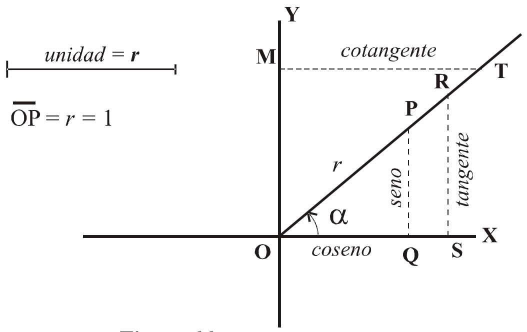


Figura 66

Consideremos el punto P
Hallemos la cosecante de α :

$$cosec\ \alpha = \frac{radio\ de\ P}{ordenada\ de\ P} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

α = *ángulo situado en el cuadrante* I

Observa que la cosecante de un ángulo es igual a la inversa del seno, es decir:

$$\boxed{cosec\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{sen\,\alpha}}$$

Esto es válido para cualquier cuadrante.

Ejemplo 39.-

El seno de un ángulo del cuadrante IV es $-0'105$. Halla el valor de la cosecante.
Veamos:

✔ α es el ángulo. Sabemos que 270º < α < 360º y que $sen\,\alpha = -0'105 = -\dfrac{105}{1000} = -\dfrac{21}{40}$

Buscamos $cosec\ \alpha$

✔ Sabemos que $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha} = -\dfrac{1}{-\frac{21}{40}} = -\dfrac{40}{21}$

Por tanto: $$\boxed{cosec\,\alpha = -\frac{\mathbf{40}}{21} = -\,1'90476190.......}$$

Resumiendo:

> Para cualquier ángulo α de cualquier cuadrante se verifica:
>
> $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
>
> $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$
>
> $cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$
>
> $sec\,\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{cos\,\alpha}$
>
> $cosec\,\alpha = \dfrac{\mathbf{1}}{sen\,\alpha}$

Ejemplo 40.-

De un ángulo α se sabe que está en el cuadrante I y que $sen\,\alpha = \frac{3}{5}$.
Halla el resto de sus razones trigonométricas.

Veamos:

→ Debemos hallar *cos* α, *tg* α, *cotg* α, *sec* α y *cosec* α .

- Hallemos *cos* α:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \;;\; \tfrac{9}{25} + cos^2\alpha = 1 \;;\; cos^2\alpha = 1 - \tfrac{9}{25} \;;\; cos^2\alpha = \tfrac{16}{25}$$

$$Entonces\text{: } cos\,\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{16}{25}} \underbrace{=}_{\substack{\text{como } \alpha \text{ es del} \\ \text{cuadrante I,} \\ \text{tomamos el} \\ \text{valor positivo}}} + \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Por tanto: $\boxed{cos\,\alpha = \dfrac{4}{5}}$

- Hallemos *tg* α:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$ Por tanto: $\boxed{tg\,\alpha = \dfrac{3}{4}}$

- Hallemos *cotg* α:

$$cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4\cdot 5}{5\cdot 3} = \frac{4}{3}$$. Por tanto: $\boxed{cotg\,\alpha = \dfrac{3}{4}}$

- Hallemos *sec* α:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$. Por tanto: $\boxed{sec\,\alpha = \dfrac{5}{4}}$

- Hallemos *cosec* α:

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$. Por tanto: $\boxed{cosec\,\alpha = \frac{5}{\mathbf{3}}}$

Ejemplo 41.-

De un ángulo α se sabe que está en el cuadrante II y que $cos\,\alpha = -\frac{4}{9}$.
Halla el resto de sus razones trigonométricas.

Veamos:

➙ Debemos hallar *sen* α, *tg* α, *cotg* α, *sec* α y *cosec* α .

- Hallemos *sen* α:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \left(-\tfrac{4}{9}\right)^2 = 1 \;;\; sen^2\alpha + \tfrac{16}{81} = 1 \;;\; sen^2\alpha = 1 - \tfrac{16}{81} \;;\; sen^2\alpha = \tfrac{65}{81}$$

$$Entonces:\; sen\,\alpha = \pm\sqrt{\tfrac{65}{81}} \underbrace{=}_{\substack{como\ \alpha\ es\ del\\ cuadrante\ II,\\ tomamos\ el\\ valor\ positivo}} + \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

Por tanto: $\boxed{sen\,\alpha = \frac{\sqrt{65}}{9}}$

- Hallemos *tg* α:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{65}}{9}}{-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{65}\cdot 9}{9\cdot 4} = -\frac{\sqrt{65}}{9}$$. Por tanto: $\boxed{tg\,\alpha = -\frac{\sqrt{65}}{9}}$

- Hallemos *cotg* α:

$$cotg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{\sqrt{65}}{9}} = -\frac{4\cdot 9}{9\cdot\sqrt{65}} = -\frac{4}{\sqrt{65}} = -\frac{4\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{65}} = -\frac{4\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{65^2}} = -\frac{4\cdot\sqrt{65}}{65}$$

Por tanto: $\boxed{cotg\,\alpha = -\frac{4\sqrt{65}}{65}}$

- Hallemos *sec* α:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = -\frac{9}{4}$$. Por tanto: $\boxed{sec\,\alpha = -\frac{9}{4}}$

- Hallemos *cosec* α:

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{65}}{9}} = \frac{9}{\sqrt{65}} = \frac{9\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{65}} = \frac{9\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{65^2}} = \frac{9\cdot\sqrt{65}}{65}$$

Por tanto: $\boxed{cosec\,\alpha = \frac{9\sqrt{65}}{65}}$

25.Razones trigonométricas de algunos ángulos más usuales.-

Algunos ángulos son mas usuales que otros en la tecnología, el diseño, el arte, etc. Esos ángulos, son 0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º y 360º.

En algunos de ellos ya hemos visto sus razones trigonométricas anteriormente. Veremos ahora las de lo ángulos 30º, 45º y 60º que aparecen con cierta frecuencia en las materias mencionadas anteriormente.

Razones trigonométricas de $\alpha = 30º = \frac{\pi}{6}$ radianes :

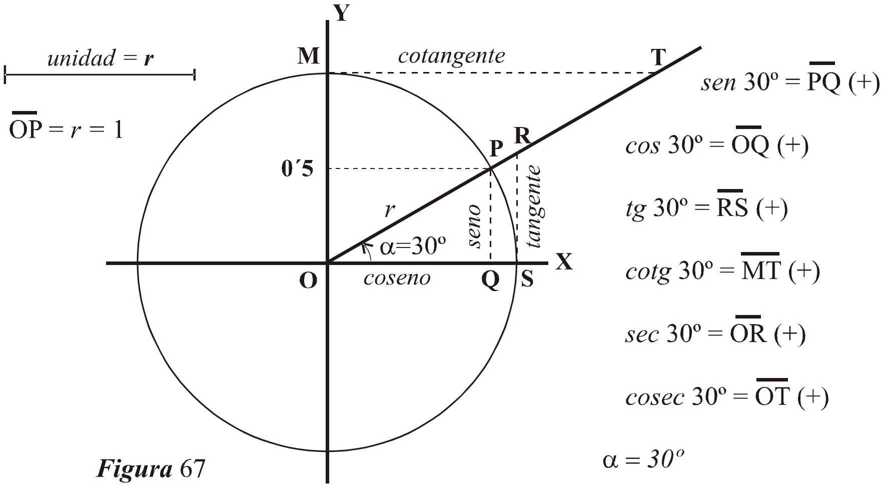


Figura 67

Razones de $\alpha = 30º$

$sen\,30º = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$

$cos\,30º = cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\,30º = tg\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$cotg\,30º = cotg\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$sec\,30º = sec\,\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$cosec\,30º = cosec\,\frac{\pi}{6} = 2$

Partimos de que $sen\,30º = sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Entonces:

$$sen^2\,30º + cos^2\,30º = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2\,30º = 1 \;\; ; \;\; \frac{1}{4} + cos^2\,30º = 1 \;\; ; \;\; cos^2\,30º = 1 - \frac{1}{4} \;\; ; \;\; cos^2\,30º = \frac{3}{4}$$

$$cos\,30º = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \underbrace{=}_{\substack{por\ ser\ 30º\ del \\ cuadrante\ \mathrm{I}\ tomamos \\ el\ valor\ positivo}} \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg\,30º = \frac{sen\,30º}{cos\,30º} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,30º = \frac{cos\,30º}{sen\,30º} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$sec\,30º = \frac{1}{cos\,30º} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

$$cosec\,30º = \frac{1}{sen\,30º} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

En la figura 67 puedes comprobar como la longitud del segmento OT (cosecante de 30º) es el doble del radio y como la medida de PQ (seno de 30º) es la mitad.

Razones trigonométricas de $\alpha = 45^o = \frac{\pi}{4}$ radianes :

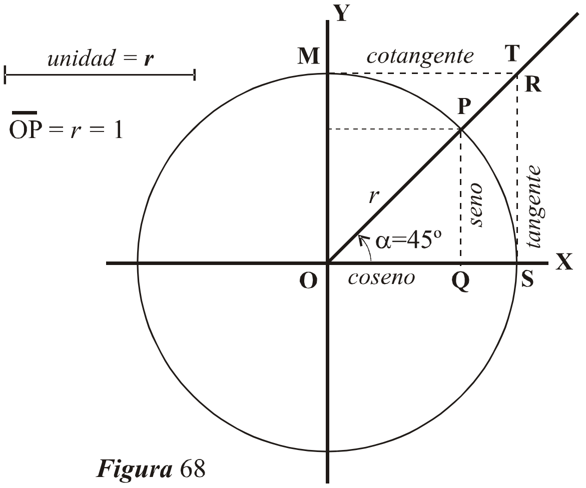


Figura 68

sen 45º = $\overline{PQ}$ (+)

cos 45º = $\overline{OQ}$ (+)

tg 45º = $\overline{RS}$ (+)

cotg 45º = $\overline{MT}$ (+)

sec 45º = $\overline{OR}$ (+)

cosec 45º = $\overline{OT}$ (+)

α = 45º

Razones de α = 45º

$sen\,45^o = sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\,45^o = cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\,45^o = tg\,4 = 1$

$cotg\,45^o = cotg\,\frac{\pi}{4} = 1$

$sec\,45^o = sec\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$cosec\,45^o = cosec\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

Partimos de que $sen\,45^o = sen\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Entonces:

$$sen^2\,45^o + cos^2\,45^o = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + cos^2\,45^o = 1 \;\; ; \;\; \frac{2}{4} + cos^2\,45^o = 1 \;\; ; \;\; cos^2\,45^o = 1 - \frac{1}{2} \;\; ; \;\; cos^2\,45^o = \frac{1}{2}$$

$$cos\,45^o = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \underbrace{=}_{\substack{por\ ser\ 45^o\ del \\ cuadrante\ \mathrm{I}\ tomamos \\ el\ valor\ positivo}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,45^o = \frac{sen\,45^o}{cos\,45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$cotg\,45^o = \frac{cos\,45^o}{sen\,45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$sec\,45^o = \frac{1}{cos\,45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$cosec\,45^o = \frac{1}{sen\,45^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Razones trigonométricas de $\alpha = 60^o = \frac{\pi}{3}$ radianes :

En este caso partimos de que $sen\,60^o = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

En la figura 69 tenemos trazadas las razones trigonométricas de ese ángulo en el círculo trigonométrico.

Es fácil apreciar gráficamente que *sen* 60º = *cos* 30º y que *cos* 60º = *sen* 30º

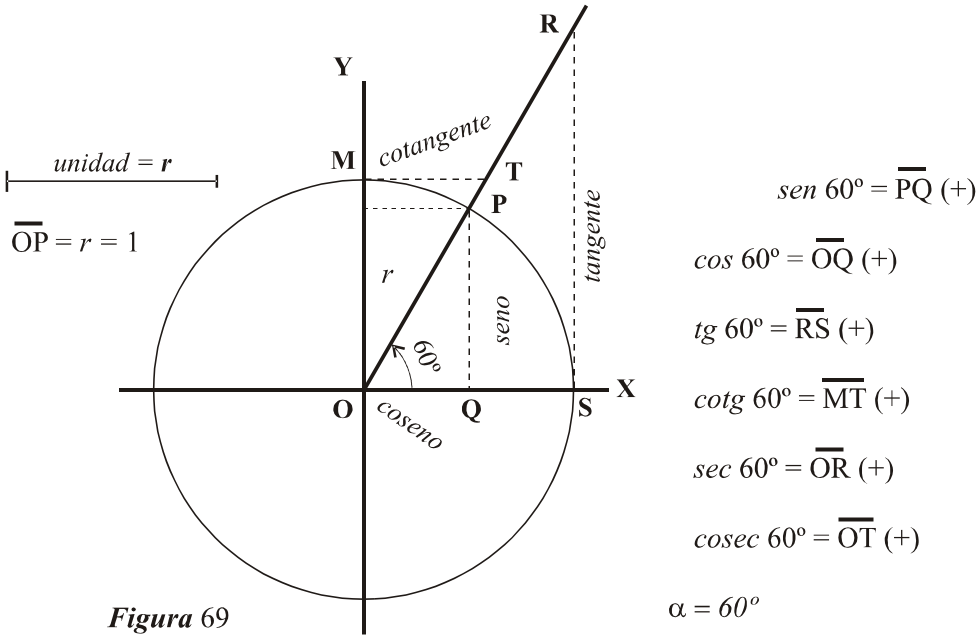


Figura 69

Hallemos *cos* 60º , *tg* 60º, *cotg* 60, *sec* 60º y *cosec* 60º :

$$sen^2\,60º + cos^2\,60º = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + cos^2\,60º = 1 \;\; ; \;\; \frac{3}{4} + cos^2\,60º = 1 \;\; ; \;\; cos^2\,60º = 1 - \frac{3}{4} \;\; ; \;\; cos^2\,60º = \frac{1}{4}$$

$$cos\,60º = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \underbrace{=}_{\substack{\text{por ser } 60º \text{ del} \\ \text{cuadrante I tomamos} \\ \text{el valor positivo}}} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,60º = \frac{sen\,60º}{cos\,60º} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$cotg\,60º = \frac{cos\,60º}{sen\,60º} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\,60º = \frac{1}{cos\,60º} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$cosec\,60º = \frac{1}{sen\,60º} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Razones de $\alpha = 60º$

$$sen\,60º = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \;\; ; \;\; cos\,60º = \tfrac{1}{2} \;\; ; \;\; tg\,60º = \sqrt{3}$$

$$\sec 60º = 2 \;\; ; \;\; cosec\,60º = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \;\; ; \;\; cotg\;60º = \tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

Resumen:

La siguiente figura y el siguiente cuadro resumen las razones trigonométricas de los ángulos 30º, 45º y 60º, de las cuales conviene memorizar el *seno* y el *coseno*.

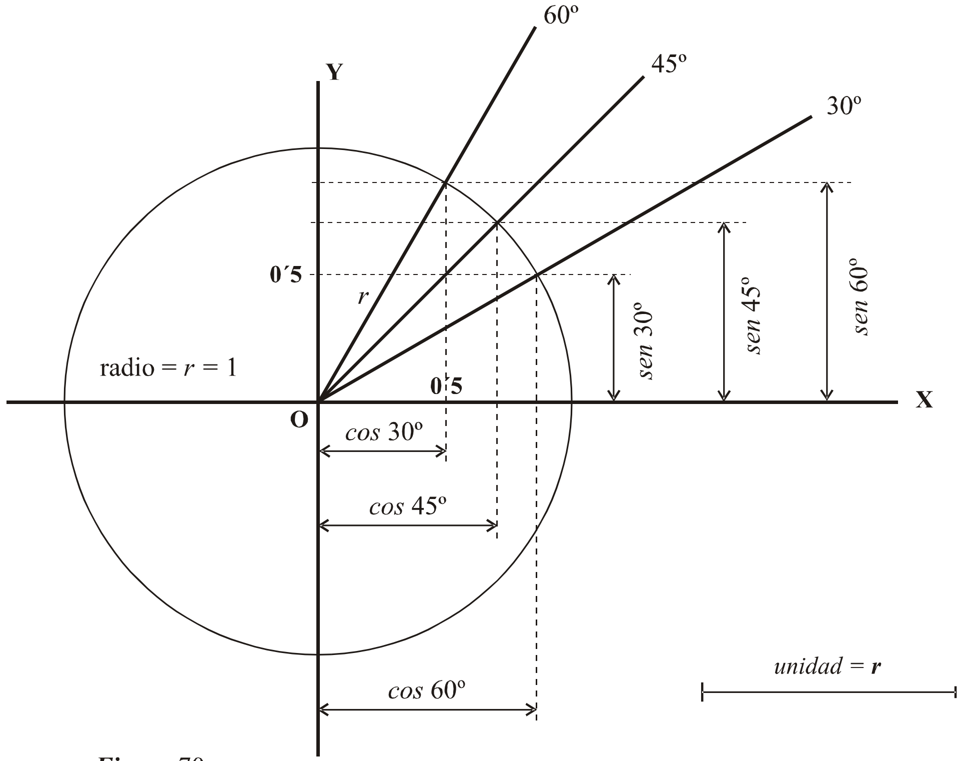


Figura 70

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Una regla nemotécnica para memorizar los valores que corresponden a ***seno*** y ***coseno*** de 30º, 45º y 60º se explica a continuación. Conviene que la entiendas para que no la olvides nunca.

- En la figura 70 puedes observar que $sen\,30^{\circ} < sen 45^{\circ} < sen\,60^{\circ}$
  Es decir, de los ***tres senos*** el menor es el de 30º, el del medio es 45º y el mayor es 60º
- Debes tener claro que $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Estos tres números corresponden a los senos de esos ángulos, por lo que deberán ser:

$$sen\,30^{\circ} = \frac{1}{2} < sen\,45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} < sen\,60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Del mismo modo observa en la figura 70 que $cos\,60^{\circ} < cos 45^{\circ} < cos\,30^{\circ}$
  Es decir, de los ***tres cosenos*** el menor es el de 60º, el del medio es 45º y el mayor 30º

✌ Debes tener claro que $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Estos tres números corresponden a los cosenos de esos ángulos, por lo que deberán ser:

$$cos\,60^o = \tfrac{1}{2} < cos\,45^o = \tfrac{\sqrt{2}}{2} < cos\,30^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

26.Ángulos suplemetarios.-

Dos ángulos α y β son suplementarios si su suma es 180º (π radianes). Es decir:

$$\boxed{\alpha \text{ y } \beta \text{ son ángulos suplementarios } \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180^o}$$

En este caso se dice que α es el suplementario de β y que β es el suplementario de α.

Ejemplo 42.-

Hallar el ángulo suplementario de $\alpha = 41^o\ 22'\ 55''$

Veamos:

✓ β es el ángulo suplementario de α

Debe cumplirse que $\alpha + \beta = 180^o$

Por tanto $\beta = 180^o - \alpha = 180^o - 41^o\ 22'\ 55'' = 138^o\ 37'\ 5''$ es el suplementario de α

Ejemplo 43.-

Hallar el ángulo suplementario de $\alpha = \frac{2\pi}{5}\ rad$

Veamos:

✓ β es el ángulo suplementario de $\alpha = \frac{2\pi}{5}\ rad$

Debe cumplirse que $\alpha + \beta = \pi\ rad$

Por tanto $\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ es el suplementario de α

27.Relación entre las razones de dos ángulos suplemetarios.-

Ahora veamos como se relacionan las razones de un ángulo α y su suplementario $\beta = \pi - \alpha$

Supongamos un ángulo α (por comodidad lo tomaremos en el primer cuadrante) y su complementario $\beta = 180^o - \alpha$ (o lo que es lo mismo $\beta = \pi - \alpha$).

Queremos ver como se relacionan las razones trigonométricas de ambos ángulos, es decir, como se relacionan:

sen α *cos* α *tg* α *cotg* α *sec* α *cosec* α

y

sen $(\pi - \alpha)$ *cos* $(\pi - \alpha)$ *tg* $(\pi - \alpha)$ *cotg* $(\pi - \alpha)$ *sec* $(\pi - \alpha)$

Representemos gráficamente ambos ángulos (α y β) y tracemos sus razones trigonométricas. De un modo visual podremos obtener como se relacionan las de un ángulo y las de otro.

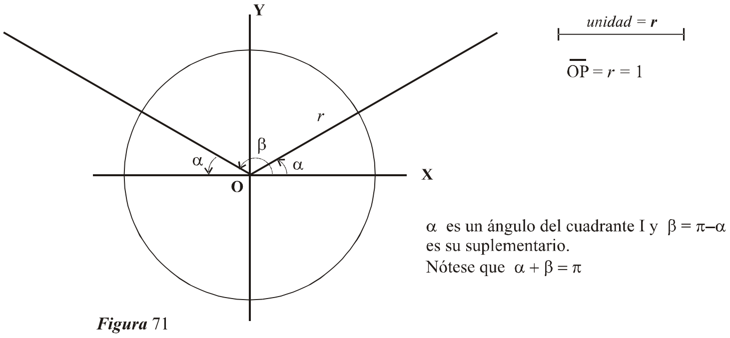


Figura 71

Una vez entendido como se ven dos ángulos α y β suplementarios en el círculo trigonométricos, vamos a ver como son sus razones trigonométricas y como se comparan.

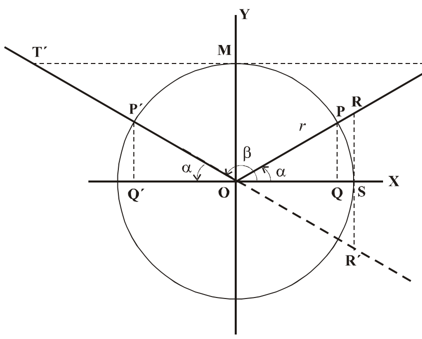


Figura 72

unidad = *r*

$\overline{OP} = r = 1$

$sen\,\alpha = \overline{PQ}$ (+) $sen\,\beta = sen\,(\pi-\alpha) = \overline{P'Q'}$ (+)	$sen\,(\pi-\alpha) = sen\,\alpha$
$cos\,\alpha = \overline{OQ}$ (+) $cos\,\beta = cos\,(\pi-\alpha) = \overline{OQ'}$ (-)	$cos\,(\pi-\alpha) = -\,cos\,\alpha$
$tg\,\alpha = \overline{RS}$ (+) $tg\,\beta = tg\,(\pi-\alpha) = R'S$ (-)	$tg\,(\pi-\alpha) = -\,tg\,\alpha$
$cotg\,\alpha = \overline{MT}$ (+) $cotg\,\beta = cotg\,(\pi-\alpha) = \overline{MT'}$ (-)	$cotg\,(\pi-\alpha) = -\,cotg\,\alpha$
$sec\,\alpha = \overline{OR}$ (+) $sec\,\beta = sec\,(\pi-\alpha) = \overline{OR'}$ (-)	$sec\,(\pi-\alpha) = -\,sec\,\alpha$
$cosec\,\alpha = \overline{OT}$ (+) $cosec\,\beta = sec\,(\pi-\alpha) = \overline{OT'}$ (+)	$cosec\,(\pi-\alpha) = cosec\,\alpha$

Las relaciones expresadas en la Figura 72 nos permite conocer las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las razones de su suplementario.
Nótese que hay que tener en cuenta el signo.

Ejemplo 44.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 150º basándonos en las razones trigonométricas de los ángulos que conocemos.
Veamos:

✎ Llamamos β= 150º. Buscamos sus razones trigonométricas.
✎ Llamamos α= 30º. Observa que $\alpha + \beta$= 180º, es decir, α y β son suplementarios.
✎ Por tanto, 150º = 180º − 30º

Entonces:

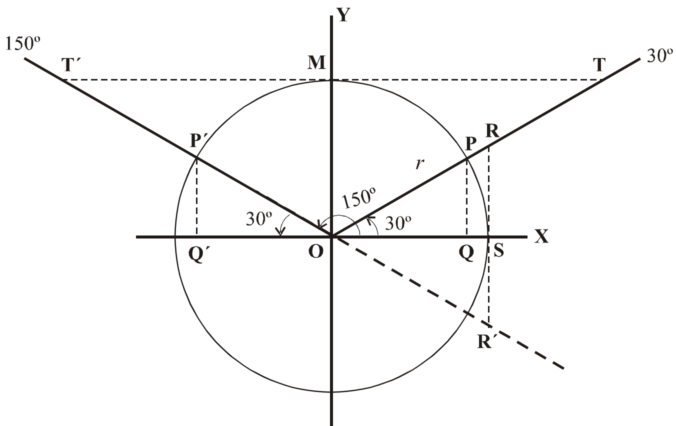


Figura 73

unidad = *r*

$\overline{OP} = r = 1$

$sen 150º = sen\,(180º–30º) = sen\,30º$
$cos 150º = sen\,(180º–30º) = –\,cos\,30º$
$tg 150º = tg\,(180º–30º) = –\,tg\,30º$
$cotg 150º = cotg\,(180º–30º) = –\,cotg\,30º$
$sec 150º = sec\,(180º–30º) = –sec\,30º$
$cosec 150º = cosec\,(180º–30º) = cosec\,30º$

Utilizando las razones trigonométricas de 30º, calcularemos las de 150º:

$sen\,150^o = sen\,30^o = \frac{1}{2}$

$cos\,150^o = -\,cos\,30^o = -\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$tg\,150^o = \frac{sen\,150^o}{cos\,150^o} = \frac{\frac{1}{2}}{-\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\,\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\,\frac{1}{\sqrt{3}} = -\,\frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,150^o = \frac{cos\,150^o}{sen\,150^o} = \frac{-\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\,\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = -\,\sqrt{3}$$

$$sec\,150^o = \frac{1}{cos\,150^o} = \frac{1}{-\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\,\frac{2}{\sqrt{3}} = -\,\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cosec\,150^o = \frac{1}{sen\,150^o} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

<u>Ejemplo 45.-</u>

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo 135º

Veamos:

No es necesario hacer el dibujo exacto del círculo trigonométrico con el ángulo 135º, aunque se puede esbozar un dibujo aproximado que nos sirva de ayuda, es decir:

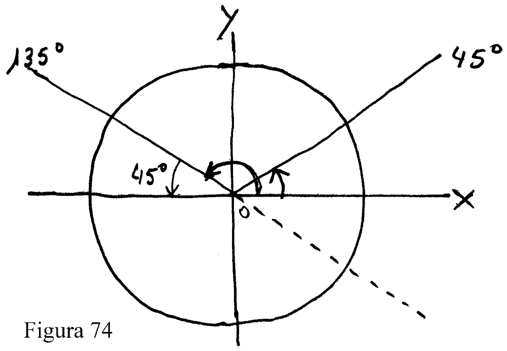


Figura 74

Llamaremos:

$\alpha = 45^o$ y $\beta = 180^o - 45^o = 135^o$

Observando la Figura 74, es fácil apreciar lo siguiente:

$sen\,135^o = sen\,(180^o - 45^o) = sen\,45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\,135^o = cos\,(180^o - 45^o) = -\,cos\,45^o = -\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$tg\,135^o = \frac{sen\,135^o}{cos\,135^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\,1$$

$$cotg\,135^o = \frac{cos\,135^o}{sen\,135^o} = \frac{-\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\,1$$

$$sec\,135^o = \frac{1}{cos\,135^o} = \frac{1}{-\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\,\frac{2}{\sqrt{2}} = -\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\,\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\,\sqrt{2}$$

$$cosec\,135^o = \frac{1}{sen\,135^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 46.-

Sabemos que α es un ángulo del cuadrante I y tal que su seno vale $0'42$. Halla el seno, coseno y tangente del ángulo $\beta = \pi - \alpha$.

Veamos:

☞ Es evidente que α y β son ángulos suplementarios ya que $\alpha + \beta = \alpha + \pi - \alpha = \pi$

☞ Sabemos que $sen\,\alpha = 0'42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

☞ Buscamos $sen\,(\pi - \alpha)$, $cos\,(\pi - \alpha)$ y $tg\,(\pi - \alpha)$

Sin necesidad de esbozar un dibujo (aunque hacerlo puede servirnos de ayuda):

$$sen\,\beta = sen\,(\pi - \alpha) = sen\,\alpha = \tfrac{21}{50} = 0'42$$

$$cos\,\beta = cos\,(\pi - \alpha) = -\,cos\,\alpha$$

Hallemos el coseno de α. Recordemos que por ser del cuadrante I es positivo:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\tfrac{21}{50}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \;\;;\;\; cos^2\alpha = 1 - \tfrac{21^2}{50^2} \;\;;\;\; cos^2\alpha = \tfrac{50^2 - 21^2}{50^2} \;\;;\;\; cos^2\alpha = \tfrac{50^2 - 21^2}{50^2}$$

$$cos^2\alpha = \tfrac{2059}{50^2} \;\;;\;\; cos\,\alpha = +\sqrt{\tfrac{2059}{50^2}} \;\;;\;\; cos\,\alpha = \tfrac{\sqrt{2059}}{50}$$

Entonces:

$cos\,\beta = -\frac{\sqrt{2059}}{50}$ (*recordemos que* β *es del cuadrante* II)

Hallemos la tangente de β :

$$tg\,\beta = \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{\frac{21}{50}}{-\frac{\sqrt{2059}}{50}} = -\frac{21\cdot 50}{50\cdot\sqrt{2059}} = -\frac{21}{\sqrt{2059}} = -\frac{21\cdot\sqrt{2059}}{\sqrt{2059}\cdot\sqrt{2059}} = -\frac{21\sqrt{2059}}{\sqrt{2059^2}} = -\frac{21\sqrt{2059}}{2059}$$

En definitiva:

$$\boxed{\begin{aligned} &sen\,\beta = \tfrac{21}{50} = 0'42 \\ &cos\,\beta = -\frac{\sqrt{2059}}{50} = -\,0'90752410\ldots\ldots \\ &tg\,\beta = -\frac{21\sqrt{2059}}{2059} = -\,0'46279762\ldots\ldots \end{aligned}}$$

28.Ángulos que se diferencian en π radianes (180º).-

Sea α un ángulo cualquiera (no importa el cuadrante)

Sea el ángulo $\beta = \pi + \alpha$. ($\beta = 180º + \alpha$)

Es evidente que ambos ángulos se diferencian en π radianes ya que $\beta - \alpha = \pi$ rad.

Nos hacemos la siguiente pregunta:

¿Cómo se relacionan las razones trigonométricas de β y de α?

Si conocemos las razones de α, ¿podemos conocer las de $\beta = \pi + \alpha$?

Veamos:

☞ Por comodidad, vamos a suponer que α es un ángulo del cuadrante I (aunque lo que hacemos es válido para cualquier cuadrante).

☞ Representemos en el círculo trigonométrico los ángulos α y $\beta = \pi + \alpha$.

☞ Tracemos las razones trigonométricas de ambos ángulos y comparemos para ver la relación existente entre ellas:

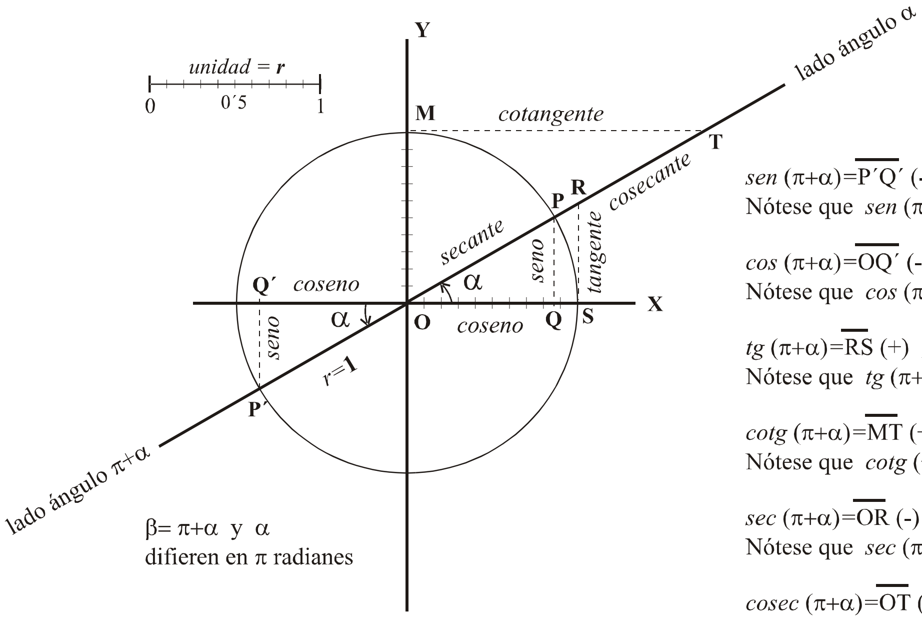


Figura 75

sen $(\pi+\alpha)=\overline{P'Q'}$ (-) ; *sen* $\alpha=\overline{PQ}$ (+).
Nótese que *sen* $(\pi+\alpha)= -$ *sen* α

cos $(\pi+\alpha)=\overline{OQ'}$ (-) ; *sen* $\alpha=\overline{OQ}$ (+).
Nótese que *cos* $(\pi+\alpha)= -$ *cos* α

tg $(\pi+\alpha)=\overline{RS}$ (+) ; *tg* $\alpha=\overline{RS}$ (+).
Nótese que *tg* $(\pi+\alpha)=$ *tg* α

cotg $(\pi+\alpha)=\overline{MT}$ (+) ; *cotg* $\alpha=\overline{MT}$ (+).
Nótese que *cotg* $(\pi+\alpha)=$ *cotg* α

sec $(\pi+\alpha)=\overline{OR}$ (-) ; *sec* $\alpha=\overline{OR}$ (+).
Nótese que *sec* $(\pi+\alpha)= -$ *sec* α

cosec $(\pi+\alpha)=\overline{OT}$ (-) ; *cosec* $\alpha=\overline{OT}$ (+).
Nótese que *cosec* $(\pi+\alpha)= -$ *cosec* α

Lo expresado en la figura 75 nos permitirá comparar las razones trigonométricas de un ángulo $\beta = \pi + \alpha$. del cuadrante III con las de un ángulo α del cuadrante I.

Ejemplo 47.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $\beta = 210º$

Veamos:

✎ Podemos poner que $\beta = 210º = 180º + 30º$ si lo expresamos en grados sexagesimales.

✎ Opcionalmente podemos ayudarnos de una figura en el círculo trigonométrico:

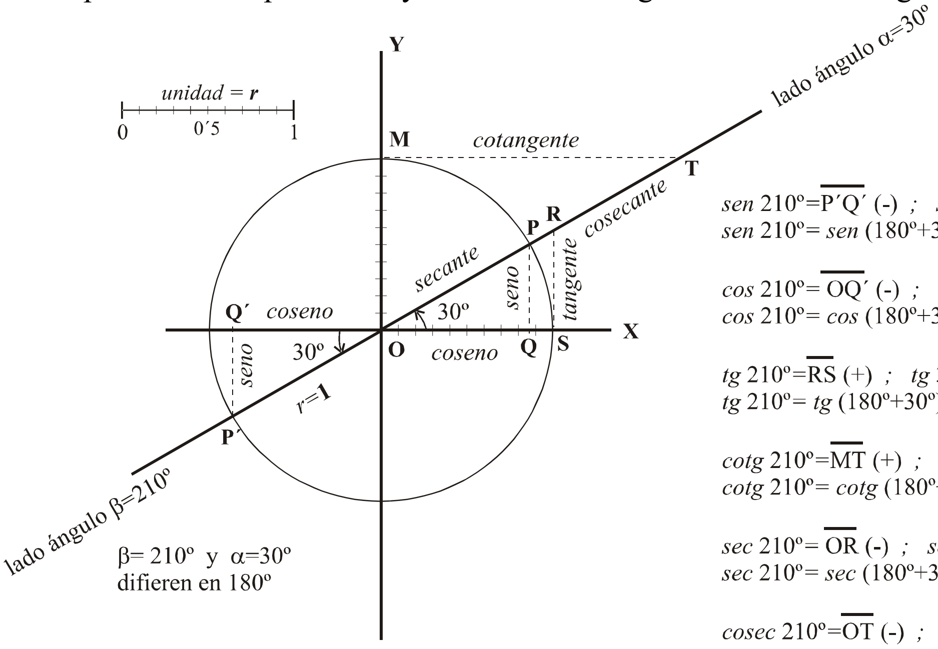


Figura 76

sen $210º=\overline{P'Q'}$ (-) ; *sen* $30º=\overline{PQ}$ (+).
sen $210º=$ *sen* $(180º+30º) = -$ *sen* $30º$

cos $210º=\overline{OQ'}$ (-) ; *sen* $30º=\overline{OQ}$ (+).
cos $210º=$ *cos* $(180º+30º) = -$ *cos* $30º$

tg $210º=\overline{RS}$ (+) ; *tg* $30º=\overline{RS}$ (+).
tg $210º=$ *tg* $(180º+30º) =$ *tg* $30º$

cotg $210º=\overline{MT}$ (+) ; *cotg* $30º=\overline{MT}$ (+).
cotg $210º=$ *cotg* $(180º+30º) =$ *cotg* $30º$

sec $210º=\overline{OR}$ (-) ; *sec* $30º=\overline{OR}$ (+).
sec $210º=$ *sec* $(180º+30º) = -$ *sec* $30º$

cosec $210º=\overline{OT}$ (-) ; *cosec* $30º=\overline{OT}$ (+).
cosec $210º =$ *cosec* $(180º+30º)= -$ *cosec* $30º$

✎ Apoyándonos en los valores conocidos de las razones del ángulo 30º, obtenemos las del ángulo 210º:

$$sen\,210^o = -sen\,30^o = -\tfrac{1}{2}$$

$$cos\,210^o = -cos\,30^o = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,210^o = \frac{sen\,210^o}{cos\,210^o} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg\,210^o = \frac{1}{tg\,210^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$sec\,210^o = \frac{1}{cos\,210^o} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$cosec\,210^o = \frac{1}{sen\,210^o} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

Ejemplo 48.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $\beta = 225^o$

Veamos:

✔ Podemos poner que $\beta = 225^o = 180^o + 45^o$ si lo expresamos en grados sexagesimales.

✔ En este caso no nos ayudaremos de un dibujo. Mentalmente observamos que 225º está en el cuadrante II.

$$sen\,225^o = sen\,(180^o + 45^o) = -\,sen\,45^o = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\,225^o = cos\,(180^o + 45^o) = -\,cos\,45^o = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg225^o = \frac{sen\,225^o}{cos\,225^o} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$cotg225^o = \frac{cos\,225^o}{sen\,225^o} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$sec225^o = \frac{1}{cos\,225^o} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$cosec225^o = \frac{1}{sen\,225^o} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 49.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $\beta = \frac{4\pi}{3}\ rad$

Veamos:

✗ Observa que en este caso nos dan el ángulo en radianes.

✗ Podemos poner que $\beta = \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi+\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}\ rad$ siendo $\frac{\pi}{3}$ un ángulo de I.

✗ Considerando que $\frac{\pi}{3} = 60^o$, podemos poner:

$$sen\tfrac{4\pi}{3} = sen\left(\pi + \tfrac{\pi}{3}\right) = -\,sen\tfrac{\pi}{3} = -\,sen\,60^{\circ} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\tfrac{4\pi}{3} = cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{3}\right) = -\,cos\tfrac{\pi}{3} = -\,cos\,60^{\circ} = -\tfrac{1}{2}$$

$$tg\tfrac{4\pi}{3} = \frac{sen\tfrac{4\pi}{3}}{cos\tfrac{4\pi}{3}} = \frac{-\tfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\tfrac{1}{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$cotg\tfrac{4\pi}{3} = \frac{cos\tfrac{4\pi}{3}}{sen\tfrac{4\pi}{3}} = \frac{-\tfrac{1}{2}}{-\tfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\tfrac{4\pi}{3} = \frac{1}{cos\tfrac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\tfrac{1}{2}} = -2$$

$$cosec\tfrac{4\pi}{3} = \frac{1}{sen\tfrac{4\pi}{3}} = \frac{1}{-\tfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

29.Relación entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos.-

Recuerda que si α es un ángulo, su opuesto se escribe $-\alpha$ y se interpreta como un ángulo de igual tamaño pero tomado en sentido contrario a α, es decir, si α está tomado en el sentido del movimiento contrario a las agujas de un reloj (sentido positivo), entonces $-\alpha$ está tomado en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

Observa que la suma de un ángulo y su opuesto es el ángulo 0º, es decir:

$$\alpha + (-\alpha) = \alpha - \alpha = 0^{\circ}$$

En las figuras 77.a y 77.b se aprecia como serian un ángulo α y su opuesto $-\alpha$:

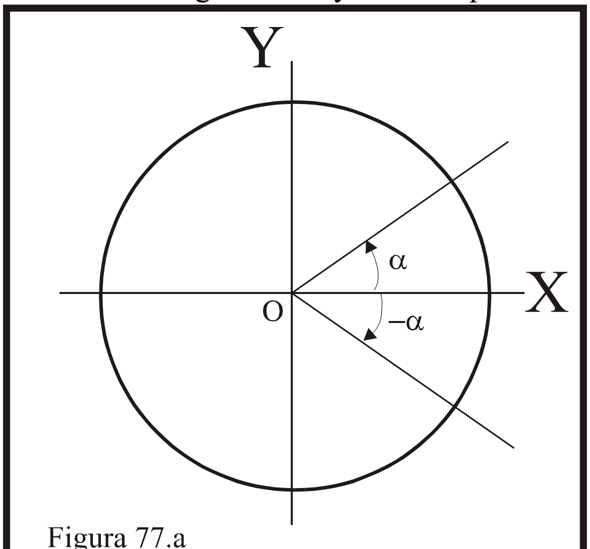


Figura 77.a

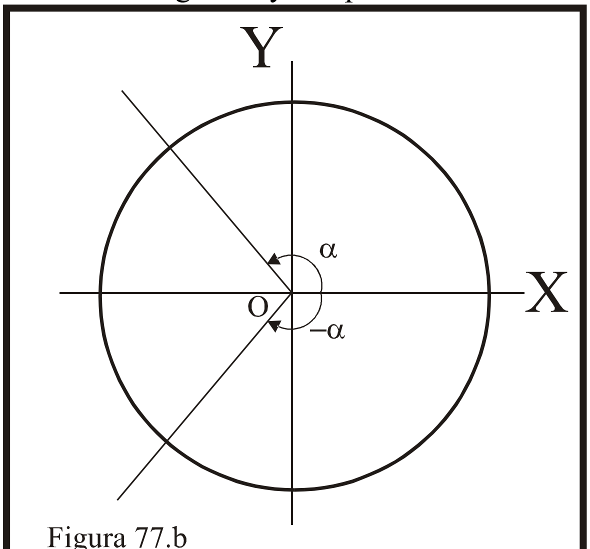


Figura 77.b

Figura 77.a: En este caso el ángulo α es del cuadrante I y su opuesto $-\alpha$ está en el cuadrante IV. Nótese que el sentido del ángulo determina su signo .	Figura 77.b: En este caso el ángulo α es del cuadrante II y su opuesto $-\alpha$ está en el cuadrante III Nótese que el sentido del ángulo determina su signo .

Ahora veremos como se relacionan las razones trigonométricas de α y $-\alpha$.

✓ Consideremos que α es un ángulo del cuadrante I (los resultados son válidos para el caso que sea de otro cuadrante):

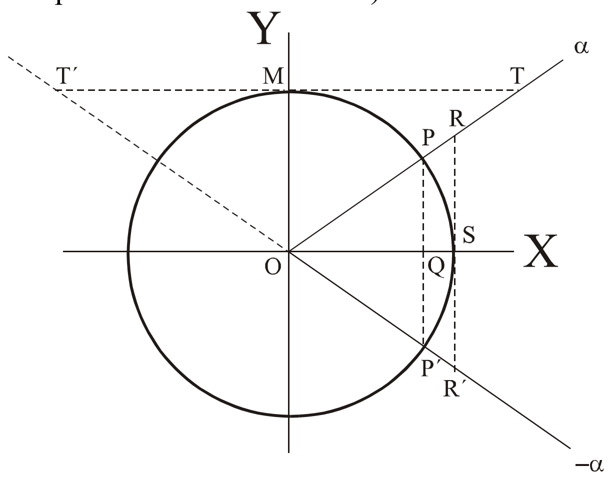


Figura 78

$sen\ \alpha = \overline{PQ}$ (+) $\quad$ $sec\ \alpha = \overline{OR}$ (+)

$sen\ (-\alpha) = \overline{P'Q}$ (-) $\quad$ $sec\ (-\alpha) = \overline{OR'}$ (+)

$cos\ \alpha = \overline{OQ}$ (+) $\quad$ $cosec\ \alpha = \overline{OT}$ (+)

$cos\ (-\alpha) = \overline{OQ}$ (+) $\quad$ $cosec\ (-\alpha) = \overline{OT'}$ (-)

$tg\ \alpha = \overline{RS}$ (+) $\quad$ $cotg\ \alpha = \overline{MT}$ (+)

$tg\ (-\alpha) = \overline{R'S}$ (-) $\quad$ $cotg\ (-\alpha) = \overline{MT'}$ (-)

A la vista de la expresado en la figura 78 podemos poner:

$$\boxed{\begin{array}{l} sen(-\alpha) = -\,sen\,\alpha \quad ; \quad cos(-\alpha) = cos\,\alpha \\ tg(-\alpha) = -\,tg\,\alpha \quad ; \quad cotg(-\alpha) = -\,cotg\,\alpha \\ sec(-\alpha) = sec\,\alpha \quad ; \quad cosec(-\alpha) = -\,cosec\,\alpha \end{array}}$$

De este modo, si conocemos las razones trigonométricas de un ángulo α, podemos conocer las de su opuesto $-\alpha$.

Ejemplo 50.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo -60°

Veamos:

$$sen(-60^{\circ}) = -\,sen\,60^{\circ} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad cos(-60^{\circ}) = cos\,60^{\circ} = \tfrac{1}{2}$$

$$tg(-60^{\circ}) = -\,tg\,60^{\circ} = -\frac{sen\,60^{\circ}}{cos\,60^{\circ}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 1} = -\sqrt{3}$$

$$cotg(-60^{\circ}) = -\,cotg\,60^{\circ} = -\frac{cos\,60^{\circ}}{sen\,60^{\circ}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec(-60^{\circ}) = sec\,60^{\circ} = \frac{1}{cos\,60^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$cosec(-60^{\circ}) = -\,cosec\,60^{\circ} = -\frac{1}{sen\,60^{\circ}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 51.-

Hallemos las razones trigonométricas del ángulo $-135º$

Veamos:

Observa que 135º es un ángulo del cuadrante II y $-135º$ es un ángulo de III

$$sen(-135º) = -sen135º = -sen45º = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad cos(-135º) = cos135º = -cos45º = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg(-135º) = \frac{sen(-135º)}{cos(-135º)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$cotg(-135º) = \frac{cos(-135º)}{sen(-135º)} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$sec(-135º) = \frac{1}{cos(-135º)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$cosec(-135º) = \frac{1}{sen(-135º)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

30.Reducción al primer cuadrante.-

Veremos en este apartado como las razones trigonométricas de un ángulo del II, III o IV cuadrante están relacionadas con las razones de un ángulo del cuadrante I., es decir:

✤ Supongamos que β es un ángulo de uno de los cuadrantes II, III o IV.

✤ Existe un ángulo α del cuadrante I tal que las razones del ángulo β podemos hallarlas a través de las razones de α.

Veamos:

⇨ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = \pi - \alpha$ será un ángulo del cuadrante II.

⇨ Si conocemos las razones trigonométricas del ángulo α podemos conocer las de $\beta = \pi - \alpha$

Nos ayudaremos de un gráfico:

En la figura 72 de la página 56 tienes explicado la relación entre las razones trigonométricas del ángulos $\beta = \pi - \alpha$ (del cuadrante II) y

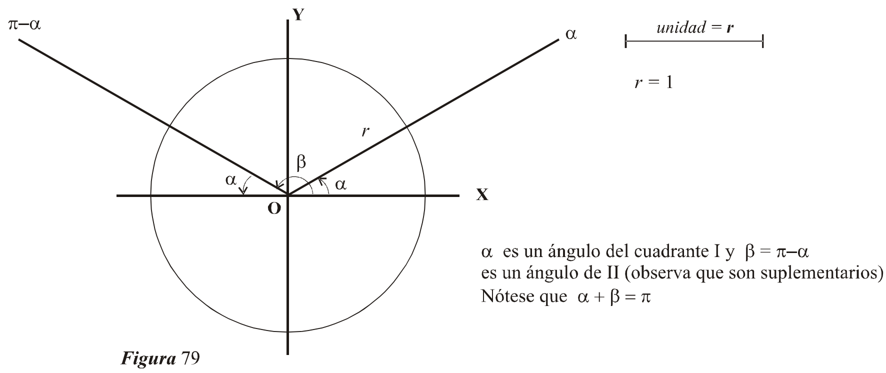


Figura 79

Ejemplo 52.-

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que *sen* $\alpha = 0'38$.

Queremos hallar el *seno* y *coseno* del ángulo $\beta = \pi - \alpha$.

Veamos:

$sen(\pi - \alpha) = sen\,\alpha = 0'38 = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$ ya tenemos el valor del *seno*.

Hallemos el *coseno*

$$sen^2(\pi - \alpha) + cos^2(\pi - \alpha) = 1$$

$$cos^2(\pi - \alpha) = 1 - sen^2(\pi - \alpha) = 1 - \left(\tfrac{19}{50}\right)^2 = \frac{50^2 - 19^2}{50^2} = \frac{2139}{2500}$$

$$cos(\pi - \alpha) = -\sqrt{\tfrac{2139}{2500}} = -\tfrac{\sqrt{2139}}{50} = -0'92498648.... \approx -0'9250$$

Nótese que hemos tomado *cos* $(\pi - \alpha)$ negativo por ser $\pi - \alpha$ un ángulo del cuadrante II.

⇨ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = \pi + \alpha$ será un ángulo del cuadrante III. Observa que α y $\beta = \pi + \alpha$ se diferencian en π radianes.

⇨ Si conocemos las razones trigonométricas del ángulo α podemos conocer las de $\beta = \pi + \alpha$ Nos ayudaremos de un gráfico:

La figura 80 nos muestra como se relacionan las razones de los ángulos α (de I) y $\beta = \pi + \alpha$ (de III). Observa que esta figura coincide con la figura75 de la página 59.

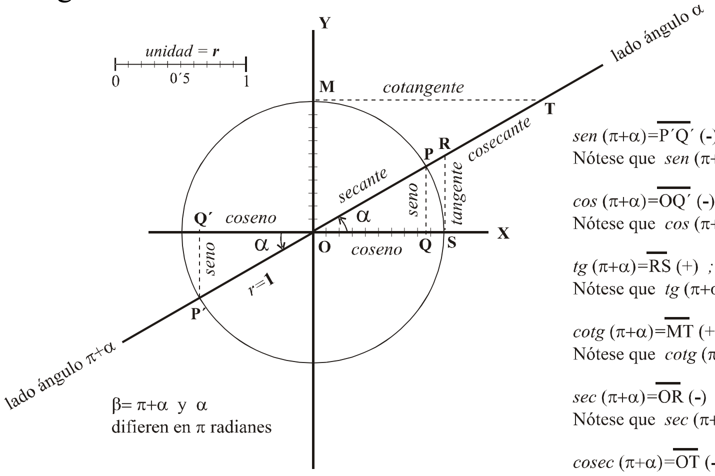


Figura 80

sen $(\pi+\alpha)=\overline{P'Q'}$ (-) ; *sen* $\alpha = \overline{PQ}$ (+).
Nótese que *sen* $(\pi+\alpha) = -$ *sen* α

cos $(\pi+\alpha)=\overline{OQ'}$ (-) ; *sen* $\alpha = \overline{OQ}$ (+).
Nótese que *cos* $(\pi+\alpha) = -$ *cos* α

tg $(\pi+\alpha)=\overline{RS}$ (+) ; *tg* $\alpha = \overline{RS}$ (+).
Nótese que *tg* $(\pi+\alpha) =$ *tg* α

cotg $(\pi+\alpha)=\overline{MT}$ (+) ; *cotg* $\alpha = \overline{MT}$ (+).
Nótese que *cotg* $(\pi+\alpha) =$ *cotg* α

sec $(\pi+\alpha)=\overline{OR}$ (-) ; *sec* $\alpha = \overline{OR}$ (+).
Nótese que *sec* $(\pi+\alpha) = -$ *sec* α

cosec $(\pi+\alpha)=\overline{OT}$ (-) ; *cosec* $\alpha = \overline{OT}$ (+).
Nótese que *cosec* $(\pi+\alpha) = -$ *cosec* α

Ejemplo 53.-

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que *cos* $\alpha = 0'75$

Queremos hallar el *seno*, *coseno, tangente* y *cotangente* del ángulo $\beta = \pi + \alpha$.

Veamos:

$$sen(\pi + \alpha) = -\,sen\,\alpha = -\,0'75 = -\tfrac{75}{100} = -\tfrac{3}{4}$$ ya tenemos el valor del *seno*.

Hallemos el *coseno*

$$sen^2(\pi + \alpha) + cos^2(\pi + \alpha) = 1$$

$$cos^2(\pi + \alpha) = 1 - sen^2(\pi + \alpha) = 1 - \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 = 1 - \tfrac{9}{16} = \frac{16 - 9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$cos(\pi + \alpha) = -\sqrt{\tfrac{7}{16}} = -\tfrac{\sqrt{7}}{4} = -0'66143782..... \approx -0'6614$$

Hallemos la *tangente* y *cotangente*:

$$tg(\pi + \alpha) = \frac{sen(\pi + \alpha)}{cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot \sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \approx 1'1339$$

$$cotg(\pi + \alpha) = \frac{1}{tg(\pi + \alpha)} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{7}}{7}} = \frac{7}{3\sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0'8819$$

⇨ Sea α un ángulo del cuadrante I. El ángulo $\beta = 2\pi - \alpha$ será un ángulo del cuadrante IV.
⇨ Si conocemos las razones trigonométricas de α podemos conocer las de $\beta = 2\pi - \alpha$
Nos ayudaremos de un gráfico:

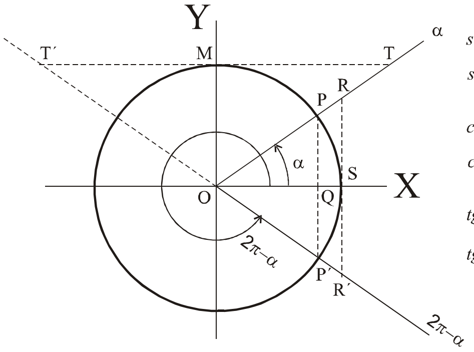


Figura 81

sen $\alpha = \overline{PQ}$ (+)
sen $(2\pi-\alpha) = \overline{P'Q}$ (-)

cos $\alpha = \overline{OQ}$ (+)
cos $(2\pi-\alpha) = \overline{OQ}$ (+)

tg $\alpha = \overline{RS}$ (+)
tg $(2\pi-\alpha) = \overline{R'S}$ (-)

sec $\alpha = \overline{OR}$ (+)
sec $(2\pi-\alpha) = \overline{OR'}$ (+)

cosec $\alpha = \overline{OT}$ (+)
cosec $(2\pi-\alpha) = \overline{OT'}$ (-)

cotg $\alpha = \overline{MT}$ (+)
cotg $(2\pi-\alpha) = \overline{MT'}$ (-)

Observa que:

sen $(2\pi-\alpha) = -$*sen* α
cos $(2\pi-\alpha) =$ *cos* α
tg $(2\pi-\alpha) = -$*tg* α
cotg $(2\pi-\alpha) = -$*cotg* α
sec $(2\pi-\alpha) =$ *sec* α
cosec$(2\pi-\alpha) = -$*cosec* α

Nótese que las razones trigonométricas del ángulo $2\pi - \alpha$ coinciden con las de $-\alpha$.

Ejemplo 54.-

Supongamos que α un ángulo del cuadrante I y que *sen* $\alpha = 0'80$
Queremos hallar el *seno*, *coseno, tangente* y *cotangente* del ángulo $\beta = 2\pi - \alpha$.
Veamos:

$$sen\,\beta = sen(2\pi-\alpha) = -\,sen\,\alpha = -0'80 = -\tfrac{8}{10} = -\tfrac{4}{5}$$
$$cos^2\beta = 1 - sen^2\beta = 1 - \left(-\tfrac{4}{5}\right)^2 = 1 - \tfrac{16}{25} = \tfrac{9}{25}$$
$$cos\,\beta = \pm\sqrt{\tfrac{9}{25}} = \pm\tfrac{3}{5} \quad debemos\ elegir\ un\ signo$$
$$cos\,\beta = cos(2\pi-\alpha) = \tfrac{3}{5}$$

Hemos tomado el signo positivo para el valor de *cos* β porque β es un ángulo situado en el cuadrante IV, siendo los cosenos positivos.

Con el seno y coseno hallamos la *tangente* y con esta la c*otangente*:

$$tg\,\beta = tg(2\pi-\alpha) = \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{-\tfrac{4}{5}}{\tfrac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$
$$cotg\,\beta = cotg(2\pi-\alpha) = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{-\tfrac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

Recordemos que la *cotangente* de un ángulo es la inversa de su *tangente*

Ejemplo 55.-

Hallar el *seno* y *coseno* de los ángulos 150º, 240º y 335º.
Veamos:

Nótese que 150º es un ángulo del cuadrante II, 240º es del cuadrante III y 335º corresponde al IV.

Para hallar el *seno* y *coseno* comparamos dichos ángulos con otros del primer cuadrante. En el primer caso con el ángulo 30º, en el segundo con 60º y en el tercero con 45º. Como las razones de estos ángulos son de sobra conocidos no habrá problema para hallar lo pedido.

$$\left.\begin{array}{l} sen\,150^{o} = sen\,(180^{o} - 30^{o}) = sen\,30^{o} = \dfrac{1}{2} \\ cos\,150^{o} = cos\,(180^{o} - 30^{o}) = -\,cos\,30^{o} = -\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\,240^{o} = sen\,(180^{o} + 60^{o}) = -\,sen\,60^{o} = -\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ cos\,240^{o} = cos\,(180^{o} + 60^{o}) = -\,cos\,60^{o} = -\,\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\,335^{o} = sen\,(360^{o} - 45^{o}) = -\,sen\,45^{o} = -\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ cos\,335^{o} = cos\,(360^{o} - 45) = cos\,45^{o} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\}$$

31.Ángulos complementarios.-

Dos ángulos son complementarios si su suma es un ángulo recto (90º). Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \ y \ \beta \ \ complementarios \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^{o} \\ \alpha \ y \ \beta \ \ complementarios \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \ \ rad \end{array}}$$

Se dice que α es el *complementario* de β y que β es el *complementario* de α

Ejemplo 56.-

- Los ángulos 30º y 60º son complementarios porque 30º + 60º = 90º
- Los ángulos $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{3\pi}{10}$ son complementarios porque $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi+3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$
- Los ángulos α=42º 54´ y β=47º 6´ son complementarios porque $\alpha+\beta$=90º.
- El complementario de 45º es 45º.

Ejemplo 57.-

Sea α = 28º 35´ 20´´ y queremos hallar su complementario.
Veamos:

$\alpha + \beta = 90^{o}$ $\leftarrow$ Buscamos el valor de β
Despejamos β: $\beta = 90^{o} - \alpha$
Restamos:

$$\begin{array}{rl} 90^{o} = & 89^{o}\ \ 59'\ \ 60'' \\ \alpha = & 28^{o}\ \ 35'\ 20'' \\ \hline 90^{o} - \alpha = & 61^{o}\ \ 24'\ \ 40'' \end{array} \Rightarrow \ \beta = \ 61^{o}\ \ 24'\ \ 40'' \leftarrow \ complementario\ de\ \alpha$$

Ejemplo 58.-

Dado el ángulo $\alpha=\frac{2\pi}{9}\ rad$, queremos hallar su complementario.

Veamos:

El complementario de α será $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{9}=\frac{9\pi-4\pi}{18}=\frac{5\pi}{18}\ rad$

32.Relación entre las razones de dos ángulos complementarios.-

En este apartado veremos como se relacionan las razones trigonométricas de un ángulo α y su complementario β=90º−α. Nos ayudaremos de una representación en el círculo trigonométrico.

veamos:

➜ Sean α y β=90º−α dos ángulos complementarios. Consideramos que ambos son positivos y que están en el cuadrante I.

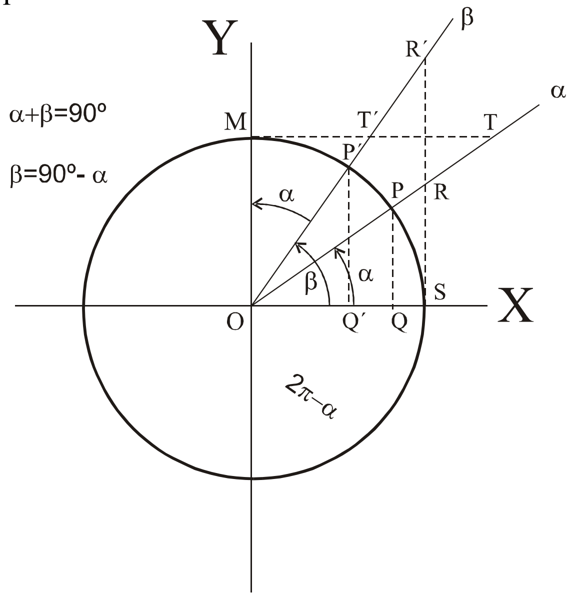


Figura 82

$sen\ \alpha = \overline{PQ}$ (+)

$sen\ \beta = sen\ (90º-\alpha) = \overline{P'Q'}$ (+)

$cos\ \alpha = \overline{OQ}$ (+)

$cos\ \beta = cos\ (90º-\alpha) = \overline{OQ'}$ (+)

$tg\ \alpha = \overline{RS}$ (+)

$tg\ \beta = tg\ (90º-\alpha) = \overline{R'S}$ (+)

$sec\ \alpha = \overline{OR}$ (+)

$sec\ \beta = sec\ (90º-\alpha) = \overline{OR'}$ (+)

$cosec\ \alpha = \overline{OT}$ (+)

$cosec\ \beta = cosec\ (90º-\alpha) = \overline{OT'}$ (+)

$cotg\ \alpha = \overline{MT}$ (+)

$cotg\ \beta = cotg\ (90º-\alpha) = \overline{MT'}$ (+)

➜ Observado detenidamente la figura 82 y viendo las medidas de los segmentos que representan a las razones trigonométricas de α y su complementario β, podemos poner:

$\overline{PQ}=\overline{\mathbf{O}Q'}$ *por lo que* $sen\,\alpha = cos(90º-\alpha)$

$\overline{\mathbf{O}Q}=\overline{\mathbf{P}'Q'}$ *por lo que* $cos\,\alpha = sen(90º-\alpha)$

$\overline{\mathbf{RS}}=\overline{\mathbf{MT}'}$ *por lo que* $tg\,\alpha = cotg(90º-\alpha)$

$\overline{\mathbf{MT}}=\overline{\mathbf{R}'\mathbf{S}'}$ *por lo que* $cotg\,\alpha = tg(90º-\alpha)$

$\overline{OR}=\overline{\mathbf{OT}'}$ *por lo que* $sec\,\alpha = cosec(90º-\alpha)$

$\overline{\mathbf{OT}}=\overline{\mathbf{OR}'}$ *por lo que* $cosec\,\alpha = sec(90º-\alpha)$

Esto nos permite conocer las razones trigonométricas de un ángulo si conocemos las de su complementario.

Ejemplo 59.-

Los ángulos $\alpha = 30^o$ y $\beta = 60^o$ son suplementarios y observa que se verifica lo siguiente:

$$sen\,30^o = cos\,60^o = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad cos\,30^o = sen\,60^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,30^o = cotg\,60^o = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad cotg\,30^o = tg\,60^o = \sqrt{3}$$

$$sec\,30^o = cosec\,60^o = \tfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad cosec\,30^o = sec\,60^o = 2$$

33.Razones trigonométricas del ángulo suma de otros dos ángulos.-

Sean α y β dos ángulos cualesquiera. En la página 13 y sucesivas hemos explicado el concepto de la suma $\alpha + \beta$ y el cálculo de su medida.

En este apartado nos preguntamos lo siguiente:

¿ Si conocemos las razones trigonométricas de α y β, podemos conocer las de $\alpha + \beta$?

La respuesta a esta pregunta es que **si**. Nos limitaremos a poner las fórmulas que permiten hallar las razones de $\alpha + \beta$ a partir de las razones de α y β sin demostrarlas (las demostraciones se salen de los objetivos de estos apuntes).

Veamos:

✎ Sean α y β dos ángulos de cualquier cuadrante.

✎ La suma $\alpha + \beta$ será otro ángulo que podrá estar en cualquier cuadrante.

¡Pues bien! Se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned}
&sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha\\
&cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta\\
&tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\\
&cotg(\alpha+\beta) = \frac{1}{tg(\alpha+\beta)} = \frac{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta}\\
&sec(\alpha+\beta) = \frac{1}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{1}{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}\\
&cosec(\alpha+\beta) = \frac{1}{sen(\alpha+\beta)} = \frac{1}{sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha}
\end{aligned}}$$

Ejemplo 60.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 75º.

Veamos:

Podemos considerar que $75^o = 30^o + 45^o$

Entonces:

$$sen75^o = sen(30^o + 45^o) = sen\,30^o \cdot cos\,45^o + sen\,45^o \cdot cos\,30^o = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4} + \tfrac{\sqrt{2 \cdot 3}}{4} = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$cos75^o = cos(30^o + 45^o) = cos\,30^o \cdot cos\,45^o - sen\,30^o \cdot sen\,45^o = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}}{4} - \tfrac{\sqrt{2}}{4} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$tg75^o = tg(30^o+45^o) = \frac{tg30^o + tg45^o}{1 - tg30^o \cdot tg45^o} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+3)\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{3}+3)^2}{6}$$

$$cotg75^o = cotg(30^o+45^o) = \frac{1}{tg(30^o+45^o)} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{-6} = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}$$

$$sec75^o = sec(30^o+45^o) = \frac{1}{cos(30^o+45^o)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{4\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$cosec75^o = cosec(30^o+45^o) = \frac{1}{sen(30^o+45^o)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{4\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-4} = -(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = -\sqrt{2}+\sqrt{6} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

34.Razones trigonométricas del ángulo diferencia de otros dos.-

Sean α y β dos ángulos cualesquiera. En la página 14 y sucesivas hemos explicado el concepto de la resta $\alpha-\beta$ y el cálculo de su medida.

En este apartado nos preguntamos lo siguiente:

¿ Si conocemos las razones trigonométricas de α y β, podemos conocer las de $\alpha-\beta$?

La respuesta a esta pregunta es que **si**. Nos limitaremos a poner las fórmulas que permiten hallar las razones de $\alpha-\beta$ a partir de las razones de α y β sin demostrarlas (las demostraciones se salen de los objetivos de estos apuntes).

Veamos:

✎ Sean α y β dos ángulos de cualquier cuadrante.

✎ La resta $\alpha-\beta$ será otro ángulo que podrá estar en cualquier cuadrante.

¡Pues bien! Se verifica lo siguiente:

$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

$$cotg(\alpha-\beta) = \frac{1}{tg(\alpha-\beta)} = \frac{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

$$sec(\alpha-\beta) = \frac{1}{cos(\alpha-\beta)} = \frac{1}{cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta}$$

$$cosec(\alpha-\beta) = \frac{1}{sen(\alpha-\beta)} = \frac{1}{sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha}$$

Ejemplo 61.-

Supongamos que queremos hallar las razones trigonométricas del ángulo 15º.

Veamos:

Podemos considerar que 15º = 45º − 30º

Entonces:

$$sen15^o = sen(45^o-30^o) = sen45^o\cdot cos30^o - sen30^o\cdot cos45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$cos15^o = cos(45^o-30^o) = cos45^o\cdot cos30^o + sen45^o\cdot sen30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$tg15^o = tg(45^o-30^o) = \frac{sen15^o}{cos15^o} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \quad \textit{se puede racionalizar}$$

$$cotg\,15^o = \frac{1}{tg\,15^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \quad \textit{se puede racionalizar}$$

$$sec\,15^o = \frac{1}{cos\,15^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$cosec\,15^o = \frac{1}{sen\,15^o} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6^2}-\sqrt{2^2}} = \frac{4\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

35.Razones trigonométricas del ángulo doble de otro.-

Sea α un ángulo cualquiera.

El doble de α es 2α, es decir, $2\alpha = \alpha+\alpha$.

Si conocemos las razones del ángulo α, podemos conocer las de su doble 2α.

En efecto:

Se trata de un caso particular de la suma $\alpha+\beta$, es decir, $\alpha+\alpha$.

$$sen\,2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha + sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha = 2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha$$

$$cos\,2\alpha = cos(\alpha+\alpha) = cos\,\alpha\cdot cos\,\alpha - sen\,\alpha\cdot sen\,\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha} = \frac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$cotg\,2\alpha = cotg(\alpha+\alpha) = \frac{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{2\cdot tg\,\alpha}$$

$$sec\,2\alpha = sec(\alpha+\alpha) = \frac{1}{cos\,2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

$$cosec\,2\alpha = cosec(\alpha+\alpha) = \frac{1}{sen\,2\alpha} = \frac{1}{2\cdot sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha}$$

Ejemplo 62.-

Observa que 60º = 2·30º = 30º + 30º

¡Pues bien!

$$sen\,60^o = sen(2\cdot 30^o) = 2\cdot sen\,30^o\cdot cos\,30^o = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\,60^o = cos(2\cdot 30^o) = \cdot\, cos^2 30^o - sen^2 30^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\,60^o = tg(2\cdot 30^o) = \frac{2\cdot tg\,30^o}{1-tg^2 30^o} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{9\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 6} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 63.-

Observa que 90º = 2·45º = 45º + 45º

¡Pues bien!

$$sen\,90^o = sen(2\cdot 45^o) = 2\cdot sen\,45^o\cdot cos\,45^o = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$cos\,90^o = cos(2\cdot 45^o) = \cdot\, cos^2 45^o - sen^2 45^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

36.Razones trigonométricas del ángulo mitad de otro.-

Sea α un ángulo cualquiera.

La mitad de α es $\alpha/2$.

Si conocemos las razones del ángulo α, podemos conocer las de su mitad $\alpha/2$. Nos limitaremos a dar las fórmulas, sin hacer la demostración:

$$\boxed{sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}}$$

Dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo $\alpha/2$, tomaremos el signo + o −

$$\boxed{cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}}$$

Dependiendo del cuadrante donde se encuentre el ángulo $\alpha/2$, tomaremos el signo + o −

Para hallar la *tangente* utilizamos el *seno* y *coseno*:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos\,a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos\,a}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{\frac{1-cos\,a}{2}}{\frac{1+cos\,a}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,a}{1+cos\,a}}$$

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}}$$

El signo + o − dependerá del cuadrante de $\alpha/2$ o de los signos del *seno* y del *coseno*.

Será fácil comprobar que la *cotangente* es:

$$\boxed{cotg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}}}$$

Ejemplo 64.-

Supongamos que queremos hallar el *seno* y *coseno* del ángulo 22º 30´

Veamos:

- ❑ Llamamos α= 45º y, por tanto, $\frac{\alpha}{2}=\frac{45^\circ}{2}=22^\circ\ 30'$
- ❑ Aplicamos las fórmulas vistas antes y consideramos que 22º 30´ está en el cuadrante I

$$sen\,22^\circ\,30'=sen\frac{45^\circ}{2}=+\sqrt{\frac{1-cos\,45^\circ}{2}}=+\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=+\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$cos\,22^\circ\,30'=cos\frac{45^\circ}{2}=+\sqrt{\frac{1+cos\,45^\circ}{2}}=+\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=+\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}=+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg\,22^\circ\,30'=\frac{sen\,22^\circ\,30'}{cos\,22^\circ\,30'}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

37.Fórmulas de transformación de sumas y restas en productos.-

Veremos a continuación unas fórmulas que son interesantes porque permiten la resolución de algunos problemas trigonométricos. No haremos las demostraciones aunque estas no presentan grandes dificultades.

✔ Sean α y β dos ángulos.

✔ Consideremos el ángulo suma de ambos, $\alpha+\beta$ y el ángulo diferencia, $\alpha-\beta$.

¡Pues bien!.

Se verifican las siguientes igualdades (las demostraciones pueden verse en el anexo final)

$$\boxed{sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

"El *seno* de un ángulo mas el *seno* de otro ángulo es igual al doble del *seno* del ángulo mitad de su suma por el *coseno* del ángulo mitad de su diferencia"

$$\boxed{sen\,\alpha - sen\,\beta = 2\cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

"El *seno* de un ángulo menos el *seno* de otro ángulo es igual al doble del *coseno* del ángulo mitad de su suma por el *seno* del ángulo mitad de su diferencia"

$$\boxed{cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

"El *coseno* de un ángulo mas el *coseno* de otro ángulo es igual al doble del *coseno* del ángulo mitad de su suma por el *coseno* del ángulo mitad de su diferencia"

$$\boxed{cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

"El *coseno* de un ángulo menos el *coseno* de otro ángulo es igual al opuesto del doble del *seno* del ángulo mitad de su suma por el *seno* del ángulo mitad de su diferencia"

Ejemplo 65.-

Anteriormente (ejemplos 60 y 61) hallamos el *seno* y *coseno* de los ángulos 75º y 15º. Ahora los vamos a hallar utilizando estas fórmulas.

Veamos:

$$sen\,75^o + sen\,15^o = 2\cdot sen\frac{75^o+15^o}{2}\cdot cos\frac{75^o-15^o}{2} = 2\cdot sen\,45^o\cdot cos\,30^o = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$sen\,75^o - sen\,15^o = 2\cdot sen\frac{75^o-15^o}{2}\cdot cos\frac{75^o+15^o}{2} = 2\cdot sen\,30^o\cdot cos\,45^o = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} sen\,75^o + sen\,15^o &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ sen\,75^o - sen\,15^o &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Las incógnitas son $x = sen\ 75^o$ e $y = sen\ 15^o$

Resolvamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x - y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}\ Por\ el\ m\grave{e}todo\ de\ reducci\grave{o}n:\ 2x = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$Por\ tanto:\ x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad e \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2} - x = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} sen\,75^o &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sen\,15^o &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}}$$

38.Arco (o ángulo) correspondiente a una razón trigonométrica.-

La expresión ***sen x = y*** se interpreta como "*el seno del ángulo x es y*". También podemos decir que "*x es el ángulo cuyo seno es y*". Esta última expresión se formaliza del siguiente modo:

$\boxed{x = \text{arc sen } y}$

Se lee de la forma: "*x es el arco seno de y*" o "*x es igual al arco seno de y*"
Su significado es que "*x es un ángulo cuyo seno vale y*"

Debe entenderse que las expresiones ***sen x = y*** y ***x = arc sen y*** son equivalentes, es decir, vienen a decir lo mismo:

"***seno de x es igual a y***" equivale a decir que "***x es un ángulo cuyo seno es y***"

NOTA: Los términos **ángulo** y **arco** son equivalentes. Sabemos que en el círculo trigonométrico, a un ángulo de vértice el origen O (centro de la circunferencia, le corresponde un arco de circunferencia y sólo uno. Cuando nos referimos a ese arco, al ángulo se le suele denominar **arco** (en vez de ángulo). En general, cuando nos referimos al arco, la medida se suele dar en radianes y cuando nos referimos al ángulo se suele dar en grados sexagesimales.

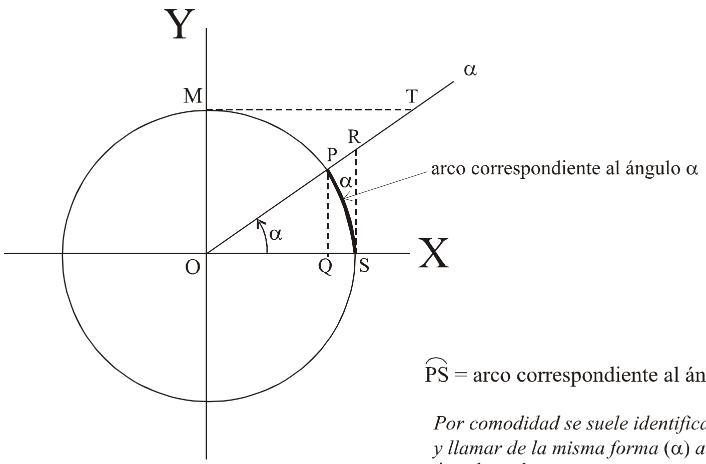


Figura 83

sen α = $\overline{PQ}$ (+)

cos α = $\overline{OQ}$ (+)

tg α = $\overline{RS}$ (+)

sec α = $\overline{OR}$ (+)

cosec α = $\overline{OT}$ (+)

cotg α = $\overline{MT}$ (+)

$\overset{\frown}{PS}$ = arco correspondiente al ángulo α

Por comodidad se suele identificar y llamar de la misma forma (α) *al ángulo y al arco.*

Nótese que al ángulo central α le corresponde el arco de circunferencia **PS**

El segmento PQ es el *seno* de α. En general se identifica el ángulo con el arco

Si llamamos *x* al arco **PS**, podemos poner:

Del mismo modo se pueden definir los siguientes conceptos:

$\boxed{x = \text{arc cos } y}$

"***x*** *es el arco de circunferencia* (*o el ángulo*) *cuyo coseno es* ***y***" *cos x = y*
En la figura 83, α es el ángulo (o *x* el arco) cuyo coseno es el segmento OQ

$$x = arc\,cos\,\overline{OQ}$$

$\boxed{x = \text{arc tg } y}$

"***x*** *es el arco de circunferencia* (*o el ángulo*) *cuya tangente es* ***y***" *tg x = y*
En la figura 83, α es el ángulo (o *x* el arco) cuya tangente es el segmento RS

$$x = arc\,tg\,\overline{RS}$$

$\boxed{x = \text{arc cotg } y}$

"***x*** *es el arco de circunferencia* (*ángulo*) *cuya cotangente es* ***y***" *cotg x = y*
En la figura 83, α es el ángulo (o *x* el arco) de cotangente es el segmento MT

$$x = arc\,cotg\,\overline{MT}$$

$\boxed{x = \text{arc sec } y}$

"***x*** *es el arco de circunferencia* (*o el ángulo*) *cuya secante es* ***y***" *sec x = y*
En la figura 83, α es el ángulo (o *x* el arco) cuya secante es el segmento OR

$$x = arc\,sec\,\overline{OR}$$

$x = arc\ cosec\ y$

"***x** es el arco de circunferencia* (*ángulo*) *cuya cosecante es **y***" $cosec\ x = y$
En la figura 83, α es el ángulo (x el arco) cuya cosecante es el segmento OT

$$x = arc\,cosec\,\overline{\mathbf{OT}}$$

Observación_1: Si fijamos un valor para ***y***, puede ocurrir (en general ocurre así) que exista mas de un ***x*** que verifique la igualdad. También puede ocurrir que demos un valor a ***y*** y no exista un ***x*** que verifique dicha igualdad. Veremos un ejemplo para aclarar esto.

Observación_2: Las expresiones ***x = arc sen y***, ***x = arc cos y***, ***x = arc tg y***, etc. se denominan "***razones trigonométricas inversas***".

Ejemplo 66.-

Consideremos la igualdad trigonométrica $sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Esto significa que $\frac{\pi}{6} = arc\,sen\frac{1}{2}$, es decir, "$\frac{\pi}{6}$ *es el arco cuyo seno vale* $\frac{1}{2}$" (recuerda que π/6 = 30º).

También ocurre que $sen\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, por lo que podemos también poner que $\frac{5\pi}{6} = arc\,sen\frac{1}{2}$. Es decir:

$$arc\,sen\frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6}\ rad \\ \frac{5\pi}{6}\ rad \end{cases}$$

Si consideramos que cada vez que damos una vuelta completa de 360º al lado del ángulo en el círculo trigonométrico, volvemos al mismo sitio, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,30^o = \frac{1}{2} \\ sen(30^o+360^o) = sen\,390^o = \frac{1}{2}\quad una\ vuelta \\ sen(30^o+720^o) = sen\,750^o = \frac{1}{2}\quad dos\ vueltas \\ sen(30^o+1080^o) = sen\,1110^o = \frac{1}{2}\quad tres\ vueltas \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ sen(30^o+k\cdot 360^o) = \frac{1}{2}\quad k\ vueltas \end{array}\right\}\ k = 0,1,2,3,4,5,\ldots\ldots.etc.$$

Del mismo modo:

$$\left.\begin{array}{l} sen\,150^o = \frac{1}{2} \\ sen(150^o+360^o) = sen\,510^o = \frac{1}{2}\quad una\ vuelta \\ sen(150^o+720^o) = sen\,870^o = \frac{1}{2}\quad dos\ vueltas \\ sen(150^o+1080^o) = sen\,1230^o = \frac{1}{2}\quad tres\ vueltas \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ sen(150^o+k\cdot 360^o) = \frac{1}{2}\quad k\ vueltas \end{array}\right\}\ k = 0,1,2,3,4,5,\ldots\ldots.etc.$$

De lo anterior deducimos que en la igualdad $x = arc\,sen\frac{1}{2}$, existen **infinito**s valores para x, pero entre 0º y 360º sólo existen dos, uno es 30º y el otro valor es 150º.

Ejemplo 67.-

Queremos encontrar **todos** los valores de x que verifican la igualdad $x = arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$

Veamos:

✔ Sabemos que $\cos 45^{\circ} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **y que** $\cos 315^{\circ} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por tanto:

$$arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4}\ rad \\ x_2 = \frac{7\pi}{4}\ rad \end{cases} \quad \textit{dos soluciones entre } 0 \textit{ y } 2\pi$$

✔ Si consideramos todas las soluciones posibles tendremos:

$x_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad para\ k = 0,1,2,3,4,5,.......$

$x'_k = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad para\ k = 0,1,2,3,4,5,.......$

Por ejemplo, para k=0 tenesmos las soluciones $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y $x'_0 = \frac{7\pi}{4}$ y para k=3 tenemos las soluciones $x_3 = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{25\pi}{4}$ y $x'_3 = \frac{7\pi}{4} + 6\pi = \frac{31\pi}{4}$. Para cada valor de k=0,1,2,3,4,.... tenemos dos soluciones.

Ejemplo 68.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo [0,2π] que verifican la igualdad $x = arc\cos\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Veamos:

✖ Sabemos que $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos 210^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Entonces:

$$arc\cos\frac{-\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} x_1 = 150^{\circ} = \frac{5\pi}{6}\ rad \\ x_2 = 210^{\circ} = \frac{7\pi}{6}\ rad \end{cases} \quad \textit{dos soluciones entre } 0 \textit{ y } 2\pi$$

Ejemplo 69.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo [0,2π] que verifican la igualdad $x = arc\,sen\, 1'4$

Veamos:

✦ Sabemos que $x = arc\ sen\ 1'4 \Leftrightarrow sen\ x = 1'4$

✦ Sabemos que el seno de un ángulo es un número comprendido entre -1 y 1, es decir, se debe verificar que $-1 \leq sen\ x \leq 1$ por lo que no es posible que $sen\ x = 1'4$

Por tanto, no existe ningún valor para x que verifique la igualdad $x = arc\ sen\ 1'4$

Ejemplo 70.-

Queremos encontrar los valores de x comprendidos en el intervalo [0,2π] que verifican la igualdad $x = arc\ tg\ 0$

Es fácil apreciar que esos valores son $x_1 = 0\ rad.$ $x_2 = \pi\ rad$ y $x_3 = 2\pi\ rad.$

39.Ecuaciones trigonométricas. Resolución.-

Una ecuación trigonométrica es una relación algebraica (sumas, restas, productos, cocientes, etc.) entre número conocidos y desconocidos separados mediante una igualdad (=). En esta relación debe intervenir, al menos, una de las razones trigonométricas explicadas en este tema: ***seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante***. A los números desconocidos se les llama incógnitas.

➜ Una ecuación trigonométrica puede tener una o mas incógnitas.

➜ Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el valor o valores de las incógnitas. Dichos valores debe hacer que la igualdad sea cierta.

➜ A una ecuación trigonométrica le puede ocurrir que tenga solución o que no tenga solución. Una ecuación de este tipo puede tener infinitas soluciones.

Ejemplo 71.-

Las igualdades:

$a)\ \ sen\,x + 1 = 0$

$b)\ \ tg\,x = 1$

$c)\ \ cos\,x + \frac{1}{2} = sen\,\frac{3x}{2}$

$d)\ \ cos\,x + 1 = 3$

Las cuatro igualdades anteriores son ecuaciones trigonométricas con una incógnita (x).
Una solución de ***a)*** es $x = 270º$. Una solución de ***b)*** es $x = 45º$. Una solución de ***c)*** es $x = 60º$. La ecuación ***d)*** no tiene solución ya que se debe ser $-1 \leq cos\ x \leq 1$ lo cual hace imposible que la igualdad sea verdad

Comprobemos la solución de la ecuación *c*):

$Para\ \ x = 60º\ \ tenemos\ que:$

$cos\,60^o + \frac{1}{2} = sen\,\frac{3\cdot 60º}{2}\quad ;\quad cos\,60^o + \frac{1}{2} = sen\,90º$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\ \ ;\ \ 1 = 1\ \leftarrow\ \ x = 60º\ \ hace\ que\ la\ igualdad\ \ sea\ \ verdad.$

Lo que hemos hecho es una comprobación, no una resolución. Hemos comprobado que x=60º es una solución.

Ejemplo 72.-

La igualdad $cos\,x + 1 = \frac{3}{2}$ es una ecuación trigonométrica con una incógnita. En este caso vamos a ver que existen infinitas soluciones.

☞ $x = 60º$ es una solución porque $cos\,60º + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

☞ $x = 300º$ es una solución porque $cos\,300º + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

☞ $x = 360º + 60º = 420º$ es una solución porque $cos\,420º + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

☞ $x = 360º + 300º = 660º$ es una solución porque $cos\,660º + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Podemos decir que los ángulos de las formas :

$x = \frac{\pi}{3} + \ k\cdot 2\pi\quad con\quad k\ =\ 0,1,2,3,4,......\quad es\ soluciòn$

$x = \frac{5\pi}{3} + \ k\cdot 2\pi\quad con\quad k\ =\ 0,1,2,3,4,......\quad es\ soluciòn$

Debes entender que:
$60º = \frac{\pi}{3}\ rad\quad y\quad 300º = \frac{5\pi}{3}\ \ rad$

Ha debido quedar claro que hay ecuaciones trigonométricas sin solución y con infinitas soluciones.

Ejemplo 73.-

La igualdad $2 \cdot sen\, x + cos\, y = tg\, x + \sqrt{2}$ es una ecuación trigonométrica con dos incógnitas.

Una solución estaría formada por un valor de ***x*** y otro de ***y*** que hagan verdadera a la igualdad.

En este caso $x = 45º$ e $y = 0º$ es una solución ya que:

$$2 \cdot sen\,45º + cos\,0º = tg\,45º + \sqrt{2} \quad \leftarrow \quad ¿es\ verdad?$$
$$2 \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \quad \leftarrow \quad ¿es\ verdad?$$
$$\sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2} \quad \leftarrow \quad Vemos\ que\ es\ verdad$$

Vamos a resolver algunas ecuaciones trigonométricas con una incógnita.

Ejemplo 74.-

Resolvamos la ecuación trigonométrica $2 \cdot sen\, x + \sqrt{3} = 0$

Veamos:

El $\cdot$ de la multiplicación no es necesario ponerlo (es optativo en este caso).

$$2\,sen\,x + \sqrt{3} = 0 \quad \leftarrow \quad Buscamos\ el\ valor\ o\ valores\ de\ x$$
$$2\,sen\,x = -\sqrt{3}$$
$$sen\,x = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = arc\,sen\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = \begin{cases} 240º + k \cdot 360º & k = 0,1,2,3,4,.... \\ 300º + k \cdot 360º & k = 0,1,2,3,4,.... \end{cases} \quad Infinitas\ soluciones$$

NOTA: *La expresión* $x = arc\,sen\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *puede ponerse de la forma* $x = arc\,sen\tfrac{-\sqrt{3}}{2}$

Quede claro que es incorrecto ponerlo del modo $x = arc\,sen - \tfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo 75.-

Encontrar las soluciones a la ecuación trigonométrica $cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = 0$ que estén en el intervalo $[0,2\pi]$ *radianes*.

Veamos:

Buscamos las soluciones ***x*** que verifiquen $0 \le x \le 2\pi$ *radianes* (es decir $0º \le x \le 360º$)

$$cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow x + \tfrac{\pi}{4} = arc\,cos\tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} o\ bien\ x + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{3}\ (60º) \\ o\ bien\ x + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{5\pi}{3}\ (300º) \end{cases}$$
$$Si\ \ x + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{3},\ entonces\ x = \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{4\pi - 3\pi}{12} = \tfrac{\pi}{12}$$
$$Si\ \ x + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{5\pi}{3},\ entonces\ x = \tfrac{5\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{20\pi - 3\pi}{12} = \tfrac{17\pi}{12}$$

Hemos encontrado dos soluciones dentro del intervalo $[0,2\pi]$ que son:

NOTA: Debes tener cuidado y no mezclar *radianes* con *grados*. Puedes trabajar en *grados* o en *radianes*, pero no en las dos unidades al mismo tiempo.

Ejemplo 76.-

Halla los valores de x entre 0º y 360º que verifiquen la igualdad $cos\,2x = sen\,x$

Veamos:

$cos\,2x = sen\,x$

$cos^2 x - sen^2 x = sen\,x \leftarrow$ *Recuerda que* $cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x$

$1 - sen^2 x - sen^2 x = sen\,x \leftarrow$ *Recuerda que* $sen^2 x + cos^2 x = 1$ *y* $cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$1 - 2\,sen^2 x = sen\,x$

$0 = 2\,sen^2 x + sen\,x - 1 \leftarrow$ *Hemos pasado todo a la derecha*

$2\,sen^2 x + sen\,x - 1 = 0 \leftarrow$ *Se trata de una ecuaciòn de 2º grado de incògnita* $sen\,x$

Despejamos:

$$sen\,x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} sen\,x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ sen\,x = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$Si \;\; sen\,x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ \\ x_2 = 150^\circ \end{cases}$$

$$Si \;\; sen\,x = -1 \Rightarrow x_3 = 270^\circ$$

Por tanto, la ecuación tiene tres soluciones entre 0º y 360º:

$x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}\,rad$; $x_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}\,rad$ *y* $x_3 = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}\,rad$

Comprobemos la primera de ellas:

Para $x = 30^\circ$ tenemos que $cos\,60^\circ = sen\,30^\circ = \frac{1}{2}$ se verifica la igualdad.

Ejemplo 77.-

Resolver al ecuación trigonométrica $cos\,2x + sen\,x = 1$

Veamos:

$cos\,2x + sen\,x = 1$

$cos^2 x - sen^2 x + sen\,x = 1 \leftarrow$ *recuerda que* $cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x$

$1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\,x = 1 \leftarrow$ *recuerda que* $cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$-2\,sen^2 x + sen\,x = 0$

$2\,sen^2 x - sen\,x = 0 \leftarrow$ *hemos multiplicado por* -1 *en ambos lados*

$sen\,x\cdot(2\,sen\,x - 1) = 0 \leftarrow$ *hemos sacado factor comùn*

$$sen\,x\cdot(2\,sen\,x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} o\ bien\ sen\,x = 0 \\ o\ bien\ 2\,sen\,x - 1 = 0 \end{cases}$$

- $$Si \;\; sen\,x = 0 \; entonces \begin{cases} x_0 = 0\ rad \\ x_1 = \pi\ rad \\ x_2 = 2\pi\,rad \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = 0 + k\cdot\pi \;\; rad \quad k = 0,1,2,3,\ldots\ldots \end{cases}$$

- $Si \quad 2\,sen\,x - 1 = 0 \quad entonces \quad sen\,x = \frac{1}{2}$

$$sen\,x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x'_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \ rad \\ x'_1 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \ rad \\ x'_2 = 390^\circ = \frac{13\pi}{6} \ rad \\ x'_3 = 510^\circ = \frac{17\pi}{6} \ rad \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nótese que existen infinitas soluciones para la ecuación.
Comprobemos una de ellas:

$$Para \quad x = 150^\circ \quad es \quad cos\,300^\circ + sen\,150^\circ = 1 \leftarrow \ ¿Es\, verdad?$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \leftarrow \ Verdad$$

Ejemplo 78.-

Encuentra las soluciones entre 0 y 2π *rad*. de la ecuación trigonométrica $2\,cos\,x = 3\,tg\,x$
Veamos:

$$2\,cos\,x = 3\,tg\,x$$

$$2\,cos\,x = 3\frac{sen\,x}{cos\,x} \quad ; \quad 2\,cos\,x \cdot cos\,x = 3\,sen\,x \quad ; \quad 2\,cos^2 x = 3\,sen\,x$$

$$2\left(1 - sen^2 x\right) = 3\,sen\,x \quad \leftarrow \ recuerda \ que \ sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$2 - 2\,sen^2 x - 3\,sen\,x = 0$$

$$-2\,sen^2 x - 3\,sen\,x + 2 = 0 \ \leftarrow \ vamos \ a \ multiplicar \ todo \ por \ -1$$

$$2\,sen^2 x + 3\,sen\,x - 2 = 0 \ \leftarrow \ es\,una \ ecuaciòn \ de \ 2^\circ \ grado \ de \ incògnita \ \ y = sen\,x$$

$$sen\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} y_1 = sen\,x = \frac{1}{2} \\ y_2 = sen\,x = -2 \ \leftarrow \ imposible \end{cases}$$

$$Si \quad sen\,x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \ rad \\ x_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \ rad \end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones dentro del intervalo [0,2π] radianes.

40.Sistemas de ecuaciones trigonométricas.-

Con las ecuaciones trigonométricas también pueden formarse sistemas de, por ejemplo, dos ecuaciones con dos incógnitas. En esta publicación no incluimos la resolución de sistemas.

Ejemplo 79.-

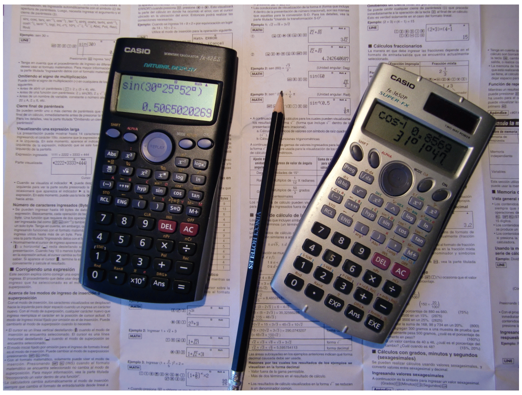
Las igualdades $\begin{cases} sen\,x + cos\,y = 0'5 \\ cosec\,x + sec\,y = -1 \end{cases}$ forman un sistema de 2 ecuaciones trigonométricas con 2 incógnitas.

41.Uso de la calculadora en trigonometría.-

Las calculadores actuales con funciones científicas (popularmente conocidas como calculadoras científicas) permiten hallar los valores numéricos de las razones trigonométricas de cualquier ángulo expresado en grados sexagesimales o en radianes.

Para ello hay que ponerla previamente en el modo "*grados sexagesimales*" (generalmente viene com **D** o **Deg**) o "*radianes*" (en general **rad**).

También es posible hallar el valor del ángulo (en grados o radianes) si le damos una de sus razones trigonométricas (por ejemplo si le damos lo que vale el *seno*). Tambien es este caso hay que indicar previamente si queremos el valor del ángulo en "*grados minutos y segundos*" o en "*radianes*"



Debes aprender a manejar una calculadora con soltura. El manejo es muy parecido en casi todas ellas, aunque existen pequeñas diferencias.
En el teclado verás que aparecen las funciones correspondientes al ***seno*** (sin), ***coseno*** (cos) y ***tangente*** (tan). Las demás (*secante, cosecante y cotangente*) no aparecen porque estas se hallan si se conocen las anteriores.
También veras expresiones de la forma sin^{-1}, cos^{-1} y tan^{-1} que permiten calcular el ángulo si conoces su *seno, coseno o tangente*.

Una tecla con los símbolos **º ' "** permiten introducir "*grados*", "*minutos*" y "*segundos*". En la parte superior de esta tecla el símbolo ← permite conocer el ángulo si conocemos una de sus razones trigonométricas.

Veremos algunos ejemplo sobre estos cálculos, los cuales debes realizar con tu calculadora habitual.

Ejemplo 80.-

Ponemos la calculadora en el modo *grados sexagesimales* (D o Deg) y realizamos los siguientes cálculos.

- *sen* 23º 45´ 58´´ = 0´40300405.....
  Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos *cosec* 23º 45´ 58´´ = 2´48136462..... (recuerda que *cosec* α= 1/*sen* α)

- *cos* 108º 36´ 9´´ = −0´31900066.....
  Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos *sec* 108º 36´ 9´´ = −3´13478972..... (recuerda que *sec* α= 1/*cos* α)

- *tg* 216º 42´ 33´´ = −0´74562593.....
  Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos *cotg* 216º 42´ 33´´ = 1´34115506..... (recuerda que *cotg* α= 1/*tg* α)

Ejemplo 81.-

Para trabajar en radianes ponemos la calculadora en el modo *rad*. y realizamos los siguientes cálculos:

◙ *sen* 1= 0´84147098....

Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos *cosec* 1 = 1´18839510..... (recuerda que *cosec* α= 1/*sen* α)

Nota: Cuando solo se pone el valor del ángulo sin especificar que son º ´ ´´, se entiende que son *radianes*.

◙ *cos* 1,82 = −0´24663231.....
Con este último número en pantalla, si activamos la función de la calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos *sec* 1,82 = −4´05461879..... (recuerda que *sec* α= 1/*cos* α)

◙ $tg\frac{3\pi}{5} = -\ 0'08956463....$
Con este último número en pantalla, si activamos la función de al calculadora x^{-1} (o $1/x$), obtenemos $cotg\frac{3\pi}{5} = -\ 11'1651212....$ (recuerda que *cotg* α= 1/*tg* α)

Nota: Observa que la calculadora tiene una tecla para expresar π.

Ejemplo 82.-

Sabemos que *sen* α = 0´591254. ¿Cuál es el valor del ángulo α?
Veamos:
Si queremos obtener el resultado en º ´ ´´ debemos poner la calculadora en el modo D (o Deg)
Si queremos obtener el resultado en *radianes* debemos poner la calculadora en el modo *rad*.
Sabemos que α = *arc sen* 0´591254. Buscamos el valor de α

① Activamos la función de la calculadora sin^{-1} . Esta es la forma de expresar la calculadora la función ***arc sen***
② Ponemos en pantalla el número 0´591254. En la pantalla aparecerá sin^{-1}0´591254 que es la forma que tiene la calculadora de expresar *arc sen* 0´591254.
③ Ejecutando (pulsando "=" o "EXE") obtenemos 36,24604643º (son grados).
④ Activando la función de la calculadora ← que hay sobre la tecla º ´ ´´ obtenemos el ángulo α = 36º 14´ 45,77´´

Ahora bien:
Una solución es el ángulo α = 36º 14´ 45,77´´ ya que *sen* 36º 14´ 45,77´´= 0´591254
Otra solución también es β = 180º−36º 14´ 45,77´´ = 143º 45´ 14,23´´ ya que se verifica que *sen* 143º 45´ 14,23´´ = 0´591254 (recuerda el círculo trigonométrico)
La calculadora solo da un resultado.

Nota: Para obtener el resultado en radianes hay poner la calculadora en el modo *rad*.

Ejemplo 83.-

Sabemos que *cos* α = −0´452388. Queremos hallar los ángulos α comprendidos entre 0º y 360º que verifican esta igualdad.
Veamos:
Buscamos α = *arc cos* (−0´452388).
Ponemos la calculadora en el modo D (o Deg) y actuamos como en el caso anterior con al diferencia de activar la función cos^{-1}.
La calculadora nos ofrece el resultado α=116,8969991 que convirtiendo con la función

← nos da α =116º 53´ 49,2´´.

Veamos otro resultado:

Hacemos la resta 180º −116º 53´ 49,2´´= 63º 6´ 10,8´´

El ángulo β = 180º + 63º 6´ 10,8´´= 243º 6´ 10,8´´ también es solución.

Por tanto, las soluciones pedidas son:

α =116º 53´ 49,2´´

β = 243º 6´ 10,8´´

Ejemplo 84.-

Sabemos que *cotg* α = 1´8545. Queremos hallar los valores de α entre 0º y 360º.
Veamos:

$$cotg\,\alpha = 1'8545 \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha} = \frac{1}{1'8545} = 0'539228902$$

⇨ Activando en la calculadora tan^{-1} 0´539228902 tenemos α =28,33482915º

⇨ Activando ← tenemos α =28º 20´ 5,38´´ que es una solución.

⇨ Otra solución sería β = 180º + 28º 20´ 5,38´´ = 208º 20´ 5,38´´

Puedes comprobar con la calculadora que:

cotg 28º 20´ 5,38´´ = 1´8545

cotg 208º 20´ 5,38´´ = 1´8545

Ejemplo 85.-

Sabemos que *sec* α = −1´3208. ¿Queremos hallar los valores de α en radianes, comprendidos entre 0 y 2π.
Veamos:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = -1'3208 \;\Rightarrow\; cos\,\alpha \cdot sec\,\alpha = 1 \Rightarrow\; cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha} = \frac{1}{-1'3208} = -0'757116898$$

$$\alpha = arc\,cos(-0'757116898)$$

➜ Ponemos la calculadora en el modo *rad*.

➜ Ponemos cos^{-1} −0´757116898 y ejecutamos

➜ La calculadora nos ofrece el resultado α = 2´429684807 *rad*.

➜ Buscamos los que se encuentren entre 0 *rad* y 2π = 6´283185307 *rad*.

Recuerda que ;

- El primer cuadrante es de 0 *rad* a $\pi/2$ =1´170796327 *rad*
- El segundo cuadrante es de $\pi/2$ =1´170796327 *rad* a π = 3´141592654 *rad*
- El tercer cuadrante es de π = 3´141592654 *rad* a 3$\pi/2$ = 4´71238898 *rad*
- El cuarto cuadrante es de 3$\pi/2$ = 4´71238898 *rad* 2π = 6´283185307 *rad*

➜ Observamos que el ángulo α = 2´429684807 es del cuadrante II

Hallamos el ángulo $\beta = \pi - \alpha$ = 0´711907846

El ángulo $\pi + \beta$ = 3´8535005 (de III) también es una solución

Por tanto:

α_1 = 2´429684807 *rad* del cuadrante II y α_2 = 3´8535005 *rad* del cuadrante III son los ángulos buscados.