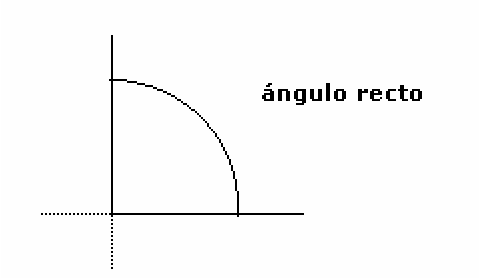
TRIGONOMETRÍA

La trigonometría se inicia estudiando la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo, surgiendo las razones trigonométricas de un ángulo y a partir de ellas las funciones trigonométricas.

MEDIDAS DE ÁNGULOS: EL GRADO SEXAGESIMAL Y EL RADIÁN

Dos rectas perpendiculares se cortan formando cuatro ángulos iguales, a cada uno de estos ángulos se le llama **ángulo recto**.



Un **grado sexagesimal** es la noventava parte de un ángulo recto, se denota 1º. Esto significa que un ángulo recto tiene 90º y que el ángulo completo cuyo arco es toda la circunferencia tiene 360º.

Para medir ángulos que no corresponden a un número exacto de grados se utilizan como submúltiplos la sesentava parte de un grado que se llama **minuto** (') y la sesentava parte de un minuto que se llama **segundo** (''). Esto significa que 1º = 60' y que 1' = 60''.

Ejemplo 1: Dados α = 74º 16' 54'' y β = 28º 45' 13'', calcular $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 3α, $\alpha/2$.

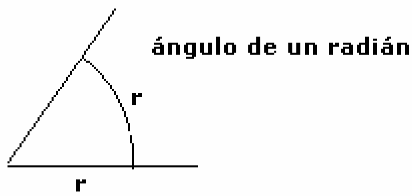
$\alpha + \beta$ = (74º 16' 54'') + (28º 45' 13'') = 102º 61' 67'' = 102º 62' 7'' = 103º 2' 7''

$\alpha - \beta$ = (74º 16' 54'') - (28º 45' 13'') = (73º 76' 54'') - (28º 45' 13'') = 45º 31' 41''

3α = 3 (74º 16' 54'') = 222º 48' 162'' = 222º 50' 42''

$\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$(74º 16' 54'') = 37º 8' 27''

Un **radián** es la medida de un ángulo cuyo arco mide lo mismo que el radio con el que se ha trazado.



Al medir los ángulos en radianes se obtienen números reales, por lo que las operaciones con ellos se reducen a operaciones con números reales y no es necesario operar como en el ejemplo 1.

Cambio de unidad de medida

Teniendo en cuenta que un ángulo de 360º tiene por arco toda la circunferencia, cuya longitud es $L = 2\pi r$, se tiene que en la circunferencia caben $\frac{L}{r}$ ángulos de un radián y que por tanto, 360º = $\frac{L}{r}$ =

$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes. Con esta igualdad es fácil pasar la medida de un ángulo de grados a radianes y viceversa, por ejemplo, mediante una regla de tres.

Ejemplo 2:

a) Veamos cuántos radianes mide el ángulo de 30º.

Llamando x a los radianes que mide un ángulo de 30º y considerando que 360º son 2π radianes se tiene que:

360 ------- 2π
30 ------- x

de donde $x = \frac{30.2\pi}{360} = \frac{\pi}{6}$ radianes.

b) Veamos cuántos grados mide el ángulo de un radián.

Llamando x a los grados que mide un ángulo de un radián y considerando que 360º son 2π radianes se tiene que:

360 ------- 2π
x ------- 1

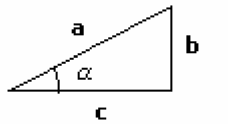
de donde $x = \frac{360}{2\pi}$ grados, valor que aproximadamente es 57º 17' 44".

En la siguiente tabla se presentan los valores de algunos ángulos en grados y radianes:

grados	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Si un ángulo α es agudo (menor que 90º), se puede considerar como uno de los ángulos de un triángulo rectángulo, pudiéndose definir una serie de conceptos llamados razones trigonométricas:

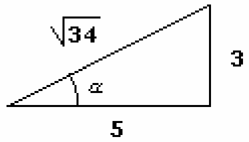


- **Seno** de α es el cociente de la longitud del cateto opuesto partido por la de la hipotenusa, se denota $\text{sen}\alpha = \frac{b}{a}$
- **Coseno** de α es el cociente de la longitud del cateto adyacente partido por la de la hipotenusa, se denota $\cos\alpha = \frac{c}{a}$
- **Tangente** de α es el cociente de la longitud del cateto opuesto partido por la del cateto adyacente, se denota $\text{tg}\alpha = \frac{b}{c}$

Podría pensarse que estas definiciones no son consistentes puesto que "parece" que dependen del triángulo rectángulo que se considere. Sin embargo no es así, ya que el valor del seno, del coseno y de la tangente de un ángulo no varía aunque se considere otro triángulo rectángulo, puesto que ambos son triángulos semejantes (por tener los tres ángulos iguales) y por tanto sus lados son proporcionales.

Ejemplo 3: Determinar las razones trigonométricas del ángulo menor del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 5 centímetros.

Aplicando el teorema de Pitágoras la hipotenusa de este triángulo rectángulo mide $\sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

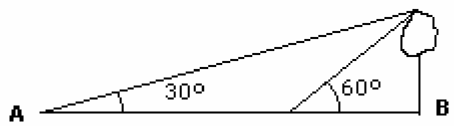


Así : $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$

En la siguiente tabla figuran las razones trigonométricas de algunos ángulos.

ángulo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

Ejemplo 4: Calcular la altura de un árbol, si desde un determinado lugar se ve entero bajo un ángulo de 60º y si nos alejamos 10 m. se ve bajo un ángulo de 30º.



Llamando x a la altura del arbol e y a la distancia AB, se tiene $\operatorname{tg}30^\circ = \dfrac{x}{y}$ y $\operatorname{tg}60^\circ = \dfrac{x}{y-10}$. Sustituyendo los valores de las tangentes se obtiene el sistema siguiente: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{x}{y} \\ \sqrt{3} = \dfrac{x}{y-10} \end{cases}$, despejando x en ambas ecuaciones e igualando queda $\dfrac{y}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,y - 10\sqrt{3}$, ecuación cuya solución es $y = 15$.

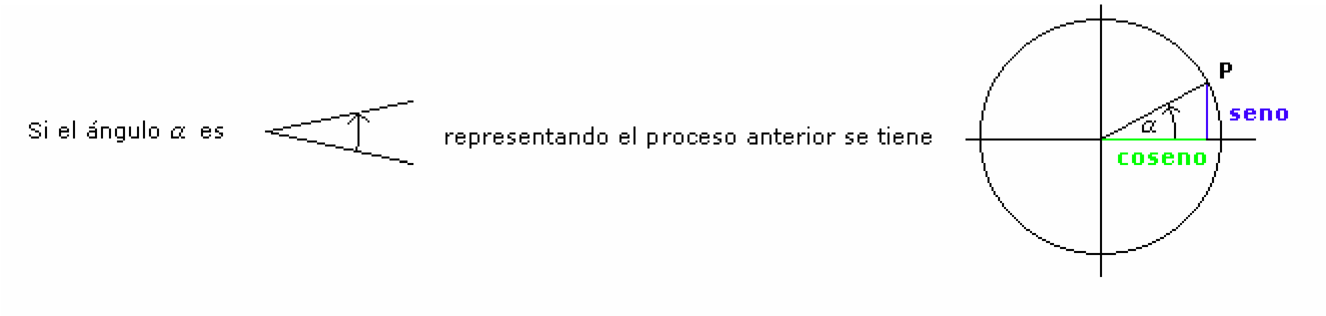
Despejando x de la primera ecuación del sistema se obtiene que $x = \dfrac{y}{\sqrt{3}} = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ es la altura del árbol.

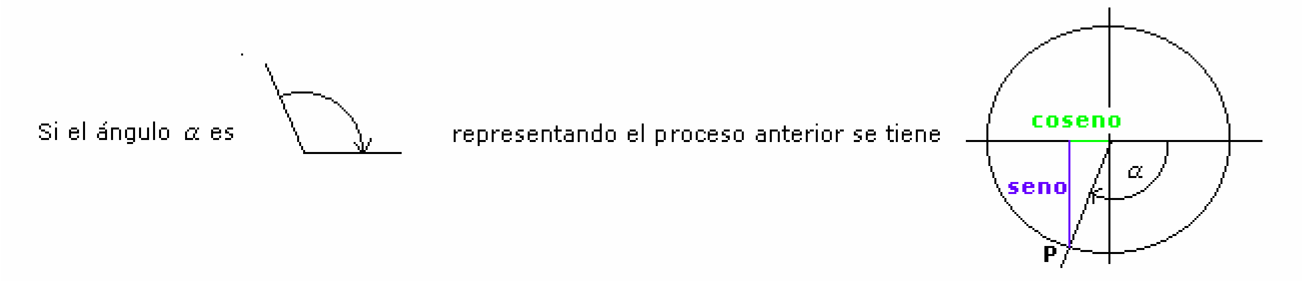
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Los valores del seno, coseno y tangente definidos anteriormente para un ángulo agudo se generalizan a continuación para un ángulo cualquiera α.

Se considera la circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenas. Se representa el ángulo α colocando el vértice en el origen de coordenadas y el primer lado en el eje de abscisas. El segundo lado cortará a la circunferencia unidad en un punto P. Teniendo en cuenta que un ángulo no nulo es positivo si su arco lleva sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo si su arco lleva el mismo sentido que el movimiento de las agujas de un reloj, se define:

- **Seno** de α como el valor de la ordenada del punto P.
- **Coseno** de α como el valor de la abscisa del punto P.
- **Tangente** de α como el cociente de la ordenada entre la abscisa del punto P





Fijándonos en el proceso de obtención de las razones trigonométricas se puede observar que, dependiendo de en qué cuadrante "caiga" el segundo lado del ángulo, el signo del seno, del coseno y de la tangente será positivo o negativo y que si el segundo lado coincide con algún eje entonces el ángulo tendrá alguna razón trigonométrica nula. Las siguientes tablas recogen esta información para ángulos positivos comprendidos entre 0 y 2π y para ángulos negativos entre -2π y 0:

ángulo	0	$(0, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, \pi)$	π	$(\pi, 3\pi/2)$	$3\pi/2$	$(3\pi/2, 2\pi)$	2π
seno	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
coseno	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
tangente	0	+	No existe	-	0	+	No existe	-	0

ángulo	-2π	$(-2\pi, -3\pi/2)$	$-3\pi/2$	$(-3\pi/2, -\pi)$	$-\pi$	$(-\pi, -\pi/2)$	$-\pi/2$	$(-\pi/2, 0)$	0
seno	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
coseno	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
tangente	0	+	No existe	-	0	+	No existe	-	0

En las tablas anteriores, se puede observar que las razones de los ángulos de -2π, 0 y 2π radianes coinciden, ello es debido a que el segundo lado de los tres ángulos "caen" en el mismo sitio. Lo mismo ocurre con $\pi/2$ y $-3\pi/2$, con $-\pi$ y π y con $-\pi/2$ y $3\pi/2$.

Por la misma razón si el ángulo es mayor que 2π el proceso de obtención de las razones trigonométricas es el mismo, basta observar dónde "cae" el segundo lado del ángulo después de haber dado alguna o algunas vueltas completas a la circunferencia.

Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

Las razones trigonométricas de un ángulo no son independientes, ya que están relacionadas entre sí mediante ciertas igualdades, como por ejemplo:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Ejemplo 5:

a) Sabiendo que α es un ángulo positivo menor que $3\pi/2$ y que senα = -3/5 calcular su coseno y su tangente.

Sustituyendo el valor del seno en $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene $\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$, de donde $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$, a continuación se determina cuál de estos dos valores corresponde al del coseno pedido.

Al ser α un ángulo positivo menor que $3\pi/2$ y con seno negativo al representarlo en la circunferencia unidad su segundo lado cae en el tercer cuadrante, por lo tanto su coseno es negativo, luego $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Para calcular el valor de la tangente, se sustituye el seno y el coseno en $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, obteniéndose $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

b) Sabiendo que α es un ángulo positivo menor que π y que tgα = -1´5 calcular su seno y su coseno.

Sustituyendo el valor de la tangente en la igualdad $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, se tiene la ecuación $1 + 2´25 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3´25}} = \pm\sqrt{\frac{100}{325}} = \pm\frac{10}{5\sqrt{13}} = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Al ser α positivo, menor que π y con tangente negativa es un ángulo del segundo cuadrante, por lo que el coseno es negativo, por tanto, de las dos soluciones obtenidas de la ecuación se concluye que $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

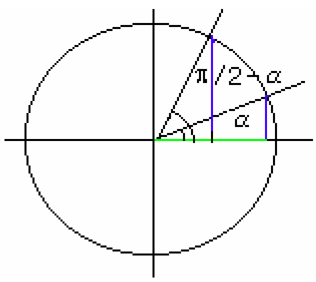
Para calcular el valor del seno, se sustituye el coseno y la tangente en $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, obteniéndose $\frac{-15}{10} = \frac{\text{sen}\alpha}{\frac{-2}{\sqrt{13}}}$,de donde se deduce que $\text{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS

Dados dos ángulos, las razones trigonométricas de uno de ellos se pueden expresar en función de las del otro. A continuación, se consideran algunos de estos casos:

- La suma de los ángulos es $\frac{\pi}{2}$ (son complementarios), es decir, si uno es α el otro será $\frac{\pi}{2} - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\alpha$$
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$



Ejemplo 6:

a) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 75º en función de las de 15º.

sen75º = sen(90º-15º) = cos15º

cos75º = cos(90º-15º) = sen15º

$\text{tg}75º = \text{tg}(90º-15º) = \frac{1}{\text{tg}15º}$

b) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{3}$.

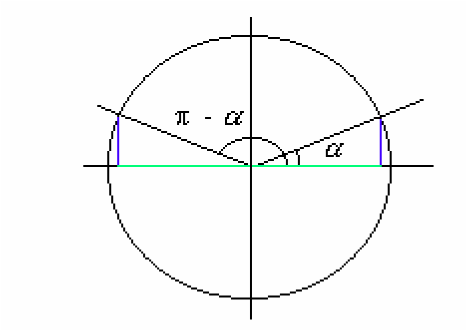
$$\text{sen}\frac{\pi}{6} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{3}$$

$$\text{tg}\frac{\pi}{6} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{3}}$$

- La suma de los ángulos es π (son suplementarios), es decir, si uno es α el otro será $\pi - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\alpha$$



Ejemplo 7:

a) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 145º en función de las de 35º.

sen145º = sen(180º-35º) = sen35º

cos145º = cos(180º-35º) = -cos35º

tg145º = tg(180º-35º) = -tg35º

b) Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{4}$.

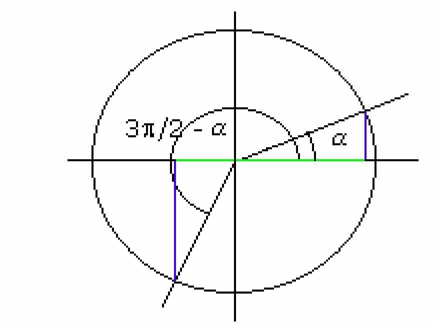
$$\text{sen}\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\text{tg}\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{4}$$

- La suma de los ángulos es $\frac{3\pi}{2}$, es decir, si uno es α el otro será $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$



Ejemplo 8: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de 240º en función de las de 30º.

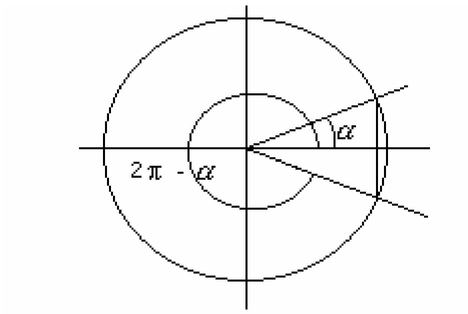
sen240º = sen(270º-30º) = -cos30º

cos240º = cos(270º-30º) = - sen30º

tg145º = tg(270º-30º) = $\frac{1}{\text{tg}30º}$

- La suma de los ángulos es 2π, es decir, si uno es α el otro será $2\pi - \alpha$ y se tiene

$$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$



NOTA: A la vista de la gráfica anterior se deduce que la relación entre las razones trigonométricas de los ángulos opuestos α y $-\alpha$ verifican: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Ejemplo 9: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{11\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{sen}\frac{11\pi}{6} = \text{sen}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{6}$$
$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$
$$\text{tg}\frac{11\pi}{6} = \text{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{6}$$

- De forma similar se pueden encontrar relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$,. . .(Ver ejercicios resueltos)

- La diferencia de los ángulos es 2π o un múltiplo suyo así, si uno es α el otro es $\alpha + 2\pi$ o $\alpha + 2k\pi$, con $k\in Z$, o lo que también es lo mismo, un ángulo es igual al otro más un número entero de vueltas a la circunferencia. Esto hace que los segundos lados de ambos ángulos "caigan" en el mismo sitio y que por tanto las razones trigonométricas de ambos ángulos también coincidan.

$$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \text{tg}(\alpha + 2k\pi) = \text{tg}\,\alpha$$

Ejemplo 10: Escribir las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{13\pi}{6}$ radianes en función de las de $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{sen}\,\frac{13\pi}{6} = \text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\text{tg}\,\frac{13\pi}{6} = \text{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{6}$$

OTRAS IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas de la suma/diferencia de dos ángulos

SUMA

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

DIFERENCIA

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

Ejemplo 11: Calcular las razones de 75º y de 15º en función de las de 45º y 30º

$$\text{sen}75º = \text{sen}(45º + 30º) = \text{sen}45º\cos30º + \cos45º\,\text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos75º = \cos(45º + 30º) = \cos45º\cos30º - \text{sen}45º\,\text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}75º = \text{tg}(45º + 30º) = \frac{\text{tg}45º + \text{tg}30º}{1 - \text{tg}45º\,\text{tg}30º} = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{sen}15º = \text{sen}(45º - 30º) = \text{sen}45º\cos30º - \cos45º\,\text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos15º = \cos(45º - 30º) = \cos45º\cos30º + \text{sen}45º\,\text{sen}30º = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg}15º = \text{tg}(45º - 30º) = \frac{\text{tg}45º - \text{tg}30º}{1 + \text{tg}45º\,\text{tg}30º} = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad

ÁNGULO DOBLE

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

ÁNGULO MITAD

$$|\text{sen}(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$|\cos(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\ \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} \qquad\qquad |\mathrm{tg}(\alpha/2)| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Ejemplo 12: Calcular las razones trigonométricas del ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes

Como $\frac{\pi}{8}$ es la mitad de $\frac{\pi}{4}$ se aplican las fórmulas del ángulo mitad y al ser un ángulo del primer cuadrante sus razones trigonométricas son todas positivas, por tanto, se tiene:

$$\mathrm{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{1+\cos(\pi/4)}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

Fórmulas para transformar la suma/diferencia de razones trigonométricas de dos ángulos en producto

$$\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\beta = 2\ \mathrm{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \mathrm{sen}\alpha - \mathrm{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \mathrm{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = 2\ \mathrm{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\ \mathrm{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Ejemplo 13: Simplificar la expresión $\frac{\mathrm{sen}3x + \mathrm{sen}\,x}{\cos 3x - \cos x}$

$$\frac{\mathrm{sen}3x + \mathrm{sen}\,x}{\cos 3x - \cos x} = \frac{2\ \mathrm{sen}2x\cos x}{2\ \mathrm{sen}2x\ \mathrm{sen}\,x} = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$$

Fórmulas para transformar el producto de razones trigonométricas de dos ángulos en suma

$$\mathrm{sen}\alpha\,.\,\mathrm{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\,.\,\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\mathrm{sen}\alpha\,.\,\cos\beta = \frac{\mathrm{sen}(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS

(Ver Unidad didáctica 7: Funciones reales de variable real)